Johannis Wallis S. T. D.

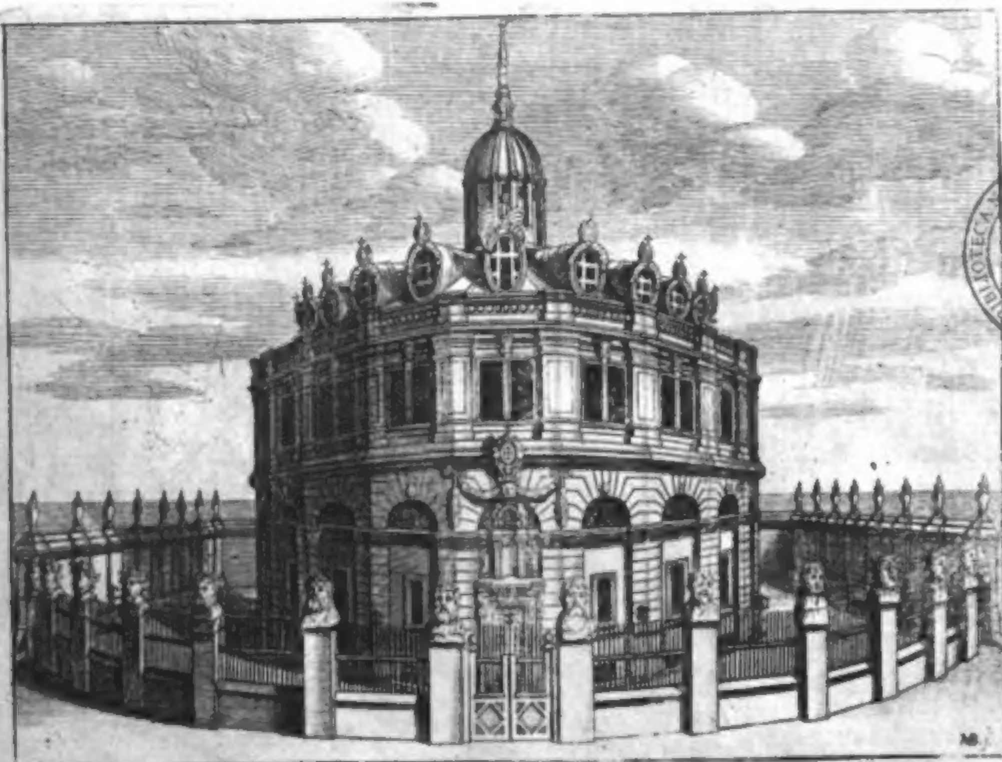
GEOMETRIÆ PROFESSORIS SAVILIANI,

IN CELEBERRIMA ACADEMIA

OXONIENSI,

OPERA MATHEMATICA

Tribus Voluminibus contenta.



OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO, An. Dom. MDCXCIX.

Hoc Frontiſpicium & Dedicatio præfigantur Primo Volumini; ut quæ totum opus reſpiciant.

IOHANNES WALLIS S.T.P. GEOMETRIÆ PROF. SAVILIANUS OXON. REG. MA.TIS A SACRIS. REGALIS SOCIE.TIS LOND. SODALIS

D. Loggan 1678 ad vivum delin.

M Burghers sculp. 1693.

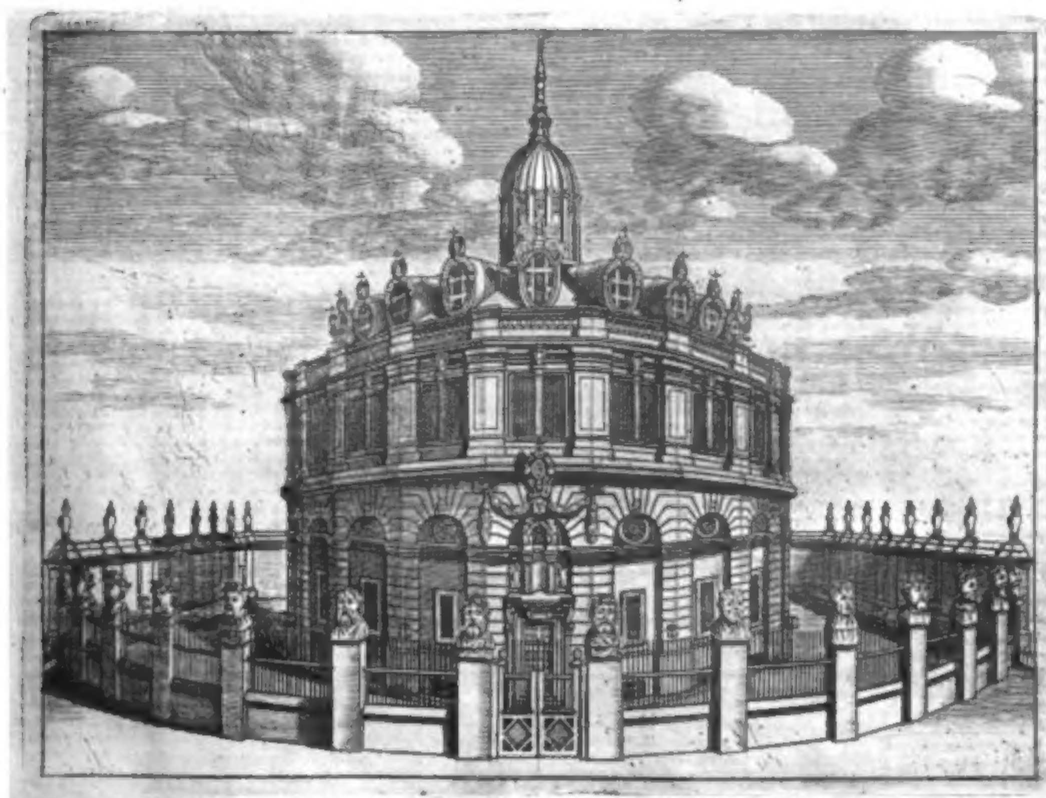
Johannis Wallis S. T. D.

Geometriæ Professoris *SAVILIANI*,

in Celeberrima Academia OXONIENSI;

OPERA MATHEMATICA.

Volumen Primum.



OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO MDCXCV.

Imprimatur,

Hen. Aldrich

VICE-CAN. *OXON.*

Mar. 26. 1695.

SERENISSIMO

GUILIELMO III.

DEI GRATIA,

ANGLIÆ, SCOTIÆ, FRANCIÆ, & HIBERNIÆ

REGI,

FIDEI DEFENSORI, &c.

Εὖ χαίρειν, καὶ Εὖ πράττειν.

SERENISSIME REX,

SUB Veſtræ *Majeſtatis* auſpiciis, alta Pace fruitur, ampliſque Privilegiis, Academia Veſtra *Oxonienſis*; Quæ (poſt Deum Immortalem) Clementiæ Veſtræ par eſt ut debita referamus. Cumque ipſis viſum eſt, Opera quædam mea Mathematica (partim nunc primum, partim jam ante ſparſim, edita) in Tria nunc Volumina (Te Regnante) collecta, e Typographeo ſuo in publicum emittere: Non eſt ut (vel Ipſi vel Ego) cuiquam potius alii quam *Majeſtati* Veſtræ dedicemus. Quæ quanquam Minora ſint quam ut Veſtræ Celſitudini offerri mereantur; ea ſaltem ſunt quæ Humilitas noſtra præſtare valeat. Quæque (utut tenuia) Benigna Veſtra (ſi dabitur) Acceptatione, pretium forte aliquod ſibi conciliaſſe videantur. Non eſt ut valeamus nos (quod itaque non aggredimur) egregia Veſtra facinora (Domi Militiæque geſta) digne Prædicare, juſtiſque Elogiis (brevi ſermone) Celebrare; ſed Admirari potius, & Gratulari. Deum Veneramur, ut (Ipſo favente) Felix Fauſtumque ſit per omnia Imperium Veſtrum. Veſtramque imploramus Clementiam, ut Fidiſſimis Veſtris Subditis accenſeamur, tum *Univerſitas* Veſtra *Oxonienſis*, tum

MAJESTATIS *Veſtræ*,

Subditus Humillimus, &

Devotiſſimus Cliens,

JOHANNES WALLIS.

AD LECTOREM
PRÆFATIO.

CUM *Oxoniensis* Preli Curatoribus visum est, Scripta mea Mathematica (ante separatim edita) in unum quasi Corpus colligere, & junctim edere; totius Operis, ordinisque quo jam comparent, Rationem aliquam Erudito Lectori reddendam esse censui.

Occurrunt pleraque (non omnia) eo ordine quo fuerant primum edita; Exceptis aliquot quæ Secundo Volumini aut Inseruntur, aut Suffiguntur, ne nimis excresceret Prius hoc Volumen.

Cur autem Secundum illud (jam ante duos Annos editum) prius emiserim, causa plane hæc est; Quoniam quæ illic continentur pleraque, Lingua tantum Anglicana prodierant prius, erantque jam in Latinum Sermonem convertenda. Quæ itaque meam ipsius inspectionem magis postulabant: cum ea quæ ante prodierant Latine (siquid mihi interim humanitus accideret) potuerint non incommode (etiam me mortuo) redimprimi.

Singulis autem adscribi curabam, quo tempore primum prodierant: ne videar ex aliorum scriptis (post editis) ea mutuasse quæ sunt utrisque communia. Quippe post edita meorum non pauca, non parum promotam esse Doctrinam Mathematicam, nemo nescit: Cui rei quatenus mea scripta subservierint, aliorum esto judicium.

Opus Arithmeticum (seu *Mathesis Universalis*,) Tironibus præsertim instituendis accommodatum erat: Ita tamen comparatum, ut in eo contineantur etiam Peritis non contemnenda. Quæ si non plane nova, sunt saltem nove tradita; atque à primis fundamentis demonstrata. Nonnulla etiam Philologica aut Philosophica immiscentur, quo gustui Academicorum, quales quidem tunc erant, consuleretur.

Quippe non dissimulandum est, Academicos nostros, ante ea tempora, Peripateticæ (quæ dicitur) Philosophiæ maxime deditos, (quæ tunc in Scholis tradebatur, & cujus loquendi formulis res erat accommodanda,) rebus Mathematicis parcius vacasse. Erant quidem ex nostris non pauci Matheseos satis periti (quod eorum scripta quæ etiamnum extant testantur;) Pauciores tamen quam nunc dierum; iique fere extra Academias agentes. Et quidem per Bella Civilia, quæ per plures Annos nos exercuerant, studia Academica, si non penitus interrupta, saltem impedita plurimum hic fuerunt, & quasi de novo restituenda; quæ ex eo tempore (quoad res hasce) magis indies viguerunt. Ut non mirum sit, si de Matheseos neglectu tunc questi simus, de quo non tantus nunc est querendi locus.

Quæ contra *Meibomium* scripta sunt; non eo animo scribuntur quasi homini (alias bene merito) male velim: sed ne serpat Error (qui ipsum & alios aliquot infecerat,) dum inter *Rationem Dupli*, *Tripli*, &c. & *Rationem Duplicatam*, *Triplicatam*, &c. non bene distinxerant. De quo (spero) posthac (re bene intellecta) non multum erit periculi.

De *Angulo* (qui dicitur) *Contactus* Dissertatio (quæ sub idem tem-

pus prodiit) Doctrinam non plane Novam continet (ut quam ante tradiderat *Peletarius*,) sed vix satis Receptam, & clare Agnitam, quæ & clariorem meruerat Explicationem; & Defensionem contra *Clavii* & aliorum Oppugnationes. Sed & ea Defensio, Vindicatione nova indiguit: Quam itaque in subjunctis Secundo Volumini jam adhibui; quo & prior illa Dissertatio nunc transmissa est. Quæ quidem Doctrina, omnino Utilis est (nedum Necessaria) extricandis pluribus Difficultatibus, quæ multos ante torserunt, quæque (hac posita doctrina) jam evanescunt, nec (credo) posthac quemquam discruciabunt; saltem non opus erit ut quiquam inde discrucientur.

De *Conicis* (quæ dicuntur) *Sectionibus* Tractatus (ex Solido in Planum tralatis) quam clara utilis & perspicua sit (præ Veterum earundem in Cono tractatione) non opus est ut dicam: (Quam post imitatus est D. *de Wit*, Tractatu suo *Schootenianis* inserto: item D. *De Chales*, & *De la Hire*.) Quo Conicorum Tractatio (quæ ante tam perplexa habita erat, ut inde deterrerentur plurimi) jam evadat facilis.

Quæ sequitur *Arithmetica Infinitorum*, est Investigandi Methodus plane Nova, & à me (quod sciam) primitus introducta, non inauspicate. Quam approbarunt summi Viri; & amplo Commentario dignatus est Clar. *Bullialdus*. Quæ quam mihi fuerit usui, testantur alia mea deinceps scripta, (de *Cycloide*, de *Curvis Rectificandis* & *Complanandis*, de *Calculo Centri Gravitatis*, &c.) Quam & (non obstantibus quorundam Exceptiunculis) amplexi sunt & prosecuti non infimæ notæ Viri; sive fecerint, sive non fecerint, mei mentionem. Quamque hinc facta est speculationum Mathematicarum promotio, aliorum potius esto (quam meo) judicio edicendum.

Qui sequitur de *Cycloide* Tractatus, scriptus erat occasione data à *Provocatione publica*, ad *omnes Europæ Mathematicos*, ab Anonymo quodam Gallo, qui *Dettonvilii* nomen post assumpsit, qui alias *Paschalius* audit. Cui quidem Provocationi quam ego satisfecerim, opus ipsum testatur. Quam item rem fusius prosecutus sum (inter alia) in *Mechanicis* (sive de *Motu* tractatu) ubi de Calculo Centri Gravitatis agitur; Cap. V. prop. 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22.

Eidem de *Cycloide* tractatui, subjungitur alius de Curvis Lineis *Rectificandis*, & Superficiebus Curvis *Complanandis*; hoc est, *Lineis Rectis* assignandis, quæ sint expositis *Curvis* æquales; & *Superficiebus Planis*, quæ sint æquales expositis Curvis. Quam ego rem totam ex Principiis in Arithmetica Infinitorum traditis deduco; & ultra prosequor quam quisquam me prior fecerat; Methodumque aperio, cujus ope poterit quisquam (cui id lubitum est) rem ultra pro arbitrio promovere.

In Tractatu ultimo, cui *Mechanica* titulus, sive *De Motu* tractatus, agitur de *Machinis* (seu Instrumentis Mechanicis) quas tractare solent Mechanicorum scriptores. Ubi Res omnis à primis Motuum principiis deducitur & demonstratur. *Percussionum* item & *Reflexionum* Doctrina ex veris & genuinis sui principiis derivatur. Totaque *Hydrostaticorum* doctrina ab *Aeris Contrapendio* deducitur, pro Veterum *Fuga Vacui*; (quam fusius adhuc prosecutus sum in Tractatu *De Gravitate & Gravitatione*, qui in Secundo jam Volumine comparet.) Et quidem in ea ejus parte quæ est de *De Centro Gravitatis ejusque Calculo*; mirum est quam foecunda sit Corollariorum Methodus ab *Arithmetica Infinitorum* petita, in extricandis (præter spem) Quæsitis perplexissimis, habitisque pro deploratis.

Quæ in Secundo Volumine habentur, in Præfatione eidem præfixa dicitur.

dicitur. Ubi (inter alia) habetur *Newtoni* Methodus, de *Fluxionibus* (ut ille loquitur,) consimilis naturæ cum *Leibnitii* (ut hic loquitur) *Calculo Differentiali*, (quod, qui utramque methodum contulerit, satis animadvertat, utut sub loquendi formulis diversis,) quam ego descripsi (*Algebræ Cap.* 91. &c. præsertim *Cap.* 95.) ex binis *Newtoni* literis (aut earum alteris) *Junii* 13. & *Augusti* 24. 1676, ad *Oldenburgium* datis, cum *Leibnitio* tum communicandis (iisdem fere verbis, saltem leviter mutatis, quæ in illis literis habentur,) ubi methodum hanc *Leibnitio* exponit tum ante *decem* annos, nedum plures, ab ipso excogitatam. Quod moneo, nequis causetur, de hoc *Calculo Differentiali* nihil à nobis dictum esse.

Tractandi Modum quod spectat; conatus sum à primis Principiis omnia deducere; & eo Ordine Tradere quo sunt Inventa; quo non tantum, vera esse, Lectori constet; sed &, quomodo sit eo perventum; ut ipsa Investigandi Methodus (etiam alibi adhibenda) non minus innotescat. Contra quam quod de Veteribus conqueruntur multi; qui sic Inventa Tradere & Demonstrare sategerunt, ut interim Inveniendi Methodum occuluerint.

Verborum ego & Phrasium Elegantias minime sectatus sum; stilo simplici (modo non barbaro) contentus: Id maxime curans, (in verborum tum Ordine, tum Delectu,) ut sensus sit (quam fieri possit) perspicuus, & ambiguitati minime obnoxius; præsertim sicubi metus sit ut vel non intelligatur, vel perperam intelligatur, res proposita.

Et propterea Receptis uti soleo Vocabulis & loquendi Formulis, (& quidem, aliquando, tantum-non invitus,) potius quam (novationem affectando) Lectoris animum turbare formulis non consuetis, quum receptæ suppetunt. Puta, quum dicitur *Ratio Dupla*, *Tripla*, &c. (quia sic dici solet,) cum tamen (si res esset integra) dicenda potius foret *Ratio Dupli*, *Tripli*, &c. Sic, quum dicitur (genere fœminino) *Hæc Diameter*, *hæc Perimeter*, &c. (propter Græcorum *τὴν διάμετρον*, *τὴν περίμετρον*, ob subauditam *γραμμὴν*,) cum Latinius diceretur *Diametra*, *Perimetra*, (propter subauditam *Lineam*;) vel saltem *Diametrus*, *Perimetrus*, (quod superiori seculo dicebatur,) cum nulla (quam memini) vox occurrat (hujus formæ) exiens in *er*, quæ sit fœminini generis; (unde fit ut, cum de mare dicitur *Socer*, de fœmina dicatur *Socrus*.) Sic dico *Triangulum*, *Quadratum*, *Planum*, *Parallelogrammum*, &c. quia dixerunt Græci *τὸ τρίγωνον*, *τετράγωνον*, *ἐπίπεδον*, *παραλληλόγραμμον*, propter subauditum *σχῆμα*,) cum Latine satius diceretur *Figura triangula*, *quadrata*, *plana*, *parallelogramma*. Sed receptus loquendi mos facit ut utraque locutio censeatur satis Latina. Nam id in aliis mille casibus occurrit. Ut cum *Honestum* dicitur pro *Re honesta*, quia dixerant Græci *τὸ πρέπον*, *τὸ καλὸν*, propter *χρῆμα* vel *πρᾶγμα* subintellectum, &c.

Hac authoritate fretus, ego promiscue dico *Hanc Conoidem*, *Sphæroeidem* &c. (subintelligendo *Figuram*,) aut *Hoc Conoeides*, *Sphæroeides*, (quia dicebant Græci *τὸ κωνοειδὲς*, *σφαιροειδὲς*, & sic locuti sunt Interpretes Latini, quasi fuerint illa Substantiva nomina;) sed alterum malim ut *ἀναλογικώτερον*. Similiter, nunc *ut primus ad secundum sic tertius ad quartum* (subintelligendo *Numerum* aut *Terminum*;) nunc *ut prima ad secundam sic tertia ad quartam* (subintelligendo *Lineam* vel *Figuram*;) nunc etiam, *ut primum ad secundum sic tertium ad quartum*, (per Neutrum absolute positum.) Et similiter in aliis; nunc sequor quod ipse malim, nunc morem gero receptis loquendi formulis. Atque in vocibus quæ aliis nunc hoc, nunc illo, modo scribuntur; eadem ego libertate utor, non solicitus de his minutiis. Quippe non hic Grammaticam tracto sed Mathematicam; & sic loqui velim ut optime intelligar.

Causa-

AD LECTOREM, &c.

Causabitur forte non nemo, rem eandem nonnunquam alio atque alio loco traditam esse. Atque hoc omnino non est negandum, quin hoc aliquando fiat. Nec tamen vitio dandum, aut *ταυτολογίας* accusandum. Considerandum utique est, Tractatus hos omnes non uno impetu, aut continuo opere, scriptos esse; sed separatim editos, diversis temporibus, & longe dissitis. Et siquid scitu non indignum priore aliquo opere prodierit, loco non importuno; non est cur id quisquam culpet tum esse editum; sed nec, cur deleatur in eodem opere redimpresso, ut mancum fieret. Et quidem si in alio opere post edendo, res eadem resumenda veniat; aut amplianda, aut promovenda, aut aliis usibus accommodanda, aut à calumniis aut aliorum objectionibus vindicanda; non est cur & hoc fieri non debeat. Et quidem vix quispiam rem aliquam (saltem novam) sic prima vice perfectam tradit, ut non possit secundis cogitationibus meliorari, promoveri, aut porro confirmari; aut etiam citari, sive ad explicationem sive probationem aliorum; ut nec hic commode abesse posset.

Opuscula quædam contra *Thomam Hobbes* (Pseudo-geometram) olim scripta, non hic habentur; ne velle videar de homine jam demortuo triumphare. Quamvis enim, prout tunc res erant, id omnino videbatur faciendum, (quando sub prætextu Magni Geometræ, qualem se venditabat, ausus est, in Religionis negotio, incautis adolescentibus perperam sentiendi materiam subministrare;) ne tamen in Geometriæ damnum id cedat, non jam videtur metuendum. Et quamvis inibi (præter ipsius pseudo-graphematum refutationem) occurrant alia non pauca scitu digna; horum tamen pleraque in aliis alibi locis reperiantur.

Sunt item alia nonnulla (sive mea, sive aliorum à me edita) quæ in Voluminum horum neutro habentur; quæ (si velit) Lector alibi quærat.

Errata sic Emendanda.

PAG. 7. *lin.* 54. *lege* Azimuthani. *p.* 15. *l.* 32. abesse. *l.* 50. Typographeum, *p.* 29. *l.* 42. quinquaginta. *l.* 50. πεντήκοντα. *p.* 31. *l.* 16. traditione. *p.* 32. *l.* 21. sperno. *p.* 36. *l.* 28. ab. *p.* 37. *l.* 45. & *p.* 38. *l.* 5. Eustathio. *p.* 129. *l.* 21. A & D. *p.* 138. *l.* 24. $1-\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$. *p.* 202. *marg.* Examen. *p.* 224. *l.* 23. *pro* 4185 *lege* 4285. *p.* 259. *l.* 4. interim sim. *p.* 264. *l* 24. $\frac{9}{13}+\frac{8}{13}$. *p.* 313. *fig.* 2. *deest in imo angulo litera* B. *p* 333. *l.* 13. bisectam in ι. *p.* 334. *l.* 25. *pro* $\delta\xi\delta x$ *lege* $\delta\xi d x$. *p.* 337. *l.* 20. positos. *p.* 352. *l.* 4. *ante* = D O c *interpone* p^3. *p.* 392. *l.* 15. inter 1 &. *p.* 416. *l.* 23. judicium. *p.* 422. *l.* 14. Subsecundanis. *p.* 470. *l.* 22 *pro* Q 1 = 1. *lege* Q 1 — 1. *p.* 502. *l* 29. parti. *p.* 499, 504. *fig* 1. *deest* c *in protracta recta* G E Γ. *p.* 510. *l. antep.* Z Y *pro* C Y. *p.* 511. *l.* 30. sive majorum sive minorum. *p.* 521. *figura notanda est* Fig. 10. *p.* 526. *l.* 13. $\frac{5}{121}D^3P$. *p.* 527. *l.* 31. $\frac{1}{15}D^4$. *l.* 52. ▮ b rectæ. *p.* 530. *l.* 1. $\frac{1}{2}D^2P$. *l.* 9. $\frac{1}{6}D^3$. *p.* 531. *l.* 9. ad e β. *p.* 540. *l* 16. secundus. *p.* 552. *l.* 43, 44. $9c^2$ *pro* $9b^2$. *p.* 554. *l.* 5. *pro* de *lege* d c. *p.* 559. *l.* 10. A T = H. *p.* 564, 565. *pro* Li, Lu, pz. *lege* L^i, L^u, p^z. *p.* 642. *Statera haud satis accurate pingitur, indebito unco suspensa.* *p.* 686. *l.* 34. *pro* $\frac{1}{2}s$ *lege* $\frac{3}{2}s$. *p.* 711. *l.* 36. *pro* 99 *lege* nunc 556. *p.* 724. *l.* 34. *supra, pro* + s, *lege* + s^2. *p.* 726. *marg.* pro 154 *lege* 164. *p.* 729. *l.* 19. *pro* $\frac{1}{24}$ *lege* $\frac{7}{24}$. *lin.* 20. *pro* $\frac{1}{3}$ *lege* $\frac{2}{3}$. *p.* 737. *l.* 22. *pro* $\frac{1}{21}$ *lege* $\frac{5}{21}$. *p.* 739. *l.* 16 *infra, pro* $8s^2$, 8 s, *lege* $8s^3$. *p.* 741. *l.* 18. descriptum. *p.* 749. *l.* 2. semisolidique. *p.* 755. *l.* 7. *pro* A F *lege* A E. *p.* 758. *l.* 21. $\frac{1}{4}R^2P$. *p.* 765. *l.* 15. ipsi. *p.* 774. *l.* 26. *pro* $+\frac{1}{3}b$, *lege*, $-\frac{1}{3}b$. *p.* 380. *l.* 42. *pro* $\frac{2}{3}$ *lege* $\frac{3}{2}$. *p.* 783. *l.* 6. *pro* a *lege* α. *p.* 787. *l.* 43. aciem habentis. *l. pen. pro* — 9 s h *lege* + 9 s h. *p.* 793. *l.* 31. — 5 α s R. *p.* 820. *l. antep. pro* ▮ *lege* $\frac{25}{24}$. *p.* 831. *l.* 30. ad B + B. *p.* 846. *l. ult. in fine, pro* a c^2 *lege* a c^3. *p.* 855. *l.* 25. *supra, pro* χ *lege* χ^2. *p.* 861. *l.* 22. 1666. *p.* 927. *l* 16. C, κ, puncta. *p.* 1058. *l.* 24. sit.

E L E N.

ELENCHUS CONTENTORUM.

Mecha-

ELENCHUS CONTENTORUM.

Eorum quæ Secundo Volumine continentur, habetur Index illi præfixus.

Præter ea quæ his duobus voluminibus continentur, extant alia, sive scripta mea, sive à me edita; tum Mathematica, tum alia; quæ sequuntur.

Ptolemæi Harmonica, *Græce tunc primum* (*ex MSS.*) *edita*; *cum Nova Versione Latina, & Notis. Subjungitur* Auctarium *de Veterum Musica ad Hodiernam Comparata.* 1682.

Archimedis Arenarius; & Dimensio Circuli; (& Eutocii *Commentarius*) *Græce & Latine*; *cum Notis.* 1676.

Aristarchi Samii, *de Magnitudinibus & Distantiis* Solis & Lunæ *liber*: *Et* Pappi Alexandrini *Fragmentum Libri Secundi hactenus desiderati*: *Græce & Latine.* 1688.

Cypriani Computus, (*cum Notis,*) *nunc primum ex MSS. editus*: *inter Cypriani Opera, Oxoniæ edita*; 1682.

Jeremiæ Horroccii, & Guilielmi Crabtree, *Opera Posthuma*; & *Observationes Astronomicæ*; *in ordinem digesta.* 1670.

Interpretationis Numeri 666, *a* Francisco Potter, *anno* 1642 *editæ*, *Latina Versio. Amstelodami.* 1677.

Contra Thomam Hobbes *scripta, illius scriptis responsoria.* viz.

Elenchus Geometriæ Hobbianæ. 1655.
Hobbii debita Castigatio, ob male redditas Lectiones. 1656.
Hobbiani Puncti Dispunctio. 1657.
Hobbius Heauton-timorumenos. 1662.
Hobbii Quadratura Circuli, Cubatio Sphæræ, & Duplicatio Cubi, Confutata 1669.
Eademque secundis curis edita, denuo refutata. 1669.
Responsio ad Tria scripta Th. Hobbes. 1671.

Societatis Regiæ Londini, & *Transactionum Philosophicarum* (*pro mense Julio* 1670) Defensio, *adversus Cavillationes W. H.*

Veritas

Veritas Explorata; *sive Animadversiones in librum* Roberti D. Brooke, *de Natura* Veritatis *ejusque cum Anima Identitate.* 1643.
Tractatus de Loquela (*sive Sonorum Loquelarium Formatione*) *Grammatico-Physicus. Una cum Grammatica Linguæ Anglicanæ. Anno* 1653 *primum edita*; *Eademque* (*post alias Editiones*) *quarto edita, & simul Aucta*, (*cum subjuncta* Praxi *Grammatica.*) 1674.
Institutio Logicæ, *ad usus communes accommodatæ*; (*cum subjunctis tribus Thesibus seu Dissertationibus Logicis.*) 1687.
Alia Nonnulla in Transactionibus Philosophicis *sparsim inserta.*

THEOLOGICA.

Mens Sobria *serio commendata*; *in Concione Latina ad Artium* Baccalaureos Determinantes; *in die Cinerum Febr.* 20. 1655. (stilo Angliæ.) *Item Epistolæ ad* Titum *Expositio, Tribus Prælectionibus* (*pro Gradu Doctorali*) *Oxonii habitis, Maii* 24, 25, 26. 1654. *Et Tres Quæstiones, in Comitiorum Vesperiis, Julii* 8. 1654, *Defensæ. Anno* 1657 *editæ.*
Resurrectionis à Mortuis *Assertio*: *in Concione ad Oxoniensem Academiam, in Die Paschatis,* 1679 *habita,* (*ad* 1 *Cor.* 15. 20.) *& eodem anno* 1679 *edita.*
De Regenerationis *Necessitate, Conciones duæ* (*ad Job.* 3. 3.) 1682.
De Fidei Vita, *Conciones duæ* (*ad Hebr.* 10. 38.) 1684.
Defensio Sabbati Christiani, (*seu Diei Dominici*,) *adversus Judaizantes Sabbatarios. Pars Prima,* 1692. *Pars Secunda,* 1694.
De Sacra Trinitate, (*adversus Socinianos*,) Epistolæ *Octo*; *&* Conciones *Tres,* (*ad Job.* 17. 3.) 1690, 1691, 1692.
Tractatus alii Theologici, Anno 1692 *editi,* viz.
De Dei Justitia, *&* Suprematu, *Conciones Duæ* (*ad Judices Itinerantes*) *Julii* 14. 1651. *& Martii* 4. 166⅚,) *ad Gen.* 18. 25.
De Justo Dei Judicio, *&* Vindicta, *Conciones duæ,* (*ad Psal.* 58. 11.) *Aug.* 21. 1659. *& sequente Januario.*
De Israelis Retributione *debita, ob nuperam Liberationem.* (*ad Deut.* 10. 12, 13,) *Dec.* 2. 1660. *Coram Rege* Carolo II. *in Angliam tum nuper Reduce.*
De Vero Thesauro, *Conciones duæ*, (*ad Mat.* 6. 19, 20.) *Febr.* 7. 1668, *& Dec.* 10. 1671.
De Dei Liberatione & Protectione *populi sui, Concio* (*ad* 2 *Cor.* 1. 10.) *Sept.* 12. 1686. *quo tempore de reducendo Papismo metus erat.*
De Sinceræ Resipiscentiæ *&* Reformationis, *Difficultate*: (*ad Jer.* 3. 10.) *Dec.* 30. 1688. *in intervallo, post abitum Regis Jacobi* II, *& ante Successionem Regis* Guilielmi, *Reginæque* Mariæ.
De Melchizedeco *Tractatus.*
De Jobo *Tractatus.*
Tractatus de Psalmorum Titulis.

70-

JOHANNIS WALLIS,
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI;

ORATIO INAUGURALIS:

IN

Auditorio Geometrico, *Oxonii*, habita; ultimo die Mensis Octobris, Anno Æræ Christianæ 1649. quum publicam Professionem auspicatus est.

Edita Anno 1657.

Oratio Inauguralis,

A *Johanne Wallis*, Geometriæ Professore *Saviliano*, in Auditorio Geometrico, Oxoniæ, habita; ultimo die Mensis *Octobris*, Anno 1649; quum publicam Geometriæ Professionem Auspicatus est.

Insignissime Domine, Vice-Cancellarie;

Reliquique Doctores, Professores, Ædiumque Præfecti Venerandi:

Egregii Procuratores; Cæterique, tum Regentes, tum Non-Regentes, Magistri:

Unaque quotquot adestis Viri, Juvenesque Academici.

QUANTUMVIS ego non sim nescius, quanto subsidat intervallo Geometra (dicam?) vester, an hodiernus Orator; tam infra sublimem tantæ Scientiæ dignitatem, quam Majestatem hujusce Auditorum Coronæ celeberrimæ: Non tamen esse, spero, quicquam, cur reformidem penitus, favore vestro fretus, & de nobilissima Scientia, & coram humanissimis Auditoribus, verba facere.

Audacior fortasse res videri possit, & modesta parum, virum vix satis notum, vix dum alumnum, in Academia celeberrima statim prodire Professorem; eosque tanquam de Cathedra compellare, quorum non paucis satius esset se auditorem sistere. *Suscepti ratio.*

Non deest tamen quod hic dicendum occurrat, non tam prætextus, quam justæ defensionis loco.

Partim enim invitat notissima vestra Clementia, qua in Advenas, etiam exteros, summa soletis humanitate propensi esse; præsertim vero in ἀνεψιὸς vestros, ex conjunctissima sorore *Cantabrigia* nepotes; quos, non tam ut adoptivos, quam germanos filios, in proprio repositos sinu, summa soletis indulgentia exosculari.

Partim etiam animum faciunt ipsa *Statuta* Domini *Henrici* SAVILII, Equitis Honoratissimi, candore morum, & multiplici eruditione insignis, deque literis literatisque omnibus optime meriti; Quibus ipse, pro summa qua erat munificentia, animoque ad studia, præsertim Mathematica, promovenda propensissimo, duos *Mathematum Professores* sancivit, alendos curavit, iisque leges posuit; quos ξυνῶς de quacunque gente, de quacunque professione, statuit eligendos. *D. H. Savilii Encomia.*

Invitat igitur Clementia vestra; Suadent *Statuta Saviliana*; propriusque animus ad hujusmodi studia per se propensius, eorumque sive vota, sive suffragia, qui id negotii mihi demandandum curarunt, Jubent, istis invitamentis obtemperare.

Cum vero gratissimum SAVILII nomen memorare contigerit; prolixa satis oratione possem in ipsius Encomia, si id necesse, perorare; si nempe, quæ, dum in vivis erat, edidit eruditionis specimina, quæque mortuo supersunt monumenta, recenserem singula. Norunt hæc *Ætonenses*, Norunt & *Mertonenses*, quorum utrorumque Collegiis summa cum laude simul præfuit; imo *Oxonia* tota, & universa quidem Respublica literaria, norunt melius, quam ut mihi sit opus sigillatim illis repetendo singulis immorari: eumque ne posteri penitus ignorare possint, hujusce saltem diei & loci celebritas, & exercitia Mathematica, in omnia (spero) secula, ipso jubente, continuanda, prohibebunt.

Taceo igitur, summam quam habuit Græcarum literarum peritiam, & cognitionem limatissimam; qua in re vix ulli, per universum terrarum orbem, secundus erat. Unde hic solus selectus fuit, qui Serenissimam Angliæ Reginam ELIZABETHAM in Græcis literis instrueret; & deinde ab Augustissimo JACOBO Rege, dum novam Sacri Codicis versionem Anglicanam parabat, accitus est *Savilius*, qui, cum aliquot aliis magni nominis viris, & linguarum peritissimis, operam hac in re navaret. Quod & summa cum laude præstitit.

Sed & opera celeberrimi illius Græcorum Theologi, *Johannis Chrysostomi* Antiocheni, summa industria, incredibili labore, & indefessis vigiliis, ex variis collatis exemplaribus Manuscriptis restituta, suis tandem sumptibus immensis, eleganti charactere, excusa edidit.

Egregium etiam illud *Bradwardini* opus (qui & ipse aliquando fuerat Collegii *Mertonensis* præfectus) quod, *De causa Dei*, inscribitur, adversus *Pelagium*, SAVILIUS noster ex Manuscriptis exemplaribus in publicam lucem protulit, & typis commisit.

Præter autem illa in Theologia (cui tamen ipse nomen non ex professo dederat) magni moliminis opera; se etiam alias præstitit eximium virum, Historicum, Criticum, Philosophum, Mathematicum. Veteres *Historiæ Anglicanæ* scriptores, ex situ & pulvere, quibus erant obsiti, in lucem edidit. *Cornelium Tacitum*, celebrem illum Romanorum Historicum, suis in eum annotationibus illustravit. Denique (ut alia prætercam) in re *Mathematica*, non modo Munificentissimus erat Patronus, sed & egregius ipse Mathematicus. Quod non modo *Prælectiones* ejus in *Euclidem* editæ testantur, sed & varia etiam quæ supersunt specimina ipsius calamo exarata. Varios siquidem veteres Authores Græcos, propria ipsius manu transcriptos, ex partibus transmarinis huc adduxit, & in suorum Professorum usum reliquit. Suasque ipsius in *Apollonium Pergæum*, *Eutocium Ascalonitam*, *Claudium Ptolemæum*, aliosque ex veteribus, Annotationes habemus; ejusque in *Josephi Scaligeri Cyclometrica* Animadversiones; aliaque non pauca schediasmata, acutissimi ingenii argumenta; quæ qui legerit, non poterit dubitare, illum & virum fuisse summe industrium, & summum Virum; atque in penitiora Matheseos penetralia, & reconditiores recessus penetrasse. Adeo ut mihi quidem res omnino miranda videatur & stupenda maxime; virum in omni literaturæ genere exercitatum, adeo tamen in singulis eminuisse.

Verum hæc ego omnia necesse habeo ut taceam; aliaque insuper multa, quæ in ipsius laudes prolixe dici possunt: Ne vel gratissimam ipsius apud vos memoriam suspicari, vel abuti videar, nimia digressione, patientia vestra; si nempe præsentis immemor instituti, Virum, utut dignissimum, potius ἐγκωμιάζειν, quam lectionibus Geometricis præfari vellem.

De Mathesi generatim. De rebus autem Mathematicis, & nominatim Geometria, cum verba sim facturus; hæret aliquandiu suspensus animus, nesciens unde vel exordium sumam, vel ubi finem ponam. Amplissimum siquidem campum apertum video; ubi spatiari, quantumlibet, licet; totum percurrere non licet. Si enim Matheseos Originem, variosque Progressus & Incrementa; si, quam utilis, dicerem, & necessaria; non solum ad disciplinas reliquas commode perquirendas, verum etiam ad insignes rerum humanarum usus innumeros, & propemodum infinitos; si, quanta perspicuitate demonstrationes instituat, quanta sagacitate veritatem investiget, quanta certitudine inventam probet, & quanta denique voluptate invenientis animum afficiat, vellem delineare: Non oratio unica, sed multa potius volumina componenda; nec tam esset ad Clepsydram perorandum, quam in infinitum.

Matheseos origo & progressus. Originem ipsius si repetam; ad ipsa mundi principia necesse est recurram: neque enim ipse Mundus, Mathematum usum, antiquitate multum superat.

Ante diluvium. Author est *Josephus*, jam olim, ante diluvium Mathematicas artes viguisse: Duasque memorat *Columnas Sethi*, lateritiam alteram, alteram lapideam; quibus utrisque inscripserat res Mathematicas jam tum inventas; eo nempe consilio, ut, sive igne sive aqua mundus periret prius, (Utramque enim perditionem prædixisse dicitur,) earum saltem altera superesset.

Sin illa *Josephi* relatio dubiæ cuiquam fidei videatur; non ideo tamen dubium erit, quin, & tunc dierum, Mathematum cognitio non obscura fuerit. Patet illud vel ex artificioso Numerorum usu, & rebus apte computandis jam tum accommodato. Numeros enim reperimus, etiam ab ipsis mundi primordiis (prout in ætatum

tum Patriarcharum Catalogo liquet) per Monadas, Decadas, Centuriasque apte dispositos; gradibus, scilicet, proportione decupla continue ascendentibus; ne inordinata Numerorum multitudine & ἀταξίᾳ, confusus laboraret calculus, vel quidem nullus omnino esset. Quod, certe, neque temere, nec inartificiose factum est: sed Arithmeticam tum cultam esse, satis indicat.

Eandem numerorum dispositionem, non ut commodam modo, sed ut absolute necessariam, per omnia huc usque secula continuatam, etiamnum retinemus. Quanquam enim primis Arithmeticis, liberum fuerit, sive decuplam, sive aliam quamlibet proportionem ad placitum elegisse, juxta quam numerorum gradus dispositos esse vellent: attamen, aliquam saltem eligendam esse, numerosque necessario gradatim disponendos, res ipsa clamat; nisi nullos omnino numeros esse vellent, vel saltem nullum eorum usum. Si enim res miranda olim habita est, Cæsarem, aut quemvis alium, singulorum in toto exercitu militum nomina memoria retinere, recensere, & sua singulis applicare posse; cum tamen eorum in legiones, turmas, cohortes, & quaterniones distributio non parum adjumenti huic negotio contulerit: certe miraculi instar esset, aut plane impossibile, plusquam decies centies millena millia numerorum nomina, eaque inordinata prorsus & independentia, recordari, intelligere, &, prout oportet, applicare. Hanc enim unam numerorum nomenclaturam callere, plus esset negotii, quam omnes omnium linguarum voces ediscere.

Quisquis igitur fuerit, sive Adamus ipse, sive quispiam alius ætate prima natus, qui primus infinitam numerorum multitudinem in ordinem digessit, eosque quasi in tribus & familias οἰκείως disponendo ἀταξίαν sustulit, certe dignissimus est qui magnus habeatur Arithmeticus, & ἀριθμοθετικός: sive etiam nondum lapsus Adam, quum sua singulis creaturis imposuit nomina, sua etiam numeris imposuerit, debito interim ordine distributis: sive denique Deus ipse Optimus Maximus, quum Adamum Grammaticam docuit, docuerit etiam & Arithmeticam; fuerintque tam loquendi, quam numerandi habitus, ipsi à Deo immediate infusi, qui tamen aliis post illum hominibus præceptis & crebris actibus sunt acquirendi: saltem, utcunque numerandi peritiam ætate prima non fuisse incognitam, abunde liquet.

Nec minus dubitandum est, Arithmeticæ Geometriam adjunctam esse. Partim quod mensurarum omne genus necessitas videatur id postulare; partim etiam quod, numeris semel intellectis, non adeo difficile fuerit eos mensuris applicare.

Atque hoc ideo præsertim videtur affirmandum, quod Instrumenta etiam Musica, Metallorum notitia, & fabriles operæ, non ita multo post, à *Caini* posteris inventa fuerint; authoribus nempe *Jubale*, & *Tubal-Caino*. Quorum si illum *Apollinem*, hunc *Vulcanum*, postea dictos esse dixerimus, à vero fortasse non aberrabimus: Neque enim eorum vel nomina vel inventa sunt prorsus absimilia. Nam *Jubalis* instrumenta Musica, cum *Apollinis* Lyra, sat apte concordant; & *Tubal-Caini* fabrilia, *Vulcano* Fabro commode applicantur.

Utrique vero, Arithmeticæ scilicet & Geometriæ, *Astronomiam* etiam adjunctam esse, ex Annorum, tunc temporis, Mensiumque calculo, sat innotescit. Qui Solem enim, & Lunam, reliquaque Sydera, ad dierum, annorum, mensiumque discrimina constituit Deus, noluit hæc temporum indicia diu ignorari.

Erat igitur universa Mathesis, quoad præcipuas saltem ipsius partes, etiam tunc exculta; gradatim tamen succedentibus seculis perficienda. Adeoque poterit cum disciplinis reliquis, si non omnibus, plerisque saltem, de primatu contendere.

Post Diluvium.

Sed neque diluvio extinctus erat Matheseos ardor; nec ipsa succedentibus ætatibus deferbuit: sed, sive *Noachi* arca conservata, sive deinceps postea exsuscitata, viguit magis.

Apud Chaldæos.

Apud *Chaldæos* siquidem, post Diluvium, primo floruisse creditur; deinde & apud *Ægyptios*, (unde in *Græciam* tandem, *Italiam*, aliasque mundi partes est allata:) cum hoc tamen discrimine, *Chaldæorum* Astronomia, *Ægyptiorum* Geometria, præcipue celebrata est.

Chaldæos jam olim rebus Astronomicis operam dedisse, testantur Observationes illæ Cœlestes, quæ, (Alexandro victore,) à Callisthene, ad Aristotelem, Babylone dicuntur allatæ; annorum scilicet mille nongentorum & trium; hoc est, ab ipso circiter Diluvio ad Alexandri tempora continuatæ, ut ex calculo Chronologico satis liquet: Nec enim multo plures anni a Diluvio ad Alexandri tempora elapsi fuerant.

Sed & in sacris Scriptoribus, Chaldæorum non modo peritiam Astronomicam, sed & superstitionem Astrologicam, notatam legimus; quo minus dubitare liceat, artes Mathematicas apud illos antiquitus floruisse.

Apud Ægyptios. Nec etiam multo serius ad Ægyptios delata est Mathematum cognitio: sive enim ab *Abrahamo*, prout nonnullis videtur, sive à quopiam alio ex Chaldæis Magistro, edocti; sive etiam ipsa rei necessitate coacti fuerint: certum est Mensurandi peritiam non sero ad illos appulisse. Adversus enim notissimas inundationes Nili, vix efficacius ullum adhibuere remedium, quam quod Geometriæ beneficio obtinebant: dispertitis nempe Geometrice terris, quas undarum injuria confuderat, & restitutis agrorum emersorum limitibus, quos submersio sustulerat, quo melius sua singulis distribuerentur.

Geometriæ nomen unde. Atque hinc fortasse factum est, quod tota mensurandi scientia *Geometriæ* nomine indigitetur, quoniam Geodæticis præsertim mensurationibus applicata; nomine nempe totius, συνεκδοχικῶς, ab insigniori quadam ipsius parte, mutuato; quæ *Pantometria* non minus recte dici posset, vel simpliciter Μετρική. Neque enim terræ magis, quam cuiquam alii vel spatio, vel corpori, mensurando convenit: agit enim de Magnitudine, seu Quantitate continua, abstracte & ἀΰλως considerata, adeoque cuilibet subjecto capaci pariter applicabili.

Phœnices Arithmeticam excoluerunt. Quæ autem de Ægyptiorum Geometria diximus, non ita dicta velim existimetis, acsi aliarum Matheseos partium rudes fuerint: sed quoniam necessitate rei coacti, ea præcipue usi sint; quo melius Nili injuriis posset obveniri: (pari scilicet necessitate, ac illa quæ Phœnicibus incubuit postea, Arithmeticam excolendi; quo felicius nempe succederet mercatura.) Cum enim fuerint Ægyptii Geometriæ periti, Arithmetici calculi ignaros esse, sine quo Geometria practica parum procederet, non est existimandum.

Nec etiam Astronomiæ fuisse rudes censendi sunt: cum enim ὀνειρομάντεις fuisse constet, adeoque Divinatricis sive artis sive imposturæ studio deditos: non credendi sunt cœlestia φαινόμενα, quorum sive usus sive abusus apud ejusmodi sciolos maximus esse solet, inobservata præteriisse. Quod ideo quidem minus credendum est; quia, & regio ipsa, ob perpetuam cœli serenitatem, adeo cœlestibus observationibus est accommoda, ut nulla magis: Et Chaldæos, à quibus hujusmodi artes didicisse creditum est, Astrologiæ fuisse peritos, abunde liquet; unde non minus Astrorum cognitionem, quam cognatas artes, hausisse commode potuissent: Imo & vicinos Arabes astra notasse & nominasse, ex historia Jobi liquido patet; quem Arabiæ vel incolam vel vicinum fuisse, & Patriarcharum temporibus Ægypto commorantium vixisse, vix dubitandum est. Nec interim tota hæc Ægyptiorum doctrina vel futilis erat, vel superstitiosa; cum Mosen ipsum illorum disciplina imbutum legimus, nec tamen ideo culpæ insimulatum.

Verum jamdiu apud Chaldæos & Ægyptios morati sumus, (diutius fortasse quam opus erat,) ut Matheseos originem, & antiquiores progressus investigaremus. Fatendum autem est, in toto illo temporis decursu, quo apud illos Mathesis morata fuerit, vix insignem aliquem perfectionis gradum adeptam esse: saltem, nisi forte, vel invidiosa illorum reticentia, qua inter arcana Sacerdotum mysteria etiam res Mathematicas occuluerunt; vel injuria temporis, etiam aliis disciplinis inimica, eorum inventa oblivioni dederit, quo minus ipsorum peritia posteris innotesceret.

Apud Græcos. Ad Græcos tandem Mathesis transmigravit: quo etiam festinat Oratio nostra. Eam nempe Thales Milesius in Græciam primus adduxisse creditur; quam Pythagoræ subinde Schola, Platonis Academia, Aristotelis Lycæum, multique his edocti magistris, foverunt, excoluerunt, auxerunt indies. Quod eo quidem successu factum est, ut paucis annorum centuriis sub illorum auspiciis plus floruerit Mathesis & ampliores progressus fecerit, quam per omnia secula superiora; ne dicam etiam & subsequentia, si saltem ducentos jam proxime elapsos annos eximamus. Testatur illud numerosa Græcorum Mathematicorum cohors: inter quos, præter superius nominatos, etiam Hippocrates Chius, Archytas Tarentinus, Leo, Theudius, Eudoxus, Euclides, Eratosthenes, Archimedes, Hipparchus, Apollonius Pergæus, Ctesibius, Hero, Geminus, Sosigenes, Ptolemæus, Pappus, Diophantus, Serenus, Proclus, Theon, aliique multi, quorum ne quidem nomina recensere licet. Quorum alii Theoremata & Problemata ingeniose excogitarunt; alii methodice disposuerunt, ἀποδείξεις addiderunt, quibus ea illustrarunt & confirmarunt; alii Mechanicis usibus applicarunt; alii denique cœlis, alii terris, alii aliis magis exer-

citati: vix enim ullo uſpiam ſolo, quam apud Græcos, Mathemata felicius floruerunt.

Matheſis apud Græcos ante alias diſciplinas docebatur. Μάθησις unde dicta.

Neque ſtudia iſthæc Mathematica coluerunt tantum Græciæ Philoſophi plerique omnes; ſed inter prima eruditionum rudimenta poſuerunt; unde κατ᾽ ἐξοχὴν Μαθήματα nominarunt. Grammatices enim ſtudio vix opus erat; cum lingua vernacula peragebantur omnia: Rhetorices floſculos antiquiores Græci minus curabant; ut qui res magis quam verba inſectabantur: Logicam etiam, qua uſi erant, ipſo potius uſu, quam præceptis, addiſcebant: adeoque prima ſtudiorum principia in ipſis Mathematis ponebant; quique horum rudes eſſent, ut omnino ἀμαθεῖς ἀπαίδευτοι, & Indocti prorſus habebantur.

Hinc orta eſt illa Pythagoræ φυσιογνωμόνησις, qua, inſpecto vultu, judicium primo fecit, an Mathematum capaces eſſent, qui ipſius ſcholam adire vellent; nequis ἀμαθὴς, aut ἀπαίδευτος intraret, ſtudiumque male collocaret, Haud ſecus & Plato affixo programmate prohibebat μήτις ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. Xenocrates poſtea quendam repulit, Mathematum ignarum, ne ſui auditor eſſet, ut qui Anſas Philoſophiæ non habuerit: τὰς λαβὰς inquit, φιλοσοφίας οὐκ ἔχει. Nec multo ſecius Ariſtoteles feciſſe creditur; qui & Mathematica multa ſcriptis aliis immiſcuit, & libros etiam Mathematicos conſcripſit; licet eorum non pauci injuria temporis perierunt.

Matheſeos neglectus.

At heu! quam noſtræ Athenis illis longe diſpares! Ubi, ſi Pythagoræ φυσιογνωμόνησις, Platonis Programma, aut cenſura Xenocratis obtineret, ut ἀγεωμέτρητοι omnes exſularent, certe exiguus ſupereſſet Philoſophorum numerus. Studia nempe Mathematica, quæ primas olim obtinebant, vix nunc dierum (neſcio quo malo fato) apparent uſpiam: acſi hodierni Philoſophi Cynicis mallent & Epicureis accenſeri, quibus fere ſolis erat Matheſis neglectui; quam Pythagoricis, Platonicis, aut Ariſtotelicis, quibus & curæ fuit & delectationi. Imo vero res Mathematicas ad Philoſophiam non pertinere, arbitrantur hodierni quales quales Peripatetici, cum tamen erat ipſe Περίπατος egregie Mathematicus: quod ipſi ſive negent, ſive neſciant, ſaltem diſſimulant.

Verum fatendum ingenue quod res eſt. Ex quo Athenis migrarunt ſeveriores Muſæ, vix uſpiam firmas poſuere ſedes, ſed vel errare coactæ vel deliteſcere.

Matheſis Romæ neglecta.

Romani nempe, quanquam Græcorum literaturæ hæredes habiti, pro florido quo erant ingenio, potius quam ſolido; dicendi potius copia, & verborum ornatu, quam rerum pondere & argumentorum acumine delectati; Rhetorica magis quam Logica inſtructi; orationis potius quam rationis Magiſtri; leviores Muſas amplexi, ſeveriores omnino inſalutatas præteribant. Grammaticam ſcilicet, Rhetoricam & Poeticam ornare ſatagentes; Philoſophiam interim, Medicinam, & rerum præſertim Mathematicarum ſtudia miſſa faciebant; Condendis carminibus, componendis orationibus, rebus forenſibus agendis ſat erant apti, ut & Hiſtoriis conſcribendis; Verum ſi apud illos Philoſophiam aut Matheſin quæſitemus, omnino fruſtra ſumus; Exceptis enim, quæ apud Ciceronem & Senecam occurrunt pauca, Philoſophiæ quidem parum, Matheſeos vix quicquam occurrit uſpiam: Niſi forte quod Architectonica uſi fuerint.

Verum quidem eſt, Julium Cæſarem annum reformaſſe, *Julianum* deinceps dictum, & Calendarium Romanum inſtruxiſſe: At illud Græci *Soſigenis* ope factum eſt, aliunde advocati; nec enim Romanorum quempiam huic negotio parem legimus.

In Arabiam tranſiit.

Romæ vero nimium neglecta Matheſis, ut & Philoſophia reliqua, in Arabiam deflexa eſt; hoſpitium nempe apud Arabes nacta, ſi non quo floreret, ſaltem quo deliteſceret. Græcorum enim depoſita conſervarunt potius, & tandem reddiderunt, quam auxerunt. Quanquam & eorum ſtudia, minime contemnenda, non ingrati agnoſcimus: quorum non obſcura veſtigia in multis rerum Mathematicarum nominibus etiamnum retinemus. Hinc puncta *Zenith* & *Nadir* nominata; circuli item *Almicantri* & *Azimuthani* dicti; & ipſa Sinuum appellatio, ut taceam *Algebræ* & *Algorithmi* nomina, & ipſum *Almanach*, & ſiqua ſunt ſimilia, quæ Arabiſmum ſonant. Qui autem Arabum hiſtorias paulo accuratius inſpexerit, varioſque inter illos tum Matheſeos tum aliarum diſciplinarum egregie doctos notaverit, rem illam extra omnem dubitationis aleam poni haud dubitabit.

In Europam rediit: & incrementa nacta eſt.

Poſtremis autem hiſce ſeculis jam tandem redux Matheſis gratiori hoſpitio in variis Europæ partibus excepta eſt: fautores egregios nacta. Quorum indefeſſis vigiliis,

vigiliis, & sumptibus haud exiguis, progressus & magnos quidem, & non speratos, fecit. Exsurgit siquidem, quasi ex alto sopore exsuscitata; seu potius, ut pridem quasi semimortua, jam reviviscit: nec reviviscit tantum, sed quasi vegetum vigorem recens adepta, in singulis quidem ipsius partibus & aucta multum & ornata incedit.

Arithmeticam si spectemus; fractionum ad partes decimales reductio, laborioso calculo sexagenario multo facilior est & expeditior: Et mirandum illud Logarithmorum inventum, egregium attulit calculo sublevamen; ut alia minora taceam.

Geometriam quod attinet: Doctrina Sinuum, Tangentium, & Secantium, fere tota nova est; qua Trigonometriæ calculus maxime sublevatur. Et præter varia Theoremata de novo inventa, ipsa inveniendi methodus multum facilitatur. Algebræ nempe, sive Analytices usus, ultra quam veteribus innotuit, jam innotescit.

Astronomia, eximiis inventis instauratur; non tantum novis systematis, sed & novis φαινομένοις. Quis enim veterum vel circum-Joviales planetas? vel Solis maculas? ejusve motum circa proprium axem? vel cometas etiam, sive novas in fixarum regione stellas, observavit? Quis item Veneris aut Mercurii cornua? Saturni annulas, & figuram ovalem? aut Jovis faciem undulatam? ipsosque Lunæ montes, & valles, & inæqualiter asperam superficiem notavit unquam? Et (ut alia levioris momenti transeam) Ars ipsa Nautica, Astronomicis ut plurimum principiis fulta, præter stupendum Magneticæ pyxidis usum, variis tum inventis tum instrumentis locupletatur.

Non ideo tamen mirum videri debet, aut de Græcorum industria quicquam derogatum iri, si multa veteribus incognita nostræ ætatis Mathematici investigarint. Multo enim facilius nobis est ipsorum inventis addere, quam ipsis primitus invenire. Præsertim cum studia nunc liceat, Typographiæ beneficio, per totam Europam communicare, quæ tunc dierum quasi unis erant Athenis conclusa.

Παρόρμησις ad Matheseos studium. Verum omnino excitandi estis, Academici, & hortandi serio, ut hisce rebus animum applicetis sedulo; nec patiamini, ut veternum rebus mathematicis aut denuo obrepat, aut diutius incumbat.

Si, quorsum hæc? quæratis; aut cui bono? Utut ea vox Academicis omnino sit indigna; mihi tamen erat in animo pluribus ei, quam nunc licebit, obviam ire. Sed angustia temporis illud prohibet; Ne nimio vobis tædio molestus essem.

Ipsius utilitas & necessitas. Quin Mechanicos consulite, si nesciant Academici, aliosque ex vulgo sive operarios sive negotiatores, Numquis rerum Mathematicarum usus? Consulite Mercatores, numquis plane ἀναρίθμητος eorum ratiocinia curare possit? Interrogate nautas, numquis Geometriæ, Astronomiæ, Geographiæ plane rudis, navigia possit de portu in portum ducere? A Latomis item & Architectis sciscitemini, numquis ἀγεωμέτρητος superbas ædificiorum moles, turrita palatia, & arcuata laquearia, Geometrice (ut loquuntur) ad stuporem vulgi suspensa, ædificare? Dicant vel fabri, numquis normæ, libellæ, aut circini usus? Sed & milites percontari liceat, numquis Matheseos usus ad arces & oppida munienda, castra ponenda, tormenta bellica commode regenda, aliaque multa militaria peragenda? Respondeant ipsi Syracusani, ut cætera taceam, num non Archimedis rerum Mathematicarum peritia usui fuerit, Syracusis ipsis propugnandis?

Academicorum interest Mathemata callere. At, Quorsum hæc omnia? dicetis Academici. Tractent fabrilia fabri: Quid ad nos istæc, qui mechanici neque nunc sumus, nec aliquando futuri? Qui nec instrumenta bellica facturi unquam, nec ædificia? Itane, vero Academici? Adeone vestra nihil interest ea scire, quæ non aliquando facturi estis? Ideone Deus *Os homini sublime dedit, cælumque videre, Jussit,* --- ut ea tantum contempletur, quæ posset ipse conficere? Num libri de Cœlo, de Mundo, de Animalibus, aliisque rebus naturalibus, omnino indigni sunt quos legat Philosophus, nisi hæc omnia possit efficere? Apage vox illa, Philosopho indigna! cujus illud est, ea scire quæ Deus ipse condidit, quæque vel Ars vel Natura possit efficere. Quem melius deceat Chremetis illud Terentiani, quam Chremetem ipsum, *Homo sum, nihil humanum a me alienum puto.*

Sed ut serio agamus, Auditores; unde est quod hæc efficiat Mechanicus operator? Nonne quia Philosopho Mathematico edoctus? Ea nempe quæ Mechanicus efficit, non nisi Philosopho dictante facit. Altioris siquidem scientiæ munus est, ea docere & intelligere, quæ ipsi operantur: Prout minoris artis est, admoto

pollice

pollice barbita pulsare, quam concentum musicum ἁρμονικῶς depingere. Horologium puta sciothericum depingit forte sive Pictor sive Cæmentarius; sed præscribente Mathematico: Haud secus ac medicamina componit Pharmacopœus, sed dictante Medico. Nec minus interest Philosophi, μαθηματικῶς & intelligere & demonstrare; quam Mechanici χειρουργικῶς operari. Adeoque indignum esset Academicis, si in opificum potius Mechanicorum officinis, quam Philosophorum scholis, Matheseos cognitio quærenda foret.

An vero tantæ laudis est, dicetis forsan, ea scire quæ nec mechanicis sunt aliena? Demus, si placet, non esse; (nec concedamus tamen:) At multa sunt, quæ scire, non est magnæ laudis, cum ea tamen nescire, non parvi sit dedecoris. Non magnæ laudis est, virum Academicum Latine posse & intelligere & loqui, at magni est dedecoris, non posse.

Mathesin ignorare non leve dedecus.

Exemplo sit illud Julii Scaligeri; (ut de Josephi Cyclometricis nihil dicam;) qui non modo sibi, sed & aliis non paucis, videtur magnus. Cum Cardanus argueret sive Cometas, sive Novas Stellas, Luna superiores apparuisse, quod minorem habuerint Parallaxin; Ipse, assumptione concessa, sequelam negat; Cometæ Parallaxin ratus, non ex locali ipsius positione, sed ex superioris cujusdam sive planetæ sive stellæ motu pendere posse. Quæ perinde absurde sonant Mathematicis auribus, & inconcinne dicta sunt, ac si Diem tunc esse neget quum Sol meridiana luce fulgeat: Adeoque, turpiter titubando, insignem prodidit Matheseos imperitiam: ut qui dignior esset à præceptore discere, Quid sit parallaxis; quam de rebus cœlestibus disputare: eoque nomine apud viros doctos, nec semel quidem, nec immerito vapulat. Julius siquidem Scaliger, pro more suo, satis pro imperio Cardanum tractans, negare quidlibet sibi licere ratus est; adeoque sat amplam sibi negandi ansam videtur nactus, si Cardanus affirmaverit. Atque hoc quidem in rebus mere Physicis, magis impune fecisse posset; ubi in utramque ut plurimum partem probabili saltem argumento disputare liceat. Non ita tamen in Mathematicis; ubi veritas semel cognita extra dubium protinus collocatur; errores interim tam manifesto deteguntur, ut nulla quidem supersit vel prætextus larva.

Julius Scaliger Matheseos ignarus.

Nec leve illud Ovidii σφάλμα: dum diurnum Solis motum, Phaethonte duce, descripturus, per singula Zodiaci signa transire fingit: motum nempe Solis Diurnum & Annuum temere confundens. Quod indicio est, ipsum suos ipsius Fastorum libros vix satis intellexisse: & Romanorum potius Calendarium, quam cognitos Syderum ortus & occasus, suis carminibus descripsisse.

Ovidii σφάλμα.

Verum festinandum esse video: metuo enim ne jamjam fuerim patientiæ vestræ injurius nimis. Ideoque quæ dicenda supersunt multa, quibus Matheseos studia suadere possem, intacta prorsus præterire necesse habeo.

Hoc saltem addam: Mathematum studia non modo pro ea quam in se habent veritate colenda esse, (quæ tamen ipsa, per se conspicua, & ultra Scepticorum litigia posita, animum reficiet valde & oblectabit;) sed & quod rerum aliarum cognitioni, nec id uno quidem nomine, conducant multum. Præterquam enim quod in aliis disciplinis passim occurrant multa, quæ citra Matheseos opem nullatenus intelligenda sunt: variaque quotidie, ex Matheseos cultura, Philosophiæ Naturali accedant incrementa: Illud interim non est exiguum; Matheseos studio paratum animum, aliarum disciplinarum capaciorem reddi, rebusque aliis tum apprehendendis tum judicandis longe paratiorem. Haud secus atque cum vesicas, nonnunquam, animalium corporibus exemptas, flatu distendimus & exsiccamus, quo fiant rebus aliis commode continendis aptiores. Sive liceat potius cum Verulamio comparationem instituere; qui scientias Mathematicas cum lusu pilæ in sphæristerio confert. Ubi præter ipsum exercitationis bonum, quod per se intenditur, etiam εὐκίνητον σῶμα, (ut cum Hippocrate loquar,) membrorum nempe agilitas, oculorum attenta εὐσκοπία, totiusque corporis gestus decorus, aliaque subinde commoda, ex accidenti conciliantur. Pariter & Mathesis, præter ipsam Mathematicæ veritatis cognitionem, habet & alia commoda, eaque non exigua, quasi adnascentia. Nec enim aptius occurrit remedium, quo phantasia mobilis attentior fiat, quo ingenium volatile reddatur fixum (ut Chymicorum verbis utar,) quam si Mathematicarum demonstrationum compedibus coerceatur. Vix item maturo magis judicio quispiam, quam qui rebus hisce exercitatus, vel sophismatum deteget fallacias, vel syllogismorum vires justamque sequelam assequetur.

Matheseos utilitas ad alia perdiscenda.

Mathesis ingenium acuit.

Verum ego non parum metuo, ne suada nostra ad persuadendum vix satis valeat

leat: adeoque Mathematum ſtudia, quæ digna quidem ſunt (Academici) quæ amplectamini, etiamnum nimis neglectui ſint futura.

Sin minus valuerit Oratio noſtra, (quæ fortaſſe non adeo eleganter vel artificioſe eſt elaborata, ut multum valere poſſit:) utinam ſaltem periculum facere dignaremini, ipſaque Mathemata cominus tractare: ut vel voſmet ipſi, experimento tandem edocti, judicium hac de re poſſitis experti ferre. Neque enim vos ipſos aliquando iniquos me habiturum judices, abunde confido.

Quod ego interim non pro forma tantum, Rhetoricantium more; ſed ſerio quidem & animitus opto: ut quod ſiquando feceritis; nec laboris impenſi, nec temporis, ſpero, quaſi male collocati, pigebit unquam. Ea nempe res Mathematicæ dulcedine & ſuavitate delectant ambientis animum, quam ſiquis Rhetorico ornatu deſcribere ſatagat, quaſi ad vivum ſe poſſe delineare ratus, omnino fruſtra eſt. Haud ſecus enim hac in re contingit, ac ſiquis de Mellis dulcedine judicium laturus eſſet: quæ quanta ſit, vel uno guſtu melius perdiſcet quis, quam Rhetoris, utut facundiſſimi, deſcriptione. Et Mathemata pariter, ipſo quidem quaſi contactu potius, quam *indicatu*, docent, quam ſint delectabilia. Nativa nempe ſua ipſorum pulchritudine, quam penicillo licet peritiſſimo depicta, videntur venuſtiora.

Matheſeos obſcuritas non tanta quanta vulgo creditur.

Siquis autem difficultatis incuſet, & perobſcura queratur ſtudia Mathematica: Quanquam illud quidem non prorſus inficias eam; Tamen --- *eſt infamia vero Major* --- Præter enim ipſum aſpectum primum, & frontem quaſi ſubtetricam, cætera quæ ſuperſunt non tam terrere comperta ſunt, quam oblectare. Quodque ipſum, aggreſſuris, videtur prima fronte formidabile, illud, aggreſſis, & dulce iatis compertum eſt & volupe; Ipſique qui ſubſequuntur labores ſuaviſſimis adeo delectamentis condiuntur, ut neſciam an Labores illi, an Voluptates, haberi mereantur. Sunt enim & luſus ipſi nonnunquam ſatis laborioſi, quæ tamen oblectamenta potius quam gravamina exiſtimantur. Adeoque qui ad Matheſin requiritur ſive mentis labor, ſive attentus animus, ut condimentorum acrimonia, appetitum potius excitat, quam palatum offendit.

Quicquid autem illud ſit difficultatis, quæ Matheſin comitetur, quodque aſperum occurrit, conabor ego ſecuturis (Deo volente) prælectionibus, quanta quidem poſſum facilitate, alleviare. Interim, ne ἀεὶ μετρίως ἀμείνων dicam, orata prius læſæ patientiæ veſtræ venia, conticebo.

DIXI.

MATHESIS
UNIVERSALIS:

SIVE,

ARITHMETICUM OPUS INTEGRUM,

Tum Philologice, tum Mathematice traditum, *Arithmeticam* tum *Numerosam*, tum *Speciosam* five *Symbolicam* complectens, five *Calculum Geometricum*; tum etiam *Rationum* Proportionumve traditionem; *Logarithmorum* item Doctrinam; aliaque, quæ Capitum Syllabus indicabit.

Edita Anno 1657.

Insignissimis Doctissimisque Viris,

D. GERARDO LANGBAIN, *S.T.D.*
Collegii Reginensis, Oxoniæ, Præposito.

D. HENRICO WILKINSON, *S.T.D.*
Præbendario Ædis Christi.

D. JOHANNI WILKINS, *S.T.D.*
Collegii Wadhamensis Custodi.

D. JONATHANI GODDARD, *M.D.*
Custodi Collegii Mertonensis.

JOHANNES WALLIS, Geometriæ Professor Savilianus,
S.

CUM quæ in publicum prodeunt, pro more scilicet (eoque satis inveterato) nonnullorum inscripta nominibus soleant prodire; neque mihi quidem a recepto illo more jam recedendum plane videatur: Ex reliquis, quos & amo & veneror Collegiorum Præfectis, aliisque apud nos summis in omni eruditionis genere viris, vestra libuit, Viri Insignissimi, nomina seligere, quibus, qui sequitur, tractatum duxerim offerendum. Quod quidem eo consilio factum est, ut, cum præ ipsorum reliquis (plerisque saltem) Vos maxime studiis hisce Mathematicis indulgeatis, sive etiam incumbatis: eadem opera tum meos in vos affectus & observantiam testari possim, tum sequentis etiam operis rationes breviter aperire.

Hoc autem quicquid est negotii eo potissimum fine susceptum est, ut huic quam sustinere datum est provinciam, non modo non deesse penitus videar, sed & eam ornare potius, pro viribus nostris, & quo defungor munus adimplere. Quippe, cum hoc sibi in animo fuisse propositum, Eques Honoratissimus, idemque munificentissimus Patronus, D. HENRICUS SAVILIUS, *eximius sui temporis Mathematicus, statutis suis satis testatur; ne mera nomina sint Professores sui, sed qui studia Mathematica sedulo promoveant: Id mihi maxime visum est incumbere, ut justissimis illius votis quantum in me est satisfacere, nec nudo contentus titulo, Matheseos studia vel promovere satagam, vel adjuvare.*

Atque in hunc finem, præter assiduas prælectiones publicas, & privatas eorum qui hoc desiderant institutiones, omnino expedire videbatur, ut universalem hujusmodi Calculi traditionem publici juris facerem, qui non tam speciatim Arithmeticam, quanquam & hanc etiam, quam totam Mathesin spectet. Ex quo enim in Mathesin introducta est, quæ dicitur, Arithmetica Speciosa, *sive* Symbolica, *vel (quod aliis etiam audit)* Calculus Geometricus, *aut etiam (forte omnium optime)* Matheseos Universalis principia, *(quippe ut tota Rationum traditio, ita & hujusce Calculi exercitium, indifferenter omnes Matheseos partes respicit;) ex quo, inquam, hæc introducta est,* Vietæ, Oughtredi, Harrioti, Cartesii, *aliorumque magni nominis virorum, ope; quam ingentes fecerit profectus Mathesis universa, nemo hisce*

 rebus

rebus vel leviter exercitatus ignorare possit. Quod autem ego, post tot eximios qui in hoc negotio praecessere viros, rem hanc aggrediar; non eo factum est animo, ut eorum laboribus quicquam ego derogatum velim; sed quod non ita rem hactenus absolutam putaverim quin & mihi pariter, quod post illorum messem colligam, etiamnum superesse putem spicilegium.

Et quanquam eorum pars magna, quae nunc proferimus, Auditoribus nostris jam publicis fuerit praelectionibus exposita; attamen, cum nec eosdem plane auditores continuis semper praelectionibus adesse, res ipsa clamet; & quidem, si adessent, non ea tamen valeant memoria, ut non saepe ad ea quae praecesserunt respicere subinde opus habeant; quid, quod & hujusmodi studia non ea sint, quae auditione prima satis imbibantur, sed attentam insuper mentem postulent, & contemplationem, qua pensitemus serio, & dictis immoremur: Haud importunum fore autumo vel ipsis, qui haec audiverint, nedum aliis, ut & oculis eadem subjecta habeant, quo & ea persentiscant altius, & seriis cogitationibus his assuescant.

Rem ipsam quod atinet; non est ut nova hic expectetis omnia; sed neque nulla tamen. Numerorum natura, saltem quoad integros, jam olim erat Veteribus probe nota. At calculus eorum perplexus admodum & intricatus, labore plane improbo absolvendus: Et siquando ad integrorum particulas descendendum erat, ad scrupulos sexagesimales confugiebant (qui integrorum instar habebantur) aut etiam ad Rationum doctrinam figuris lineisve explicandam. Atque hinc factum autumo, quod Rationum Doctrinam, quae mihi quidem Arithmeticae potius considerationis videatur (atque ad omnes plane Matheseos partes perinde spectet,) ad Geometriam plane religarint; partim scilicet quod lineis facilius quam laborioso illorum calculo res exigeretur, partim etiam quod Arithmetices pomoeria tam stricta fecerint, ut veris numeris (rationalibus scilicet, & quidem integris,) coercerentur, quibus tamen immensos Rationum campos haud coerceri posse certum erat.

Postquam autem in Arithmeticam introductus est Notarum numeralium usus, quae Saracenicae, seu rectius Indicae, vulgo audiunt (ab Indis quippe in Arabiam, atque ad nos inde delatae;) tum incredibili statim levamine facilior evasit molesti labor calculi, tum etiam Arithmetices pomoeria insigniter ampliata. Et quidem ex eo tempore, praeter faciliorem integrorum calculum, accessit etiam ad Arithmeticam Fractorum speculatio, (quam Veteres Logisticam vocabant, ut ab Arithmetica distinctam,) sed & Surdorum deinceps numerorum.

Atque huc quidem ubi perventum erat, revixit denuo, & quasi ex postliminio revocata est Veterum Algebra (nomen jam Arabicum sortita) quae (praeter ea quae apud Diophantum exstant) jam altum obdormiverat. Quam haec interea temporis sortem apud Arabes nacta fuerit (qui tum Mathesin, tum alias item eruditionis partes alioqui perituras feliciter conservarunt, & tandem reddiderunt) haud in promptu est ut dicam; sub Cardani saltem, Tartaleae, & Clavii temporibus redux facta, eorum scilicet aliorumque jam proxime elapsi seculi laboribus ornata, apud Europaeos sedem fixit.

Ubi autem haec redux veterum Algebra jam denuo excoli coepta fuerat, atque ob jam receptas notas numerales expeditior facta; neque nunc Radicem primam quam vocant solummodo, ejusque potestates, Characteribus Cossicis insignire solenne fuerat, sed & Radices secundas literis Alphabeticis: hinc credo ansam arripuit primus acutissimi & sagacis admodum ingenii Vir Franciscus Vieta, non ignotas tantum quantitates, sed & cognitas etiam, literis Alphabeticis insigniendi, eamque quam Speciosam vocamus Arithmeticam, & Novam Algebram introduxit: quam deinceps Oughtredus, Harriotus, Cartesius, Schootenius, &c. auxerunt indies, & plenius excoluerunt.

Sed & interea temporis, in Arithmeticam numerosam partium Decimalium usus (quae sexagesimalium scrupulorum vices insigni praestant compendio,) sive a Rhetico sive a Regiomontano sive ab alio quopiam, ita sensim invectus est, ut quis ipsius fuerit primus Author vix (credo) satis constet. Atque insuper Logarithmorum doctrina ab Honoratissimo Johanne Neppero (Marchistoniae apud Scotos Barone) primitus excogitata, atque ab ipso junctim cum Henrico Briggio (Geometriae primum Professore Greshamensi Londini, deinde Saviliano Oxoniae,) recognita

cognita & penitus absoluta, Multiplicandi, Dividendi, & Radices educendi laborem, incredibili plane compendio sublevavit.

Cum autem hoc adepta sit fastigium Arithmetica, variorum in suo cujusque genere virorum eximiorum ope fulta; quod illi sigillatim præstiterunt, id mihi jam in unicum systema redigendi incumbit onus. Adeoque Arithmeticam (nisi Mathesin *potius* Universalem *malitis appellare) non tantum in* Numeris *speciatim, sive Integris sive etiam Fractis; aut partibus tandem vel Decimalibus vel Sexagesimalibus absolvendam: sed universaliter in* Speciebus *etiam (uti dici solent) vel symbolis exercendam: hoc est, non Numerosam tantum, sed & Cossicam & Speciosam Arithmeticam, sum traditurus. Sed & Demonstrative omnia (quod tamen negligere solent Arithmetici plerique omnes,) ut & Arithmeticæ speculativæ doctrinam, & praxeos item regulas tradam ex ipsis deductas principiis, continuis inde demonstrationibus (utut breviter, perspicue tamen) stabilitas.*

Verum & Rationum item & Proportionum doctrinam, ad Arithmetica principia revocatam, jam sua tandem sede collocavi. Cum enim eousque se dilatarunt Arithmetices pomœria, ut non contenta solis Numeris, universum illud qua longe lateque patet Matheseos subjectum, Specierum ope, suo jam comprehendat ambitu; & quantitates invicem tum Rationales dictas, tum Irrationales perinde respiciat: non est cur non & Rationum sive proportionum doctrina universa, iisdem se contineri cancellis patiatur; quæ quidem vix alio nomine, relictis Arithmeticis, in Geometricos olim fines recipi postulavit, quam quod Arithmetica, dum veris numeris se concludi passa est, non agnoverit Rationes ullas quam quæ veris explicari numeris potuerunt.

Quod vero longiusculis nonnunquam digressionibus exspatiari videar, (nec tamen extra istius quod susceperam negotii limites,) id data opera factum est, nec quidem uno nomine. Partim enim illud in Lectorum gratiam faciendum videbatur, quo rerum varietate nonnunquam oblectari possint, & traditorum utilitatem vel ipso usu edisçant: partim etiam (quod in toto hoc negotio mihi fuisse propositum non diffiteor) ut reapse ostendam etiam Geometrica Problemata (quatenus saltem a positione sive locali situ abstrahunt) a principiis Arithmeticis vel maxime dependere; & quidem eousque ab esse, ut ad Problemata sive Theoremata pure Arithmetica statuminanda (quod tamen non raro factum video) Geometricæ plane demonstrationes sint huc forinsecus advocandæ, ut contra quæ Geometrica habebantur, simplicius quidem & universalius ex pure Arithmeticis adeoque universalibus demonstranda videantur.

Quod autem vel Philologica, vel etiam alia Philosophica Mathematicis immiscuerim; partim illud ad subjecti explicationem commodum videbatur, partim etiam ut condimenti loco, quo quæ, tironibus præsertim, satis arida videantur facilius deglutiantur, quippe qui Mathematicis forsan parum ante hac exercitati, diverticulis nonnunquam opus habeant, ne continua mentis intentione nimium defatigentur. In quorum item gratiam, fui ex consulto in primoribus prolixior & fusior explicandis, quam in succedentibus; quippe quod quibus primum aggressuris necessaria visa est prolixitas, iisdem ipsis quadantenus exercitatis non minus grata sit futura brevitas.

Quod denique tardius aliquanto prodeat tractatus hic quam speraverim (quippe jam secundus annus agitur, ex quo prelo subjectus fuerit,) ne miremini, hoc faciet maxime, si saltem quibuscum & quam perpetuis preli difficultatibus luctandum fuerit, satis intelligatis; tum propter Typographos hujusmodi scriptis edendis parum assuetos, tum etiam non admodum instructum Typographum. Quippe hinc non raro factum est, ut nunc ob schematum, nunc characterum inusitatorum, nunc etiam literarum inopiam, (quæ omnia non nisi Londino quoties res exigebat, cum non exigua temporis jactura supplenda erant,) hærendum tum aliquandiu tum aliquoties fuerit. Et quidem eousque, ut postquam hanc Partem Primam aliquatenus inchoaveram, seponenda tamen ea plane fuerit, dum pars altera serius incepta (quæ jam ante annum prodiit) absoluta fuerit. Sed & etiam interea temporis (præter opuscula quædam Theologica emissa) his occurrebat castigandus Hobbius *tum ob ejus in libro* De Corpore ἀγεωμετρησίαν, *tum ob* λοιδορήματα *quibus ille tum Scholas tum Academias qua Veterum qua Recentiorum omnino omnes lacessit,*

lacessit, Se vanum efferens, suamque ignorantiam cum professo illo omnium contemptu venditans. Nonnihil etiam attulit moræ, quod Marci Meibomii, de Proportionibus Dialogus, *ad examen etiam videbatur revocandus; quod in subjuncto huic Tractatu factum est. Quæ omnia, (ne & alia memorem negotia, quibus multoties fuerim avocatus,) non mirum est si nonnihil edendo huic tractatui injecerint moræ.*

Valete denique, Viri insignissimi; & pergite, quod facitis, tum Academiam hanc celeberrimam, tum Rempublicam universam literariam, Studiis ornare vestris & decorare.

Oxonii Dec. 20.
1656.

Mathesis

Matheſis Univerſalis.

SIVE,

Arithmeticum opus integrum; tam Philologice quam Mathematice traditum.

CAP. I.

De Matheſi in genere; ejus Objecto & Diſtributione.

PRiuſquam Arithmeticam, quam traditurus ſum, ſpeciatim aggrediar: non omnino abs re fore judico, generalia quædam quaſi προλεγόμενα præmittere de ipſa Matheſi in genere, cujus Arithmetica pars eſt ſatis inſignis: ut, quid ipſa ſint Mathemata, paucis enarrem; cur ita dicta; & quibus in rebus verſentur: & Matheſeos deinde diſtributionem ſubtexam.

Matheſis quid?

Si quid ſint ipſa Mathemata quæratur; aut quas diſciplinas illo nomine indigitemus: Reſpondeo, Mathemata dici, ſeu diſciplinas Mathematicas, omnes illas ſive Artes ſive Scientias, quæ circa *Quantitatem* ſpeciali modo verſantur; ſive Continuam quidem, ſive Diſcretam.

Matheſeos objectum, Quantitas proprie dicta.

Quantitatem vero cum dico, non eam laxiori quodam ſenſu intellectam vellem; prout eam Ariſtoles nonnunquam, ſive poſt illum alii, laxius loquendo, deſcribunt; quando Tempus, Locum, Orationem, aliquando etiam Motum & Pondus, & ſiqua ſunt ſimilia, ipſius ſpeciebus annumerant: Sed ſtrictiori ſenſu, prout ad Numerum & Magnitudinem reſtringi ſolet; quæ vel ſolæ vel ſaltem præcipuæ Quantitatis proprie dictæ ſpecies haberi ſolent. Reliqua vero non niſi reductive ad Quantitatem proprie dictam pertinere volunt Scholæ, quatenus nempe vel Menſuræ vel Numeri ſunt capacia; adeoque vix ullam ſubeunt Mathematicam ſpeculationem, niſi quatenus ad modum vel *Magni* vel *Multi* conſiderantur; præſertim ſi tota Rationum vel Proportionum doctrina vel Arithmeticæ vel ſaltem Geometricæ conſiderationis habeatur.

Verum quidem eſt, ea omnia in diſciplinis Mathematicis tractari, iis præſertim quæ Mixtæ dicuntur: qua forſan ſola ratione, inter Quantitatis ſpecies fuerunt annumerata. *Tempus* enim tractat Aſtronomia, ut & *Motus* cœleſtes quibus menſuratur; item Chronologia; atque etiam Gnomonice, Aſtronomiæ principiis ut plurimum nixa. *Locus* autem in Stereometria, quantum ad ejus capacitatem; in Geographia vero, quoad ejus ſitum & poſituram, ſpeciali modo conſideratur. *Orationem* tractat Muſica, tam quoad Temporum (ut loquuntur) menſuram; quam quoad Tonorum elationem, ſuppreſſionem, vel etiam circumflexionem; unde non modo Rhetorum & Poetarum, ſed & Muſicorum oritur & menſura & modulatio. *Motus* autem & *Pondus* in Mechanicis præſertim conſiderantur.

Verum quidem eſt hæc omnia & horum ſimilia, in diſciplinis Mathematicis tractari, & ſub μεγεθῶν nomine ab Euclide contineri; ſed (ſi Scholas audimus) non per ſe, & primario; ſed quatenus vel menſurantur vel numerantur: Ut ſint ea (prout loquuntur) Matheſeos objecta *Materialia*, ſed ſub ea formalitate, quatenus *Menſurabilia*, adeoque ſecundum *Plus & Minus*, ſeu *Majus & Minus*, conſideranda; & *Rationis* ſeu *Proportionis* capacia.

Dicimus igitur Matheſeos Objectum eſſe Quantitatem proprie dictam; Magnitudinem ſcilicet, & Multitudinem. Reliqua vero eatenus ad Mathemata pertinent, quatenus (reductive) ſunt vel Numeri vel Menſuræ capacia: nempe quatenus de illis interrogari poterit, vel *Quot* ſint, vel *Quanta* ſint. Adeoque ſatis apparet, quibus in rebus verſatur Matheſis: nempe in Quantitate, per ſe; in aliis autem rebus omnibus, quatenus vel Quantitatis capaces ſunt, vel ad eam reductive referantur.

Mathesis, unde dicta.

Si de *Mathematum*, sive *Matheseos*, nomine quæratur, Cur hac appellatione insigniantur illæ disciplinæ: Ideo fortasse fuit, quoniam Mathemata apud multos quidem sola, apud alios Antiquorum primo ante alias Disciplinas loco, ediscebantur: adeoque κατ' ἐξοχὴν Μαθήματα dicta; quia πρωτομάθητα.

Atque hæc de Matheseos in genere tam Objecto, quam Appellatione dicta sunto. Sequitur ut ipsius sive Species, sive Partes, seorsim considerentur.

Matheseos distributio, in Puram & Mixtam.

Sunt autem (prout dividi solent) disciplinæ Mathematicæ aliæ *Puræ*, aliæ *Mixtæ*. Puras dicimus illas, quæ Quantitatem absolute consideratam tractant, prout à Materia abstrahitur. Mixtas autem illas appellamus, in quibus, præter considerationem Quantitatis, (sive Multitudo illa fuerit, sive Magnitudo,) etiam subjectum, cui inest, connotatur.

Verbi gratia. Ubi in Arithmetica traditur, *Bis duo quatuor efficere*; Numeri hic seorsum considerantur, & abstracte ab omni materia subjecta. Pariter enim verum est, sive de Hominibus, sive de Angelis, sive de aliis quibuscunque rebus agatur. Item, ubi in Geometria traditur, *Circuli peripheriam ubique a suo centro æqualiter distare*: hic, præter ipsius circuli considerationem, subjecti nulla ratio habetur; sive in cœlis sit ille circulus, sive in terris, sive ubivis alias. Adeoque disciplinas has, Mathematicas *Puras* dicimus; quia pure de ipsis Quantitatibus agunt, non immista subjecti consideratione.

In aliis secus est. Verbi gratia: Cum docet Astronomia, *Æquatorem & Zodiacum se mutuo in binis punctis secare*; & quidem hunc ad illum oblique inclinari, angulumque graduum viginti trium cum semisse (circiter) constituere: videmus hic, præter instituta pure Mathematica, multa etiam mere Physica immisceri. Quid sit *circulus*, & *circulorum intersectio*; quid *obliqua inclinatio*, & *inclinationis angulus*, Mathematica mere sunt, atque inde petenda; At, Solem (Terramve) hujusmodi obliquum cursum peragere, eumque annuo spatio absolvere, Physica sunt, ex Historia nempe naturali observanda; adhibitis interim Mathematicis tam Principiis quam Instrumentis, quo melius hujusmodi observatio instituatur.

Puræ: *Arithmetica, & Geometria.*

Mathematicas igitur disciplinas *Puras* dicimus, duas tantum: nempe *Arithmeticam* & *Geometriam*; Quarum illa agit de Quantitate Discreta, sive Numero; hæc autem de Continua, sive Magnitudine. Sed & ex his est quidem altera magis, altera minus pura: est enim Arithmetices subjectum purius quiddam & magis abstractum, quam subjectum Geometriæ; ideoque speculationes habet magis universales, quæ rei Geometricæ pariter ac aliis æque sunt applicabiles.

Mixtæ.

Reliquas autem omnes *Mixtas* esse dicimus. Quæ eatenus quidem sunt Mathematicæ, quatenus in illis occurrit quidpiam vel Arithmeticum, vel Geometricum; quicquid autem insuper est, pro mathematico non habendum est, sed pro mixtura aliunde allata. Atque ex his quidem aliæ minus, aliæ magis Mixtæ sunt; prout ad Mathematicas puras magis minusve accedunt.

Astronomia.

Inter Mixtas, celeberrima quidem est *Astronomia*: Quæ mensuram quidem & calculum adhibet, sed ad Cœlestia tantum φαινόμενα speculanda. Corporum nempe cœlestium magnitudines, distantias, motus, variasque eorum & quoad nos, & inter se, posituras contemplatur.

Cometographia.

Dum autem Phænomena Cœlestia nomino; ne ipsos quidem *Cometas* eximo; qui in sublimi conspiciuntur, & observandi rationem, astrorum observationibus non prorsus absimilem, videntur postulare; quanquam eorum fortasse nonnulli sint sublunares: *Nonnulli*, inquam; Omnes enim sublunares esse, (prout censebant veteres,) neutiquam est concedendum; cum præsentis præteritique seculi observationes manifesto reclament.

Geographia.

Astronomiæ subjungo *Geographiam*; utpote Astronomicis principiis ut plurimum fultam: Quæ, præterquam quod ab Astronomia mutuatur, non multum habet Mathematicum.

Gnomonice.

Utrique vero (Astronomiæ & Geographiæ) *Gnomonicen* subjungo, (unde varia Horologia Scioterica, aliaque inventa consimilia dependent;) & Artem etiam *Nauticam*: Quarum utraque tam Astronomiæ, quam Geographiæ, peritiam postulant.

Ars Nautica.

Chronologia.

Sed nec *Chronologiam* penitus omittam; quæ Temporis calculum rerum gestarum historiis accommodat: Quod quo melius fiat, τῶν φαινομένων cœlestium etiam rationem cum primis habet, & Eclipseon præcipue.

Futiles autem *Genethliacorum* vanitates, aliasque ineptias *Astrologiæ Judiciariæ*, prætereundas duco: ut quæ pro frivolis potius aut superstitiosis imposturis habendæ sunt, quam Mathematicis disciplinis: Ideoque illarum professionem prudentissimus atque Honoratissimus Eques Dominus *Henricus Savilius* Professoribus suis Mathematicis merito interdicendam curavit. *Astrologia judiciaria.*

Post Astronomiam autem, eique affines disciplinas, annumeranda est *Geodæsia*; cui & totam quidem *Longimetriam*, *Planimetriam*, & *Stereometriam* adjungo: Unde propositæ distantiæ, anguli, superficies, & corpora solida, seu (quod perinde est) spatia solidorum capacia, mensurantur: Quæ omnia Geometricis principiis peraguntur, particulari subjecto applicatis. *Geodæsia.*

Sed & *Perspectiva* tota, tam quæ simplicior est, lineasque ab objectis in directum exeuntes perpendit, ipsisque peritioribus Pictoribus usui est; quam quæ in *Dioptricis* & *Catoptricis*, de lineis refractis & reflexis, traditur, Geometrica fere tota est: Quanquam etiam ipsius in Astronomia usus sit haud exiguus. *Perspectiva.*

Neque interim *Mechanices* & *Architectonices* obliviscendum est: Quarum utraque (præsertim Mechanica) Geometricas mensuras ita ad molem corpoream applicat, ut & interim Ponderum, Viriumque motricium, rationem habeat: Unde utilia multa, & quidem admiranda, perficiuntur. *Mechanice. Architectonice.*

Tandem etiam & *Musicam* Mathematicis disciplinis accensere solent; quæ Arithmeticam quandam in Sonis exercet; & proportione quadam peculiari Harmonicos concentus effingit. *Musica.*

Atque hactenus Disciplinas Mathematicas, tam Puras quam Mixtas, breviter quidem, sed quantum præsentis instituti ratio postulat, enumeravimus. Siquæ superesse videantur aliæ, possunt quidem illæ ad recensitarum aliquas commode referri.

CAP. II.

De Geometria, & Arithmetica speciatim. Earum Definitiones, Objecta, Principia, & Affectiones; Easque vere scientias esse.

POst brevem Matheseos Synopsin, in priori capite exhibitam; restat ut eas speciatim seligam disciplinas, quæ muneris nostri conditio ipsaque *Statuta Saviliana*, Professori suo Geometrico peculiariter destinarunt. Adeoque, mixtis plerisque sepositis, de Mathematicis Puris, Arithmetica nempe & Geometria, quædam dicenda restant: Quarum utraque quidem sub *Geometrici Professoris* nomine, (cum mixtis aliquot cognatis,) mihi demandatur: Astronomiâ interim, aliisque quæ ipsi affines sunt, Professorum alteri, *Astronomico* dicto, (Collegæ meo meritissimo,) reservatis.

Geometriam autem & *Arithmeticam* si definire velimus; potest quidem illud fieri vel per Objecta, ut in aliis Scientiis Speculativis; vel per Finem, ut in Artibus & Scientiis Practicis non raro fit. Illud quidem, prout contemplationes pure speculativas continent; Hoc autem, prout ad praxin ordinantur. Arithmeticam enim & Geometriam *Practicam* agnoscimus, non minus quam Speculativam; (quamvis hæc quidem dignitate multum præcedat,) Ut enim datur Geometria Speculativa, eique subordinata Practica; sic etiam Arithmetica Speculativa & Practica. *Geometriæ & Arithmeticæ Definitiones.*

Priori modo definitur *Geometria, Scientia Magnitudinis, quatenus est mensurabilis*; *Arithmetica* vero, *Scientia Numeri quatenus est numerabilis*. Quam utramque definitionem Scientiarum Objecta, non tantum Materialia, sed & Formalia, continere liquet.

Posteriori vero modo, *Geometriam* dico, *Scientiam bene mensurandi*; *Arithmeticam* autem, *Scientiam bene numerandi*.

Quod illas autem *Scientias* dixerim, non est cur quisquam miretur. Has enim ego, siquas alias, Scientias appellandas esse nullus dubito: cum ego nihil deesse sentiam, *An sint Scientiæ.*

ſentiam, quod ad Scientias ſtrictiſſimo ſenſu acceptas requiratur. Habent enim Subjecta, Principia, & Affectiones, eaſque de ſubjectis, demonſtrationibus maxime ſcientificis demonſtratas.

Subjecta quod attinet Affectionum, ſeu, quod perinde eſt, Objecta ſcientiarum, circa quæ verſantur; quæ illa ſint jam oſtendimus.

Objectum Geometriæ.

Eſt nempe Objectum Geometriæ, Magnitudo, quatenus eſt menſurabilis. *Magnitudo* ſcilicet Objectum Materiale indicat; *Menſurabilitas* ipſius rationem Formalem denotat, qua Magnitudinis tractatio Mathematica ab ea differt, quæ in Logica, Phyſica, aut Metaphyſica, occurrit.

Per *Magnitudinem* intelligo, Lineas, Superficies, & Corpora, Mathematice accepta, hoc eſt, abſtracte à Materia; quorum varias affectiones & Proprietates Geometria demonſtrat.

Menſurabilitatem vero latiſſimo quidem ſenſu acceptam vellem, ut, quicquid ad eorum ſingulas affectiones & habitudines inveſtigandas & intelligendas attinet, comprehendat.

Objectum Arithmeticæ.

Objectum Arithmetices, *Numerum* conſtituo, ſive Quantitatem diſcretam, & quidem *quatenus Numerabilem*; Quam Numerabilitatem eadem latitudine acceptam vellem, qua Menſurabilitatem Magnitudinis.

Principia Magnitudinis & Numeri.

Principia quod attinet: *Punctum* quidem magnitudinis, *Unitas* autem numeri, principium vulgo perhibetur. Nam ex fluxu Puncti Lineam, ex fluxu Lineæ Superficiem, Superficiei vero Corpus oriri traditur: nec quidem inepte. Item ex Unitatibus fieri Numeros ſatis liquet; cum numerus vulgo definiatur, Unitatum multitudo.

Non minus recte tamen, me judice, diceretur; ſi Magnitudinis principium, diceremus, (prout hic loci *principii* vox videtur intelligenda) ipſam Extenſionem, ſeu partium extra partes poſitionem: menſurabilitatem nempe ab extenſione originem ducere, res ipſa clamat: Numeri vero principium duceremus, ab illa rerum modificatione, qua quid Unum eſſe aut Multa, vel etiam qua quid Idem eſſe aut diverſum dicitur; prout enim ab Identitate (ſi ita loqui liceat) oritur Unitas, ita & à rerum Diverſitate, Numerum oriri, ſeu pluralitatem, ſatis patet.

Sed & ipſa Unitas, non incommode Numerorum catalogo accenſeri poſſit; quamvis apud vulgus haud ita reputetur. Adeoque ut Quantitas continua, ſeu magnitudo, totum illud continet, quo affirmative reſpondetur quæſtioni *Quantum* quid ſit, ſeu *quam Magnum*: ita numerus de illo omni dicatur, quo quæſtioni *Quot ſunt*, affirmative reſpondetur. Certum eſt, Arithmeticam eodem prorſus modo & unitatem & cæteros numeros tractare: & quidem apud Grammaticos, *numerus ſingularis* ſine ſolœciſmo dicitur. Sed hac de re plura poſt dicenda erunt.

Siquis autem hæc, quæ dixi, magnitudinis & numeri Principia, non tam in Matheſi, quam in Metaphyſica, tractari ſuggerat: Neutiquam ego inficias eo. Neque enim illud omnino Scientiis inſolitum eſt, aut eſſe debet, ut principia habeant aliunde præmonſtrata, vel etiam ipſam ſubjecti definitionem; modo ipſæ de ſubjectis affectiones demonſtrent.

Affectiones.

Affectiones autem varias, tum in Geometria tum in Arithmetica, de magnitudinibus & numeris demonſtrari adeo notum eſt, ut dictu non ſit opus: idque demonſtrandi methodo tam certa quidem & evidenti; ut vix alia opus ſit Logica, quam connata & naturaliter inſita, qua ſequelæ neceſſitas intelligatur.

Non tamen interim ignarus ſum, à Logicis nonnullis (qui tamen, an Matheſin ſatis intellexerint, neſcio,) defectus quoſdam etiam Mathematicis Demonſtrationibus obtendi, quo minus ad Ariſtotelicæ demonſtrationis, quam *Potiſſimam* dicunt, dignitatem accedant. Operæ pretium igitur exiſtimo de Mathematicis Demonſtrationibus nonnulla ſubjungere, ut eadem opera diſciplinas illas, Arithmeticam puta & Geometriam, Scientias eſſe probem, & ἀποδείξεων naturam ſimul explicem.

CAP. III.

De Demonstrationibus Mathematicis. Unde Mathematicas vere Scientias esse confirmatur.

Demonstratio quid.

DEmonstratio, sive συλλογισμὸς ἐπιστημονικὸς, ille reputatur *Syllogismus, qui affectiones proprias de subjecto per proprias causas docet*, vel, ut fusius apud Aristotelem traditur, *l. 1. post. An. c. 2.* Ἀπόδειξις δὲ συλλογισμὸς ἐπιστημονικὸς, ἐξ ἀληθῶν, καὶ πρώτων καὶ ἀμέσων, καὶ γνωριμωτέρων, καὶ προτέρων, καὶ αἰτίων τοῦ συμπεράσματος. Quæ tamen definitio non omni demonstrationi convenire putanda est; sed illi quæ est τοῦ διότι, quæ etiam κυρίως Demonstratio dicitur. Ad Demonstrationem enim τοῦ ὅτι, sufficit argumentum ab effectis ductum. Quod & satis innuit Aristoteles, cum alium *sciendi* modum innuit, de quo se postea dicturum promittit.

Demonstrationes mathematicæ. An Potissimæ.

Demonstrationes autem Mathematicas quod attinet; nemo est quem scio, qui de earum vel certitudine vel evidentia, modo recte instituantur, dubitat; nec qui ullas omnino alias vel certiores vel magis manifestas esse contendit.

Quæritur tamen à nonnullis, An ad illius, quam *Potissimam* dicunt, & ab Aristotele definitam contendunt, Demonstrationis dignitatem assurgant. Et duo potissimum objiciunt, quo minus id concedatur. Ut videre est apud Smiglecium in Logica sua, *Dis.* 14, *Q.* 14.

An entia mathematica sint tantum Imaginaria.

Primum est, quod entia Mathematica, quatenus à Mathematicis considerantur, non omnino existant in rerum natura. Non enim uspiam, inquiunt, reperiuntur Lineæ vel Superficies à Corporibus abstractæ; nec quidem corpora sphærica, cubica, aliave regularia; aut trigona, tetragona, circuli, aliæve figuræ planæ, ad amussim Mathematicam exacta: adeoque vel omnino non esse, vel esse tantum imaginaria, contendunt; ideoque de illis Scientiam esse non posse, cum subjectis tantum imaginariis non possint reales affectiones inesse, nedum de illis demonstrari.

Sed leve omnino hoc est, & facile dissipatur. Quod enim de actuali existentia dicitur, omnino πάρεργον est: cum existentia sit tantum singularium, scientia vero universalium; & ad hoc, ut aliquid sit objectum scientiæ, sive existat sive non existat perinde est, modo ejusmodi sit, ut (in individuo) existere possit: ut de Rosa in hyeme dici solet. Quod enim hujusmodi est, potius ens in potentia dicendum est, quam vel non ens, vel ens imaginarium, sive ens rationis.

Lineas autem & superficies à Corporibus separatas, aut ipsa quidem Mathematica corpora citra materiam Physicam, non exsistere, (adeo etiam nec exsistere posse,) omnino verum est. Cum autem Matheseos objectum ideo imaginatium tantum esse contendunt: Non levis est hic error. Mathematici namque lineam vel superficiem vel corpus Mathematicum citra corpus Physicum exsistere, non magis vel supponunt vel affirmant quam supponit Physicus vel Animal exsistere quod nec homo sit nec brutum, vel etiam Hominem in genere uspiam reperiri qui non sit vel Plato vel Socrates vel alius aliquis singularis. Non enim negat Mathematicus suas lineas, superficies, & figuras, corpori Physico inesse; sed has tantum perpendit & contemplatur, corpore interim Physico non considerato. Aliud enim est abstrahere, aliud negare: Mathematicus suas quidem magnitudines abstrahit à corpore Physico, non tamen de illo negat: Nec magis asserit Mathematicus quantitatem exsistere sine corpore Physico; quam Physicus, substantiam corpoream exsistere sine quantitate: uterque tamen alteram ab altera abstractam contemplatur. Exsistunt igitur, saltem exsistere possunt, non tantum imaginarie sed realiter, entia Mathematica; non quidem per se, sed in corpore Physico; licet abstracte considerentur. Atque hæc sufficiant ad illud quod primum objicitur diluendum.

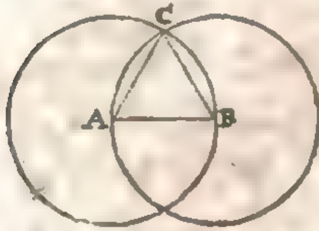
An Demonstrationes sint Scientificæ, sive per veras causas.

Secundum illud quod oggerunt, majoris quidem momenti est ad rem præsentem, modo verum esset: Nempe quod demonstrationes Mathematicæ non contineant in se veras causas essendi, & consequenter, neque illam præcipuam necessitatem quæ ex vera & propria causa desumitur.

Instat Smiglecius, (in disputatione citata) inter alia, in prima demonstratione Euclidis;

Euclidis; ubi, inquit, *demonstratur triangulum esse æquilaterum, ex eo quod sit constructum inter duos circulos, habeatque omnia sua latera a centro ad circumferentiam.*

Ut autem melius intelligatur argumentum, Euclidis demonstrationem aliquanto fusius explicabimus. Proposuerat ille hoc problema solvendum, *Super datam rectam finitam (puta* A B, *) triangulum æquilaterum constituere.* Quod ut fiat jubet ut *centro* A, *intervallo* A B, *describatur circulus* B C; *item centro* B, *intervallo* B A, *describatur circulus* A C; *& a puncto* C, *in quo circuli se mutuo secant, ducantur ad puncta* A, B, *rectæ* C A, C B. His peractis, demonstrat Euclides *constructum triangulum* A B C *esse æquilaterum*; quia nempe *tres rectæ* C A, A B, B C, *sunt inter se æquales.* (Quæ certe est demonstratio à vera & proxima causa: Nam nisi æqualitas laterum sit vera immediata causa cur figura constructa est æquilatera, quænam ea vera causa sit non possum ego vel conjectura assequi.) Æqualitas autem laterum C A, A B, B C, demonstratur, eo quod C A, A B, *sunt radii circuli* B C, *ideoque æquales*; *item* B A, B C, *radii circuli* A C *ideoque æquales*: *cum igitur tam* C A *quam* C B *æquatur rectæ* A B, *sunt tres rectæ* C A, A B, B C, *inter se æquales.* Estque hæc demonstratio Euclidea.



Verum in hac demonstratione, inquit Smiglecius, "Nemo non videt, non assig- "nari veram causam essendi; non enim triangulum idcirco est æquilaterum quia "est inter duos circulos constructum; nam etiamsi non esset inter duos circulos "constructum adhuc esset æquilaterum: Unde talis causa est accidentalis tali proprietati.

Cui ego multa regero.

1° Dico, quod, utut illud verum esset quod affirmatur, nempe demonstrationes Mathematicas non per veram & proximam causam procedere; sunt tamen satis scientificæ, si vel per causam remotiorem vel per effectum, vel per aliud aliquod medium ab alio argumentandi loco deductum procedant, modo certo concludant rem ita esse prout affirmatur, atque aliter esse non posse. Sufficit enim ad hoc, ut demonstratio sit scientifica, *si procedat per medium necessarium ex natura rei*: ut & ipsi quidem, qui hoc objiciunt, non negant, & *Smiglecius* etiam directe affirmat, *Disp.* 15. *qu.* 1. *& alibi.* Quare nec ipse, nec quos scio, alii, negabunt, Disciplinas pure Mathematicas scientias esse, utut perfectissimum illis demonstrandi modum non concedant.

2° Notandum est, quod ipsi, qui negant has demonstrationes perfectas esse, in ratione demonstrationis (ut loquuntur) *Potissimæ*; dubitant, an uspiam alias occurrat in aliis scientiis ejusmodi Potissima demonstratio: ut apud *Smiglecium* videre est, quæstione prius citata.

3° Euclidis demonstratio non igitur concludit Triangulum A B C æquilaterum esse, eo quod *inter duos circulos constructum sit*, (ut *Smiglecio* videtur;) sed quod *latera* C A, A B, B C, *sint inter se æqualia* (ut ex progressu demonstrationis patet.) Quod est, ex vera causa demonstrare. Illud autem, de duobus circulis in constructione adhibitis, subservit tantum æqualitati laterum demonstrandæ.

4° Notandum est Euclidem loco citato, non tam Veritatem Theorematis, quam Constructionem Problematis, demonstrare. Non enim simpliciter probaturus erat, *Triangulum* A B C *esse æquilaterum*; sed *Triangulum, eo, quo imperatum erat, modo constructum, esse æquilaterum*; seu Hypotheticam hanc propositionem, *si Triangulum sic construatur, erit æquilaterum*, veram esse. Jam vero, quanquam aliunde fortasse constare possit veritas consequentis, nempe *Triangulum* A B C *esse æquilaterum*; veritas tamen consequentiæ (*nempe illud ex constructione sequi*;) non aliunde probatur, neque ex alia causa magis immediata dependet, quam ex ipsa constructione: nempe quia constructor sic procedendo acceperat æquales circulorum radios. Ex vera igitur propria & immediata causa demonstravit Euclides *constructionem problematis*. Quamvis igitur, *Triangulum illud æquilaterum esse*, saltem *tria latera esse æqualia*, demonstrare videatur per causam vel remotam vel accidentalem; At certe *constructionem illam problemati satisfacere*, (quod erat Euclidi demonstrandum) per veram, proximam, & immediatam causam demonstratur.

5° Etiam

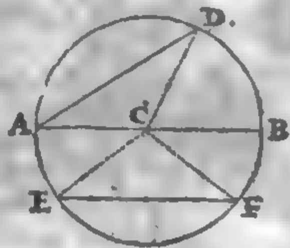
5° Etiam addendum est, in nulla quidem scientia exspectandum esse, ut omnes ibidem demonstrationes æquali perfectionis gradu procedant. Abunde sufficit, si demonstrationes aliquæ sint per veras & proximas causas, ideoque τοῦ διότι, quanquam demonstrationibus illis τοῦ διότι, passim immisceantur aliæ τοῦ ὅτι. Ut in scientiis omnibus abunde liquet.

6° Igitur concedo, si non demonstrationem propositam, at saltem alias non paucas, in Mathesi passim occurrentes, procedere, non tam à causis proximis & immediatis, quam ab aliis locis Topicis; adeoque demonstrationes esse τοῦ ὅτι, non διότι.

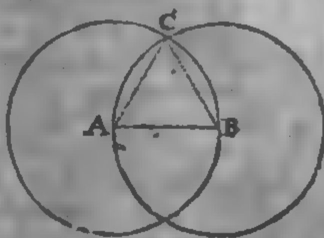
7° Nego tamen, in omnibus demonstrationibus Mathematicis illud obtinere. Multas enim à veris & proximis causis procedere, adeoque demonstrationes esse τοῦ διότι, contendo. Ideoque *Smiglecii* enumeratio demonstrationum, quas esse τοῦ ὅτι contendit, utut vera esset, non tamen est sufficiens enumeratio, cum occurrant aliæ non paucæ, quas esse τοῦ διότι liquet.

8° Igitur ut rem totam dilucidius expediam, tres præsertim demonstrationum Mathematicarum sive modos, sive gradus, sive species statuo. *Tria Demonstrationum genera.*

Prima quidem est illa demonstratio, quæ per *deductionem ad absurdum*, seu impossibile; procedit; ἀπαγωγὴ dicta: quæ, rem ita esse, demonstrat, eo quod sit impossibile, ut secus sit. Ut siquis demonstraturus, *Rectarum circulo inscriptarum, longissimam illam esse, quæ per centrum transit*; illud ita esse asserat, quoniam impossibile est aliam quamvis, per centrum non transeuntem, vel longiorem esse, vel quidem æqualem. Supponatur enim, si fieri possit, recta A D ἀδιάμετρος, per centrum non transiens, diametro AB, per centrum C transeunti, æqualis, vel etiam ipsa longior: & ducatur, à centro C, recta CD. Dico rectam CD æqualem esse rectæ CB, quoniam utraque est recta à centro ad circumferentiam ejusdem circuli; ideoque A C D, (ex duabus rectis AC, CD composita,) erit æqualis diametro A C B, (quoniam si æqualibus æqualia addantur, tota erunt æqualia;) si igitur A D sit æqualis ipsi A B, erit etiam æqualis ipsis A C, C D, simul sumptis, (nam quæ eidem vel æqualibus æquantur, etiam inter se æquantur;) si A D longior sit ipsa A B, erit & longior, quam A C, C D, simul sumptis, (quibus ipsa A B æqualis est;) At horum utrumque absurdum est & impossibile. Cum enim A D sit recta, quæ inter data puncta brevissima est, & quidem unica; impossibile est ut vel longior sit, vel etiam æqualis, ipsis A C, C D, simul sumptis, quæ non nisi per circuitum quendam à puncto A ad punctum D procedunt. Non est igitur recta A D, vel æqualis vel major quam est A B. Sed & eadem omnino demonstratio procederet, si ubivis alias recta non per centrum ducta inscribatur, puta E F: si enim E F sit major vel æqualis ipsi A B, erit proinde major vel æqualis E C, C F, simul sumptis; quoniam E C radius æquatur radio A C, & C F radius æquatur radio C B; ergo tota A C, C B, (hoc est, A B,) æquatur toti E C, C F: At impossibile est, ut recta E F vel æquet vel superet rectas E C, C F simul sumptas, (cum recta sit brevissima inter data puncta,) ergo etiam impossibile est ut vel æquet vel superet rectam A B (ipsis E C, C F, simul sumptis æqualem.) Cum igitur impossibile sit ut A D, vel E F, vel alia quævis recta non per centrum, æquet aut superet rectam A B (vel aliam quamlibet per centrum ductam:) sequitur, Rectarum circulo inscriptarum, quæ per centrum transit esse longissimam. Quod erat demonstrandum. Demonstratur autem, ut patet, deductione ad impossibile. *Deductio ad Absurdum.*



Secunda demonstrandi ratio, est, *Ostensiva* τοῦ ὅτι. Ut, si *recta* AC demonstretur *æqualis esse rectæ* BC; quoniam utraque demonstrata fuerat æqualis ipsi A B: quæ autem eidem sunt æqualia, sunt & æqualia inter se. Estque hæc demonstratio quidem ostensiva, sed tantum τοῦ ὅτι, non autem τοῦ διότι. Communis enim utriusque æquatio eidem tertiæ, indicat quidem earum æqualitatem inter se, non autem illius causa est. Essent enim ipsæ AC, BC, sibi invicem æquales, etiamsi ipsa A B non fuisset ducta. *Demonstratio Ostensiva τοῦ ὅτι.*



Tertia vero demonstrandi ratio, quæ & omnium perfectissima, est *Ostensiva* τοῦ διότι. *τοῦ διότι.*

δείν. Quæ demonſtrat & *quod* ſit, & *quare* ſit. Ejuſmodi eſt demonſtratio, ſiquis *Radios omnes ejuſdem circuli æquales eſſe* inde demonſtret, quod definiatur circulus (ſaltem definiri poſſit) *Figura plana, unica linea curva contenta, quæ a medio comprehenſi ſpatii æqualiter ubique diſtat.* Si enim circuli eſſentia poſtulet, ut ipſius peripheria æqualiter à centro diſtet; immediate ſequitur, tanquam à cauſa vera & proxima, radios omnes, quibus illa diſtantia menſuratur, etiam æquales eſſe. Eſtque demonſtratio hæc Oſtenſiva τ͂ δίοτι, à cauſa proxima & immediata deſumpta.

Si vero objiciat Smiglecius, cauſam hanc non veram & proximam eſſendi cauſam eſſe, ſed accidentalem tantum, quia radii illi, puta, CA, CB, CD, CE, CF, &c. eſſent lineæ æquales, etiamſi circulus ille neutiquam duceretur. Reſpondeo; Verum eſſe, quod eſſent quidem Rectæ æquales, etiamſi nulla figura fuiſſet ducta; non tamen eſſent æquales Radii: ut enim radii ſint, neceſſe eſt ut ab alicujus figuræ centro ad perimetrum ducantur: Ut autem radii illi, & omnes ejuſdem figuræ alii invicem æquales ſint, requiritur ut perimeter iſtius figuræ æqualiter à centro diſtet. Eſtque hæc, æqualis undequaque diſtantia circumferentiæ à centro, vera quidem, neceſſaria, proxima, & immediata cauſa hujus affectionis, nempe, ipſius radios omnes æquales eſſe. Sunt igitur demonſtrationes Mathematicæ quanquam non omnes, aliquæ ſaltem, non modo ſcientificæ, ſed & τ͂ δίοτι.

Siquis denique objiciat, me tres demonſtrationis ſpecies feciſſe, cum vulgo duæ tantum ſtatuantur; nempe τ͂ ὅτι & τ͂ δίοτι. Poterit ille ſi placet, duarum priorum utramque demonſtrationem τ͂ ὅτι, dicere; illam quidem per deductionum ad impoſſibile, hanc vero oſtenſivam; tertiam denique demonſtrationem τ͂ δίοτι. Non enim libet de verbis contendere, modo de rebus conſtet.

Atque hæc ſufficiat de Demonſtrationibus Mathematicis dixiſſe; ut & propoſitæ definitiones vindicentur, & ipſa demonſtrandi methodus inſinuetur. Reſtat deinceps ut ipſam Arithmeticam aggrediar.

CAP. IV.

Unitatis & Numeri definitiones. Quo ſenſu Unum negatur eſſe numerus. Tam Unum quam Nullum, vario ſenſu, Principium Numeri. Unum eſt Numerus minimus. Nullum non eſt numerus. Numeri fracti, non ſunt veri numeri.

Arithmeticæ derivatio & Definitio. Unitatis & Numeri definitiones.

ARithmetica, ἀπὸ τ͂ ἀριθμοῦ dicta, ab ipſo objecto nomen ſortita eſt. Eſt enim *Scientia numeri, quatenus eſt numerabilis,* vel *ſcientia bene numerandi,* ut ſupra declaratum eſt.

Numeri vero principium *Unitas* dicitur.

Unitas autem eſt, *ſecundum quam unumquodque Unum dicitur*: *Numerus autem ex unitatibus compoſita multitudo.* Sic enim Euclides, *lib. 7. de.* 1, 2. Μονάς ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται. Ἀριθμὸς δὲ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

An Unitas ſit Numerus.

Ex his autem Unitatis & Numeri definitionibus, plurimi arbitrantur Unitatem numerorum catalogo non accenſendam, adeoque numerum minimum Binarium eſſe; quanquam illud quidem Euclidem uſpiam dixiſſe non memini.

Miror tamen eouſque hanc ſententiam invaluiſſe, cum non minus Unitas, quam binarius numerus, aut quivis alius, reſpondeat quæſtioni *Quot ſunt.*

Hac autem de re, erat mihi quidem in animo, litem neutiquam movere; cum illa controverſia Logica potius ſeu Metaphyſica, quam Mathematica, videri poſſit; ſaltem obiter monuiſſe, non modo *Unum* ſed & *Nullum*, apud Arithmeticos eodem omnino modo ac reliquos numeros tractari; adeoque apud illos (quicquid de Metaphyſicis dicendum ſit) vel pro Numeris, vel quaſi numeris reputari. Operæ tamen pretium fortaſſis erit paucis oſtendere, cur Unitatem putem vere numerum eſſe, aliiſque numeris annumerandam.

Nec huic forſan adverſabitur Euclidis aliorumque ſententia probe intellecta.

Cum enim nonnulli Unitatem, proprie loquendo, non modo Numerum esse negent, sed & numeri partem; adeoque *numeri principium impers* esse dicant, ut est Magnitudinis *Punctum*, & Temporis *Momentum*: Intelligendi fortasse sunt de Monade seu unitate, non ut numerum singularem designat, sed ut est communis quasi numerorum omnium Denominatio, sive denominator. Sic enim numerus Quaternarius est, qui quatuor unitates numerat, Ternarius qui tres, Binarius qui duas, & Singularis pariter qui unam quidem Unitatem designat. Secus enim non video quo modo vere dici posset, unitatem non esse numeri alicujus partem: cum certum sit, *Unum* non minus esse *Duorum* dimidium, quam *Duo* medietatem esse τῶν *Quatuor*. Dum igitur *Quatuor* dico tantundem valere ac *quatuor unitates*; τὸ *unitates* nec numerus est, nec pars numeri, sed vel numeri denominatio seu denominator, vel ipsum numeratum. Est autem τὸ *Quatuor* earum unitatum numerus. Ita cum *Unum* tantundem valere dico ac *Unam unitatem*, μίαν μονάδα. *Unitas*, est numeri denominatio, seu denominator. *Una*, numerus est, seu unitatum multitudo, (*multitudinis* nomine laxius accepto, ut post dicetur,) dicit enim *Quot* vel *quam multæ* unitates adesse dicuntur, nimirum unicam. *Quo sensu unitas negatur esse numerus.*

Aliud autem est negare *Unitatem*, τὴν μονάδα, aliud vero negare τὸ ἓν *Unum*, numerum esse: Eodem enim sensu & ἡ δεκὰς numerus esse negari possit, quamvis δέκα numerus esse non negetur: Siquis enim *duas decadas* numeret, erit *Decas* numeri denominatio; *Duo* vero, decadum numerus.

Sed revera, si accurate loqui velimus, non tam unitas quam *Nullitas* (si ita loqui liceat) seu *Nullum*, (non tam μονὰς seu ἑνότης quam οὐδενότης, οὐδένεια, seu τὸ μηδέν,) idem respectu numerorum obtinet, quod Punctum respectu magnitudinis, & Momentum respectu temporis. Ut ex operationibus Arithmeticis cum constructione Geometrica comparatis liquido constare possit penitius intuenti. Unitas vero instar certæ cujusdam lineæ, seu alius magnitudinis, ad arbitrium positæ, ad quam aliarum homogenearum fit comparatio. *Nullitas, principium numeri; eo sensu quo punctum, magnitudinis.*

Mihi saltem hoc videtur dicendum. Magnitudo respondet quæstioni Πόσον ἐστι. Numerus vero, quæstioni Πόσα ἐστι. Unde tam Numerus quam magnitudo Ποσότης non incommode dici potest. Latina vero *Quantitatis* appellatio non tam commode videtur (quoad nominis notationem) utrique applicabilis, cum sola continua Quantitas dicit *Quantum* quid sit; Discreta vero, non *Quantum* quid, sed *Quot* sunt; ac si *Quotitas* potius dicenda esset quam quantitas: (sed de nomine non est, ut litigemus, dummodo de re constet.) Ut autem magnitudo, puta Linea, inchoatur à puncto, quod omnino magnitudinis expers est; & quidem (positive) nihil est, sive nullius magnitudinis: ipsa vero Linea tanta est quanto est ipso sive Puncto sive nihilo major: ita & Numerus, non ab unitate, sed revera à nullitate, inchoatus, tantus est, quanto est ipso Nullo major. Et ut *Punctum* puncto additum, sive semel sive centies id fiat, non efficit Quantum; nec etiam Linea, vel quævis alia magnitudo, adjectione Puncti, etiam centies repetita, omnino major fit, aut, ejus ablatione, minor: ita & *Nullum*, sive τὸ μηδὲν, μηδενὶ additum, non faciet ἕν, nec numerus adjectione τοῦ μηδενὸς augetur quidquam, aut ipsius ablatione, minuitur.

At interrogabitur forsan, Num velim ego à Veterum pariter & Recentiorum omnium sententia discedere, qui uno ore Unitatem vocant Principium Numeri?

Respondeo, 1° Nihil absurdi esse majorum inventis addere; præsertim in Mathematicis. Nec hoc illorum laudibus quicquam detrahit: nam & illi prioribus addiderunt.

2° Non mihi tamen volupe est ab aliis discedere, nisi ubi rei necessitas & manifesta ratio suadent. Nec enim placet eorum temeraria audacia, qui cum se vel tantillum scire sentiunt, aliorum omnium peritiam vel flocci faciunt, vel superciliose contemnunt: atque illud potius satagunt, ut aliorum, sive veris sive fictis, σφάλμασιν insultent, quam ut eorum vel sensa satis intelligant, vel probe comperta assentiantur. Est enim illud vel juvenilis nonnunquam levitatis, cum cognitione plerumque non nisi mediocri conjunctæ, vel superciliosi aliquando fastûs indicium; potius quam subacti & maturi ingenii argumentum. Nec raro à rebus perperam intellectis, potius quam à veris illorum quos culpant erroribus, hujusmodi insultus ortum ducunt: & ea ipsa quæ culpant, si intelligerent, non culparent. Et quidem eorum pars longe major qui veterum sensa rejiciunt & flocci faciunt, ipsorum loco vel eadem ipsa quæ culpant, mutata tantum phrasiologia, substituunt,

unt, vel saltem non meliora; & in eos non raro errores nescii incidunt, eosque pro novis inventis reputant, quos veteres, scientes, declinarunt.

Hujus sententiæ, cum sententiis veterum conciliatio.

3° Quod ad rem præsentem attinet, assero, & veterum sententiam probe intellectam, & quæ nos asserimus, satis constare posse. Ipsa enim *Principii* vox duplici saltem acceptatione occurrit: prout nempe significat *Primum quod sic*, vel *Ultimum quod non*: Ut siquis *Motum* ordiri dixerit vel ab *ultimo momento quietis*, vel à *primo momento motus*. Sic si hæredis jus in rem hæreditariam *ab ipso patris interitu*, vel à supremo paternæ vitæ momento, dicatur; est hoc, principium *Ultimum quod non*: supremum enim vitæ paternæ momentum ultimum est eorum quibus hæres succedaneus jus non habuit. Si vero dicamus, Hæredis jus inchoari à *primo momento successionis*; etiam ita vere dicitur; sed est hoc principium *Primum quod sic*. (Atque huc facit disceptatio illa de termino vitæ ac mortis apud Gellium *l. 6. c.* 13. & apud August. *de civit. Dei l.* 13. *c.* 9, 10, 11.) Pariter de principio numeri dicendum est. Si *Primum quod sic* quæratur; *Unitas* assignanda est, ut qui est numerus omnino primus & minimus: Si vero *ultimum quod non*; assignandum est τὸ μηδὲν, sive *Nullum*, ut quæ est numerorum omnium negatio. At de Quantitate continua, seu Magnitudine, si quæratur *Ultimum quod non*; *Punctum* assignamus, quod omnis quidem magnitudinis expers est, cui tamen si vel tantillum accedat, emergit Quantum: sin quæratur *Primum quod sic*; illud omnino non est assignabile; non datur enim minimum Quantum, cum omne quantum, qua quantum, sit in infinitum divisibile. (Quippe nullum *Quantum* tam est exiguum quin habeat *duos Semisses*.) Atque hinc ortum est quod Veteres, principium Numeri designaturi, *Unitatem* posuerint, nempe *Primum quod sic*: Magnitudinis vero principium, *Punctum* dixerint, nempe *ultimum quod non*; quoniam in magnitudine, *Primum quod sic* non est assignabile. Non autem eodem sensu dicitur Unitas principium Numeri, quo Punctum principium Magnitudinis; hoc enim sensu, non τὸ *Unum*, sed τὸ *Nullum*, erit numeri principium, nempe *Ultimum quod non*.

Nollem autem ut quisquam me de lana caprina contendere existimet, dum numeri Principium curiosius inquiro: Insignis enim est hujusce rei utilitas, præsertim in Analytices sive Algebræ speculationibus; quo melius operationis Arithmeticæ cum Geometricis constructionibus congruentia percipiatur: Atque hinc obscuritas non parva est exorta, quod vera numerorum & magnitudinum comparatio vel non satis fuerit à multis intellecta, vel minus saltem diligenter considerata. Atque hoc animadverterunt, credo, Dominus Des Cartes, ejusque ingeniosissimus interpres Dominus à Schooten; illi enim, dum effectiones Geometricas Arithmeticis operationibus adaptant, unitatem non instar Puncti habent, sed ut lineam quandam ad placitum assumptam, reliquosque deinceps numeros aliis designant lineis, quæ ad lineam assumptam eandem habeant rationem quam expositi numeri ad unitatem. Est autem omnino impossibile, si Unitas instar Puncti habeatur, ut ea quæ par est congruentia inter Arithmeticas & Geometricas operationes conservetur.

Quod unitas sit Numerus.

Ego igitur affirmare non dubito, Principium numeri (eo nempe sensu quo Punctum dicitur Principium Magnitudinis) esse τὸ μηδὲν, sive *Nullum*: *Unitatem* vero, seu potius *Unum* non tam esse principium numeri (sensu quo dictum est) quam primum numerum; est enim vere numerus.

Neque me omnino movet, quod Euclides *Numerum* definiverit τὸ ἐκ μονάδων πλῆθος, *multitudinem unitatum*: Nam τὸ πλῆθος ibidem non stricte sumendum est, prout *Multum* opponitur τῷ *Pauco*, vel τῷ *uni*; sed ut designationem τοῦ *Quot sunt* indigetat. Si enim quæratur, *Quantum est*? respondendum erit de magnitudine; si vero, *Quot sunt*? respondendum erit de multitudine: fieri tamen omnino potest, ut *Unum* respondeatur, quando de multitudine quæritur: *v. g.* si de unici filii parente, quæratur *Quot* filios (seu *quam multos*) habeat? respondendum est *unicum*. Quo sensu vero τὸ *unum* respondet quæstioni *quam multa*: eodem & *unitas*, *multitudo* dici poterit. Si quis vero *multitudinem*, vel τὸ πλῆθος [illegible] de unitate dici contendat: Concedo quidem, sed & [illegible] de *duobus* dicitur, quæ non multa equidem, sed *Pauca* sunt. Erat autem hæc ἀκυρολογία hic loci necessaria, quoniam vox κυριωτέρα nec apud Græcos (quantum scio) nec apud Latinos occurrat ulla. Atque hanc τοῦ πλήθους significationem ideo potius amplectendam existimo, quod Euclides nusquam (quod sciam) unitatem numerum esse neget; sed contra-

contrarium potius videatur sentire, dum ipsam unitatem eodem plane modo quo reliquos tractat numeros.

Unum est Numerus minimus.

Unum igitur, numerum esse, affirmo: Est autem numerus omnium *minimus* (& hoc quidem sensu, numeri principium recte dicitur, quia *primum quod sit*, seu numerus primus:) minimum enim est quod affirmative respondet quæstioni *quam multa*; ideoque minima multitudo.

Nullum non est numerus.

Verum quidem est quod & *Nullum* respondeat aliquando quæstioni *Quot* sunt; Ut si quæratur, *Quot* sint Cælorum solidi Orbes? respondebitur non inepte, *Nullus*. At non propterea quod τὸ *Nullum* respondeat quæstioni *Quam multa*, ideo & *multitudo* erit; quoniam respondet Negative. Idem enim est *Nullus* ac *ne ullus*; sicut *Nemo* idem ac *ne homo*. Est autem *Ullus* vox diminutiva à voce *Unus*: Ut enim dicitur *Puer*, *puerulus*, & (contracte) *puellus*, (extrito enim per Syncopen *U*, fit *puerlus* & ob Euphoniam, *puellus*;) & *Pulcher*, *Pulcherulus*, *Pulchellus* (pro *pulcher'lus*) *Tener*, *Tenerulus*, *Tenellus*: sic *Bonus*, *bonulus*, *bellus*; *Unus*, *unulus*, *ullus*: sic *Vinum*, *Villum*, apud Terent. in *Adel*: Idem igitur est Latinorum *Nullum*, (hoc est, *ne unum*, vel ne *unulum*;) ac Græcorum Οὐδὲν & Μηδὲν, hoc est, οὐδὲ ἕν, μηδὲ ἕν. & Anglorum *None*, hoc est *not one*, vel *no one*. Non igitur *Nullum*, sed *Unum* est numerus primus; cum *Nullum* respondeat Negative: tollit enim subjectum quæstionis; nec tam ostendit, *Quot sunt unitates*, quam *unitatem non esse*: ut, qui dicit, *Nullos* esse orbes, negat orbes esse; orbis enim siquis sit, saltem unus erit.

Numeri fracti, non sunt Numeri proprie dicti.

Siquis autem objiciat, intermedia multa dari inter Unum & Nullum; puta Unciam, Sextantem, Quadrantem, Trientem, Semissem; item Bessem, Dodrantem; ut & Quincuncem, Septuncem, Decuncem, Undecuncem (sive deuncem) aliaque ejusmodi partes integri. Ut, si quæratur (instante hora nona) Quot horæ post octavam transierint; respondebitur forte, nec unam, nec nullam, sed semihoram præteriisse. Concedo quidem sic responderi posse: Concedo etiam numeros quos *Fractos* vocant, sive *Fractiones*, esse quidem *Uni* & *Nulli* quasi intermedios. Sed addo, quod jam transitur εἰς ἄλλο γένος. Respondetur enim non de *Quot*, sed de *Quanto*: Non enim dicitur, *Quot horæ* prætererint; sed, *Quantum horæ*, seu quanta pars horæ; non πόσαι ὧραι, sed πόσον τῆς ὥρας, seu ποσημόριον. Pertinet igitur hæc responsio, proprie loquendo, non tam ad quantitatem Discretam, seu numerum, quam ad Continuam; prout hora supponitur esse quid continuum in partes divisibile; quamvis quidem harum partium ad totum ratio numeris exprimatur. Quanquam enim non recte dicatur μηδὲν τῆς ὥρας, *nihil horæ*, recte tamen dicitur μηδεμίαν ὥραν, *nullam horam*, transiisse, ne unam quidem. Idem dicendum est de Fractionibus omnibus; verbi gratia, si ($\frac{3}{4}$) tres horæ quadrantes præteriisse, dicatur; intelligitur, tantum horæ præteriisse, quantum est numerus Ternarius (fractionis numerator) ad (ejusdem Denominatorem) Quaternarium; seu (quod idem est) supponitur hora (ut quid continuum) in quatuor partes Geometrice secta, harum vero tres tantum assumtas esse, quæ quidem Arithmetice numerantur. Indicat igitur Fractionis *Denominator* Geometricam integri in membra partitionem, *Numerator* vero talium membrorum indicatorum numerum seu Multitudinem Arithmeticam: adeoque numerus Fractus non tam Numerus est, quam numerorum ad invicem Rationis indicium. Estque igitur *Unum* Numerus minimus, non autem vel Nullum, vel Numeri Fracti.

CAP. V.

Numerorum Procreatio. Numerus Maximus non datur. Numerorum Nomenclatura; & ordinata dispositio, in continua proportione decupla, apud omnes gentes recepta. Dispositio hæc Gentium distributione antiquior. Unde orta.

Cum Numerorum natura hæc sit, ut unitatum multitudinem designet, seu (quod idem est) ut dicant *Quoties* ponatur Unitas, seu *Quot* Unitates significentur: pro varia Unitatum multitudine, varias oriri numerorum species necesse est. Quælibet enim Unitatis accessio numerorum speciem variat.

Numerorum procreatio.

1 .
2 . .
3 . . .
4 . . . .
5 . . . . .
6 . . . . . .
7 . . . .
8 . . . .
9 . . . .
10 . . . .
11 . . . .
12 . . . .
&c.

Si igitur, ubi prius Nulla erat, ponatur Unitas, fit numerus *singularis*: si adhuc addatur Unitas alia, emergit numerus *Binarius*: accedat alia, & exsurgit *Ternarius*: hic autem Unitate auctus fit *Quaternarius*: quem etiam *Quinarius* unitate superat: & hunc *Senarius*: atque ita deinceps de *Septenario*, *Octonario*, *Novenario*, *Denario*, *Undenario*, *Duodenario*, aliisque sequentibus dicendum est. Estque hæc vera numerorum Originatio, seu Procreatio.

Maximus numerus non est assignabilis.

Quoniam vero Unitatum accessio in infinitum extendi possit; (nec enim numerus ullus adeo magnus est, quin illi possit Unitas, vel una vel plures, adjungi:) est igitur impossibile, ut *numerus Maximus* assignetur, nedum omnes numeri species. Ideoque quamvis numeros dari *actu infinitos*, vel etiam *infinitum numerum*, (hoc est, qui terminos non habeat, sed omnes superet limites,) sit impossibile: sunt tamen numeri possibiles Infiniti; hoc est, nullus est omnino terminus numeris assignabilis, quo cum accedit numerus, ulterius augeri non possit. Quamvis igitur numerus *Minimus* assignetur Unitas, non tamen est assignabilis numerus *Maximus*; ut nec Magnitudo vel Maxima, vel quidem Minima.

Cum tot vero fuerint Numeri species: infiniti plane laboris videri possit, illarum singulis distincta nomina vel invenire, vel ediscere, vel memoria retinere, & in usum depromere. Quis enim mortalium tot excogitare valeat vocabula, quot singulis arenulis (nequid altius dicam) nomina suppeditarent? Quod siquis tamen fecerit; etiamnum centies millies labor idem iterandus erit, nec dum quot opus est assequetur.

Numerorum ordinata dispositio & nomenclatura.

Ne igitur infinitus evaderet labor, pro qualibet Unitatis accessione nova vocabula cudendi, quibus emergentes numeri appellarentur: Excogitavit prudens Antiquorum sagacitas, vel Divina potius monstravit indulgentia, Methodum (nunquam mirandam satis) qua infinitam hanc numerorum varietatem finitis numero vocabulis, & quidem paucis, designare possint; numeros scilicet, methodicæ dispositionis ope, per Gradus & Periodos distribuendo: adeo ut paucis omnino Vocabulis totam numerorum molem, etiam multa millia excedentem, satis distinguere valeamus.

Apud Latinos.

Decem primoribus minimisque suum cuique nomen indiderunt, adeoque *Unum, Duo, Tria, Quatuor, Quinque, Sex, Septem, Octo, Novem, Decem*, numerabant.

Deinceps vero non tam Unitates numerabant quam Decadas; viz. *Decadem Unam, Decades Duas, Tres, Quatuor, Quinque, Sex, Septem, Octo, Novem, Decem*; vel (ut contractius loquuntur) *Decem, Viginti, Triginta, Quadraginta, Quinquaginta, Sexaginta, Septuaginta, Octoginta, Nonaginta, Centum*: Idem enim valent

valent *Viginti* ac *Decades Duæ*; *Triginta* idem ac *Decades Tres*; & ſic deinceps. *Centum* vero idem valet ac *Decades Decem*, ſive *Una Centuria*. De horum autem Vocabulorum ratione poſt dicetur.

Poſtquam autem ad *Centum* perventum eſt, non tam Unitates, aut etiam Decades, quam *Centurias* numerabant, viz. *Centuriam Unam*, *Centurias Duas*, *Tres*, *Quatuor*, *Quinque*, *Sex*, *Septem*, *Octo*, *Novem*, *Decem*; vel, contracte, *Centum*, *Ducenta*, *Trecenta*, *Quadringenta*, *Quingenta*, *Sexcenta*, *Septingenta*, *Octingenta*, *Nongenta*, *Mille*: Idem eſt enim *Ducenta* dicere, ac *Duas Centurias*, *Trecenta*, idem ac *Tres Centurias*, &c. idem vero *Mille* ac *Decem Centurias*.

Quum vero ad *Mille* devenitur, ipſa Millia numerantur; nempe *Mille*, *Bis Mille*, *Ter Mille*, &c. vel *Mille*, *Duo Millia*, *Tria Millia*, & ſic deinceps ad *Decem Millia*, *Centum Millia*, *Millena millia*, *Decies millena millia*, *Centies millena millia*, *Millies millena millia*, *Decies millies millena millia*, & ſic deinceps in infinitum.

Si vero inter majores numeros, præter juſta Millia, ſuperſint Centuriæ, aut, præter Centurias, etiam aliquot Decades; aut tandem, præter Decades, Unitates aliquot; illæ etiam ſunt apponendæ. Ut ſi proponatur numerus (2345) *Bis mille trecenta quadraginta quinque*; eſt numerus ille duobus millibus major, tribus vero millibus minor; ideoque exceſſus ſupra *Duo Millia*, adjungendus eſt, nempe *Trecenta*; nec ita tantum, ſed & *Quadraginta*; & denique *Quinque*.

Sic apud Græcos; poſt numeratos decem primores numeros, Ἓν, Δύο, Τρία, Τέσσαρα, Πέντε, Ἓξ, Ἑπτὰ, Ὀκτὼ, Ἐννέα, Δέκα: numerantur deinde Decades, Εἴκοσι, Τριάκοντα, Τεσσαράκοντα, Πεντήκοντα, Ἑξήκοντα, Ἑβδομήκοντα, Ὀγδοήκοντα, Ἐννενήκοντα, Ἑκατὸν ubi diverſi Monadum numeri, terminationibus tantum variati, tot Decades ſignificant; prout apud Latinos *Triginta*, *quadraginta*, &c. in quibus terminatio *ginta* idem valet quod Græcorum κοντα, mutato nempe κ in *g* (literam ejuſdem organi) quod tamen redit nonnunquam in derivatis, nam promiſcue dicimus *Vigeſimus* & *Viceſimus*, item *Trigeſimus* & *Triceſimus*. Deinde Διακόσια, Τριακόσια, Τετρακόσια, Πεντακόσια, Ἑξακόσια, Ἑπτακόσια, Ὀκτακόσια, Ἐννακόσια, *ducenta*, *trecenta*, *quadringenta*, *quingenta*, *ſexcenta*, *ſeptingenta*, *octingenta*, *nongenta*. Ubi Græca vocabula Διακόσια, Τριακόσια, &c. à Monadum numeris, δύο, τρία, &c. ſeu δὶς, τρὶς, &c. cum voce Ἑκατὸν compoſitis derivantur: ut Latinorum *Ducenta*, *Trecenta*, &c. à vocibus *duo*, *tria*, &c. cum voce *Centum* compoſitis. Quæ ſequuntur vero Chiliadum nomina Χίλια, Δισχίλια, Τρισχίλια, &c. reſpondent Latinorum numeris *Mille*, *Bis Mille*, *Ter Mille*, &c. donec deventum eſt ad Μύρια, δισμύρια, &c. *Decem Millia*, *Viginti Millia*, & ſic deinceps.

Apud Hebræos etiam non diſpar ratio eſt. Nam poſt Monadum numeros אחד שנים שלש ארבע חמש שש שבע שמנה תשע עשר *Unum*, *duo*, *tria*, *quatuor*, *quinque*, *ſex*, *ſeptem*, *octo*, *novem*, *decem*; ſequuntur, עשרים שלשים ארבעים חמשים ששים שבעים שמנים תשעים מאה *Viginti*, *triginta*, *quadraginta*, *quaquaginta*, *ſexaginta*, *ſeptuaginta*, *octoginta*, *nonaginta*, *Centum*: deinde מאתים *ducenta*, שלשה מאות *trecenta*, ארבעה מאות *quadraginta*, &c. uſque ad אלף *mille*, אלפים *bis mille* שלשה אלפים *ter mille*, & ſic deinceps ad רבבה *decem millia*, & quæ ſequuntur.

Numeri autem intermedii, tam apud Græcos & Hebræos, quam Latinos, ex aliorum compoſitione nomina mutuantur, ut אחד עשרה שנים עשרה שלשה עשרה ἕνδεκα, δώδεκα, τρεισκαίδεκα, &c. *Undecim*, *duodecim*, *tredecim*, *quatuordecim*, &c. ſic εἴκοσι ἕν, εἴκοσι δύο, εἴκοσι τρία, &c. *Viginti unum*, *viginti duo*, *viginti tria*, &c. ſic διακόσια τριάκοντα τέσσαρα, *ducenta triginta quatuor*; δισχίλια τριακόσια τεσσαράκοντα πέντε, *bis mille trecenta quadraginta quinque*; aliaque numerorum nomina compoſita. Atque eodem omnino modo etiam in aliis linguis in uſu eſt.

Sufficiunt igitur pauciſſima vocabula exprimendis Numeris quaſi infinitis. Hæ enim duodecim voces, *Unum*, *duo*, *tria*, *quatuor*, *quinque*, *ſex*, *ſeptem*, *octo*, *novem*, *decem*, *centum*, *mille*, cum earum conjugatis, ſufficiunt numeris omnibus exprimendis.

Ut autem hæc numerorum ordinatio facilius percipiatur; ponatur ſeries Punctorum quantum libet longa; ſingulæ vero punctorum decades ſeorſim notentur, totidem uncinis diſtinctæ, quarum quælibet X notetur: Decem vero hujuſmodi decades conjunctæ conſtituunt Centuriam, quam indicat litera C; & (ſi eouſque

Apud Græcos.

Apud Hebræos.

eousque extenderetur series) decem centuriæ colligatæ constituerent Mille. Multo autem facilius esset singula Millia, vel etiam singulas centurias, aut Decades numerare, quam singulas unitates: faciliusque multo mente concipitur ejusmodi multitudo, ita in Decades & Centurias distributa, quam dum totidem puncta indiscriminatim & confuse ponuntur. Nec multo secus se res habet in Tacticis, ubi militum ordinata distributio consideratur: Nam distributis militibus in varias Legiones, Cohortes, Quaterniones, aliasque ejusmodi partes, partiumque particulas & membra; facile est iis omnibus ab Imperatore mandata tradi. sin promiscua turba seu multitudine ἀτάκτως confundantur; impossibile est ut omnes imperia vel persentiscant vel exsequantur. Atque hactenus de numerorum constitutione & Ordinatione, prout vulgo apud omnes usurpantur.

Duo autem hic in genere monenda existimo; & duo itidem inde observanda.

Quamvis alia quævis proportio adhiberi posset.

Monitorum primum hoc est; Quod quamvis (ut patet) Numeri vulgo proportione decupla distribuantur; ita nempe ut decem Unitates in una Decade colligantur, decem item Decades in una centuria, ut & centuriæ decem in una Chiliade, & sic deinceps; Potuisset tamen alia quævis proportio adhiberi; puta quadrupla, quintupla, sextupla, aut quævis alia. Ita series punctorum modo proposita, quæ ex uno latere distribuitur juxta proportionem decuplam, in decades, & centurias, seu decadum decades; adeoque continet unam centuriam, & sex insuper Decades, septemque Unitates. eadem ex alio latere proportione quadrupla distribuitur in Quaterniones, eorumque quadrupla, & ipsa itidem quadruplata; adeoque continet duos Quaterniones quaternionum quadruplicatorum, & insuper duos Quaterniones quadruplicatos, cum uno etiam Quaternione simplici, tribusque unitatibus.

Et revera, alia nonnunquam proportio aliquibus in rebus usurpatur. Sic enim in fractionibus (ut vocantur) Astronomicis, sive Sexagenariis; 60 minuta quarta constituunt unum minutum tertium; 60 minuta tertia unum secundum; 60 secunda unum minutum primum; & totidem minuta prima, unum gradum, proportione continua sexagecupla. Sic, apud Hebræos: annus quisque septimus erat Sabbaticus; Sabbaticorum vero quisque septimus erat Jubilæus: adeoque anni septem constituunt unam annorum Hebdomadem, & septem hebdomades unam periodum Jubilaicam, sunt enim septies septem (seu septem hebdomades) quadraginta novem. Dicetur forsan, quod Jubilæus, non quadragesimus nonus, sed quinquagesimus annus erat. Fateor quidem annum quinquagesimum Jubilæo destinatum, sed inclusive, Jubilæo nempe utrinque posito in computum admisso: eo scilicet modo quo ludi Olympici quolibet anno quinto dicuntur celebrari (nempe inclusive) cum tamen Olympias sit revera spatium quatuor annorum, ut notum est.

Hoc autem maxime perspicuum est in operationibus Algebricis; ubi Unitas, Radix, Quadratum, Cubus, aliæque (ut loquuntur) deinceps potestates, juxta quamlibet proportionem proponuntur. Est autem ille progressus potestatum non nisi graduum in certa ratione progressus. Ut in ratione decupla, erit Decas, *Radix*; centuria, *Quadratum*; Mille, *Cubus*; Decies mille, *Quadrati-quadratum*, & sic deinceps. In sexagecupla proportione, si minutum Quartum ut *Unitas* ponatur, erit minutum tertium *Radix*, minutum secundum *Quadratum*, minutum primum *Cubus*, Gradus vero *Quadrati-quadratum*; & sic deinceps. In proportione septupla si Unitas Annum designet, erit *Septennium* (seu annorum Hebdomas) *Radix*, Periodus Jubilaica *Quadratum*, &c. Atque idem accidit in qualibet proportione assumpta. Qua de re plura post dicenda erunt.

 Alterum

Alterum eorum quæ monenda duxi, hoc est; Quod quamvis Numeros licuerit qualibet proportione disposuisse; tamen, quod mirum dictu est, in eadem proportione Decupla omnes ubique terrarum gentes mire conspirant. Nescio enim an ulla unquam natio reperta fuerit, quæ numeros proportione Decupla non disposuit. Sic enim Hebræi, Græci, Latini, hodierni Indi, Barbari omnes, etiam ipsi Americani. Licet enim aliis aliquando proportionibus, aliquibus in rebus usi fuerint, (prout in ponderum Scrupulis, Granis, Unciis, Libris; item in nummorum Denariis, Solidis, Libris, &c.) Numerorum tamen universalis dispositio proportione decupla semper, quod sciam, & ubique obtinuit. *Decupla tamen omnes usi sunt.*

Hinc duo mihi videntur serio observanda, ut quæ manifesto inde consequuntur; de quibus nemo, credo, qui rem paulo pressius pensitaverit, omnino dubitare poterit. 1° Gentes omnes ab eadem origine ortas esse, & quasi ex eodem trunco in varios ramos divisas. 2° Hanc numerorum peritiam & dispositionem illa Gentium distributione antiquiorem esse. Impossibile enim omnino videtur, & plane incredibile, ut omnes omnino ubique terrarum Gentes vel fortuito quidem, vel etiam ex pacto, in eandem proportionem incidissent, nisi ab eodem fonte communi quadam traditione derivassent. Secus enim cur eandem potius numerorum dispositionem, quam eandem nummorum, ponderum, aut mensurarum rationem obtinerent; nemo facile dixerit: in his autem quam insignis ubique & fere infinita sit varietas nemo nescit. *Hæc Numerorum dispositio, ipsarum Gentium distributione antiquior.*

Qua vero de causa proportionem Decuplam in disponendis numeris elegerint veteres (primi nempe numerorum dispositores,) potius quam aliam quamvis, cum potuissent ad libitum quamlibet aliam adhibuisse; non nisi conjecturâ valemus assequi, tanquam in re omni memoria antiquiori. Si autem conjecturæ locus sit, nulla mihi potior occurrit ratio, quam quod propter Digitorum numerum illud fecerint. Sicut enim Mensurandi rationem ab ipso corpore humano desumptam esse constet (inde nempe desumptæ sunt mensuræ plurimæ, ut Digitus, Pollex, Palmus, Spithama, Pes, Cubitus, Ulna, Passus, Orgyia, &c.) inde & Numerandi pariter rationem desumptam esse, plusquam est probabile. Ideoque cum singulis digitis totidem Unitates numerassent, necesse est, ut, post integram decadem, denuo ab Unitate incipiant, progrediendo ad secundæ decadis terminum; & sic deinceps; post quamlibet finitam decadem, denuo ad unitatem redeundo. *Unde desumpta.*

Atque hactenus Numerorum Constitutionem, ex Unitatibus; & eorum in proportione decupla Dispositionem, per Decadas, Centurias, & Millia, tradidimus. Sequitur ut eorundem Nominum, saltem apud Latinos, Etymologiam, & eorum Notationem sive Scriptionem explicemus, adeoque tam Appellandi quam Describendi rationem.

CAP. VI.

Latina Numerorum Nomina à Græcis derivantur. Aliæ quam plurimæ Etymologiæ passim immiscentur.

NUmerorum Nomina quod attinet, eorumque Etymologiam; non est ut in omnibus linguis illud prosequar. *Numerorum Nomina.*

Nomina numerorum apud Hebræos, sunt, ni fallor, (vel omnia, vel pleraque saltem,) pure Primitiva, & ad placitum imposita; adeo ut in illorum originem inquirere supervacaneum sit. *Hebræa.*

Atque idem fere de Græcis dicendum est: vel enim ea lingua pure Primitiva est, nec aliunde derivata, (præter vocabula nonnulla ab Hebræis & Arabibus mutuata,) vel saltem, si aliæ fuerint olim linguæ unde descenderat, illæ nunc penitus ignorantur; adeo ut ubi ad Græcam originem deventum fuerit, haud licebit ulterius progredi. Affirmat quidem *Plato* in *Cratilo* Græcos à Barbaris vocabula multa accepisse: at quænam illa fuerint, ut & à quibus mutuata, non nobis erit adeo facile investigatu. *Græca.*

Latina vero numerorum Nomina omnia, à Græcis fuisse desumpta, ego omnino existimo; quanquam eorum aliquot ab eorum origine adeo videantur remota, ut *Latina.*

ægrius agnoſcantur. Nos a facilioribus exorſi reliqua ſuo ordine attingemus.

Octo. *Octo* dicitur à Græcorum ὀκτώ. Hinc vero *octavus* (ὄγδοος) *octies*, *octonus*, *octonarius*, *&c.*

Duo. Ambo. *Duo* à Græcorum δύο dicitur; ſicut & *Ambo*, ab ἄμφω dicitur. (Inde vero noſtrum *two*, ſicut à *Tribus*, *ſex*, *ſeptem*, *octo*, noſtra *Three*, *ſix*, *ſeven*, *eight*; & à *Noveni*, *Deni*, noſtra *nine*, *ten*; Niſi potius antiquos Teutones, unde nos illa accepimus, hæc omnia immediate à Græcis dicamus accepiſſe: at *Four* & *Five*, tam à Græcis quam Latinis remotius abſunt.)

Bis. Latinum *Bis* à Græcorum Δὶς derivatur, converſo δ in *B*; ſicut *Bellum*, *Bellatores* dicimus, quod olim *Duellum*, *duellatores* ſcribebant: (niſi forte à Græco Πόλεμος dictum *ſit bellum*, quod non exiſtimo.) Sic *Duonus*, *duellus* dicebant priſci, pro quibus nos *Bonus*, *bellus*: ſic *Bes*, *beſſis*, olim *Des*, *deſſis*. videndi Varro & Scaliger in Varr: & Feſt. atque Merul. ad Ennium.

Bini, binarius, bifarius. A *Bis* vero *Bini* dicitur, & *Binarius*, & *Bifarius*, quaſi *Bi-varius*: vel forſan *Bifarius*, *Trifarius*, &c. quaſi διφάσιος, τετράσιος: mutato σ in *r*, ut in χθὲς, χθεσὶ, *heri*; χυμὸς *humor*, πράσον *porrum*.

Viginti. Sed & *Viginti* (quaſi *Biginti*, vel *Biſginti*) terminatione à Græcorum κοντα deſumpta. Quæ enim Latini *Triginta*, *Quadraginta*, &c. dicunt, Græci τριάκοντα, τεσσαράκοντα, &c. efferunt.

Sed & ipſum εἴκοσι Græce, quaſi δίκοσι dictum puto; ipſamque terminationem κοσι (in εἴκοσι) tantundem valere ac κοντα in ſequentibus. Nam quod terminatio ſit iſtic ι, hic α, non major eſt diſcrepantia, quam cum Latine dicamus *Viginti*, aut *Triginta*. Quod illic autem reperiatur σ, hic τ, omnino hoc exiguum eſt, cum hæ literæ ſint facillime commutabiles, (ut ab ἀνύτω, fit Futurum, ἀνύσω, item ἐρύτλον & ὀρύσσω promiſcue dicuntur, aliaque ejuſmodi infinita; & quidem εἴκοσι Dorice εἴκατι dicitur; ſic *Aquam* Germani *Waſſer* dicunt, Angli & Belgæ *Water*, aliaque ſunt innumera.) *N* vero, in terminatione κοντα, non Radicale eſt, ſed Epentheticum, ideoque in Derivatis excidit; eodem enim prorſus modo ab εἴκοσι formatur εἰκοστὸς, ac à τριάκοντα τριακοστός. Sic à Latinorum *Triginta* formatur *Trigeſimus*; amiſſo *n*, & *t* in *s* converſo, ut ῥητίνη *reſina*, πτύω, Æol. σπύω *ſpuo*, σπυρίζω *ſperne*, & Angl. *ſpurn*. *meto meſſis*. Ut igitur pro *nt* in *Triginta*, ſubſtituitur ſola litera *s* in *Trigeſimus*; ſic pro ντ in terminatione κοντα, ſubſtituitur ſimplex σ in terminatione κοσι. Sic à λέοντι, τιθέντι, &c. formantur λέουσι, τιθεῖσι, &c. Sic pro εἰσὶ, τύπτουσι, &c. dicunt Dores ἐντὶ, τύπτοντι, &c.

Leviculum autem eſt illud, quod Latinorum terminatio *ginta* per *g* ſcribitur, Græcorum vero κοντα per κ, earum enim literarum facillima eſt commutatio, cum ſint ejuſdem organi; Imo ab iiſdem vocibus *Viginti*, *Triginta*, promiſcue dicimus *Vigeſimus*, *Trigeſimus*, & *Viceſimus*, *Triceſimus*, (ut ſupra dictum eſt,) item *Viceni*, *Triceni*. Sic Græce Γάϊος dicitur qui Latine *Caius*; & contra, à Græcis κυβερνάω, κύκνος, fiunt Latina *guberno*, *cygnus*, aliaque ejuſmodi non pauca paſſim occurrunt. Neque omnino mirum eſt literas *C* & *G* promiſcue uſurpari; Quod quidem facile fieri poteſt, cum literarum *C* & *G*, recte pronunciatarum, (nempe ut Græcorum κ & γ) ſonus admodum affinis ſit. Quamvis enim literæ iſtæ *C* & *G* alios habent nunc dierum ſonos ante vocales *E* & *I*, quam ante *A*, *O*, *U*; illud tamen antiquitus obtinuiſſe neutiquam eſt credibile. Nulla enim ratio videtur, cur *Accipio*, *Accentus*, *&c.* pro *Adcipio*, *Adcentus*, *&c.* ſcriberentur; niſi ut ſonus literæ D tranſiret in ſonum ſequentis conſonæ, (ut cum *corripio*, *collimo*, *commuto*, *arripio*, *aſſumo*, *allicio*, *appono*; *attendo*, *affundo*, *&c.* efferuntur pro *conripio*, *conlimo*, *&c.*) ideoque ſi *C* ut *S* ſonaretur, potius *Aſcipio*, *Aſcentus*, &c. ſcribendum eſſet, ut in *Aſſciſco*, *Aſſcendo*, *&c.* Atque idem dicendum de litera *G*, propter voces *Agger*, *Aggeſtum*, *Suggero*, *Suggeſtum*, *&c.* nam certe *Adger Adgeſtum*, *&c.* mollius ſonarent, ſi *G* deberet eo ſono proferri, quo nos nunc dierum proferimus literam *G* ante *E* & *I*, vel *Azger*, *Azgeſtum*, *&c.* ſi Gallorum more efferenda ſit. Nam mollior (qui dicitur) ſonus literæ *G*, magnam habet apud nos affinitatem cum ſono literæ *D*, & literæ Z apud Gallos, imo ſonum hunc in ſe continet. Nam verbi gratia, vox *Jupiter*, quam Germani ſonant *Tupiter*, Angli *Dyupiter*, Galli *Zyupiter* pronunciant.

Ut autem à *Bis* fiat *Viginti* (mutata litera *B* in *U*,) non mirum eſt, cum *V* conſona, prout nunc dierum efferri ſolet, non aliter à *B* differat, quam *F* vel *Ph* à *P*, ſeu φ à π, hoc eſt, ut litera aſpirata à ſua tenui. Nam ſi literas *P*, *B*,

pronunciaturis spiritus interceptus permittatur erumpere, formabitur illic F, hic V; * (prout nempe F & V nunc efferimus.) Imo eadem litera Græca βῆτα, ab aliis *Beta*, ab aliis (satis quidem barbare) *Vita* dicitur; hinc *f* & *v* in MSS. Græcis sæpissime confunduntur: & Hispani fere promiscue tam scribunt quam efferunt *b* & *v*: earumque literarum affinitas maxima nemini non innotescit. Hinc à Græcorum βέλομαι fit Latinum *volo*; ab Hebræorum דוד fit Græcum Δαβίδ, unde iterum Latinorum *David* & *Davides*, Anglorum *David*, Cambrorum *Dafid* & *Dewy*: A Latinorum *liber* & *libra* fit Gallorum *livre*; à *faba*, *febris*, &c. fiunt Gallorum *feve*, *fevre*, &c. Item à Latinorum *libero*, *cooperio*, *habeo*, *recipio*, &c. fiunt Anglorum *deliver*, *cover*, *have*, *receive*, &c. aliaque innumera passim observanda sunt; ut non mirum sit *B* in *U* commutari. Monet tamen ex Salmasio Gatakerus (quod nec mihi displicet) deduci posse *Viginti* à Dorico εἴκατι, pro εἴκοσι: præfixo Æolico Digamma, ut in Ἰτέα *Vitex*, ἴτυς *vitus*, rotæ canthus, &c. unde Hesychio Γιτέα, ἰτέα: Γέαρ, ἔαρ (ver:) Γία, ἄνθη (violæ utique) κ in *g* permutato ut in κώβιος *gobius*, κύκνος *cygnus*: *n* inserto, ut in τόκα *tunc*, ὑγρῶ *ungo*, λείπω *linquo*. Quæ rectius forte scriberentur, Ϝιτέα, ἰτέα: Ϝέαρ, ἔαρ: Ϝία, ἄνθη: per Digamma Æolicum F.

* Vid. Tractatum de Loquela, quam meæ Grammaticæ linguæ Anglicanæ præfixi.

Ut autem à *Bis* fit *Viginti*, sic à *Tribus*, *Quatuor*, &c. vel *Ter*, *Quater*, &c. fiunt *Triginta*, *Quadraginta*, &c. terminatione ubique à Græcorum κοντα deducta. Pariter apud Anglos, *Twenty*, *Thirty*, (seu, ut loquuntur Scoti, *Threety*) *Forty*, &c. à *Twaine*, *Three*, *Four*, &c. descendunt, addita terminatione *ty* à voce *Ten*, ut videtur, desumpta. Sed progrediendum est. *Triginta, &c.*

Tres idem est Latine ac τρεῖς Græce: Atque hinc *ter*, *ternio*, *ternus*, *ternarius*, *tertius*, &c. *Tres.*

A Græcorum Δέκα Latinorum *Decem* desumptum esse nemo dubitat, terminatione α in *em* mutata. A *Decem* vero formantur *Decimus*, *Decies*, *Deni* (quasi *Deceni*,) *Denarius*. &c. *Decem.*

Sic ab Ἕξ, Ἑπτὰ, formantur *Sex*, *Septem*; spiritu aspero in *s* converso. Quod facile fieri posse, ab aliis derivatis abunde liquet. Dicimus enim ab ὗς *sus*, ab ὑπὸ *sub*, ab ὑπὲρ *super*, & *supra*, (at in *up* & *upper*, inde fortasse deductis, *s* iterum excidit,) sic ab ἕρπω *serpo*, ab ἑρμῆς (vel εἱρμὸς) *sermo*; sic ab εἴρω (dico) *sero*, *serui*, eo sensu quo dicitur *serere sermones*, & *vario sermone serebant*. Virgil. h. e. *loquebantur*: atque hinc *dissero dissérui*: Et ab εἴρω (necto) fit *sero* (hoc est *jungo*) unde *sertum*, *desero*, *consero*: (At *sero*, *sevi*, hoc est, *semino*, à σπείρω dicitur.) sic ἅλλω *salio*, ἓ *se*, ἑὸς *suus*, ὅλος *solus*, ἥλιος *sol*, ἅλς *sal*, unde & σάλος *salum*; sic ὕλη *sylva*; ab ἅμα vel ὁμῶ fit *simul*; sic ὅμοιος *similis*, (ubi terminatio *lis* servilis est, ut in *facilis*, *humilis*, &c.) ab ἵζω, ἵζω, ἵστημι, *sedeo*, *sisto*; ab ἕπω *sequor*; sic ab ὕπατος *summus*, (mutato τος in *mus*, hoc est, terminatione superlativi Græci in terminationem superlativi Latini; & *p* in *m*, euphoniæ gratia, nempe pro *supmus*, *summus*, ut ab ὕπνος *somnus* & *sopor*,) sic ab ἥμισυ *semis*, & pro ἡμι in compositis Græcis fit *semi* in compositis Latinis, ut ἡμικύκλιον *semicirculus*: Sed & pro spiritu leni nonnunquam substituitur *s*; ut ab εἰμὶ *sum*, (quod ab εἰμὶ descendere, ex aliis personis magis liquet, cum enim ab εἶς, ἐστὶ, ἐστὲ dicimus *es*, *est*, *estis*, cur non ab εἰμὶ, ἐσμὲν, εἰσὶ, vel Dor. ἐμμὶ, εἶμες, ἐντὶ, *sum*, *sumus*, *sunt*.) sic εἰ *si*, ἐὰν *sin*, (hoc est, *si vero* ἐὰν δὲ, at *sin* pro *si non*, ex *si* & *ne* componitur.) Et ante consonas non raro præfigitur *s*; ut à γράφω *scribo*, à γλάφω, γλύφω, *scalpo*, *sculpo*, (tanquam à γάλφω & γύλφω, metathesi literæ λ, ut cum pro κράτος & κράτιστος dicimus κάρτος & κάρτιστος) quanquam & ipsa γράφω, γλάφω, γλύφω, ab Hebræo כרב *exarare*, desumpta videntur, mutato (in posterioribus) ר in ל: cui affine est כתב *scribere*. Sed de his satis. A *sex* autem & *septem* fiunt *sexies*, *sextus* (quasi ab ἕκτος) *senus* (quasi *sexenus*) *senio*, *senarius*, &c. Item, *septies*, *septimus* (ut ἕβδομος,) *septenus*, *septenarius*. &c. *Sex. Septem.*

A Græcorum Εἷς, ἕν, ἑνὸς, fit Latinorum *Unus*; mutato ε in *u*; quod ipsum non raro fit. (Atque hinc *Unicus*, & *ullus*, quasi *unulus*, & *nullus*, quasi *ne ullus*, ut supra dictum est.) Sic ἑὸς, *suus*; σὸς, τεὸς, *tuus*; σκόπελος, *scopulus*; νεφέλη, *nebula*; à φλέγω fiunt φλὸξ, φλογὸς, & *fulgeo*; ab ἀμέλγω, ἀμολγὴ, & *mulgeo*. ab ἀμέργω, ἀμοργὴ, *amurca*; à μείλιχος vel μειλίσσω, *mulceo*; à μέλι, *mel* & *mulsum*; à σφενδόνη, *funda*.

Aut forte dici possit *Unus* quasi contracte pro *Uenus* vel *Wenus* aut *Venus*; Nempe pro spiritu aspero vocis ἕν, substituta consona *V*; quæ olim (non raro saltem, si non semper) mollius efferebatur ut nostrum *W*; (quanquam Prisciani tempore duriorem sonum adepta fuerat, quem & nunc dierum apud plerosque retinet;)

tinet;) quod ex derivatis non paucis liquet; est enim apud nos *Vinum*, wine; *Via*, a way; *Veni*, went; *Volo, vellem*, will, would; *volvo*, wallow; *ventus*, wind; *vellus*, wooll; *vespa*, a Wasp; &c. Sive autem dicat quis voces nostrates illas à Latinis, vel potius tam nostras quam Latinas ab antiqua lingua Teutonica desumptas, (quæ quidem cum Latina poterit de antiquitate contendere,) perinde omnino est; utcunque enim se res habet, affines illos fuisse sonos, non est dubium. Sic pro *Valens*, *Valerius*, scribebant Græci οὐάλης, οὐαλέριος, & à Græco οὐαὶ fit Latinum *Væ*, & Anglicum *Wo*, vel (prout dicebant veteres, & etiamnum dicunt Boreales) *wea*.

Ut autem pro spiritu aspero præponatur *V*, hoc est, ut pro *Henos*, dicatur *Venus*, *Uenus*, seu *Wenus*, facile concedi potest; sic enim ab ἑστία dicitur *Vesta*, ab ἕσπερος *Vesper*; imo etiam pro spiritu leni; dicitur enim ab εἴδω (quod ipsum ידע) *video*; ab ἐσθὴς, *vestis*; ab ἔδω, *esca* & *vescor*; ab οἶνος, *vinum*; ab ἔντερον, *venter*; ab ἲς, *vis*, (nisi forsan à βίη,) ab ἔαρ vel ἦρ, *ver*; ab ἴον, *viola*: Sed & non raro interseritur *V*; dicitur enim ab ὠὸν, *ovum*; ab ὄϊς, *ovis*; à βοῦς, βοὸς, *bos, bovis*; à ναῦς ναὸς, *navis*; à παῦρον, *paulum, parum, parvum*; ab αἰὼν *ævum*, (unde etiam nostrum *aye*, & *age*, nam *y* & *g* sunt apud nos literæ admodum affines, & sæpissime commutabiles;) sic à νέω, *novi*; ab ὄγδοος, *octavus*; à νέος, *novus*; & ab ἐννέα, *novem*: sic Ἰέρνα, *Hiverna, Hibernia, Ireland*.

Ideo autem *Unum*, tanquam ex *Uenum* contractum videri possit, (potius quam immediate ab ἕνος, mutato ε in *u*,) quia prima syllaba longa est, quæ, si immediate fieret ex ε, potius esset brevis. Forsan dici poterit *Unum* ex ὁ ἓν (per crasin) contractum fieri.

Hinc autem & *Bonum* dici forte conjicias, quasi ὁ ἓν, *quod unum est*. Platonici enim omnes formalem rationem *Boni* in *Unitate* collocant: unde factum est quod *Unum & Bonum converti* dicimus. Nam si ex ὁ ἓν *Hoënum*, vel *Uenum* dicatur, &, præfixo *F* Æolico, *Foënum*; digamma illud facile in *B* migrabit, ut fiat *Boënum*, unde & *Boënè*, & (extritis inde *e*, hinc *o*) *Bonum* & *Bene*, unde & *belius* pro *bonulus*, vel *benulus* vel *boenulus*. Atque hinc forsan evenit, quod quamvis *bonum* & *bene* sint conjugata, in altero tamen *o*, in altero vero *e* maneat. Sic *forem* & *fore* dicimus, pro *fuerem* & *fuere*, ab antiquo *fuo*, *fui*, quod à Græco φύω descendit. Ex *F* autem fieri posse *B*, vel inde liquet, quod *Bubulcus* & *Bubsequa* dicitur, pro Bovisequa, à Græco βοῦς βοὸς, Æolice βοϜός.

Ne quem vero terreat in *Bonum* & *Bene*, syllaba prima brevis, quam exspectarent potius longam futuram si ab ὁ ἓν contracta diceretur: Sciendum est regulam illam, *syllabas contractione factas longas esse*, non ubique valere; quod, ne longius abeam, in ipsis *forem*, & *fore*, ex *fuerem* & *fuere* ab antiquo *fuo* contractione factis, est extra dubium; sic in *fit* pro *fiet*, & multis aliis.

Contractio per θλίψιν, & per κρᾶσιν.

Quod quidem quo rectius intelligatur, notandum est, contractionem duplici modo fieri; nempe vel per θλίψιν, vel per κρᾶσιν. Hoc quidem, quando duarum syllabarum vocales in unam sive vocalem sive diphthongum coeunt, & quidem vel mutatæ vel non mutatæ, (nisi malis illam κρᾶσιν, hanc συναίρεσιν appellare) ut (apud Græcos) τείχεϊ τείχει, τείχεος τείχους, τείχεα τείχη, &c. Et syllaba sic contracta evadit longa. Illud autem, quando, nullâ vocalium coalitione factâ, altera plane expulsa, reliqua intacta manet, ut in ἐμαυτοῦ, σαυτοῦ, &c. sic in σφῶϊ σφὶ, σφῶϊν, σφίν & multis aliis; vel etiam ubi diphthongi vocalis altera expellitur manente reliqua, ut in Doricis τύπτες, τύπτε, τύπτεν, &c. pro τύπτεις, τύπτει, τύπτειν, & multis aliis. Et quoties hoc evenit, vocalis ea quæ superest eandem quam prius habuit retinet quantitatem; nempe si prius longa fuerit, longa manet; sin brevis fuerit, manet adhuc brevis, nec propter contractionem producitur. Sic apud Homerum

Iliad. ω. v. 88. Ὄρσο Θέτι καλέει Ζεὺς — }
Odyss. η. v. 342. Ὄρσο κίων ὦ ξεῖνε ——— } pro Ὄρσεο
Et Il. ε. v. 109. Ὄρσεο Πέπον Καπανηϊάδη. —

Aliquando autem vix aliud superest indicium per κρᾶσιν an per θλίψιν fiat contractio, quam ex quantitate vocalis quæ superest, ut βόαε, βόα· ubi duæ vocales breves αε in unam longam α coalescunt; adeoque si α etiam prius ante contractionem fuisset longa, perinde fere esset sive per κρᾶσιν sive per θλίψιν contractionem fieri diceremus, saltem nisi aliorum verborum analogia eorum alterum potius suaderet.

Conjugationis tertiæ Verba contracta.

Quod autem Græcis familiare est, illud & Latinis non raro usu venit: præsertim in verbis tertiæ & quartæ conjugationis in *io* terminatis, ut *cupio, fugio, audio, nescio, &c.*

nescio, &c. Cum enim ad formam tertiæ conjugationis (*Lego, legis, legit, legimus, legitis, legunt, legebam, legam, lege, legito, legerem, legere, legendi, legens, &c.*) dicendum esset verbi gratia, *cupio, cupiis, cupiit, cupiimus, cupiitis, cupiunt, cupiebam, cupiam, cupie, cupiito, cupierem, cupiere, cupiendi, cupiens, &c.* dicimus tamen contractius *cupis, cupit, cupimus, cupitis, cupe, cupito, cuperem, cupere, &c.* nempe per θλῖψιν prioris vocalis, reliqua suam quantitatem retinente; at *cupio, cupiunt, cupiebam, cupiam, cupiendi, cupiens,* &c. omnino incontracte: & similiter in iis omnibus quæ, etiam post contractionem, reputantur adhuc tertiæ conjugationis.

Quarta Conjugatio Verborum, est Tertia forma contracta.

In reliquis autem quæ ad quartam conjugationem referuntur, (quanquam & ea omnia sint revera non nisi verba tertiæ conjugationis contracta,) per κρᾶσιν plerumque fit contractio nempe *audîs, audîmus, audîtis, audî, audîto, audîrem, audîre, &c.* duabus nempe vocalibus brevibus *ii*, vel *ie* per κρᾶσιν in unam longam *î* coalescentibus; at *audit* (ultima brevi) per θλῖψιν alterius *i*, reliqua suam quantitatem brevem retinente; item *audio, audiunt, audiebam, audiam, audiendi, audiens, &c.* incontracte: & similiter in aliis verbis conjugationis quartæ. Verum & hic suam libertatem exercent Poetæ. Nam verbi gratia, *Nescis* apud Ovidium habet ultimam brevem, quasi θλῖψιν passum non κρᾶσιν; & contra *Nescîs* apud Juvenalem habet ultimam longam, quasi per κρᾶσιν fieret contractio, non per θλῖψιν. Atque idem accidit in *abit, obit, perit, redit, it, nescit, petit, &c.* quæ apud poetas ultimam habent longam; imo & *abiit, periit, rediit, subiit,* pro *abivit, perivit, redivit, subivit,* ultimam habent longam, nempe *v* consona prius in *u* vocalem transeunte (quod aliquando fit, ut *evoluisse* pro *evolvisse* apud Ovidium, & *Syluæ* pro *Sylvæ* apud Horatium, &c. uti notavit Cl. Gatakerus in tractatu suo de Bivocalibus,) & deinde facta crasi duarum vocalium *ui* in *i* longam. (Exempla siquis petat, ne longus sim, apud Smetium quærat; in suo quævis ordine.)

His adjungere licet *potitur* apud *Virgilium*, & *Ovidium* (probatos autores) penultima correpta, quasi θλῖψιν non κρᾶσιν (uti in similibus fieri solet) passum.

Ovid. *Mars videt hanc, visamque cupit,* potiturque *cupita.*

Virg. *Vi* potitur; *quid non mortalia pectora cogis.*

Sic *potiretur, potiturus, nequitur,* &c. de quibus vide Smetium.

Secunda conjugatio Verborum, est forma contract. tertiæ.

Quod autem de conjugatione quarta dictum est, & de secunda fere intelligendum erit. Nam verba conjugationis secundæ vix aliter differunt à verbis tertiæ, quam quod in plerisque temporibus (intellige quæ à præsenti formantur, non item quæ à præterito) perpetuam fere patiantur crasin, nempe vocalis *e* cum sequenti, in *e* longum, puta *doces, docebam,* &c. pro *doceis, doceebam,* &c. excepta tertia persona præsentis Indicativi, ubi pro *doceit* fit per θλῖψιν *docet,* ultima brevi. Sed & hic suam libertatem exercent Poetæ, nam *vide* apud Persium & Catonem, & *cave* apud Horatium, ultimam habent brevem, (quod notant Lubinus & Farnabius, ad Persii Sat 1. vers. 108.) sed & *vale* apud Ovidium, (& ejusmodi fortassis alibi occurrant alia,) quasi per θλῖψιν fieret contractio: sed & *fervere,* penultima brevi legitur, quanquam à *ferveo,* quasi ex *ferveere* non κρᾶσιν sed θλῖψιν fieret.

Pari modo, ubi pro *possiem, possies, possiet, possiemus, possietis, possient,* (ex *siem, sies, siet,* &c. prout olim scribebant, compositis) dicimus contractius *possim, possis, &c.* duo illa *possim, possint,* perinde est sive per thlipsin sive per crasin contracta dicas; at *possimus, possitis,* per crasin, propter vocalem longam; *possit* per thlipsin, propter ultimam brevem; contra vero *sit* ex *siet* contractum, quasi per crasin non per thlipsin, ultimam productam habet apud Lucretium.

Deterior sit ut forma muliercula ametur.

Possis, ultima ancipiti.

Possis indifferenter nunc per hanc, nunc per illam; habet enim apud Horatium ultimam longam, apud Juvenalem ultimam brevem, quasi ille per crasin, hic per thlipsin contraxerat. Utriusque exemplum apud Smetium exstat (librum prædagogis satis notum) hoc autem eo potius moneo, quoniam audivi non ita pridem D. *Prideauxium* μακαρίτην (virum omnigena eruditione refertissimum) immerito à quodam taxatum, quasi metri leges violasset, cum vocem *possis* ultima correpta in carmine usurpasset, quod tamen non nisi veterum exemplo fretus fecerat. Et quidem Grammaticalis illa regula, cui nixus ille hanc protulit censuram, nempe quod Ultimam longam habeant *secundæ personæ singulares verborum in is, quorum secundæ plurales desinunt in itis penultimâ producta,* non sine grano salis admittenda est, nec quidem Grammatici omnes eam ita universaliter pronunciant, quod quibus vacat facile collatis Grammaticis reperiant. Verum quidem est, quod Syl-

labæ illæ longæ esse possint, & non raro sint, non autem vel necessario vel semper producendæ: cum veterum Poetarum autoritas (quæ hic suprema lex est) sæpissime in contrarium eat. Exempli gratia.

Ovid. Nescis *an excedant etiam loca, venimus illuc.*

(Nisi potius legendum sit *Nescio.*)

Juven. *Tam jejuna fames, cum* possis *honestius illic.*
Pers. ——— *nec te* quæsiveris *extra.*
Horat. *Integer est animi, ne* dixeris, *ergo abi parve,*
Juven. *Accipit Endromidem si* dixeris *æstuo, sudat.*
Virg. *Verum ubi ductores acie* revocaveris *ambos.*
Juven. *Græculus esuriens ad cœlum* jusseris *ibit.*

Et similiter in aliis accidere, cui hæc non sufficiunt exempla, invenire poterit si Smetium consulat ad voces, *concluseris, curtaveris, gustaveris, juveris, oraveris, piaveris, possederis, spectaveris, spreveris, tentaveris, terseris, viceris, videris, &c.* Et quidem non modo in tempore Præterito modi subjunctivi, (ubi volunt Grammatici secundas personas plurales penultimam ancipitem habere,) sed & in tempore futuro, (cujus secundæ plurales penultimam semper habent longam, uti iidem tradunt Grammatici,) ultima secundæ singularis ut plurimum corripitur (contra quam docet allegata regula) & non nisi raro admodum (extra positionem) producta legitur. Si quando autem dubium sit an vox ejusmodi ad tempus præteritum an ad futurum referenda sit; at saltem ubi sensu imperativo usurpatur, ad futurum certo certius referendum erit (non enim jubemus præterita sed futura) atque etiam ubi Hypothetice aliquid asseritur sub conditione rei adhuc futuræ. Sed de his hactenus.

Summa huc redit, si ab ὁ ἓν vel Fεν deducatur Latinum *Boenum* & *Boene*, & contractius (per thlipsin alterius vocalis) *Bonum* & *Bene*, erit nihilominus utrobique prima brevis. Quod si hoc duriusculum censeatur, non contendo. Sunto *bonum* & *bene*, at antiquis *duonum* & *duene*, (ut *duellum bellum*) atque hæc à *Deo* (ut apud nos **God** & **good** sunt voces cognatæ,) *Deus* autem à Θεὸς, transeunte θ in *d*, quod sæpe fit, ut γηθέω *gaudeo*, πειθῶ *fido*, πέρθω *perdo*, ἔνθεν *inde*, ὧθεν, ἔνθεν, μηθὲν μηδὲν, sic θύρα **door**, θὴρ **deer**, θυγάτηρ **daughter**, οὖθαρ (*uber*) **udder**, ἐρυθρὸς (*ruber*) **red, ruddy**, ἀγαθὸς βέλτερος βέλτιστος, **good better best**.

Ab eodem autem themate Ἓν, formantur *semel, singulus*, & *simplus*, item *simplex* (quod non dicitur, ut vult *Scaliger*, quasi *sine plicâ.*) Nam eodem quo ab ἅμα
Semel. vel ὁμῶ fit *simul*, (præfixo *s* pro spiritu aspero, & adjuncto servili *l* finali:) sic,
Simplex. ab ἓν, *semel*, ν interim in *m* converso, (nisi potius ab ἁμὸς dictum putemus, quod
Simplus. Jonice pro εἷς usurpatur.) At *semel* & *simplex* ejusdem esse originis, nemo dubitabit; cum syllaba *plex* sit manifesto adventitia, ut in *duplex, triplex, &c.* ut & *plus* in *simplus, duplus, triplus, &c.* quibus respondent Græcorum ἁπλοῦς, διπλοῦς, &c. Non enim ἁπλοῦς dicitur vel ab α στερητικῷ, vel ab α ἐπιτατικῷ, sed vel quasi ἁμπλοῦς, ab ἁμὸς *unus*. vel ab α μόνωσιν significante, seu *singularitatem*, ut vult Eustathius; ut in ἁμάξαι, ἀδελφὸς, ἀγάστωρ, ἀγάλακτος, ἄκοιτις, ἄλοχος, ἀτάλαντος, ἀκόλουθος, &c. Atque huc facit quæ habet Eustathius, dum exponit ἀγάστωρ, ὁμογάστριος: ἄλοχος (quæ & ἄκοιτις) ὁμόλεκτρος: Quid enim aliud est ὁμογάστριος, ὁμόλεκτρος, quam qui *communi* (hoc est, *uno eodemque*) ventre feruntur, aut lecto concumbunt. Nam *communionis* notio etiam *Unitatis* seu potius *Identitatis* notionem includit. Sic & ἅπαξ, ἅπας, & forte ἁμὸς, & hinc ἅμα, ὁμὸς, ὁμῶ, ὅμοιος, ut & οὐδαμῶς, μηδαμῶς, quasi *nullies*. Terminatio vero πλοῦς, vel est à πέλω, ut Eustathio videtur, vel est paragogica, ut vult Etymologicus.
Singulus. His autem *singulum* & *singularem* cognata esse patet: quæ ab ἑνικὸς dicta videantur,
Sincerus. ut ῥῖγος *frigus*, ῥιγέω *frigeo*, πύκτης *pugil*, κόμμι *gummi*, κυβερνάω *guberno*. Sed & *sincerus* etiam dicitur ab ἓν & κεράω seu κεράννυμι *misceo*; quod ipsum & ἀκέραιον significare putarem (non tam ab α στερητικῷ quam ab α μόνωσιν significante;) ut id nempe significent quod ex plane Homogeneis constatur, & non ex varia mixtura: nec quidem magis distant voces ἀκέραιος *sincerus*, quam ἀριστερὸς *sinister*, (ubi ρ in *n*, ut in ἔρως *Venus*, ἑσπερία *Hispania*, sic Ἐρρῖκος *Henricus*, quod nos *Henry*, & *Harry* dicimus.) *Sincerum* autem quasi *sine cerâ* dictum esse (quod Scaligero videtur) mihi neutiquam placet; partim quod ipsa præpositio *sine* in compositione nusquam occurrat, sed ipsius forsan loco nonnunquam præpositio inseparabilis *se*, ut *securus* quasi *sine cura*, vel *seorsum a cura*;) partim etiam quod hæc omnia *simplex, simplus, singulus, singularis, semel, simul, similis, sincerus*, cognatæ tam significationis

I

ficationis quam originis esse nemo merito dubitare possit; in omnibus nempe *Unitas* quædam seu *singularitas*, sive, quod tantundem valet, *communitas* quædam seu *Iaentitas* innuitur: At qui *sincerum* dictum putant quasi *sine cera*, & *simplex* quasi *sine plica*, non ipsi tamen dicerent, credo, *singulum* dici quasi *sine gula*, aut *simplum* quasi *sine palo* vel *polo*, aut etiam vocibus *semel*, *simul*, *similis*, ejusmodi nugatorias derivationes affigerent. Sed progrediendum est ad ea quæ sequuntur.

Ab ἐννέα dicitur *novem*, ut à νέος *novus*, (ut supra dictum est,) terminatione item mutata ab α in *em*, ut à δέκα *decem*; ε item seu syllaba ἐν à principio pereunte, quod etiam in aliis Derivatis (præsertim ubi ex una lingua in aliam transitur) non raro fit. Sic ab *expendo* dicimus *spend*, & ab *extraneus* fit Gallicum *estrange*, & nostrum *strange*: ab *Hospitale*, fit Ital. *spedale*, & Anglicum *spittle*, quod & *Hospital* & *Hostel* dicimus, nempe Xenodochium: sic ab *Episcopus* dicimus *Bishop*: ita ἐρεύγω *ructo*, ἐρετμὸς *remus*, ἔρευθος *rubor*, ἐρυθρὸν *rubrum*, ἐρωτῶ, *rogo*; sic ab ἀμέλγω, *mulgeo*, & nostrum *milk*; ab ἀμαλὸς, μαλὸς, *mollis*; ab ὀτρύνω vel ὠθέω, *trudo*; ab ἐμὸς *meus*, ab ἀσπάραγος, *asparagus*, *sparagus*; ab ἀστὴρ, *aster* & *stella* (quasi *asterula*:) & nostrum *sterre*, seu *starre*; ab ἀμάω, ἄμητος, ἀμητὴρ, fiunt *meto*, *messis*, *messor*; pro ἀμαυρὸς *obscurus*, ἀμαυρόω, *obscuro*, *infusco*, dicuntur per Aphæresin μαυρὸς, μαυρόω, unde Latinorum *Maurus* & *Mauritania*; à γάλα γάλακτος (quasi à γάλαξ) *lac lactis*; à צרק נריק, δίκη, δίκαιος: a σφενδόνη, *funda*; sic apud ipsos Græcos dicuntur promiscue γαῖα & αἶα, item ἐμοῦ, ἐμοί, ἐμὲ, & μοῦ, μοί, μέ, item κεῖς, & ἐκεῖς, sic γάχυς & ἄσταχυς; γαῦρος, & ἀγαυρὸς *superbus*, & alia multa; sic ὃς & ἑὸς, αὐτοῦ & ἑαυτοῦ, κεῖνος & ἐκεῖνος, μαλὸς & ἀμαλὸς, sic γαστέρες ἀργαί (*Tit.* I. 12.) pro γαστέρες μαργαί, hoc est γαστρίμαργοι *gulones*: Atque apud Ionas & Poetas augmenti & reduplicationis rejectionem sæpissime fieri nemo nescit, ut cum τύπτον & βλήμενος dicunt pro ἔτυπτον & βεβλημένος. A *novem* autem fiunt *nonus*, quasi *novenus*, item *nonies*, *novies*, & *novenarius*, &c. *Novem.*

Ab ἑκατὸν fit *centum*: dempto à capite ε, (ut in ἐννέα *novem*) & Epenthetice inserto *n*. *Centum.*

Hujusmodi autem Epenthesis literæ *N*, vel *M*, (prout sequens consona palatina fuerit aut labialis) est frequentissima. A κῆπος fit *campus*; à סדין *sindon*; à לפד *lampas*, *lampadis*, & quidem λάμπω: & pro Hebræo Dages notissimum est Chaldæos & Syros sæpissime substituere literam *Nun*, (non modo ubi Dages est absentis *Nun* vicarius, sed & alibi.) Sic etiam sive à תוף sive à τύπτω fit τύμπανον *tympanum*: sic à φάω, φαίνω, & φαντάζω: à τάω, τείνω, & *tendo*; à τύπτω, *tundo*; à σπένδω, σπένδω: ab ἄχος, ἄχνυμαι, *ango*, & *angor*, *angoris*; quod Angli *ake* & *ach* dicunt: ab ἔχις *anguis*, (ubi & χ in *g* transit, ut ἔγχελυς *anguilla*, χαλβάνη *galbanum*, βληχὼν *pulegium*, Καρχηδὼν *Cartago*, ὄνυξ, ὄνυχος, *unguis* & *ungula* &c.) à πετάω *pateo* & *pando*; à χέω, χύω, χύνω *fundo*, (ubi & χ in *f* convertitur, sic à σύγχυσις *confusio*, à χοῖνος *funis* & *finis*; sic in χολὴ *fel*, χλόη *flos*, Χλῶρις *Flora*: *Chloris eram quæ Flora vocor*, Ovid. *Fast.* & χυμὸς *fumus*; nisi hoc ultimum potius à θύειν *adolere*, unde θύματα & θυμίαμα *suffimenta*, & θυμιᾶν *fumigare*, *suffire*, θ in *f*, ut in θύω *fio*, *suffio*; θὴρ Æol. φὴρ *feræ*, θέρω *ferveo*, θερμὸς *formus*, Θράω, Θραίω *frio*,) sic à σχίζω σχινδὸν *scindo* & *findo*; sed & à σχίζω σχινδαλμὸς, sicut & Angli, eodem significatu, à *split*, *splinter*: à σπεύδω *festino* fit σφενδόνη *funda*, teste Eustachio: à λείχω *lingo*; à λείπω *linquo*, ab εἴπω *inquio*, (ubi π in *q* transit, quod sæpe fit, ut post dicetur) à ζεύγω *jungo*, (ubi ζ in *j* transit, ut ζεὺς *Jovis*, *Jupiter* vel *Joupiter*, hoc est *Jovis pater*, ζεὺς πατὴρ, ut dicimus *Marspiter*, *Diespiter*, *Liber pater* &c. Sic Insula *Zocotora*, ad Mare rubrum posita, unde *Aloe Zocotrina* nomen sortitur, à nautis vulgo dicitur *Jacatra*: item *Succus*, Italice *succo* & *sugo*, Hispanice *Xugo*, Anglice *juyce*, quæ omnia à *sugendo* dicta:) Illud autem *n* in *tundo*, *fundo*, *scindo*, *findo*, *pando*, *linquo*, *lingo*, *jungo*, & similibus, adventitium esse, inde magis liquet quoniam in derivatis frequenter excidit; dicimus enim *tutudi*, *fudi*, *scidi*, *fidi*, *liqui*, &c. & à *pando*, *passum*; à *jungo*, *jugum*, *jugalis*, *conjux*, *conjugium*, &c. & à λείχω non modo *lingo* dicitur, sed & *liquor*, *liquidus*, (unde *liquido* & *liquet*,) & Anglicum *lick*, quæ quidem omnia ab Hebr. לחך vel לקק descendunt: sic *Triginta*, *trigesimus*, à τριάκοντα τριακοστὸς, ut supra dictum est.

Sic à σκάζω (*claudico*) σκάνδαλον: sed & *scando*, & *scala*, & σκαληνὸς, quod ideo potius moneo, ut Geometricæ vocis σκαληνὸς originem obiter tradam. Formatur enim σκαληνὸς quasi à σκαλὸς vel σκαλάω, aut ejusmodi aliqua voce (cui Latinorum *scala* videtur affinis) quam à σκάζω vel σκάω facile descendere posse nemo dubitabit;

bit; ejusmodi enim terminationes præter radicis substantiam satis frequenter accedunt, ut in ipso σκάνδαλον, ἁμαρτωλὸς, διδάσκαλος, διδασκαλία, διδασκαλικὸς, διδασκαλεῖον, &c. satis patet, sic & ab ὁμὸς, ὁμαλὸς & ἀνώμαλος, & ab εἴκω εἴκελος: A σκαλὸς vero, vel σκαλέω, vel ejusmodi voce alia, facile fiet σκαληνὸς, ut à Μαγδαλὰ Μαγδαληνὴ: sic κάρα κάρηνον, item γαλήνη (Eustachio teste) à γελάω quod ipsum à γάω (unde & γηθέω *gaudeo*;) ut autem γάω, γελάω, γαλήνη, sic σκάζω, σκαλέω, σκαληνὸς dici possunt: pari modo & σπάργανον, σπαργανόω, σπαργάνωσις, sive à σπαράσσω sive à σπαργάω: sic & ab ἔργον vel ἐργάζω, dicuntur ἐργαλεῖος, ἐργαλεῖον, ὄργανον, Εργάνη: item à στεφὸς, στεφανὸς & στεφανίτης: sic à καίω κάω (*uro*) fiunt κᾶλον (*lignum*) & κῆλον *jaculum ligneum*, item κήλων & κηλώνειον *tolleno*. Nec quicquam in contrarium suadet vocum significatio: Conus enim ille *Scalenus* dicitur, qui erectus non est, sed magis in alteram partem propendet, hoc est, *claudicat*; quid enim aliud est claudicare, quam non erectus incedere, sed ad latus alterutrum inclinatus? Atque eodem plane sensu Triangulum illud *Scalenum* dicitur, quod æquicrurum non est, sed, propter crurum inæqualitatem, in latus alterum inclinatum. Sic etiam ab eadem claudicationis sive inclinationis notione, voces *scando* & *scala* non abludunt; in plano siquis incedit, non ille *scandere* sed *ambulare* dicitur; quod autem ad perpendiculum erigitur, est illud vix aut ne vix scansile; adeoque illud solummodo scandimus, quod est inclinatum sive acclive: siquando autem erectum illud sit ad cujus summum ascendere velimus, illud *Scalæ* inclinatæ auxilio faciendum erit; ideoque παρὰ τὸ σκάζειν *scala* dicitur, eadem ratione qua παρὰ τὸ κλίνειν κλίμαξ. Sed de σκάζω, σκαληνὸς, & *scando* hactenus.

Ut autem *n* vel *m* adventitium non raro inseritur, sic è contra *n* vel *m* radicale non raro excidit, ut ubi Hebræorum *Nun* transit in Dages: & ab Hebræo *Nimrod* fiunt Græca Νίμβρωτος & Νεμβρὼδ (inserto β ut in μέμβλωκα, μεσημβρία) &, apud Josephum, Νεβρώδης, extrito μ radicali: ut literæ *n* vel *m* (saltem insertæ) minor ratio in derivationibus habeatur.

A *Centum*, fiunt *Centies*, *centuria*, *centenus*, *centenarius*, *centuplus*, *centurio*, &c.

Mille. Ut autem ab ἑκατὸν *centum*, sic à χίλια fortasse *millia* dici poterit, mutato χ in *m*, ut cum à τρέχω in Aoristo secundo fit ἔδραμον pro ἔτρεχον, & inde δρόμος: quæ tamen si formari dicantur tanquam à δρέμω & non à τρέχω, saltem erunt δρέμω & τρέχω cognata. Sic quem vocant Græci Ἰάκωβον, Latini *Jacobum*, Hispani *Jago*, Galli *Jaques*, hunc Itali *Jacomo* appellant, & nos *James*. Deinde cum χ & φ, quamvis non ejusdem organi, sint tamen literæ invicem commutabiles, (ut supra ostendimus, in σχοῖνος *funis*, χέω (χεύσω) *fundo*, σύγχυσις *confusio*, σχίζω ἔσχιδον *findo*, &c.) ipsa π, φ, β, cum litera *m* (ejusdem organi) commutari posse aliunde liquet; dicimus enim à δαπάνη *damnum*, ab ὕπνος *somnus*, sic ab ὕπατος (vel ὑπὲρ) *summus*; sic *summitto*, *summoveo*, pro *submitto*, *submoveo*; item πολὺς *multus* (nisi forsan à μάλα vel μάλιστα, α in υ, ut in ταλῶ *tulo tuli*, κραιπάλη *crapula*, στραγγαλῶ *strangulo*, ἀγκύλος *uncus*, θρίαμβος *triumphus*; at saltem μάλα & πολὺ apud Græcos, sunt tam cognatæ significationis, quidni & originis; quam apud Latinos *multum* & *plus*:) μολύνω *polluo* (nisi forsan à πηλόω *contamino*, unde πηλὸς *cœnum*, *lutum*; vel potius à *porro*, sive *prorsus* & *luo*, unde *lutum* & *lues*, & fortasse *abluo*, *deluo*, &c. ne dicam *diluvium*, *illuvies*, *colluvies*, potius quam à *lavo*, quod est alterius conjugationis:) sic μέρος *pars*, (vel utrumque forsan à פרס) & μοῖρα *Parca* (nisi potius, ut Gatakero videtur, à πρωτῶ unde πέπρωται: itaque videntur olim *Partæ* dictæ quæ nunc *Parcæ*: inde Propert. *l.* 3. *el.* 4. ubi nunc *parca* legitur, veteres codices habere perhibentur *parta*; *Optima mors Parta quæ venit apta die*, i. τῇ πεπρωμένῃ Scalig. Harum autem tertia, quæ Græcis ἄτροπος, Latinis priscis est *Morta* dicta, à μοῖρα, sive εἵμαρται, unde & εἱμαρμένη. vid. Gell. *l.* 3. *c.* 16. *Mors* certe à μόρος, ut à πλῆθος *plebs*, à μένος *mens*:) sic ab ἁπαλὸς fiunt ἀμαλὸς, μαλὸς & *mollis*; à φαῦλος *malus*, (vel forsan à μαλὸς, *mollis*, *ignavus*, ut κακὸς à χάζω *recedo*, *fugio*, & contra ab ἄρης ἀρετὴ unde & *ars* & *virtus*, nisi si istud à *viro*, quod à גבר sunt qui velint, malim ego ab ἄρω vel ἀρόω:) sic μετὰ Dor. πεδὰ, *apud* & *post*: sic à βουνὸς *mons*, (nisi quis dici malit *montem* à verbo *minere*, quod apud Lucretium reperitur, unde & *minæ* murorum; à *minendo* autem, sive *eminendo*, *mons montis*; sicut, à *pendendo*, *pons pontis*; à *prominendo*, *promontorium* quasi *prominuntorium*; atque ab eodem verbo *mineo* ortum habent illa omnia *emineo*, *immineo*, *præmineo*, *promineo*, non autem à *maneo*; à *maneo* enim non *emineo*, sed *emaneo*

I habe-

habetur, unde & *emansor* dicitur.) Sed & ipsum *m* aliquando simpliciter præfigitur, ut cum ab ἄρης ἄρητος fit *Mars, Martis*, (& forsan ab ἅλς, non modo *sal* & *salum* sed & *mare*,) sic ab ἄρσην *mas maris*. Sed & *p*, in ὀρέγω *porrigo*; (nisi potius à *porro ago*, ut *porricio*, *porro jacio*, hoc est, *projicio*; vel, quod ego mallem, à *porro rego*, propter præteritum *porrexi*, ad formam *direxi, surrexi, correxi*, &c. non *porregi* ad formam *sategi, peregi, redegi, ambegi*; ipsum autem *rego*, non tam à *re ago* vel *res ago* dictum crediderim, quam à Teutonico seu Saxonico antiquo *rice*, quod *dominium* sive *regnum* significat, quam vocem adhuc retinemus in *Bishop-rick*, hoc est, *Episcopatus*, sive αὐτοκρατεία *Episcopi dominium*, inde autem *rego, rex, regnum, regio, &c.* voces enim *Latinas* non paucas à Teutonicis originem duxisse, ego nullus dubito: non negem tamen *rego* ab ὀρέγω dici; &, in imperandi significatu, ab ἄρχω.) Sic ἄρω *paro*, ἄρτιος *par*, αἰδέω *pudeo*, ἥβη *pubes*, μόλυβδος *plumbum*, אור πῦρ. *Vid. nostram Grammat. Linguæ Anglicanæ.*

Verum ego *Mille* & *Millia*, potius à μύρια, quam χίλια, deducerem; (nisi potius vox sit ab utrisque conflata; nam principium potius μύρια exhibet, & finis χίλια:) nam λ & ρ facile transmutantur. Sic perinde dicitur κρίβανος & κλίβανος: *parum* & *paulum*, utrumque à παῦρος: sic φραγέλλιον *scribunt* Græci quod Latini *flagellum*: χλάω & γλάω voces sunt affines utraque à כלב, sic σκαλμὸς *scalmus*, à σκαίρω *salio*, Etymologo teste; sic *Willelmus* Græce Ἰλλιερμὸς scribitur; ἱσπανία, *Hispania*, & *Hispalis*; sic *puer, puellus*; *tener, tenellus*; *pulcher, pulchellus*; *liber, libellus*; aliaque multa. Sic à Græco λείριον fit Latinum *lilium*, & forsan ab ἔρος vel ἔριον, *vellus*, (quanquam Varro & Plinius à *vellendo* volunt, unde vulsuram tonsura priorem probatum eunt: fortasse tamen à μαλλὸς *vellus*.) Sic ab *Epistola, Apostolo, Capitulo*, dicunt Galli *Epistre, Apostre, Chapitre*. Hinc decantatus ille Alcibiadis Traulismus, λ pro ρ pronunciantis; quo nomine ab Aristophane irridetur in *Vespis*, Εἶτ' Ἀλκιβιάδης εἶπε πρός με τραυλίσας, Ὀλᾷς; Θέωλος τὴν κεφαλὴν κόλακος ἔχει, cum dixisset, ὁρᾷς, Θέωρος τὴν κεφαλὴν κόρακος ἔχει, adeoque Theoro, pro capite *Corvino* (hoc est, nigro) *Adulatoris* caput tribuit; falsè quidem & pro more suo. Et quidem *R & L in omnibus linguis facile invicem commutantur*, ut notat doctissimus Causabonus ad Persii. Sat. 5. vers. 22.

Numeros Ordinales quod attinet, illi à Cardinalibus derivantur omnes, præter primores duos.

Primus nempe, quasi *Proimus*, dicitur à Græco πρῶτος, mutata nempe terminatione superlativi Græci in terminationem Latini, hoc est, τος in *mus*. Vel etiam (quod eodem recidit) à Græco πρὸ, Poeticè πραὶ, fit Latinum *præ*, indeque *prior* & *primus*. Hoc enim dicere mallem, quam *pridem, prior, primus*; cum vox *pridem* videatur idem esse ac *prius demum*: vel saltem *præ* cum expletivo *dem* compositum; ut in *idem, ibidem, itidem, identidem, tantundem*, & similibus. *Primus.*

Secundus autem à *sequor* dicitur, ut *oriundus* ab *orior*: Quod autem per *C* scribatur, & non per *qu*, hoc nihil est; tantundem enim valent: sic à *qui* dicitur *cujus, cui*, vel (apud Plautum) *quojus, quoi*; à *secus* (adverbio) *sequior*; à *secus* (præpositione) *sequester*; ab εἴκος, εἴκελος, *æquus, æqualis*; & *persecutio, secutus, &c.* promiscue scribuntur per *c* & *qu*; sic *cum* & *quum*, aliaque multa. *Secundus.*

Duo saltem restant Numerorum nomina, nempe *Quatuor* & *Quinque*; quæ, quamvis à Græcis nominibus longissime recedant, inde tamen orta puto. *Quatuor* enim Græce dicitur τέσσαρες, Attice τέτταρες & τέτορες, Poetice seu potius Æolice πίσυρες (apud Homerum Il. π. & forsan alibi) item πίσυρες & πέτορες, (unde *Petorritum*, Flacco, à rotarum numero,) exinde Cambricum *pedwar*, Armoricum *pevar* (teste Bocharto) & forsan inde Anglicum *fower*, quod tamen Teutonicæ potius originis esse duco. At à πίσυρα, vel πέτταρα, vel πέτορα, ad *Quatuor*, non ita difficilis est transitus; mutato nempe π in *Qu* vel *C*. Quippe cum Æoles dicant κῶς pro πῶς, & κε pro πε, quidni pro πέτορα aut πέτορα dicant κέτορα & hinc *quatuor*. Ostendimus autem supra gutturales κ & χ cum ipsis labialibus π, β, φ, (aut quæ tantundem valent) aliquando commutari; sic à φῖνος, fit *finis* & *funis*; à σχίζω, *scindo* & *findo*; à χέω, *fundo*; à χολὴ *fel* & *bilis*; & contra à λείπω, *linquo*; ab ἕπω, *sequor*; ab ἔπω, *inquam*; ab ἵππος, *equus*; à ποθέω vel ποθέω, *quæro*, (nisi sit ab Hebr. בקר, *quero*, & à בקש *quæso*; dempto *b*, ut in βρέχω *rigo*, βράδω *rodo*) sic à πάλλω, πάσσω, *quatio, quasso*, &c. Et revera paucissimæ occurrunt voces Latinæ, per *qu* scriptæ, quæ non apud Græcos vel per π vel per τ (rarius per κ vel χ nisi in *Quatuor.* *Gatak.*

Æolica

Æolica dialecto) scriptæ reperiuntur. Ita enim à τόσα, πόσα, *tot*, *quot*; & πόστος *quotus*; sic & τόσον, πόσον, *tantum*, *quantum*, (inserto *u* Epenthetico;) sic à πότε *quando* (unde Anglicum *whan* seu *when*, vel, ut Scoti scribunt *quhan*:) sic πῶ *quo*; πῆ *qua*; item τοῖος, ποῖος, *talis*, *qualis*, in quibus terminatio *alis* est adventitia, ut & in *æqualis* ab *æquus*, (sicut εἰκελὸς ab εἰκὸς, & ὁμαλὸς *planus*, ab ὁμὸς *similis*, *par*, sic ἁμαρτωλὸς, διδάσκαλος, ὑψηλὸς, σκάνδαλον, &c.) & terminatio *ilis* in *similis*, ab ὅμοιος, quod ipsum ab ὁμὸς, quare & Græca terminatio οιος servilis esse apparet; sed & *Humilis* ab *humo*, (quod ipsum à χαμαὶ, unde & χθαμαλὸς *humilis*, ut ἄχος ἄχθος, μαλακὸς, μαλθακός.) *Facilis* à *facio*, *Habilis* ab *habeo*, (unde & *Habitus*, ut ab ἔχω vel χῶ, ἕξις & χέσις,) *Agilis* ab *ago*, aliaque multa, terminationem servilem adsciscunt, prout supra *l* in *simul* & *semel* servile esse diximus. Sic & à τε *que*, à τις *quis*; sic ab ἐδίω, *esca* & *vescor*; & contra *tolleno* (quasi *colleno*,) à κηλώνειον. Sic Æoles ὄκα & ἄλλοκα pro ὅτε & ἄλλοτε, dicebant; sic apud Latinos *otium*, *negotium*, *spatium*, *nuncium*, *vicium*, &c. promiscue vel per *t*, vel per *c*, scribuntur; unde literarum *t* & *c* affinitas magna colligitur: quod idem patet apud Græcos in ἐρύττω, ὀρύξω, ὤρυχα, ὀρυγμαι, ὀρυκτως, aliisque verbis ejusdem formæ, ubi τ in ξ, χ, γ, κ, convertitur: Ita etiam promiscue dicimus *uspiam* & *usquam*, *nuspiam* & *nusquam*, *quispiam* & *quisquam*; unde etiam maxima affinitas literarum *p* & *qu* ulterius patet; adeo ut non mirum sit à τέτορα, vel πίτορα, dici *Quatuor*. A *Quatuor* vero fiunt *quartus* (ut τέταρτος) *quater*, *quaternio*, *quaternus*, *quaternarius*, &c.

Quinque. Eadem item opera ostenditur, & *Quinque* derivari posse à Πέντε, Æol. πέμπε, unde & πεμπάζω & πεμπτος: positis nempe pro πεν *quin*, & pro τε *que*, (ut κῶς pro πῶς & κε pro τε) adeoque à κένκε *quinque*. Atque hinc *quintus* seu *quinctus* (πέμπτος) *quinquies*, *quinus*, *quinarius*, &c.

[Hæ duæ, vocum *Quatuor* & *Quinque* Etymologiæ, utut à Græco longius recedere videantur; in eandem tamen eunt sententiam, non modo *Bochartus* jam citatus; sed & *Vossius* in Etymologico suo nuper edito; (post primam hujus editionem;) &, quem ille citat, *Salmasius*; ne plures nominem.]

Atque ita ostendimus Numerorum nomina Latina à Græcis desumpta esse; quanquam illud in nonnullis vix adeo probabile primo intuitu videri possit. Sicut vero hac in re nimis prolixus fuisse videar, aut etiam à semita deviasse, cum hæc Grammatica sint potius quam Mathematica: spero ab illo me veniam facile impetraturum, si saltem intelligat me numeros ex professo hic loci non Mathematice tantum, sed & Philologice tradendos suscepisse; partim quidem quoniam nescio an quispiam antehac illud susceperit; partim etiam quoniam legitimi mei Auditores (quibus hæc primitus parabantur) non omnes eousque in rebus Mathematicis versati fuerint, quin opus sit nonnunquam aliud aliquid salis instar seu condimenti interspergere, quo melius quæ arida secus aut sicca nimis videri possint facilius deglutiantur, neque vel palatum offendant vel stomachum moveant. Quod autem nonnunquam prolixior sim & in exemplis copiosior, ideo factum est, quia nonnunquam derivata a suo fonte eousque recedant, ut, nisi magna exemplorum copia illud evincatur, non esset adeo persuasu facile ullam omnino cognationem inveniri: quod de *Quatuor* & *Quinque* præsertim dictum intelligatur; quanquam & alia aliqua prima forsan fronte vix suam familiam satis indicarent. Neque hoc quidem mirum, cum illud omnino usu sit compertum, ut, ubi vox aliqua ex una in aliam linguam tralata est, derivationum leges multo sint laxiores quam ubi intra eandem linguam manendum est. Atque hoc in Latinis à Græcis deductis eo magis accidit, quoniam non tam ex puro fonte Græco seu dialecto vel Attica vel Ionica (quarum frequentior est usus) quam ab Æolica adeoque omnium impurissima dialecto ut plurimum ducta sint, quod agnoscunt omnes; vel saltem à Dorica, quæ & ipsa à Communi satis deflectit.

Contra vero, siquis minutioribus hisce (prout videri possint) delectatus, ampliorem messem optaret: consulat, si libet, Caninii Grammaticam Græcam (apud quem olim me hujusmodi non pauca legisse memini;) vel potius (ne multos nominem) acutissimi simul & Venerandi Senis *Tho. Gatakeri* nostratis opus κριτικώτατον (qualia sunt ipsius omnia) quod adversus Sebastianum Pfochenium *de stylo novi Instrumenti* inscripsit; apud quem (in prioribus præsertim capitulis) multa hujusmodi reperiat magno acumine scripta: ubi quidem in multis nobiscum consentit, atque inde alia in nostrum usum, si opus esset, exempla mutuari possent, nisi quod ea perlegere non prius mihi contigerit, quam quæ supra habentur, scripta

fuerint; quanquam & ex illis aliquot non diffiteor à Clariſſimo illo viro, meique amantiſſimo, me primitus didiciſſe; Qui (magno literarum damno) anno jam proxime præterito 1654 Julii die 27 (poſtquam hæc ſcripta erant atque ab illo quidem lecta & approbata, antequam publici juris fierent,) relicta terra cœlo potitus eſt, octogenarius ſenex.

Atque hactenus de numerorum nominibus diximus. Sequitur Numerorum Notatio ſive Scribendi ratio, proximo in loco tradenda.

CAP. VII.

Numerorum Notatio, per omnes Alphabeti literas præſtita, Hebræis & Græcis communis.

NUmerorum Notatio, ſive Deſcribendi ratio, non omnibus una eſt. Quamvis enim omnes in hoc conſentiant, ut Numeros Characteriſmis quibuſdam, brevitatis gratia, deſcribant, quo etiam calculus facilior evadat: Gentes tamen variæ varios etiam ſcribendi modos adhibuerunt. *Notatio, ſeu Numerorum deſcriptio.*

Hebræi, aliiq; Orientales, in deſcribendis Numeris, Alphabeti Literas adhibent: Primoribus nempe Alphabeti literis Unitatum numeros exprimunt, א ב ג ד ה ו ז ח ט ſequentibus deinceps, quot opus eſt; numeros Decadum, י כ ל מ נ ס ע פ צ & tandem reliquis Centurias, ק ר ש ת Reliquos vero numeros centenarios (quia non ſuperſunt plures Alphabeti literæ) deſignant literarum quinque characteribus finalibus ך ם ן ף ץ aut etiam literis compoſitis תק· תר· תש· תת· תתק. *Apud Hebræos.*

Numeros autem juſtis Decadibus interjectos, conjunctis literis indicant; numero nempe decadum ſubjungendo numerum adjunctarum unitatum; ut יא כב. At ubi numerum decimum quintum deſcribunt, pro יה, ſcribunt טו, (hoc eſt, pro decem & quinque, ponunt novem & ſex) ne ſcilicet Nomen Dei, iſtis literis expreſſum, videantur temerare. Et pari modo numeros juſtis Centuriis interjectos conjunctis literis deſcribunt, ut קיא רלג.

Millenarios vero numeros & qui ſequuntur, iiſdem quibus Unitates, aut etiam decadas, centuriaſve, literis deſignant; levi fortaſſe punctulo, diſcriminis gratia, diſtinctis; א̇ ב̇ & ſiquæ ſuperſunt centuriæ, decades, aut unitates juſtis millibus interjectæ, ſubjunguntur earum characteres ut אתנה׳, 1655.

Græci eodem pariter modo quo Hebræi numeros deſignant; primoribus enim Alphabeti literis Monadas deſignant, ſequentibus Decadas, & ultimis Centurias; Millia vero iiſdem repetitis, leviculo puncto vel virgula diſtinctis: Et numeros interjectos literis conjunctis. *Apud Græcos.*

Sed & propter literarum defectum, tres characteres præter Alphabeti ordinem interſerunt: inter monadas unum, alium inter decadas, & inter centurias reliquum.

Ἐπίσημον C, vel ς, (qui character eſt vel τῦ ſigma finalis, vel literarum στ,) numerum Senarium deſignat. Inſeritur vero hoc ordine (potius quam monadum characteribus reliquis poſtponitur) loco Hebræorum ו; ut ſubſequentes literæ eandem poteſtatem obtineant quam eis homologæ apud Hebræos: puta, ut ז & ζ, item ח & η, necnon ט & θ, י item & ι, (& ſic de cæteris) eundem numerum deſignent; quod ſecus non fieret, cum Græci, loco Hebræorum *Vau*, nullam habeant literam, (ſaltem non pari ſede poſitam,) Latini vero eodem ordine reſtituerunt ſuum *F*, (hoc eſt Æolum Digamma) quod fere tantundem valet; imo omnino idem forſan ſonabat olim, cum ipſo ו *Vau* Hebræorum, & Latinorum *V* conſona, prout nunc à pleriſque (ſaltem Anglis) harum utraque pronunciatur: prout & digamma Æolicum *F* olim pronunciatum fuiſſe teſtatur Priſcianus; in cujus locum non raro ſubſtituitur apud Latinos conſona *V*, ut quum ab οἶνος, οἶς, Æolice Ϝοῖνος, ὄϜις, fiunt Latina *Vinum*, *Ovis*; aliaque ejuſmodi. Unde conjicere licet, duplicem olim fuiſſe ſonum conſonæ *V* apud Latinos: aliquando ille qui nunc dierum auditur in *qui*, *lingua*, *ſuadeo*, ubi idem ſonat ac *w* in *wiſe*, *way*, *perſwade*; aliquando idem cum Anglorum *V*, in *have*, *ſave*, *vaine*, *vice*, &c. Quare *C. ς*

apud

apud Græcos aliquando scribitur per β, ut in Βερζίλιος, Δαβίδ, aliquando per υ, ut in ἰαλίειος, ἰαλὰς, quæ omnia Latine scribuntur per *V* consonam. Sed & etiamnum Cambro-Britanni (& olim, ni fallor, Anglosaxones) *f* eodem modo efferunt quo nos consonam *v*, nempe ut *b* aspiratum: sonum vero quo nos & alii plerique nunc efferimus *f* vel φ, illi per *ff* scribunt. Quod autem de Latinorum *V* consona dictum est, dici fortasse poterit de Hebræorum *Vau*, nempe ipsius olim sonum non fuisse in omnibus & apud omnes constantem; certum enim est (ex *Jud.* 12. 6.) non eundem fuisse apud omnes sonum literæ ש, & quare non & eadem esse posset in litera *Vau* varietas non video: atque nunc dierum Arabes quidem & Persæ literam illam ut nostrum *w* pronunciant, & Turcæ ut nostrum *V*.

ϡ. Character autem hic ϡ nongenta designat, quem σαμπῖ vocant, quasi ex literis C (inverso) & π, nempe *sigma* (quam Dores σὰν vocant) & *Pi*, conflatus, vel, si libet, ex *Antisigma* (sic enim Ↄ, sive sigma inversum, appellant) & *Pi*. Quanquam revera ipsius aliam potius fuisse originem existimat Scaliger; nempe ab Hebræorum seu Syrorum antiquo charactere literæ *Tzade*.

ϟ ϙ. Pro Nonaginta vero ponitur ϟϙ; unde figura Latinorum ϙ vel *G* deducta est; antiquis Latinis ignota; qui Græcorum γ per *C* exprimebant, quam literam tertio igitur loco, ut Græcorum γ, ponebant. Dicebatur autem Κόππα seu *Kophe*, tanquam ab Hebræorum & Syrorum *Koph*: sed & *Antirrho*, quasi *Rho* inversum. Ab hac figura dicebatur apud Aristophanem ἵππος κοππατίας: à præcedente vero σαμφόρας sive σαμπόρας sive σαππίξας: (prout hoc aut illo charactere notatus erat.) De utroque videatur Josephus Scaliger, in suis ad Eusebium Animadversionibus: quibus digressionem satis longam de antiquis Græcorum literis inseruit.

Pro ϙ vero scribitur à nonnullis ϟ, aut etiam ч, vel denique ϛ (idem nempe character cum illo senarii numeri) sed perperam, incuria nempe librariorum. Item pro ϡ, eadem incuria, scribitur nonnunquam π. Uterque autem error (ponentium ϛ pro ϙ, & π pro ϡ) non raro in libris impressis retinetur; quod propter typorum inopiam factum credo; cum enim veros typos non habebant, ipsis quam proxime similes substituerunt: Eodem nempe modo quo in libros tam Manuscriptos quam Impressos (sive propter Scribarum ignorationem Characterum Hebræorum, sive propter Typorum defectum) irrepsit error ille ponentium ΠΙ ΠΙ seu πι πι pro nomine יהוה: Quomodo etiam pro ΙΗΣ ΧΡΣ, vel ἰη̄ς χρ̄ς, (quo pacto Græce contracte scribitur ἰησοῦς χριστὸς) substituerunt Latini ihc xpc vel ihs xps, quibus innuitur *Jesus Christus*. Sic apud Jurisconsultos, *Digestorum* libri, Græce πανδέκται dicti, hac nota vulgo citantur *ff*, quæ à Græco π deflexit. Similiter, apud eosdem, ubi, pro nova clausula designanda, Paragraphum adscribebant olim, (pro quo jam novum inchoant versum, retento tamen Paragraphi nomine,) pingebant § (ab S litera deformatum) *Sectionem* eodem innuentes: Pro quo nostri demum Legistæ substituunt (*f* geminum) *ff* vel *fs*; proferuntque (quid aliud significet nescio) per *scilicet*.

Atque hæc, de modo scribendi numeros Hebræis Græcisque magis usitato, dicta sufficiant: Cujus specimen aliquod hic apponitur.

α	1	א	π	80	פ		ια	11	יא
β	2	ב	ч ϛ G ϙ ϟ	90	צ		ιβ	12	יב
γ	3	ג	ρ	100	ק		ιε	15	טו
δ	4	ד	σ	200	ר		κγ	23	כג
ε	5	ה	τ	300	ש		νϛ	56	נו
C ϛ	6	ו	υ	400	ת		οη	78	עח
ζ	7	ז	φ	500	ך	תק	σλα	231	רלא
η	8	ח	χ	600	ם	תר	,αχνε	1655	אׄתׄרנׄה
θ	9	ט	ψ	700	ן	תש			
ι	10	י	ω	800	ף	תת			
κ	20	כ	π ϡ	900	ץ	תתק			
λ	30	ל	,α	1000	אׄ				
μ	40	מ	,β	2000	בׄ				
ν	50	נ	,γ	3000	גׄ				
ξ	60	ס	,ι	10000	יׄ				
ο	70	ע	,κ	20000	כׄ				

Rarius autem tam Hebræi, quam Græci, literas Alphabeti continua serie adhibent, ad rerum vel Numerum vel saltem Ordinem designandum. Sic enim Homeri Ilias & Odyssea in libros distinguuntur. Et eodem modo apud Hebræos Psalmus CXIX in membra, aliique in Periodos videntur distingui. Sed hæc insinuasse sufficiat.

Superest alius Numeros scribendi modus, Græcis item usitatus, Romanorum mori non absimilis, per aliquot saltem, non omnes, Alphabeti literas; de quo proxime agendum est.

CAP. VIII.

Numerorum Notatio, per aliquot saltem Alphabeti literas præstita, Græcis & Latinis communis: Et, cur illæ potius quam aliæ, ad hunc usum seliguntur.

PRæter illum quem superius tradidimus Numeros scribendi modum, erat etiam alius à Græcis usitatus; non per omnes quidem, sed selectos quosdam Alphabeti characteres peractus. Sex scilicet literis M. X. H. Δ. Π. I. numeros omnes designabant. M designat μύρια, seu decies mille: X χίλια, seu Mille: H ἑκατόν, Centum: Δ δέκα, Decem: Π πέντε, Quinque: I vero ἕν, Unum. Quoties autem plures vel Unitates, vel Decades, Centuriæve, aut Millia apponenda sunt, illud literis bis, térve, quatérve iteratis indicatur. Quum vero ad Quina deventum est, illud litera Π innuitur; hæc enim litera, simpliciter posita, Quinque denotat; at, incluso Δ, (hoc modo [Δ]), Quinquaginta; incluso H, Quingenta; incluso X, quinquies mille, &c. Qua de re videatur Herodianus ab Hen. Stephano, & Joh. Scapula, ad Lexici calcem editus. *Notatio alia Græcorum.*

Eodem plane modo Latini septem literis suos numeros describunt. M.D.C.L.X.V.I. Litera M designat Mille: D, Quingenta: C, centum: L, Quinquaginta: X, Decem: V, Quinque: I, Unum. Numeros intermedios, aliquorum vel conjunctione, vel repetitione (sicut & Græci) describunt. Nonnunquam tamen Latini (sed non item Græci) numerum minorem majori præponentes, illum ex majori auferendum notant; unde IV, IIX, IX, XIIX, XIX, XL, XC, significant 4, 8, 9, 18, 19, 40, 90. Atque idem nonnunquam in numerorum appellationibus faciunt; dicunt enim *undeviginti*, *duodeviginti*, pro *octodecem*, *novendecem*: quod & de aliis similibus intelligendum est. Hoc pacto, si numerus *Millesimus sexcentesimus quadragesimus nonus* describendus esset; hoc Græci sic peragerent X[H] H Δ Δ Δ Δ Π I I I I: Latini vero hoc modo MDCXLIX vel etiam sic CIↃIↃCXLIX. *Notatio Latinorum.*

Latini, pro M, numeri millenarii nota, nonnunquam sic scribunt CIↃ, & hujus dimidium IↃ pro quingentis: deinde CCIↃↃ pro decem millibus, & hujus dimidium IↃↃ pro quinque millibus; item CCCIↃↃↃ pro centum millibus, ejusque dimidium IↃↃↃ pro quinquaginta millibus: sic CCCCIↃↃↃↃ pro millenis millibus; & sic deinceps.

Totius hujus Notationis specimen hic apponitur.

M	10000	CCIↃↃ	I	1	I	[Δ]	50	L
X	1000	CIↃ.M	II	2	II	[Δ] ΔΔΔΔ	90	XC
H	100	C	III	3	III.	H	100	C
Δ	10	X	IIII	4	IIII. IV	HHHH	400	CCCC
I	1	I	Π	5	V	[H]	500	D. IↃ
Π	5	V	ΠI	6	VI	[H] H	600	DC. IↃC
[Δ]	50	L	ΠIIII	9	IX	X	1000	M. CIↃ. ∞.
[H]	500	D. IↃ	Δ	10	X	XXXX	4000	MMMM
[X]	5000	IↃↃ	ΔI	11	XI	[X]	5000	IↃↃ.
[M]	50000	IↃↃↃ	ΔΠ	15	XV	[X] X	6000	IↃↃC
			ΔΠIIII	19	XIX	M	10000	CCIↃↃ
			ΔΔ	20	XX	[M]	50000	IↃↃↃ
			ΔΔΔ	30	XXX		100000	CCCIↃↃↃ
			ΔΔΔΔ	40	XL		1000000	CCCCIↃↃↃↃ
							10000000	CCCCCIↃↃↃↃↃ

Literarum numeralium selectarum ratio. Harum vero literarum numeralium valorem quamvis intelligant plurimi, earum tamen rationem pauci sunt qui animadvertunt; Latinarum præsertim. Imo qui ex professo illarum rationem reddere conantur nonnulli, potius nugas proferunt quam veras rationes: Quas tamen ego exagitare non operæ pretium judico. Legat, qui velit, Julium Scaligerum, *de Causis Linguæ Latinæ*; Hermannum Hugonem, *de Ratione Scribendi*; Venerabilem Bedam, aliosque: qui, quamvis rationes reddere conantur, cur hæ potius quam aliæ literæ numeris significandis adhibeantur, ut plurimum tamen mihi neutiquam satisfaciunt. Alii, quos non consului, fortassis meliores reddant. Ego interim, omissis aliis, eas quæ mihi maxime videntur probabiles, breviter producam.

Quod ad Græcas literas attinet, non est cur multum hæsitemus, cum earum ratio
Apud Græcos. satis in plerisque pateat.

M μύρια, X χίλια, Δ δέκα, & Π πέντε significant, quia vocum illarum literæ sunt ini-
M. X. Δ. Π. tiales. Item, cur Π, inclusis literis Δ, H, X, M, harum valorem quintuplum exhibeat, satis liquet, cum ipsum Π numerum quinarium designet.

De solis literis H & I quæstio restat; quarum illa Centum, hæc Unum indicat: cum nec vox ἑκατὸν, nec εἷς, ab illis incipiat, sed ab E utraque.

H. De priori dicendum est, characterem illum H (prout Centenarium numerum notat) non tam esse figuram literæ *Eta*, quam spiritus asperi. Nam antiquiores Græci, antequam vocales longæ η & ω Alphabeto accesserant, Spiritum Asperum eo charactere designabant, quo jam Latini utuntur: Spiritum autem Tenuem omnino omittebant, ut & Latini etiamnum faciunt. Estque revera ipsa vox *Eta* ab Hebræorum *Cheth* desumpta, & eundem in Alphabeto ordinem retinet, ut & Latinorum H: (saltem si loco Hebræorum *Vau* substituatur vel ἐπίσημον C, vel
ꟷꟷ Æolicum Digamma, & Latinorum F.) Postea vero eadem litera bisecta ⊢ ⊣ figuras utrique Spiritui suppeditabat; pars nempe prior Spiritum Asperum, posterior Tenuem, designabat. Tandem vero illæ, quas nunc habemus, Spirituum notæ, ut expeditores, obtinebant, ' '. Antiqui igitur, non ἑκατὸν, sed Ηεκατὸν scribebant; unde character ille initialis desumptus est, H, numeri Centenarii nota.

I. Quod ad reliquam, quæ superest, figuram I attinet; adhibita fuit illa, vel quod tam Spiritus Asper, quam prima litera vocis εἷς, ipsi communes essent cum voce ἑκατὸν, ideoque proximam quæ sequitur literam I assumpserunt, qua significent vocem εἷς, adeoque numerum primum seu Unitatem: vel, quod ipsa vox εἷς antiquitus per nudum I scriberetur, ante inventam diphthongum ει, quæ forsan serius, quam numeris Characteres primitus aptabantur, inventa erat. Vel etiam quod ἴος, ἴα, ἴον, dicantur pro εἷς, μία, ἕν: vel denique, quia simplicissima illa & minutissima litera, (μονόγραμμος nempe, & unica lineola constans,) facillime omnium pingeretur; qua ratione, etiam nunc dierum, qui omnino rudes sunt & ἀγράμματοι, adeo ut nequidem literas intelligant, numeros tamen utcunque describunt, totidem forsan in pariete lineolis creta vel rubrica ductis quot vellent innuere unitates. Nec quidem hoc apud Græcos & Latinos tantum, reliquosque populos Occidentales obtinet; sed & in libello quodam Chinensi idem se observasse dicit Gatakerus; paginas nempe quatuor primores ita designatas; primam lineola unica |, secundam duabus ||, tertiam tribus |||, quartam quatuor ||||; sequentes vero aliis characteribus distinctas. Ipseque in variis Codicibus Chinensium comperi similiter lineolis notatas Unitates; & quidem Decadas duabus lineolis decussatis +. Atque hæc de Græcorum characteribus sufficiant.

De Latinorum autem literis non adeo facilis est ratio. Præter duas enim M
Apud Latinos. & C, quarum illa *Mille*, hæc *Centum* inchoat, aliarum origo altius petenda est.

M. Literam igitur M dicimus ad numerum Millenarium indicandum adhibitam, quia ejusdem litera est initialis. Sed addimus, ipsius figuram aliam aliquando fuisse, & etiamnum esse, quam quæ vulgo adhibetur. In libris quippe Anglicis, Belgicis, Germanicis, aliisque pinguiori typorum forma impressis, occurrit passim
𝔐. illius literæ hic Character 𝔐; rotundiori nempe forma quam in typis Italicis, Gallicis, Hispanicis, fieri solet: Antiquiores vero Anglo-saxones hac forma scri-
ꟿ. bebant ꟿ; & quidem in Libris Manuscriptis cujuscunque gentis reperitur passim Latinorum litera M majuscula rotundiori forma exarata. Hujusce vero literæ
D. (rotundiori, ut dictum est, forma scriptæ) semissis posterior, literæ D simillimus est; quam ideo adhibuerunt ad numerum Quingenarium indicandum, nempe Millenarii dimidium. Sed & hanc & illam, non antiqui modo, sed & Recentio-

I res

res nonnunquam in membra dividunt: nempe, pro ↀ & D, scribunt cıↄ & ıↄ; cıↄ.
priorem vero nonnunquam & hoc modo ∞; ut in libris non paucis apud Belgas ıↄ.
præsertim (sed & alibi) impressis videre est. ∞.

Literam vero C, centenarii numeri notam, antiqui Romani sic scribebant E, C.
(quadrata scilicet forma,) ut ex antiquis marmorum & nummorum inscriptionibus constare dicitur. (Quos imitantur quodammodo typi Germanici Anglicique pinguiores 𝕮.) Hujus quadratæ literæ semissis inferior ipsam literam L. 𝕷. efficit; 𝕮. quæ igitur ad exprimendum numerum Quinquagenarium adhibetur, nempe Centenarii dimidium. L. 𝕷.

Ad numerum Denarium exprimendum adhibuerunt, non literam D initialem: (quoniam erat ea quingenarii numeri nota, ut supra dictum est,) sed literam X, X. quæ conflatur ex duplicata litera V seu Λ; utroque enim modo Quinarii numeri nota antiquitus scripta fuit. V. Λ.

Erat autem V litera, Quinarii numeri nota; vel forte quia ex quinque punctis conflari videatur ·.·; Vel quia ipsius figura inversa Λ (quæ etiam non raro, apud Antiquos, numerum quinarium denotat) ad figuram Græcorum literæ Π (quinarii, apud illos, numeri notam) proxime accedit; (quippe nulla Latinorum litera ipsi est similior:) Vel etiam quia vox *Quinque* antiquitus per CV scripta fuerit, (antequam litera Q ad Latinorum Alphabetum accesserat;) quarum prima C, cum sit centenarii numeri nota, non potuit adhiberi, ideoque sequentem V assumserunt. Ipsam vero literam Q, recentius quam reliquæ literæ, ad Alphabetum accessisse, non esse dubitandum existimo; ut nempe illud significet quod conjunctæ literæ CV; (sicut & *&*, *x*, idem sonant ac *&*, *cs*:) adeoque ipsa litera U, quæ nunc pro more literæ Q subjungitur, omnino redundat, cum ipsius sonus in ipsa Q litera includatur; (prout contendit Reverendus Senex *Thomas Gatakerus* Anglus, in tractatu quem edidit de Diphthongis, sive *Bivocalibus*:) secus enim litera Q omnino esset superflua. Nam ut *gua* constituit ultimam syllabam in voce *lingua*, & *sua* primam syllabam vocis *suadeo*, sic & *cua* idem sonat ac *qua* in voce *qualis*: vel igitur redundat *u*, cum Q tantundem valeat ac *Cu*; vel ipsa litera Q omnino est superflua, & perperam Alphabeto inserta, utpote quæ non alia est quam litera C. Et revera, non modo sonus literæ Q, sed & ipsius character, conflatus videtur ex CV, nam ꝗ & Q solo situ differunt. Eodem prorsus modo ponebant veteres literam K pro CA; adeoque promiscue *Klendas* & *Calendas*, item *Krtago* & *Cartago*, item *Krissimi* & *Carissimi* (quod in MSS. sæpius comperi) multaque istiusmodi: quanquam nunc dierum, tam A perperam subjiciatur literæ K, quam U literæ Q; adeoque tam K quam Q, prout nunc usurpantur, prorsus redundent, nec aliud quicquam sonent quam C; non nego tamen hunc scribendi modum jam olim aliquando obtinuisse, neque tanti forsan res est ut nunc mutatum iri strenue urgeamus. At saltem eodem, si non majori, jure dicendum esset, *Post Q non scribitur U*, & *Post K non scribitur A*, atque dictum est, *Post X non scribitur S* (nempe quia *s* includitur in litera *x*, quæ ex *cs* conflatur:) nam pariter absurdum est literam A literæ K inclusam, aut U inclusam literæ Q, repetere, ipsive K vel Q subjungere; ac ipsam literam S literæ X inclusam eidem denuo repetitam subjungere. Sed neque hæc regula universaliter obtinere debet, acsi post X nunquam scribenda esset litera S; quamvis enim illud secus obtineat, tamen quoties præter ipsum S literæ X inclusum, aliud sequatur S juxta vocis analogiam ipsi subjungendum, nihil impedit quo minus adjungatur, prout in modernis typis accuratioribus fieri consuevit. Ideoque melius *exscribo, exsurgo, exsisto, exsto, exsulto, &c.* per *s* scribuntur, quam *excribo, exurgo, &c.* sine *s*. Quamvis enim *s* in *x* includatur; nihil tamen absurdi sequitur si geminum *s* adesse dixero; alterum nempe præpositionis *ex*, alterum vocis sequentis: Sed & eadem de causa *assto, asscribo, asscendo, asstipulor, &c.* per geminum *s*, scribenda sunt, (alterum nempe loco absentis *d*, alterum vocis sequentis,) non minus quam *assumo, assurgo, assimilo, &c.* quæ ab omnibus per geminum *s* scribi solent. Nisi malit quis utrobique literam *d* retinere, *adsto, adsumo, &c.* Sic & *exsul, exsilium*, per *s* scribenda sunt, quæ ejusdem sunt originis ac *præsul, consul, consilium*, ejusdem (credo) cum *exsulto, exsilio*, à voce *salio*. Sic & *exsemplum* à voce *similis*; dicimus enim Anglice tam *ensample* quam *exsample* & *sampler*, unde liquet literam *s* radicalem esse, & non tantum ad præpositionem *ex* pertinere: *p* vero Epenthetice inseritur, ut in vocibus *exemptus*, *redemptus*,

redemptus, *contemptus*, *&c.* & β *in* Græcis μέμβλεται, μέμβλωκε, pro μεμέληται, μεμέλωκε, sic & μεσημβρία *meridies*, quasi μεσήμριον, contracte pro μεσημέριον, ut & in Anglicis (vel etiam Gallicis) *Assemble*, *dissemble*, *resemble*, *semblance*, à Latinis *simul*, *simulor*, *similis*, sic ab *humilis*, *tremulus*, fiunt *humble*, *tremble*; sic *chamber*, *tender*, *cinder*, à Gallicis *chambre*, *tendre*, *cendre*, cum tamen Latine dicamus *cameram*, *tenerum*, *cinerem*; sic à *Cimmerius* fit *Cimbricus*; sic ab ἀνέρος, per Syncopen ἀνρος, Euphonice ἀνδρός. Nam revera literæ *m* & *n* cum sequentibus aliquot consonis (præsertim *l* & *r*,) vix cohærent nisi post illam interveniat *b* vel *p*, post hanc *d* aut *t*. Sed hæc obiter.

I. Restat alia I, cujus rationem reddituri sumus. Ea nempe, ut Græci, sic Romani Unitatem indicant; atque hoc faciunt Romani vel quod Græci sic prius fecerint; vel, quia litera hæc minima quidem est & simplicissima, ut & supra de Græcorum I diximus.

Vel denique, fieri potest, ut pro *Unitate* simplici, sive primi loci, posuerint lineolam simplicem I: pro unitate secundi loci, hoc est *Decade*, duas transversas, seu literam X, (hujusque semissem V pro numero quinario;) pro unitate tertii loci, hoc est, *Centuria*, tres conjunctas, seu literam ⊏, (hujusque semissem L, pro quinquaginta:) & denique, pro unitate quarti loci, seu *Mille*, quatuor conjunctas lineas, nempe literam M vel ꟿ, hujusque semissem D pro quingentis. Et quidem (ut supra dictum est) Sinenses hodierni (credo & antiquiores) Monadem per Lineolam simplicem, |; Decadem per duas decussatas, +, designant: item Duo, per ||; Viginti, per ++; & in aliis pariter.

Atque hactenus de Numerorum Notatione per literas Alphabeticas dictum est: superest, ut eorundem notationem per *Ziphras* (ut vocantur) *Saracenicas*, explicemus.

CAP. IX.

Numerorum Notatio per Ziphras Saracenicas, sive Vulgares Figuras Numerales. Ciphra quid; ejusque variæ significationes. Occulte scribendi modi. Siglæ & Notæ, quomodo differant apud Romanos. Notæ Arithmeticæ à quibus inventæ.

PRæter eos quos superius tradidimus Numeros describendi modos, per Alphabeti Literas; alius adhuc maximi momenti superest tradendus: Adhibitis nempe vulgaribus figuris Numeralibus, 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. quas *Ziphras Saracenicas* nonnulli dicunt; de quibus nunc agendum est.

Ciphra quid? Unde dicitur?

Vox *Ziphra* (vel *zifera*, vel *siphra*, vel *ciphra*, variis enim modis scribitur) est plane Arabica. Sed non uno semper eodemque sensu usurpatur. Descendere videtur vel ab Hebræorum ספר *saphar*, (uti Schindlero placet, in ipsius Dictionario Pentaglotto,) quod & *numerare* significat & *describere* sive *notare*: Et quidem si à priori significatu descendere putetur, significaret proprie *notas numerarias*, quo sensu novem illas figuras numerarias *Siphras Saracenicas* appellamus; si autem à posteriori, quaslibet etiam alias *Notas* vel *Characteres* rei alicujus aut vocis, vel etiam literæ indices, quo sensu *furtivas literarum notas*, ad occulte scribendum inventas, *Ziferas* appellat Baptista Porta, ut & alii. Vel, si ea derivatio minus placeat, deduci potest (&, credo, rectius) ab Arabico צפר *Zaphara*, quod *vacuum esse* vel *inane* significat, uti docet D. Golius in Lexico suo Arabico: adeoque de *nihili* sive *nullitatis* nota præcipue intelligenda erit.

Vox illa ab Arabibus ad nos delata, pro certa cujusdam Numeri *Nota*, seu charactere certi alicujus Numeri indice, passim occurrit; quo sensu decem illæ, nunc vulgo receptæ, figuræ Arithmeticæ vocantur *Ziphræ*, seu *Ciphræ*, aut *Siphræ*. Nonnunquam tamen, & quidem frequentius, non de illis omnibus, sed de illarum unica, vox illa dicitur; Nempe de Circello, *Nullitatis* seu *Nullius* nota:

(unde & metaphorice, de re seu persona inutili, *μηδενώδης* dicitur, *instar ciphræ*, tanquam *nullius numeri*:) Atque hoc quidem sensu sæpius & apud alios, & apud nos infra occurrit.

Nonnunquam autem vox illa latius patet, ut non tantum decem illas, quæ in Arithmetica usurpantur, sed simpliciter quaslibet vel literarum vel etiam vocum aut rerum Notas, vel brevitatis vel etiam occultationis causa adhibitas. Atque hoc sensu *Johannes Baptista Porta*, Neapolitanus, librum *De Zipheris, sive furtivis literarum Notis*, conscripsit: Trithemius item *de Steganographia* libellum conscripsit, abstrusum satis; quem inter alios, explicandum suscepit *Gustavus Silenus*; (hoc est, explicatius, *Augustus Luniburgensis*: quippe *Gustavus* *ἀναγραμματικῶς* est *Augustus*; & *Selene* Lunam designant Græci; indeque *Silenus*, Luniburgensem Ducem.) Item Blaisius Vigenerius (Gallice) & alii de ejusmodi Zipheris libros ediderunt. Sed & novæ indies methodi per *Zipheras* scribendi excogitantur, & in rebus majoris momenti, ab iis præsertim qui Principibus sunt à secretis, usui aptantur: saltem quoties aliquid occulte scribendum est, quod nollet scriptor etiam intuentibus innotescere. Hinc voces illæ *Ciphrandi* & *Deciphrandi* ortum habent; est enim *Ciphrare*, aliquid ciphris committere, seu occulte scribere; *Dicephrare* vero est ciphras explicare vel quid sub ciphris occultetur interpretari. *Occulte scribendi ratio.*

Atque hæc quidem occulte scribendi ratio flagrante nuper apud nos Bello Intestino admodum erat familiaris; adeo ut vix quisquam esset alicujus notæ vir, qui non, in rebus majoris momenti communicandis, hujusmodi ciphras adhibere solebat, scriptasque ad suos epistolas hujusmodi involucris obtegere; ut, si in hostium manus pervenirent, non intelligerentur.

Et hujusmodi quidem scripta non pauca, in itinere intercepta, nobis explicanda tradebantur; diversis quidem occultandi methodis involuta, adeoque alia aliis explicatu difficiliora; & quidem nonnulla tam insuperabili difficultate obvoluta videbantur, ut fere de illorum explicatione desperaverim, nec nisi post diuturnam inquisitionem incredibili labore tandem superaverim. Quorum non pauca specimina in publica Bibliotheca Bodleiana Oxoniæ conservanda tradidi, ubi & conspicienda manent.

Duplex erat hujusmodi apud Romanos scribendi ratio; quarum vestigia saltem ad nos pervenerunt: Altera per *Notas* (ut loquuntur) altera per *Siglas*: Quarum utraque partim expeditionis, partim occultationis causa erat adhibita.

Per *Siglas* scribere dicebantur, cum singulis fere literis totidem voces designabant. Sic Romanorum Nomina & Prænomina non raro pingebantur. Sic *M. T. Cicero*, pro *Marco Tullio Cicerone*, ponitur. Ita per C, *Caium*; per D, *Decium*; per P, *Publium*; per Q, *Quintum*; per Cn, *Cneum*; per A, *Aulum*, intelligebant: (unde lis illa, inter Criticos, de illius nomine qui *Noctes Atticas* scripsit; quem alii *Agellium*, alii *Aulum Gellium*, dicendum putant:) sic S. P. Q. R. *Senatum Populumque Romanum* significabat: (quod Beda noster Romæ agens, uti refert Erasmus, sciscitanti hospiti cuidam, qui saxis inscriptum crebrius offendisset, quid vellet; Respondit, *Stultus Populus Quærit Romam.*) S. P. D. *Salutem plurimam dicit*: A. U. C. *Anno urbis conditæ*: M. S. *Memoriæ sacrum*, aliaque multa. *Romanorum Siglæ.*

His sunt consimiles Hebræorum Abbreviaturæ, quas *Rashe Teboth* dicunt: dum nonnunquam vocabula initialibus tantum literis designant. Sic: אשר לברכה זכרו א"לז cujus memoria benedictioni*, seu *benedicta sit*: quam formulam adjicere solent quum Rabbinos quosdam mortuos nominant; prout nos *Beatæ Memoriæ*. Aliaque hujusmodi innumera videnda sunt apud Buxtorfium in libro quem scripsit *De Hebræorum Abbreviaturis*. Sic & Rabbinorum Nomina vulgo scribunt: ut

רמבם (Rambam) *Rabbi Moshe ben Majemon*, seu *Maimonides*.
רמבן (Ramban) *Rabbi Moses ben Nachman*, seu *Nachmanides*.
רדק (Radak) *Rabbi David Kimchi*.
רשי (Rashi) *R. Solomon Jarchi*.
רלבג (Ralbag) *R. Levi B. Gershom*. &c.

Siglarum mentio est apud Justinian. *in Pandect.* σημείοις, ἀπὸ στίχων χρῆσθαι. Et σημείων ejusmodi meminit etiam *Plut.* in *Cat. min.* *Siglas* vero dicebant Romani quasi *singulas*, quia singulis literis totidem voces significabant; vel etiam quasi *sigilla*, idque vel propter secretum scribendi modum, vel potius quod sint *signula* seu parva *signa*; hæc enim est prima ac propria sigilli notio unde & *sigillaria*. Quod autem litera *n* excidat in *sigla*, quæ habetur in *singula*, vel *signula*, illud

parum

parum est; præsertim cum sit literæ *g* proxima: Dicimus enim *singuli*, *sigillatim*; *Lingua*, *ligula*; *signum*, *sigillum*, (unde Anglicum *Seal*, sicut à *Regula*, *Rule*,) sic *Tignum*, *tigillum*, quæ forsan à *tango*, quia res contiguas copulat; vel, ut Scaligero placet, *Tignum* à *tegendo*, ut *lignum* à *legendo*, nam tignis & tegulis tectum constat. Sic à *jungo*, (Anglice *joyn*) fit *jugum*, Anglice *a Yoke*; (Græce ζεύγω, ζευγνύω, ζεῦγος,) unde forsan *jugulum*, non modo quia Jugum (cervicem pariter ac) jugulum cingit, sed potius quia humerus uterque ad jugulum coeunt & conjunguntur; qua ratione etiam juguli ossa κλεῖδες & κληῖδες Græce, Latine *Claviculæ*, appellantur, quia utrumque humerum connectunt; sub his autem claviculis est celeberrima illa Arteriæ magnæ, cor ipsum nuperrime egressæ, distributio, unde à communi trunco quasi per varios ramos sanguis arteriosus in varias corporis partes derivatur: Hic & venæ minores à plerisque corporis partibus in communem venæ cavæ truncum conjunguntur. Hinc est quod sæpissime Homerus, lethaliter vulneratos, *sub claviculis transfixos* dicit: est autem illi *sub claviculis figere* perinde ac Latinis *jugulare*, hoc est, jugulum ferire, jugulum resolvere; quod ideo pro lethali vulnere ponitur, non modo propter violatam Trachæam sive Asperam arteriam, sed potissimum quia eadem opera tam Aortæ sive Arteriæ Magnæ quam Venæ cavæ truncus facile dissecantur; adeoque brevissimo compendio (quod & laniis notum est) universum corpus tam venoso quam arterioso sanguine citissime evacuatur. Sed hæc obiter de *jungo* & *jugo*, ubi excidit *n* non minus quam cum à *singulis*, *siglas* dicimus. Sed & à *jungo conjugem* & *conjugium*; & à *jugo*, *jugales*, sic enim boum paria dicimus qui sunt sub eodem jugo conjuncti seu conjugati. Sic à πηγνύω vel πήγνυμι tam *figo* dicitur, quam *pango pegi* (quod significat *jungo*) atque hinc *compingo*, *compactus*, *compages*, &c. Sed de Siglis hactenus.

Romanorum Notæ. Præter Siglas vero, etiam *Notas* habuerunt Romani; quarum hæc est differentia; *Siglæ* sunt abbreviaturæ per ipsas Alphabeti literas factæ; *Notæ* vero, abbreviaturæ per characteres aliunde sumptos. Hinc *Notarii* apud Romanos dicti, qui brevibus *notis* aliorum sermones exceptos scribebant, ut apud nos Stenographi. Hujusmodi Notæ apud veteres satis erant frequentes: & extat adhuc libellus *de Notis Senecæ, & Tironis liberti Ciceronis*; inter quas tamen nonnullas serius adjectas esse res ipsa loquitur, nec quisquam qui ipsas perpendit dubitare poterit.

Cum igitur pro Numeris ponuntur literæ Alphabeticæ, ut M pro *Mille*, C pro *Centum* &c. est hæc scriptio per *Siglas*: cum vero alii characteres ponuntur, quales sunt ciphræ Saracenicæ, est scriptio per *Notas*; prout *notæ* à *siglis* distingui solebant. Quas vero olim *notas* dicebant, nunc dierum potius *Ziphræ* seu *Ciphræ* dicuntur; quæ vel ad expeditionem vel ad occultationem scriptorum adhibentur.

Ziphræ Saracenicæ. Atque hactenus de *Ziphrarum* nomine diximus: *Saracenicas* vero vel *Arabicas* dicimus; quia ab Arabibus ad nos devenerunt, ante annos plus minus quadringentos huc adductæ (ut *Vossius*) aut etiam Sexcentos. An autem Arabes, seu Saraceni, has ipsi invenerint, an ab antiquis Phœnicibus (quod non videtur probabile, cum Arabes doctrinam suam ut plurimum à Græcis hauserint, non à Phœnicibus traditam continuaverint) aut potius ab Indis (quod dicendum videtur) aut quibusvis aliis acceperint, ab illis potius quam à nobis determinabitur. Cum autem nos illas ab Arabibus, vel Mauris, accepisse sit extra dubium, unde illas habuerint Arabes ex eorum potissimum scriptis inquirendum est. Cumque illi earum inventionem Indis tribuant, non est cur nos ea de re dubitemus. Eorum autem doctissimus Scholiastes *Assepadi* (uti à Cl. *Pocockio* nostro, istarum linguarum cognitione nulli secundo, accepi) in commentariis suis ad elegantissimi Poetæ *Tograi* poema *Lamiato'l Ajam* dictum, notat *Indos de tribus suis inventis gloriari, ludo Scacchii, Figuris numericis, & libro* Golaila Wadamna *dicto*, (qui liber in Arabicam, Græcam, & alias linguas conversus, Fabulis Æsopicis, ad istius imitationem factis, ansam dedit:) nec ipse interim huic Indorum gloriæ quicquam derogatum it. Atque huic congruit illud quod testatur *Maximus Planudes* in suæ Arithmetices initio (prout in duobus Codd. MSS. extat in Bibliotheca Bodleiana) cui Titulus Μαξίμου τοῦ Πλανούδη λογιστικὴ Ἰνδική, (vel Ψηφοφορία κατ' Ἰνδοὺς) ἡ λεγομένη μεγάλη: Quem librum ab his verbis orditur, Οἱ τῶν ἀστρονόμων φιλοσοφώτεροι, ἐπεὶ ὁ τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει τὸ ἄπειρον, τοῦ (δὲ) ἀπείρου γνῶσις οὐκ ἔστιν, ἐφεῦρον σχήματά τινα καὶ μέθοδον δι' αὐτῶν, ὡς ἂν τὰ τῶν ἐν χρήσει ἀριθμῶν εὐμεθοδώτερον καταλαμβάνηται καὶ ἀκριβέστερον. εἰσὶ δὲ σχήματα ἐννέα μόνα, ἃ καὶ εἰσὶ ταῦτα 1 μ ϻ ϡ ϐ ϥ ν ∧ ϥ. Τιθέασι δὲ ἕτερόν τι σχῆμα, ὃ καλοῦσι τζίφραν, κατ' Ἰνδοὺς

Ἰνδοὺς σημαίνει οὐδέν· καὶ τὰ ἐννέα δὲ σχήματα καὶ αὐτὰ Ἰνδικά ἐστιν. ὃ δὲ τζίφρα καλοῦσιν ἔστιν ο. τούτων τῶν ἐννέα σχημάτων ἕκαστον καθ' αὐτὸ μόνον κείμενον, εἴτουν κατὰ τὴν πρώτην χώραν ἀπὸ τῆς δεξιᾶς χειρὸς ἡμῶν ἀρχομένων, τὸ μὲν 1 σημαίνει ἕν· τόδε μ δύο· τόδε μu τρία· τόδε ϥ τέσσαρα· τόδε 8 πέντε· τόδε ч ἕξ· τόδε v ἑπτά· τόδε ʌ ὀκτώ· τόδε q ἐννέα. κατὰ δὲ τὴν δευτέραν χώραν τὸ μὲν 1 δέκα, τὸ μ εἴκοσι, τὸ δὲ μu τριάκοντα, καὶ ἑξῆς. Ubi hæc duo confirmat Planudes, nempe figuras illas ab Indis originem habuisse, atque etiam *Ziphram* apud Indos (fortasse rectius dixisset Arabes) significare οὐδέν, seu *nihil*; adeoque à צפר *zaphera* potius quam ספר *sapbar* deductam; quod & confirmat ipsius scriptura, si enim à ספר descendisset σίφρα potius quam τζίφρα scriberetur. Nos autem eas ab Arabibus accepisse, præter communem omnium consensum, ulterius adhuc testatur, consensus ille qui inter Arabum characteres quibus hodie utuntur, (quique ab illis Planudis non multum absunt,) cum iis qui numeris designandis apud nos inserviunt. Levis enim est in plerisque characteribus discrepantia, nisi quod qui apud Arabes sive proni sive supini jacent, apud nos eriguntur: ut ex apposita comparatione videre est.

o 8
• 1 μ μu ϥ o ч v ʌ q
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Notat autem Erpenius (apud quem hi Characteres exstant) o circellum ab eorum aliquibus pro nullitatis nota haberi (ut apud nos) qui igitur distinctam habent quinarii notam; apud alios vero circellum illum quinarii numeri indicem, qui interim puncto crassiusculo nullitatem designant. Quod & Arabum libri Manuscripti testantur. Et quidem in MSS. tam Græcis quam Latinis (paulo vetustioribus) figuræ numerariæ minus adhuc ad Arabum figuris differunt, quam quibus hodie utimur. Qui autem ab Arabum figuris sensim deflexerint, donec ad eas quibus jam utimur figuras pervenerint, qui Codices Manuscriptos Græcos Latinosque succedentibus seculis exaratos pervolverit, facile perspiciet, quod nos præ characterum inopia typis exprimere haud valemus.

Atque hactenus de ipsis Ciphris seu figuris Arithmeticis: sequitur ut ipsarum usum ostendam.

CAP. X.

Figurarum Numeralium Valores; primarius & secundarius. Locus. Periodus. Ciphræ usus. Fractiones Decimales. Gradus Ascendentes & Descendentes, in proportione decupla.

SUnt illæ (quas diximus) figuræ Arithmeticæ vulgares, omnino decem: quarum valores jam explicandi veniunt. Prima o *Nullum* valet, sive Numeri negationem, & vulgo *ciphra* dicitur: Reliquæ novem totidem numeros significant (& *figuræ significativæ* dici solent:) nempe 1 *Unum*. 2 *Duo*. 3 *Tria*. 4 *Quatuor*. 5 *Quinque*. 6 *Sex*. 7 *Septem*. 8 *Octo*. 9 *Novem*. Suntque hi illarum *valores Primarii*, quos nempe per se significant. Habent enim & valores *Secundarios*, quos non per se, sed ratione sedis seu loci ubi reperiuntur, induunt: Sicut enim aliud est *duos boves* dicere, aliud *duos homines*; ita & aliud est *duas unitates* dicere, aliud *duas decades*, sive *duas centurias*; nam quamvis in his omnibus *numerus numerans* idem sit, (nempe *binarius*,) non tamen idem *numerus numeratus*. Hic autem characterum valor secundarius subinde mutatur, pro ratione *Sedis* seu *Loci* ubi reperiuntur. *Figurarum valor primarius.*

Cum igitur horum characterum plures in continua serie collocantur; locus ille qui ad dextram est, *primus* dicitur; qui illi proximus est sinistram versus, *secundus* dicitur; & sic deinceps reliqui quotquot sunt loci numerandi sunt. Ut positis his figuris 1654, est 4 in loco primo, 5 in loco secundo, 6 in tertio, & 1 in quarto. Ubi obiter notandum *Figurarum Sedes, seu locus, quid.*

notandum est me locum dextrum (in charta vel abaco) illum dicere, qui legentis dextræ opponitur, & eadem ratione sinistrum qui sinistræ: quod ideo facio, quoniam vulgatus loquendi usus apud plerosque scriptores hic esse solet, neque soleo quidem à recepto loquendi more nisi coactus discedere, ne, dum accuratius loqui velim, minus intelligar. Non ignoro tamen, quod si accuratius loqui velimus, ea pars chartæ seu libri dextra dicenda esset, quæ inspicientis sinistræ opponitur, sinistra vero quæ dextræ; supponitur enim liber inspectus opposita facie nos intueri, non terga dare: Atque hinc est, quod Feciales, dum Gentilitia Scuta, quibus familiarum Insignia inscribuntur, exponunt, eam semper Scuti partem Dextram appellant, quæ inspicientis sinistræ opponitur; quia nempe inspiciens rem inspectam adversa fronte supponitur intueri. Verum cum apud alios alius ut plurimum mos loquendi obtinuerit, cum vulgo loquendum esse duxi; adeoque (ut alii, sic ego) eam inspectæ chartæ dextram appello partem, quæ inspicientis dextræ objicitur; ideoque figuram loco primo positam, ad dextram poni dico; quæ vero in secundo loco, illam dico quæ proxima adest sinistram versus; & sic deinceps.

Figurarum valor secundarius. In primo quæ occurrit loco figura, tot Unitates numerat quot ipsius valor indicat: quæ in secundo, tot Decades: quæ in tertio, tot Centurias: quæ in quarto, tot Millia; quæ in quinto, tot Decades Millium: in sexto, tot millium Centurias: in in septimo, toties millena millia, seu tot Milliones, (prout nunc apud nos dici solet:) octavo, tot millionum Decades: in nono, tot Millionum Centurias: in decimo, tot Millionum Millia, seu millies millena millia: & sic deinceps, pro singulis locis, continua proportione decupla valorem semper augendo: prout ipsam numerorum dispositionem sive ordinationem, in decupla proportione procedere, supra dictum est. Et hac ratione numerus his characteribus exhibitus 1656, est *Mille sexcenta quinquaginta & sex*, seu *unum Mille, sex Centuriæ, quinque Decades, & sex insuper Unitates.* Atque hunc figurarum valorem *secundarium* appello; quia nempe ex sede seu loco ubi reperitur consurgit.

Periodus quid. Sed & ipsa etiam Loca, quo melius intelligantur, præsertim ubi plura occurrunt, in *Periodos* distingui solent: Ita nempe ut tria priora loca minima primam periodum constituant; tria proxima, secundam; & sic deinceps, singulis periodis tria loca assignando. Has autem periodos, (ubi saltem plures occurrunt, ut in grandioribus numeris,) plerique vel punctulis suprapositis, vel alia ad libitum distinctione, distinguere solent, quo promptius numerus proferatur.

Periodus autem prima *Unitates* denotat; secunda denotat *Millia*; tertia vero *Millena millia*; & sic deinceps. Ut enim locus locum superat proportione decupla, sic Periodus Periodum proportione Millecupla. Erit igitur numerus iste 2468013579, sic efferendus; *bis mille & quadringenta sexaginta octo Milliones,* (seu *Millena millia*) *tredecim Millia, quingenta septuaginta novem.* Et eodem prorsus modo de Numeris aliis omnibus judicandum est; tam ubi numerus datus, est suis characteribus describendus; quam ubi characteres propositi, sunt suis nominibus explicandi: Eadem enim utrobique est ratio.

Ciphra, seu Nullitatis nota. Ubi notandum est, quod circellus ille o, (*Ciphra* vulgo dicta, quam esse *nullitatis* notam supra diximus,) quamvis per se nihil significet ubicunque ponatur, (perinde enim est sive nullas Unitates, sive nullas Decadas, sive nullas Centurias, nullave Millia dicamus; nihil enim utcunque ponimus:) Non redundat tamen aut nulli inservit usui, sed necessario adhibetur ut locum saltem sua præsentia compleat; unde figuræ omnes in locis superioribus positæ justum suum valorem obtineant. Verbi gratia; si, in numero proxime apposito, 2468013579, deesset circellus sexto (à dextra) loco positus, adjuncta figura 8 numeri octonarii, non septimo, sed sexto esset loco; adeoque non octies millena millia, sed solum octingenta millia, significaret; atque idem de reliquis judicandum esset; nempe figura 6 non octavo (ut nunc) sed septimo esset loco, & 4 octavo, 2 nono; adeoque earum valores decuplo minores essent. Sic 1 *Unum* significat, (quia primo loco;) 10 *Unam decadem*, (quia 1 est loco secundo, & quamvis adjuncta ciphra o per se nihil significet, hoc tamen præstat ut figura 1 sit jam loco secundo, quæ secus esset primo:) 100 *Unam Centuriam*, &c. Si vero locis supremis ponantur ciphræ, nulli prorsus sunt usui, nullius saltem necessitatis, sed redundant prorsus; tantundem enim significant 0001, 001, 01, & 1. Fieri quidem nonnunquam potest ut Elegantiæ

gantiæ gratia, vel quo numerorum ſupputandorum collatio commodior fiat, ſiquando ſummæ variæ ſint in unam contrahendæ (ut in exemplo appoſito,)

libræ.	ſolidi.	denarii.
13	12	10
24	08	06
05	04	01

aut alia aliqua leviori cauſa accidentali, ejuſmodi redundantes ciphræ ſcribantur; ſed tantundem ſignificant acſi prorſus abeſſent. Atque hinc eſt, quod, licet in hac numerorum notatione, per notas has numerales, hujuſce circelli ſive ciphræ uſus ſit neceſſarius, quia valores notarum pro ratione loci ubi reperiuntur augeri poſſunt aut minui: Ubi tamen per Literas Alphabeticas numeri ſcribuntur, quarum valor conſtans eſt & immutabilis, (prout apud Latinos, Græcos, Hebræos, aliosque antiquitus fieri diximus,) hujuſmodi notæ nullus omnino eſt uſus, unde & nullam excogitarunt: Nam, verbi gratia, M D, *Mille & quingenta* ſignificant, ſive alii ſequantur numeri, ſive non.

Atque hactenus harum Figurarum Numeralium ordinariam ſeu vulgarem Notationem, ſeu (ut loquuntur alii) Numerationem explicavi, prout nempe uſu frequentiori ſolent occurrere: ita nempe ut Locus ad dextram ultimus, vel (ſi libet) primus, qui & omnium infimus eſt, ſemper habeatur pro unitatum Loco.

Recentiores vero, qui de *Fractionibus Decimalibus* agunt, (ultra quam Priores ſolebant Arithmetici,) non modo quotlibet ſupra Unitatum locum aſcendentia ſiniſtrorſum ſupponunt Loca; ſed & etiam infra Unitatum locum loca quotlibet Deſcendentia dextrorſum imaginantur, quibus *Fractiones* (ut loquuntur) *Decimales* ſcribantur. *Fractiones Decimales.*

Ut hoc autem melius percipiatur; ſciendum eſt quemlibet locum ad ſiniſtram progrediendo antecedentis ad dextram decuplum valere, ut ſupra declaratum eſt; contra vero, quemlibet dextrorſum procedendo valere antecedentis ſubdecuplum. Quoniam nempe decem Unitates conſtituunt unam Decadem, & decem Decades unam Centuriam, decem vero Centuriæ unum Mille, &c. (ſiniſtrorſum procedendo:) igitur vice verſa (dextrorſum procedendo) unum Mille continet decem Centurias, & una Centuria decem Decadas, una vero Decas decem Unitates: Atque hic vulgo ſiſtitur neque ulterius dextrorſum proceditur, quoniam Unitatum locus ſupponitur infimus ſive ad dextram ultimus. Si vero libeat plures adhuc dextrorſum locos aſſignare infra Unitatum locum cenſendos: eodem quo prius modo procedendum erit, nempe Quælibet Unitas continebit decem ejuſmodi partes ſeu quantitates (proximo dextrorſum loco numerandas) quarum decem conſtituant Unitatem, hoc eſt, quælibet Unitas continebit decem partes decimas; &, eadem ratione, quælibet pars decima continebit decem partes centeſimas; & quælibet centeſima decem milleſimas; & ſic deinceps: Ideoque quælibet figura loco infra unitates primo poſita deſignabit tot partes decimas; quælibet ſecundo totidem centeſimas; & quælibet tertio infra unitates loco, tot partes milleſimas deſignabit; & ſic deinceps quouſque libet.

Exemplum eſto hic numerus 3579|753; (ubi præter integrorum numerum 3579, adjunguntur partes decimales |753.) Figura 9, unitatum loco poſita, ſimpliciter *novem* (ſeu *novem Unitates*) deſignat: figura 7, quæ ad ſiniſtram eſt, *ſeptuaginta* (hoc eſt, *ſeptem decades*,) deſignat; at quæ ad dextram ſeptem δεκατημόρια (ſeu, *partes decimas*) innuit: Item 5 ad ſiniſtram *quingenta* (ſeu *quinque centurias*) ſignificat; at 5 ad dextram *quinque partes centeſimas* (quinque ἑκατοστημόρια) ſignificat: ſic & 3 ad ſiniſtram, *tria millia* denotat; ad 3 ad dextram, *tria* χιλιοστημόρια; ſeu *tres partes milleſimas*. Adeoque totus ille numerus 3579|753 denotat *ter mille quingenta ſeptuaginta & novem* integra, & inſuper (7 partes decimas, 5 centeſimas, & 3 milleſimas, ſeu) 753 *partes milleſimas*: (nam 50 *partes milleſimæ* tantundem valent ac 5 *partes centeſimæ*; & 700 *partes milleſimæ* tantundem ac 7 *partes decimæ*; adeoque conjunctim 753 *partes milleſimæ*, tantundem ac 7 *decimæ*, 5 *centeſimæ*, & 3 *milleſimæ*.) Figuræ autem illæ |753 poſt unitatum locum appoſitæ, (quæ *partes* ſeu *Fractiones Decimales* exprimunt) ſunt ab integris, interpoſito punctulo vel *ſeparatrice linea*, diſterminandæ; ut innoteſcat Unitatum locus, & conſequenter reliqui tam ſupra quam infra locum Unitatum, unde tam ſingularum notarum quam totius Numeri valor æſtimandus eſt.

Gradus Ascendentes & Descendentes.

His ita explicatis; mihi quidem omnino commodum videtur, singula numerorum loca sic distinguere, ut, posito Unitatum loco indifferenter sive ad ascensum sive ad descensum, (ut qui est quasi utriusque communis terminus) loci reliqui (prout gradatim vel augentur vel diminuuntur) *Gradus* dicantur vel *Ascendentes* vel *Descendentes*. Ita, in numero proposito 357|9|753, præter figuram 9 unitatum loco collocatam, accedunt gradus *Ascendentes* (primus, secundus, tertius) sinistrorsum computando, & totidem *Descendentes* Dextrorsum. Adeoque si graduum Ascendentium indices ponantur 1, 2, 3, &c. erunt è contra descendentium indices —1, —2, —3, &c. vel $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$, &c. Atque hoc significatu graduum Ascendentium & Descendentium deinceps facturus sum mentionem.

3. 2. 1. 0. $\bar{1}$. $\bar{2}$. $\bar{3}$.
3 5 7|9|7 5 3

Atque hæc de Figuris Arithmeticis, juxta continuam proportionem decuplam dixisse sufficiat.

CAP. XI.

Gradus Ascendentes & Descendentes in quacunque proportione. Algebræ fundamentum. Potestates Algebricæ cum Geometricis dimensionibus comparantur. Earum appellationes & characteres. Potestates illæ per Gradus Arithmeticos, quam per Geometricas dimensiones, aptius explicantur. Algebrica notatio ulterius traditur. Algebræ veterum & Recentiorum differentia. Utriusque usus exemplo ostenditur.

Graduum Ascendentium & Descendentium consideratio eadem est in alia qualibet proportione, quæ in Decupla.

NUmeros vulgo in proportione decupla ubique gentium dispositos, esse, superius diximus; atque huic distributioni aptatas esse vulgares notas sive figuras Arithmeticas, earumque locos seu gradus tam ascendentes quam descendentes. Sed & monuimus, quamvis aliam proportionem in disponendis Numeris assumi potuisse, aut etiamnum (ubi opus est) posse. At quæcunque demum adhibeatur proportio, modo ea continua sit, eadem omnino erit Graduum tam Ascendentium quam Descendentium consideratio atque in proportione Decupla.

Exempli gratia. Si exponantur Unitates *vigintiseptem*: constituunt illæ (ut patet) in proportione decupla, *duas Decades cum septem residuis Unitatibus*; ideoque in gradu primo ascendente (qui decadum locus est) ponenda est figura 2 (propter *duas* decades,) & (ob residuas *septem Unitates*) in unitatum loco figura 7: ut 27 exprimant *viginti septem*, sive *duas Decades cum septem insuper Unitatibus*. Si vero eadem unitatum multitudo in proportione quadrupla disponatur; emerget *Quaternionum quaternio* unus, & Duo insuper simplices *Quaterniones*, cum Tribus residuis *Unitatibus*: ponenda igitur (quoad hanc proportionem) in gradu secundo ascendente figura 1, (qua quaternionum quaternio *unus* designetur;) & in gradu ascendente primo nota 2, (propter *duos* quaterniones simplices:) & denique (propter *tres* residuas unitates) in unitatum loco figura 3: adeoque 1, 2, 3, exhibebunt *unum quaternionem quadruplum, duosque simplices quaterniones, cum*

$27 = 3 \times 3 \times 3$

$9 = 3 \times 3$ $9 = 3 \times 3$ $9 = 3 \times 3$.

$16 = 4 \times 4$

tribus insuper unitatibus, seu quod tantundem est, *viginti septem*. Si denique proportione tripla disponantur: emerget præcise *ternionum triplicatorum ternio* unus:

unus: ponenda igitur est, loco tertio ascendente, figura 1; & in reliquis ciphra seu 0, quia nullus superest innuendus vel ternionum ternio, vel ternio simplex, vel etiam unitas, horum igitur loci ciphris erunt supplendi; ut tandem 1, 0, 0, 0. (juxta continuam proportionem triplam) exhibeat præcise *unum ternionum triplicatorum ternionem*, quod tantundem est atque *viginti septem*. Et pari modo de alia quavis proportione dicendum esset. Hoc est,

In proportione { decupla, 2,7 / quadrupla, 1,2,3 / tripla, 1,0,0,0 } tantundem valent.

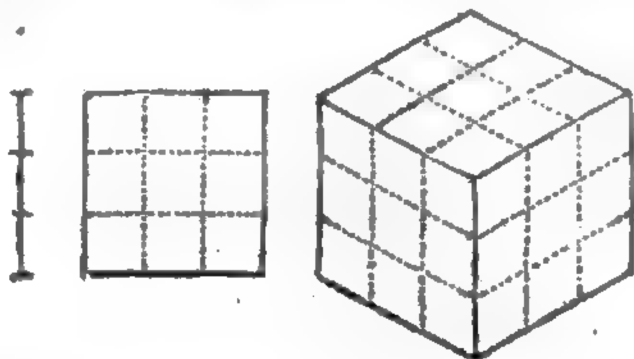
Pariter dicendum est de gradibus Descendentibus. Nam in proportione quadrupla, erit gradus descendens primus, *Quadrantum* locus; secundus vero, *quadrantum quadrantes* continebit, &c. In proportione tripla, erit gradus descendens primus, *trientum* locus; secundus vero, *trientum trientes* continebit; tertius, *trientum trientes trisectos*; Et sic deinceps in infinitum descendendo, sicut ex alia parte in infinitum proceditur ascendendo. Hujusce rei exemplum satis insigne passim occurrit in fractionibus (ut loquuntur) Astronomicis; ubi Integra intelliguntur dividi in partes sexagesimas & sexagesimarum sexagesimas &c. hoc est, *minuta prima, secunda, tertia*, &c. ad dextram descendendo; & contra ad sinistram ascendendo colliguntur in Aggregata Sexagecupla, & Sexagecuplorum Sexagecupla, &c. quæ vocantur *Sexagena prima, secunda, tertia, &c.* hoc modo.

$\overset{''''}{49}$, $\overset{'''}{36}$, $\overset{''}{25}$, $\overset{'}{15}$, $\overset{o}{1}$. $\overset{'}{15}$, $\overset{''}{25}$, $\overset{'''}{36}$, $\overset{''''}{49}$. ubi quilibet locus valet Sexagecuplum loci sibi ad dextram proximi, & contra sexagesimam partem illius qui sibi proximus est ad sinistram. Quod autem vulgo fit in ratione Decupla, & in fractionibus Astronomicis in Sexagecupla, potest & in alia quavis ratione fieri.

His ita explicatis; monendum duco, Universam Artem *Algebræ* sive *Analytices* hoc uno quasi fundamento niti: Atque si hæc, quæ de Gradibus (in quacunque ratione Ascendentibus & Descendentibus) diximus, satis intelligantur; magnam exinde affulgere lucem ad *Potestates* (quas vocant) *Algebricas* intelligendas, & rite tractandas. *Hinc Algebræ fundamentum.* Nam revera, quod nobis nunc est *gradus* (sive Ascendens, sive Descendens,) *primus, secundus, tertius*, &c. illud est Algebristis *Latus, Quadratum, Cubus*, &c. vel *Potestas prima, secunda, tertia*, &c. cum hoc tamen discrimine: Quod illi per plurium dimensionum Geometricarum suppositionem conantur explicare, nos inter Arithmeticæ fines continemus: vel etiam, si in materia Geometrica velimus illud ostendere, possumus illud per Quantitates Homogeneas (nempe vel per solas lineas, vel per solas superficies, vel per sola corpora) præstare, quod alii per Heterogeneas (nempe per lineas, & superficies, simul cum solidis, aliisque etiam plurium adhuc dimensionum imaginariis quantitatibus comparatas) præstare satagunt. Hoc autem cum olim vel ignorabant, vel non satis attendebant, vel forte dissimulabant, adeoque occultabant Algebristæ Veteres; coacti fuere multa specialiter de Lineis, de Planis, & de Solidis, tradere & demonstrare, quæ rectius (& quidem facilius) de numeris (vel, si libet, de Rationibus) generaliter essent & tradenda & demonstranda; quæ deinde, ubi opus esset, (sive in re Geometrica, sive in quavis alia) specialiter essent accommodanda, non minus quam reliqua Arithmetica tota. Cur autem illi ad Quantitates Geometricas (potius quam Arithmeticas) & quidem Heterogeneas (potius quam Homogeneas) confugerint; nullam ego rationem video verisimiliorem, quam quod Arithmeticorum *Unum* (non vero, ut oportuit, *Nullum*) cum *Puncto* Geometrico comparabant; adeoque non animadvertebant quo pacto possent Arithmetice illud exhibere quod in Geometricis observaverant: aut etiam fortasse, quoniam Elementa Geometrica pro totius Matheseos basi reputabant, putabant etiam Arithmetica omnia eo redigenda esse, neque de horum veritate melius constare posse quam si inde comprobentur; cum tamen revera res Arithmeticæ altioris sint & magis abstractæ naturæ, quam Geometricæ; & v. g. non, quia *linea bipedalis bipedali addita facit quadripedalem*, ideo *duo & duo faciunt quatuor*; sed potius, quia hoc, ergo illud. Totum autem hoc quicquid est negotii melius percipietur postquam Notationem sive Numerationem Algebricam (ut loquuntur) seu Cossicam, ejusque originem, explicavero: Quod jam facturus sum.

Potestatum Algebricarum cum Dimensionibus Geometricis comparatio. Earumque appellationes.

Observarunt illi (qui numeros Cossicos ordinarunt) ex principiis Geometricis, quod si *Linea* aliqua ad libitum assumpta (puta, trium pedum longa;) ducatur in se, (hoc est, si tantum extendatur, sive moveatur directe in latum, quantum est in longum extensa,) fiet *Quadratum*, cujus *Latus* erit linea assumpta: si vero Quadratum hoc ducatur in suum Latus (hoc est, si tantum extendatur, seu mo-



veatur directe in altum, quantum est vel in longum, vel in latum extensum; seu, quod perinde est, si altitudinem acquirat Lateris longitudini æqualem) *fiet Cubus*, cujus itidem latus erit assumpta linea. Observarunt deinde Aream seu magnitudinem Quadrati investigari multiplicando numerum lateris in seipsum; (ideoque cum latus sit trium pedum longitudine; quoniam ter tria sunt 9, continebit Area Quadrati novem pedes quadraticos:) Item si Area quadrati multiplicetur in suum latus, emerget magnitudo Cubi, seu potius multitudo pedum cubicorum in cubo contentorum; (adeoque si area quadrati 9, multiplicetur per latus 3, prodibit numerus 27, quæ est magnitudo Cubi, seu multitudo pedum cubicorum in in illo cubo contentorum cujus latus est tres pedes longum.) Hæc autem invicem comparantes, quoniam figura quæ ex latere in seipsum ducto emergit, *Quadratum* dicitur, & quæ emergit ex quadrato in latus ducto *Cubus* dicitur; ideo & productum ex numero in seipsum multiplicato numerum *Quadratum* appellabant (qui quadrati Aream quodammodo repræsentat) cujus *Latus* sive *Radicem* appellabant numerum illum qui sic erat in se multiplicatus; & productum, ex multiplicatione numeri quadratici in suum latus seu radicem, appellabant numerum *Cubicum*, qui & aream seu magnitudinem Cubi quodammodo repræsentat. (Atque hinc factum esse, credo, quod *numerum hunc in illum ducere* idem significet ac *numerum hunc in illum*, seu per illum, *multiplicare*.)

Quamvis autem animadverterint, Geometrice in *Cubo* sistendum esse (utpote qui tres dimensiones Geometricas habeat, longitudinem, latitudinem, & profunditatem; nec plures sint in rerum natura possibiles) adeoque cubum in suum Latus duci non posse: attamen, cum nullum ejusmodi terminum Arithmeticis Multiplicationibus poni viderint, quin ut possit Radix seu Numerus lateralis in continuos productos quousque libet multiplicari; ideo & Numeros *Figuratos* (quos vocant) ulterius continuandos putabant, quos quatuor, quinque, sex, aut etiam plures dimensiones supponunt continere; eosque *Quadratoquadraticos*, *Surdesolidos*, *Quadraticubos*, &c. nominabant; appellationibus scilicet tanquam ex Geometria mutuatis.

Nonnulli (præsertim Itali) pro *quadrato*, *zenzum* vel *censum* dicunt, & *Zenzizenzum*, *Zenzicubum*, &c. pro *quadratiquadrato*, *quadraticubo*, (vel *quadrato cubi*) &c. item, pro *Radice*, *Rem* dicunt; unde & Regulam Algebræ, *Regulam rei & census* (hoc est, regulam Radicis & Quadrati, seu Zenzi) appellant: item, pro *Re*, *cosam* dicunt (nam *res* Italice *cosa* dicitur, sicut Gallice *chose*, *) unde hi numeri Figurati, *Cossici* vocantur; & regula Algebræ, regula *cosæ*, seu *cossi*, seu *cossica*; sic *characteres cossici*, *operationes cossicæ*, &c. dici solent. Alii simplicius (& forte melius) pro *Radice*, *Quadrato*, *Cubo*, *Quadratoquadrato*, (seu *Biquadrato*,) *Surdesolido*, *Quadrato Cubi*, *Surdesolido secundo*, *Quadratiquadratiquadrato*, *Cubo cubi*, *Quadrato surdesolidi*, *Surdesolido tertio*, &c. dicunt *Potestatem primam*, *secundam*, *tertiam*, *quartam*, &c. pro numero dimensionum quæ inibi intelliguntur contineri.

*Utrumque à Latinorum causa.

Characteres Cossici.

Sed & hisce potestatibus seu numeris figuratis suos Characteres aptatos habent, quibus indicentur. Aliqui quatuor initialibus literis R, Q, C, S, innunt *Radicem*, *Quadratum*, *Cubum*, *Surdesolidum*; vel etiam pro R, scribunt N, hoc est *Numerum*:

rum: Alii characteribus his utuntur ℞ ʒ ℭ ſß qui ex literis *r z c ſ* oriuntur, & innuunt *Rem, Zensum, Cubum, Surdesolidum*. Alii (saltem post *Franciscum de Vieta*, qui Arithmeticam *Speciosam*, ut loquuntur, vel primus omnium introduxit, vel saltem admodum auxit) pro *Radice* quamlibet ad placitum Alphabeti literam adhibent, ut A, ejusque reliquas potestates adjunctis literis *q* & *c* innuunt ut Aq, Ac, Aqq, &c. pro *Quadrato, Cubo, Quadratiquadrato*, &c. ex radice A: Atque hac notatione utitur D. *Oughtredus*, Anglus, in ipsius *Clavi Mathematicæ*, quam (aliquandiu antea conscriptam) Anno 1631 primo edidit, & deinceps aliquoties iteravit. Post eum (vel eodem circiter tempore) D. *Harriotus* item Anglus, Mathematicus eximius, in ipsius *Artis Analyticæ praxi*, quam post ipsius obitum edidit D. *Warnerus*, egregius & ipse Mathematicus, anno item 1631) literis alphabeticis ad placitum assumptis, & toties iteratis, quoties potestas indicata postulaverit, designat, puta *a, aa, aaa, aaaa*, &c. pro Radice, Quadrato, Cubo, Biquadrato, &c. Denique D. *des Cartes*, & post illum alii, literarum sæpe iterandarum tædium timentes, radicem, ut prius, qualibet Alphabeti litera designant, & ipsius reliquas potestates suspensis notis numericis (pro numero Gradus seu Potestatis) designant, ut a, a^2, a^3, a^4, &c. Quorum specimen in subjuncto Schemate intuendum exposui.

Nomina.	*Characteres.*					*Potestas seu gradus.*
Radix	℞	R	A	*a*	*a*	1
Quadratum	ʒ	Q	Aq	*aa*	a^2	2
Cubus	ℭ	C	Ac	*aaa*	a^3	3
Quad. quadratum	ʒʒ	QQ	Aqq	*aaaa*	a^4	4
Surdesolidum	ſß	S	Aqc	&c.	a^5	5
Quad. Cubi.	ʒℭ	QC	Acc		a^6	6
2m Surdesolidum.	Bſß	bS	Aqqc		a^7	7
Quad. quad. quad.	ʒʒʒ	QQQ	Aqcc		a^8	8
Cubi cubus	ℭℭ	CC	Accc		a^9	9
Quad. Surdesol.	ʒſß	QS	Aqqcc		a^{10}	10
3m Surdesolidum	Cſß	cS	Aqccc		a^{11}	11
Quad. quad. cubi	ʒʒℭ	QQC	Acccc		a^{12}	12
4m Surdesolidum	Dſß	dS	Aqqccc		a^{13}	13
Quad. 2i Surdesol.	ʒBſß	QbS	Aqcccc		a^{14}	14
Cubus Surdesol.	ℭſß	CS	Accccc		a^{15}	15
Quad.quad.quad.quad. &c.	ʒʒʒʒ	QQQQ	Aqqcccc		a^{16}	16

Notandum autem est, quod in grandioribus potestatibus (quæ nempe quartam sequuntur) non eodem apud omnes modo appellationes aptantur. Nam v. g. *Quadratocubus* apud non paucos significat *Quadrati cubum*, seu *Cubi quadratum*, adeoque *potestatem sextam*, (quæ ex cubo in seipsum ducto emergit, vel ex quadrato cubice multiplicato, hoc est, in seipsum bis ducto;) atque in hac significatione appellationes quas in Schemate apposui intelligendæ sunt, atque huic congruunt prima & secunda characterum series: At *Vietæus* (& qui illum hac in re sequuntur, ut & ex veteribus Diophantus,) per *Quadrato-cubum* intelligunt potestatem quintam, quæ ex Quadrato in Cubum ducto emergit; adeoque veterum *Surdesolidos* (primos) ille Quadrato-cubos vocat; (& eadem analogia reliquarum potestatum nomina format, adeoque surdesolidorum appellationem omittit;) cui etiam nomenclaturæ conveniunt ipsius characteres, (qui in characterum tertia serie habentur) *Cartesius* (& qui illum imitantur) veterum potius nomenclaturam resumit; ipsius vero characteres (quinta serie positi) utrivis æque conveniunt, cum solummodo potestatum ordinem, seu numerum dimensionum innuant, adeoque minus dubiæ significationis, & errori minus obnoxii. Quibus conformes sunt (Cartesianis priores) *Harrioti* characteres, quarta serie positi.

Potestates Algebricæ melius per Gradus Arithmeticos, quam per Geometricas Dimensiones, explicantur.

Quod autem alii per varias dimensiones Geometricas explicarunt, ego potius per gradus Arithmeticos explicandum existimo, adeoque extra campum Arithmeticum non excedendum. Idem igitur nobis est *Gradus ascendens primus, secundus, tertius*, &c. quod illis *Radix, Quadratum, Cubus*, &c. Prout enim, apud illos, quoties in

in Radice continetur Unitas, toties in Quadrato Radix, totiesque in Cubo Quadratum supponitur contineri: sic & nobis, quoties in *Gradu Ascendente primo* continetur unitas, toties in secundo primus, & in tertio secundus; & sic deinceps. Quod autem de gradibus supra unitatem Ascendentibus dictum est, etiam de gradibus infra Unitatem Descendentibus est intelligendum. Sicut enim, ubi Radix est unitate major, singulæ potestates gradatim Ascendunt: ita ubi Radix est unitate minor, gradatim Descendunt. Si vero ipsa Unitas sit Radix, neque Ascendunt neque Descendunt, sed & potestas unaquæque est etiam Unitas; nam Unitas in Unitatem quotiescunque Multiplicata, manet Unitas. Mallem autem per varios Gradus Arithmeticos, quam per Geometricas Dimensiones, rem explicare his de causis.

1° Quia universa Algebra est vere Arithmetica, non Geometrica; ideoque potius Arithmeticis quam Geometricis principiis explicanda. Quamvis enim Geometrica multa Algebricis principiis vel inveniantur vel elucidentur, non tamen inde sequitur Algebram esse Geometricam, aut quidem Geometricis principiis nixam, (prout, qui sic procedunt, videntur imaginari,) sed ob intimam Arithmeticæ Geometriæque affinitatem illud evenit, aut potius quoniam Geometria sit Arithmeticæ quasi subordinata, adeoque universalia Arithmetices effata rebus suis specialiter applicet. Nam, siquis lineam tripedalem bipedali additam, lineam quinque pedes longam, constituere affirmet eo quod numerus binarius & ternarius additi efficiant quinarium; non eapropter calculus ille Geometricus est, sed plane Arithmeticus, quanquam Geometricæ mensuræ subserviat: est enim assertio illa, de æqualitate numeri quinarii, cum numeris binario & ternario conjunctis, assertio generalis, quibuscunque aliis rebus non minus quam Geometricis applicabilis; nam & Angeli duo & tres, sint Angeli quinque. Atque eadem omnino ratio est operationum omnium sive Arithmeticarum sive speciatim Algebricarum; quæ ex principiis magis generalibus procedunt quam ut Geometricis mensurationibus restringantur.

2° Quia Potestates Algebricæ non raro altius ascendunt quam Geometricæ dimensiones. Cum enim Geometria non plures quam tres admittat dimensiones, Longitudinem, Latitudinem & Altitudinem seu profunditatem, adeoque nec ultra corpus solidum, seu cubum, ascendit: Algebra interim ad Quadratoquadratum seu surdesolidam, aliasque ad libitum superiores potestates procedit. Commodius ergo per gradus Arithmeticos, qui indefinite quousque libet extendi possunt, quam per Geometricas Dimensiones, quæ vel omnino tantum tres sunt, vel, si plures supponantur, imaginariæ tantum sunt & plane impossibiles.

3° Quia etiamsi Geometria posset tot dimensiones suppeditare, quot Arithmetica gradus; tamen nec sic quadrarent operationibus Algebricis. Sæpissime enim contingit æquationes fieri inter varias potestates non ejusdem altitudinis; quod quamvis satis conveniat Gradibus Arithmeticis, Geometricis tamen dimensionibus neutiquam convenit. Verbi gratia Posito pro Radice, ternario; hujusmodi possunt æquationes occurrere 2 Q = 6 R vel 2 C = 6 Q; hoc est, Duo Quadrata æquari sex Radicibus; vel duos Cubos, sex Quadratis. At quis non videt, Quadrata & Cubos, vel Quadrata & Latera, cum sint quantitates heterogeneæ, non posse comparari? Nec enim Cubus constituitur ex Quadratis, (quamvis illis terminetur) nec Quadratum ex Lateribus. Omnes enim quantitatum comparationes quoad æqualitatem, inter Homogeneas tantum sunt faciendæ. Sic Solidum Solido æquale est aut inæquale, & Planum Plano, & Linea Lineæ; At Solidum Plano nec æquale, nec inæquale sed quid Heterogeneum. Sic solidum solido addi vel auferri dicitur, & planum plano, lineæque linea: at nec solidum plano, nec utrivis linea. Verum, si Arithmetice loqui libeat, optime dici potest, centurias duas æquari viginti decadibus, aut duo millia centuriis viginti; hoc est, numeros aliquot unius gradus simul sumptos, æquari aliquot numeris alterius gradus simul sumptis: Sic & duas trientum triades æquari sex trientibus, hoc est, (si 3 sit radix) duo quadrata æquari sex radicibus. Cum enim numeri omnes (proprie dicti) ex unitatibus constituantur (vel saltem ad unitatem vere rationem habeant) sunt vere Homogeneæ (licet fortasse, si de numeris surdis etiam loqui velimus, sint Incommensurabiles) ideoque vel æquales vel inæquales, majores aut minores, alii aliis dici possunt, possuntque invicem addi vel auferri: Quæ omnia in Geometricis magnitudinibus, nisi homogeneis, fieri non possunt.

Siquis dicat Æquationes Algebricas, ubi Cubi, Quadrata, & Latera comparantur,

tur, non de Cubis, Quadratis & Lateribus Geometricis institui; sed de Numeris Cubicis, Quadraticis, & Lateralibus; posse autem Numeros Quadraticos cubicis aliquot æquales esse; Fateor quidem hoc verum esse: Sed jam de Numeris res erit, (quod nos contendimus,) non de magnitudinibus; eritque consideratio plane Arithmetica, non Geometrica. Estque numerus Lateralis, Quadraticus, Cubicus, cæterique, nihil aliud quam denominationes graduum (sive Ascendentium sive Descendentium) primi, secundi, tertii, &c. in certa aliqua proportione. Sic in proportione tripla, gradus ascendentes exhibent Triades, Ternionum triades, Ternionum triades triplicatas &c. hoc est, Radices, Quadrata, Cubos &c. Si enim *Ternio* radix constituatur; *ternionum trias* erit numerus quadraticus, nempe numerus ternarius in se ductus; & *ternionum trias triplicata* numerus cubicus, nempe ternarius in sui quadratum ductus; Et sic de cæteris.

Atque has rationes dedisse sufficiat, cur credam potestates Algebricas melius per Gradus Arithmeticos, seu numeros continue proportionales, quam per dimensiones Geometricas Heterogeneas, explicari.

Potestates Algebricas, cur antiquis nominibus adhuc appellandas duxerim.

Verum cum jamdiu recepta fuerint vocabula, quibus potestates Algebricæ vulgo exprimuntur; eadem & mihi non incommode adhibenda censeo: cum vocabula artium semel recepta, quamvis forte minus exacte rebus aptata, raro possint citra gravius incommodum immutari. Præterquam enim, quod si frequentes hujusmodi pro cujusvis arbitrio fierent immutationes, non modo pluribus quam necesse est vocabulis oneranda esset memoria, cum & antiqua & nova sint addiscenda & recordanda, ut varii authores varia nomenclatura utentes intelligantur; illud interim gravius est, quod eadem vocabula, vario sensu à variis usurpata, confusionem non raro haud exiguam inducant. Sufficiat saltem monuisse, varias Potestates Algebricas, quocunque appellentur nomine, nil aliud esse quam Numeros sive Lineas sive alias etiam quantitates invicem homogeneas, continue proportionales.

Notatio Algebrica ulterius traditur.

Ut autem numerationem Algebricam plenius absolvam; sciendum est hujusmodi sive potestates sive gradus (cum non ita commode possint ac numeri simplices decupla proportione dispositi, ipsis tantum locis designari) appositis suis quibus indicentur characteribus distingui solere; quales nempe supra ostendimus.

Cum autem hujusmodi potestates plures simul conjunguntur, fit hoc non simpliciter unam alteri immediate postponendo, (prout in vulgaribus notis numeralibus fieri solet;) sed peculiaribus *signis* hunc in finem inventis colligantur: suntque ea præsertim hæc duo + & —, quorum illud Additionis, hoc Ablationis indicium est; sive illud Affirmativum, hoc Negativum; vel illud Positivum, hoc Ablativum; sive (ut vulgo efferuntur) *Plus* & *Minus*. Ego hoc tertium (cum *Oughtredo*) adjungendum existimo, ×, quod sit Multiplicationis indicium. Item = vel ∞ quæ sit Æqualitatis nota. Sic numerus (supra memoratus) 27, ratione decupla consideratus erit 2 ℞ + 7 vel 2 R + 7 vel 2 A + 7, Hoc est, duæ radices seu decades & septem unitates: In proportione quadrupla, erit 1 zz + 2 ℞ + 3, vel Q + 2 R + 3, vel A q + 2 A + 3, vel $a^2 + 2a + 3$; hoc est unum quadratum (seu quaternionum quaternio) & duæ radices (seu quaterniones) & tres unitates: In proportione tripla, erit 1 ℭ vel 1 C vel 1 A c vel 1 a^3; hoc est, unus cubus, seu ternionum trias tripla. Vel etiam in proportione decupla idem numerus 27 erit 3 ℞ — 3, vel 3 R — 3, vel 3 A — 3; hoc est, tres Radices (seu decades) demptis tribus unitatibus: In quadrupla, 1 zz + 3 ℞ — 1, vel 1 Q + 3 R — 1, vel 1 Aq + 3 A — 1, vel 1 $a^2 + 3a - 1$: hoc est, unum quadratum (seu quaternionum quaternio) & tres Radices (seu quaterniones) dempta unitate: Et pariter in aliis. Atque hujusmodi sunt illæ formulæ locutionis ordinariæ, cum, pro *Novendecim*, dicimus *Undeviginti*; pro *Octodecim*, *Duodeviginti* &c. hoc est, *viginti dempto uno*, *viginti demptis duobus &c*. Tale quid innuitur, cum pro 4. 9. 19. &c. scribitur IV. IX. XIX. hoc est, 5 — 1. 10 — 1. 10 + 10 — 1. Item 40. 90. 99. &c. XL. XC. XCIX. hoc est, 50 — 10. 100 — 10. 100 — 10 + 10 — 1. &c. Estque hæc notatio Algebrica, seu numerorum Cossicorum.

Algebra Veterum & Recentiorum, quomodo differunt.

Notandum est autem inter Algebram Veterum, & Recentiorum hoc præsertim discrimen intercedere; quod Veteres solebant numeros tantum adhuc ignotos & investigandos characteribus Cossicis exprimere; at Recentiores Algebristæ, tam notos quam ignotos sic solent exprimere. Ut suo loco post patebit.

Utriusque usus.

Interrogabit forsan aliquis; Quorsum hæc nova signa seu symbola adhibeantur numeris exprimendis, potius quam vulgares numerorum Notæ?

Respondeo; Triplici de causa hoc factum esse; partim Necessitatis, partim Brevitatis, partim Perspicuitatis (atque adeo Utilitatis,) gratia.

Primo, inquam, Necessitatis causa: cum, pro numero aliquo adhuc ignoto, substituitur symbolum seu character eo usque dum innotescit.

2° Brevitatis & facilitatis causa, cum illud non raro citius peragatur per symbola seu *species*, quam per ipsos numeros.

3° Perspicuitatis adeoque majoris Utilitatis gratia: ubi enim per symbola seu species procedit inquisitio; tota operationum series sic peracta evidentius in ipsa tandem quantitate proveniente patet; quod si operationes ipsis numeris peragerentur, quamvis eadem tandem provenire posset quantitas quæsita, nulla tamen ipsarum operationum vestigia superessent. Ea vero quæ provenit quæstionis solutio in hujusmodi symbolico operationum progressu, universalem ostendit methodum, qua non modo proposita difficultas speciatim solvatur; sed & infinitæ aliæ quæstiones conjunctæ eadem opera solutionem accipiant, si generalis nempe solutio proveniens speciatim applicetur prout quæstionis hypothesis variata postulat.

Exemplo ostenditur.

Res tota exemplo melius patebit. Operæ pretium igitur existimo problema quoddam non difficile breviter subjungere, quo melius perspiciatur quid ea velint quæ diximus. (Ubi tamen veniam me facile consequuturum spero, si nonnulla de Additione, Subductione, Multiplicatione, & Divisione tanquam jam cognita assumam, quæ sunt post tradenda: aut saltem siquis mihi hanc veniam non sit concessurus, poterit ille hujusce problematis solutionem eousque differre, donec ea fuerint tradita: non enim ego illam hic loci ἀποδεικτικῶς propono, sed tantum ἐξηγητικῶς.) Esto igitur hoc Problema propositum.

" Accessit virgo quædam tres successive Divos, puta Jovem, Apollinem, Palladem; Oravit Jovem, ut quos ipsa secum attulerat nummos ille duplos efficeret; quo præstito, reddidit illa Jovi gratitudinis ergo tres asses; Apollo deinde simili oratione compellatus duplavit virginis nummos residuos; cui & illa tres statim asses pependit; reliquos autem ad Palladem attulit quos ipsa geminavit; cui & virgo tres item asses donarii loco obtulit; Quibus peractis, unicus tandem assis virgini relictus erat quem secum auferret. Quæritur; Quot primum attulerat?

Accessit virgo tres, supplex, ordine Divos;
Et tulit accedens asses, quot nescio, secum.
Jupiter oratus, duplavit virginis asses;
Protinus illa Jovi tres asses grata pependit.
Quotque superfuerant duplavit Phœbus Apollo:
Grata itidem Phœbo tres virgo reddidit asses.
Pallas tunc reliquos geminavit Virginis asses:
Assibus & tandem tribus est donata Minerva.
Unicus & superest, quem secum rettulit, assis.
Dic mihi, quot fuerant, quos primo Virgo ferebat.

Hoc ego ut solvam problema; Primo juxta Veterum Algebram pro numeris adhuc ignotis Characteres cossicos substituam, notos autem notis suis characteribus designabo: Deinde vero, juxta Recentiorum methodum, pro numeris tam notis quam ignotis symbola substituam usque dum ad solutionem pervenero: Ut hoc pacto utriusque methodi exemplum præstem.

Primo. Pro ignoto assium allatorum numero, substituo 1 ℞: hic autem numerus (quantuscunque fuerit) à Jove duplatus fit 2 ℞: hinc demptis tribus assibus Jovi solutis, restant 2 ℞ — 3. hoc residuum cum geminaverat Apollo, fiunt 4 ℞ — 6: hinc cum tres adhuc asses ablati fuerint, Apollini tradendi, manebunt 4 ℞ — 9. hoc residuum Pallas duplando efficit 8 ℞ — 18: unde cum tres insuper asses sint adhuc auferendi qui Palladi tribuantur, manebunt tandem 8 R — 21. At in quæstione proposita unicus assis superesse dicitur. Ergo statuendum est 8 R — 21 tantundem esse ac 1. Hoc invento; Quoniam 8 R — 21 = 1, (additis utrinque 21) erunt 8 R = 22. Ergo 4 R = 11. Et 2 R = $5\frac{1}{2}$. Et denique 1 R = $2\frac{3}{4}$. At 1 R ponitur numerus assium allatorum; erant ergo asses allati $2\frac{3}{4}$. Totus quippe operationis progressus sic simul conspiciendus est.

Patet hinc Characterem Cossicum 1 ℞, vel 1 R, necessitatis causa primo fuisse

isse positum; quia tunc ipsius valor nondum innotuerat, sed quærendus erat. Non tamen adeo absolute necessarium erat (in præsente problemate) hoc pacto procedere, acsi nulla alia methodo quæstioni responderi potuerit: Nam, quamvis illud fortasse in difficilioribus Problematis non raro accidat, non tamen adeo difficilis est præsentis quæstionis solutio, quin ut possit citra opem Algebræ investigari. Nempe hoc pacto. Si residuo 1, restituantur 3 (qui nuperrime Palladi solvebantur) fiunt 4, (tot ergo Pallade duplante provenerant) horum semissis 2, est numerus assium ad Palladem allatorum; quibus si adjiciantur 3 (qui nuper soluti fuerant Apollini) fiunt 5, (tot ergo Apolline duplante provenerant:) horum ergo semissem $2\frac{1}{2}$ ad Apollinem attulerat; quibus si adjiciantur 3 (qui nuper detracti erant solvendi Jovi) fiunt $5\frac{1}{2}$, qui duplante Jove provenerant; horum ergo semissis $2\frac{3}{4}$ est numerus assium ad Jovem allatorum; qui est numerus quæsitus.

1 ℞	1 R
1 ℞	1 R
2 ℞	2 R
−3	−3
2 ℞ − 3	2 R − 3
2 ℞ − 3	2 R − 3
4 ℞ − 6	4 R − 6
−3	−3
4 ℞ − 9	4 R − 9
4 ℞ − 9	4 R − 9
8 ℞ − 18	8 R − 18
−3	−3
8 ℞ − 21 = 1.	8 R − 21 = 1.
8 ℞ = 22	8 R = 22
4 ℞ = 11	4 R = 11
2 ℞ = $5\frac{1}{2}$	2 R = $5\frac{1}{2}$
1 ℞ = $2\frac{3}{4}$	1 R = $2\frac{3}{4}$

Quamvis autem in hujusmodi minoris difficultatis Quæstionibus non sit absolute necessarium ut Methodo Algebrica seu Analytica procedatur: Hoc tamen utilitatis utcunque emergit, ut solutio semel investigata possit etiam aliis hypothesibus applicari; nec opus sit pro singulis quæstionis variationibus totam operationum seriem de novo ordiri. Verbi gratia. Si, cæteris ut prius manentibus, dicamus 3 asses tandem superesse; essent igitur $8R - 21 = 3$: ideoque $8R = 24$ & $R = 3$. Si superessent 5 asses, essent $8R - 21 = 5$; ideoque $8R = 26$, & $R = 3\frac{1}{4}$. Et pariter faciendum erit si plures aut pauciores asses superesse dicatur. Ut

$8R - 21 = 3$
$8R = 24$
$1R = 3$

$8R - 21 = 5$
$8R = 26$
$1R = 3\frac{1}{4}$

$8R - 21 = 7$
$8R = 28$
$1R = 3\frac{1}{2}$

$8R - 21 = 9$
$8R = 30$
$1R = 3\frac{3}{4}$

$8R - 21 = 11$
$8R = 32$
$1R = 4$

&c.

Secundo. Juxta Algebram sive Analyticen Recentiorum, qui non modo pro numeris ignoratis, sed & pro numeris datis, symbola substituunt, solutio proveniet magis adhuc universalis. Verbi gratia. Pro numero quæsito, substituatur A; pro binario (quia nempe fit aliquoties numerorum duplicatio) B, & deinde pro ternario (quia nempe 3 aliquoties auferuntur) C, & denique pro numero residuo (qui hic est 1) D: progressus erit hujusmodi

A
BA − C
BqA − BC − C
BcA − BqC − BC − C = D

Hæc autem symbola pariter præstabunt quæsitum, sive quemlibet Divorum allatos nummos duplare, triplare, quadruplare, &c. dixeris; (nempe interpretando B, pro 2, 3, aut 4 &c.) item sive tres, quatuor, aut quinque &c. asses singulis traditos, (nempe interpretando C de 3, 4, 5, &c.) & denique sive unum, duos, tres, &c. (nempe interpretando D, de 1, 2, 3, &c.) asses tandem superesse dixeris.

Si enim quemlibet Deorum nummos duplasse dixeris, erit B = 2, Bq = 4, Bc = 8; Si triplasse dixeris, erit B = 3; Bq = 9, Bc = 27, &c. Deinde si cuivis tres asses redditos dixeris, erit C = 3; si quatuor erit C = 4, &c. Denique si unum superesse dixeris, erit D = 1; si duos, erit D = 2, &c. Adeoque pro variata hypothesi varianda erit solutionis interpretatio.

BcA — BqC — BC — C = D
8A — 4C — 2C — C = 1
8A — 12 — 6 — 3 = 1
8A = 22
A = $2\frac{3}{4}$

BcA — BqC — BC — C = D
27A — 9C — 3C — C = 2
27A — 36 — 12 — 4 = 2
27A = 54
A = 2

Et similiter faciendum esset quicunque essent alii numeri in quæstione positi.
Atque hactenus, Notationem Algebricam, Cossicam, Symbolicam sive Speciosam, quantum opus est explicavi.

CAP. XII.

Fractionum sive Minutiarum Notatio. Fractionis Denominator, & Numerator. Minutiæ minutiarum; Fractio propria, impropria. Numerationis Epilogus.

Fractionum Notatio. Unicum adhuc superest quo universam numerorum Notationem absolvamus: nempe Notatio *Fractionum*, sive *Minutiarum*, quos *Numeros Fractos* appellare solent. Quamvis enim Fractionum natura perfectius infra intelligetur, postquam Rationum sive Proportionum naturam explicaverimus, operæ tamen pretium esse existimo, ea de re nonnulla hic adjungere, ne cui manca videatur Notationis traditio, si illud hic loci prorsus negligeretur.

Fractionum Origo. Sunt autem *Fractiones*, seu *Numeri Fracti*, non tam numeri, quam *Unitatis fragmenta*. Quanquam enim, ut supra dictum est, *Unitas* sit Numerorum minimus; (cum paucius quam Unum esse non possit, neque aliquid rarius quam semel:) attamen *Unum* illud supponi solet (ut quid continuum) in membra partiri sive plura, sive pauciora, (prout res postulaverit) æqualia tamen.

Fractionis Denominator. Prout autem membra illa æqualia, sive partes æquales, alio atque alio numero esse possunt, ita & aliam atque aliam Denominationem subeunt. Ita siquid unum in duas partes æquales partiri supponatur, illarum utraque Semissis dicitur; si in tres, appellantur Trientes; si in quatuor, Quadrantes; si in sex, Sextantes; si in octo, Octantes; sic si in decem partes dividatur, quælibet earum dicetur pars decima; & sic in aliis: Græci dicunt τριτημόριον, τεταρτημόριον, πεμπτημόριον, ἑκτημόριον, δεκατημόριον, &c. Hæc autem *denominatio*, in scribendis Fractionibus, exprimitur figura analoga lineolæ subscripta.

Fractionis Numerator. Quot autem harum partium assumptas esse supponitur, alia figura eidem lineolæ suprascripta innuitur. Sic $\frac{2}{3}$ *duos trientes* significat, $\frac{1}{10}$ *unam partem decimam*, seu δεκατημόριον, $\frac{3}{4}$ *tres quadrantes*, $\frac{5}{12}$ *quincuncem*, seu *quinque partes duodecimas*, sic $\frac{13}{100}$ *tredecim partes centesimas* seu ἑκατοστημόρια, $\frac{11}{20}$ *undecim partes vicesimas*, seu εἰκοστημόρια significant. Et pariter de similibus dicendum est.

Duobus igitur numeris Fractio scribitur; quorum inferior *Denominator* appellatur, superior *Numerator*: Quoniam ille partes *Denominat*, & ποστημόριον seu *quota pars* sit numerandarum quælibet determinat; hic vero partes illas *Numerat*, & *quot partes* ejusmodi sint assumendæ ostendit.

Minutiæ Minutiarum. Si vero *partium particulæ* notandæ occurrant, seu (ut appellantur) *Minutiæ minutiarum*; puta *unius quadrantis dimidium*, vel *duorum quintantum tres quadrantes*, aliæque ejusmodi; illæ si opus est, sic scribi consueverunt, $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ & $\frac{3}{4}\frac{2}{5}$, nempe lineola in priori parte omissa; vel sic etiam $\frac{1}{2}$ ex $\frac{1}{4}$, & $\frac{3}{4}$ ex $\frac{2}{5}$, majoris perspicuitatis gratia: Sed & sic scribi nonnunquam possunt $\frac{0\frac{1}{2}}{4}$ &c. Mallem ego sic

scribere

ſcribere $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4}$, & $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{5}$, vel $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$, & $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$; hoc eſt, *ſemiſſis in quadrantem ductus & tres quadrantes in duos quintantes ducti.* Eſt enim Quadrantis dimidium, nihil aliud quam quadrans per ſemiſſem multiplicatus; & duorum quintantum quadrantes tres, idem valent ac quintantes duo in tres quadrantes ducti: ut poſtea, cum de multiplicatione dicendum erit, patebit.

Sciendum autem eſt, in Fractione proprie dicta, Numeratorem Denominatore ſemper minorem eſſe; quia proprie dicta Fractio, eſt quid Unitate minus. *Fractio Propria.*

Si quando vero Numerator Denominatore major ſit, vel illi æqualis; dicitur illa *Fractio impropria*, ſive improprie dicta. Si nempe Numerator & Denominator ſint æquales, idem valent atque unitas; Nam $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, duo ſemiſſes, ſeu tres trientes, quatuorve quadrantes, tantundem ſunt atque unum integrum. Si vero Numerator Denominatore major ſit, aliquid unitate majus innuitur; nempe vel plures unitates; vel unitas una pluresve cum fractione annexa: ſic $\frac{4}{2}$ quatuor ſemiſſes, idem valent ac duo integra; $\frac{4}{3}$ quatuor trientes, idem ac $1\frac{1}{3}$ unum integrum uno triente auctum; ſic $\frac{7}{3}$ eſt $2\frac{1}{3}$; $\frac{8}{3}$ eſt $3\frac{2}{3}$. Et ſic in ſimilibus. *Fractio impropria.*

Quod autem de fractionibus ſive propriis ſive impropriis, vulgaribus figuris numeralibus deſcriptis, dictum eſt; pariter intelligendum eſt ubi alia quævis ſymbola, ſeu poteſtatum characteres, figurarum vice ponuntur. Sic $\frac{A}{2}$ eſt $\frac{1}{2}$ A, ſemiſſis quantitatis A; & $\frac{A}{E}$ innuit quantitatem A per quantitatem E diviſam; & $\frac{\mathcal{R}}{2}$ eſt radicis ſemis; $\frac{\mathfrak{z}}{3}$ quadrati triens; $\frac{3}{\mathcal{R}}$ numerus ternarius per radicem diviſus; ſic $\frac{2\mathfrak{z} + 3\mathcal{R}}{2\mathcal{R}}$ vel $\frac{1\mathfrak{z} + \frac{3}{2}\mathcal{R}}{\mathcal{R}}$ vel $\frac{2\mathcal{R} + 3}{2}$ vel $1\mathcal{R} + \frac{3}{2}$ vel $1\mathcal{R} + 1\frac{1}{2}$. Ita $\frac{Aq + Bq}{E}$ eſt aggregatum ex Aq & Bq diviſum per E. Atque ita in ſimilibus. Verum hæc multo melius percipientur, poſtquam Diviſionis naturam expoſuerimus; Fractio enim eſt quaſi Diviſionis indicium; innuit nempe Numeratorem per Denominatorem dividendum eſſe. Interim hæc de fractionum Notatione hic loci dixiſſe ſufficiat.

Adeoque totum illud Notationis negotium expedivimus; eaque omnia quæ ſub *Numerationis* nomine Arithmetici Practici vulgo comprehendunt; quæ numeros apte ſcribendo & ſcriptos interpretando præcipue verſatur. Monendum autem eſt *Numerationis* vocabulum aliter hic loci ab Arithmeticis Practicis uſurpari, quam ubi ſupra Arithmeticam diximus ſcientiam bene *Numerandi*: Illic enim *Numerare*, eſt in univerſum Proprietates & uſum numerorum interpretari & exercere; hic autem per Numerationem, ſpeciatim intelligunt, ſimpliciora Arithmeticæ rudimenta, de Numerorum compoſitione, Notatione, aliiſque quaſi Prolegomenis ad commodam Numerorum tractationem prærequiſitis.

Atque hæc quidem omnia quaſi Præmiſſarum loco ſunt habenda, ad eas quæ ſequuntur Operationes Arithmeticas, puta Additionem, Subductionem, Multiplicationem, Diviſionem, aliaſque quæ ex hiſce componuntur operationes. Huculque enim quæ tradidimus, potius ad placitum poſita ſunt, quam demonſtrata; docentque quid ſibi volunt Arithmetici per eas quas expoſuimus Appellationes & Characterum diſpoſitiones, quas ad libitum ſibi aſſumpſerunt Arithmetici quo melius ſequentes operationes perficere valerent. Et eo quidem loco ſunt habenda quo Definitiones & Terminorum explicationes, à quibus rerum Mathematicarum ſcriptores ordiri ſolent. Vel, ſi cum Logicis loqui libeat, Objectum ſcientiæ expoſuimus; ſequitur ut ipſius Affectiones inquiramus & demonſtremus.

CAP. XIII.

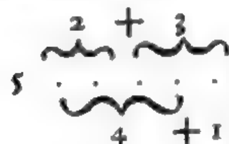
Additio, quid? Axiomata aliquot, sive communes notiones. Additionis summa seu aggregatum. Additionis praxis, in numeris simplicibus. Additionis & Subductionis tabella; ejusque demonstratio. Additionis praxis in numeris compositis: ejusque demonstratio. Operationis compendium. Additionis praxis in fractionibus Decimalibus. Additionis praxis in variis Denominationibus.

POst absolutam, in superioribus, Numerorum *Notationem*, ad eorum Additionem accedendum est.

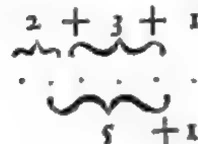
Additio qui? Est autem Additio, *Numerorum plurium in unam Summam collectio.* Vel Addere, est, *Datis numeris quotlibet, unum aliquem illis omnibus simul sumptis æqualem invenire.* Aut etiam, si latius libeat, quam ad solos numeros, Additionis appellationem extendere, erit Additio, *Quantitatum plurium Homogenearum in unum Aggregatum collectio.* Nam revera eadem omnino est *Additionis* notio, sive in Continua sive in Discreta quantitate.

Axiomata, sive communes Notiones. Quo melius autem in sequentibus procedamus, sciendum est, in Arithmetica, perinde ac in Geometria reliquisque disciplinis omnibus, Principia quædam per se nota necessario concedenda esse, unde alia probentur; quæ tamen Principia talia sunt ut ea nemo sanæ mentis negare, aut quidem de iis (modo sensum verborum intelligat) dubitare possit. Hujusmodi sunt *Axiomata* illa, seu *Communes notiones*, quæ Elementis Euclideis præmittuntur; Quorum pleraque non magis Geometriæ quam Arithmeticæ conveniunt; Neque ab Euclide proponuntur quasi solis Magnitudinibus corporeis congruant, sed quæ quibusvis quantitatibus, prout opus erit, applicari possint. Ego ex illis ea seligam quæ præsenti negotio conveniunt, suntque hæc quæ sequuntur.

1. *Quæ eidem sunt æqualia, sunt & inter se æqualia.* Ut si tam linea A, quam linea C, sit æqualis lineæ B; erunt ipsæ A C lineæ æquales inter se. Atque de hoc nemo merito dubitare potest, sensu verborum semel intellecto: Cum enim, vi vocis, Æqualia ea sint quorum quantitas est eadem, seu, quorum hoc tantundem est atque illud: sitque quantitas tam lineæ A, quam lineæ C, ea quæ est lineæ B; erit linearum A & C eadem quantitas, (ea nempe utriusque quæ est lineæ B,) ipsæque igitur æquales. Similiter in numeris, si $2+3=5=4+1$ erit $2+3=4+1$, hoc est, si tam aggregatum $2+3$ quam aggregatum $4+1$ æquetur numero 5, erunt ipsa aggregata $2+3$ & $4+1$ inter se æqualia; eorum enim quantitas est eadem; ea nempe utriusque quæ est numeri quinarii. Atque idem omnino obtinet in Superficiebus, Solidis, Angulis, Ponderibus, rebusque aliis omnibus quæ quovis modo vel mensurantur vel numerantur.



2. *Si æqualibus æqualia addantur, tota sunt æqualia.* Ut si $A=B$ erit $A+C=B+C$; hoc est, si æqualibus rectis A B addatur vel eadem vel æquales quantitates C, erit aggregatum $A+C$, æquale aggregato $B+C$. Sic si $2+3=5$ erit $2+3+1=5+1$. Neque de hujus propositionis veritate quispiam sanus dubitare poterit magis quam de veritate præcedentis; cum utraque dependeat ex eadem Æqualitatis notione.



3. *Si ab æqualibus æqualia subducantur, reliqua sunt æqualia.* Puta si $A=B$ erit $A-C=B-C$: vel si $A+C=B+C$ erit $A=B$. Sic si $2+3=5$ erit $2+3-1=5-1$, aut

si

si $2+3+1=5+1$, erit $2+3=5$. Estque hujus propositionis veritas satis evidens; aut, siquis assensum negaret, cogi poterit ex praecedente. Suntque haec tria axiomata, praesertim in Æquationibus Analyticis, perpetui usus. Sed & quae sequuntur non minus sunt indubitata.

4. *Si inaequalibus aequalia addantur, tota sunt inaequalia.*

5. *Si inaequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt inaequalia.* Sunt autem haec duo duarum praecedentium consectaria; atque exinde vel ostendi vel saltem cogi possent.

5
3 . . . | . . 2
5 . . . . . | . . 2
7

6. *Quae ejusdem sunt duplicia sunt inter se aequalia.* Sequitur hoc ex secundo; nam $2A$ nihil aliud sunt quam $A+A$.

7. *Quae ejusdem sunt dimidia, sunt aequalia inter se.* Hoc ex praecedente si opus sit, cogi potest. Sed & haec duo axiomata pariter etiam valent in triplis, quadruplis, &c. item in trientibus, quadrantibus, &c. atque in duplis, & dimidiis.

8. *Totum est majus sua parte.* Addo.

9. *Totum aequatur partibus suis omnibus simul sumptis.* Cum enim Totum sit suarum partium omnium aggregatum, nemo dubitare poterit quin ipsum tantundem sit atque illae omnes simul sumptae.

Haec autem omnia & siqua sunt similia, adeo sunt per se perspicua, ut nulli dubitationi sint obnoxia; quique hujusmodi quid negat, non sperandum est ut ullis argumentis teneri velit. Reliqua Euclidis ἀξιώματα & αἰτήματα potius Geometrica sunt, adeoque non hujus loci. Ex his autem quae jam tradidimus, ea quae post sequentur, tam de Additione quam reliquis operationibus Arithmeticis, demonstranda erunt.

Additionis nota, quae nunc dierum passim obtinet, est +. Adeoque si quantitates A B simul sint addendae, aggregatum est $A+B$; sic si 2 & 3 sint simul addendae, aggregatum est $2+3$. Haec enim + additionis sive affirmationis nota, indicat 3 vel B numerum seu quantitatem cui praefigitur, praecedenti 2 vel A additam seu adjunctam esse, vel (si libet) addendam vel adjungendam. *Additionis summa sive aggregatum.*

Verum illud ulterius quaerit practicus Arithmeticus, annon (verbi gratia) illud aggregatum $2+3$ possit alia forma notari quae tantundem valeat atque interim magis sit commoda, suumque valorem melius intellectui repraesentet: adeoque cum sit $2+3=5$, loco aggregati $2+3$ substituit unicum numerum 5 qui aggregato illi aequalis est, & tantundem valet. Atque in hoc totum versatur Arithmetici practici negotium (non in Additione solummodo, sed in aliis operationibus Arithmeticis, quod semel monuisse sufficit.) ut quantitates utcunque propositas seu quaesitas commodissima forma describere possit, atque intellectui exhibere. Atque hoc quo pacto in Additione praestari possit, primum quidem in notis Figuris numeralibus, deinde etiam in aliis Speciebus (ut loquuntur) sive Symbolis, jam traditurus sum. *Additionis praxis*

Numeri autem addendi, sunt vel simplices sive monadici, quales sunt 1, 2, 3, reliquique decade minores, qui unica figura scribi solent; vel compositi, quales sunt 10, 11, 13, 20, 234, aliique in infinitum, qui conjunctis characteribus scribuntur. (Illud enim per *numerum compositum* hic loci intelligo, quamvis illud alias alio sensu occurrere possit.) Vulgo, qui uno charactere scribuntur, *Digiti* appellari solent; qui circello seu ciphra terminantur *Articuli*; reliqui, *Compositi*.

Simplicium numerorum additionem quod attinet, ea natura potius vel exercitatione, quam praeceptis, est discenda: Puta *Unum Uni* additum constituere *Duo*; item *Duo* & *Tria* conjuncta valere *Quinque*: & sic in reliquis. Atque haec sunt adeo pueris nota, ut non sit opus ea fusius tradere. Si quis tamen postulet ut (pro more) omnia demonstrentur; aut etiam siquis de majorum additione dubitare possit: Subjecta tabella simplicium omnium additionem exhibebit.

Tabella

Tabella Additionis & Subductionis.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Si enim numerorum addendorum alter sumatur in summitate seriei erectæ, alter in principio seriei transversæ, communis serierum concursus ostendet eorum aggregatum. Exempli gratia si sumatur in vertice 2, ad latus 3, communis concursus exhibet 5, qui æqualis est aggregato $2+3$.

$2+3$, 5

Si quis denique veritatem hujus tabellæ demonstrandam postulet; illud hoc modo fiet. Verbi gratia. $2+3=5$ sic demonstratur. Ponantur primum duo puncta, & deinde tria, quæ omnia si numerentur reperientur quinque. Vel sic. Quoniam notum est ex ipsa numerorum procreatione (quam Cap. 5. tradidimus) quod sit $1+1=2$. $2+1=3$. $3+1=4$. $4+1=5$. $5+1=6$. $6+1=7$. $7+1=8$. $8+1=9$. $9+1=10$. $10+1=11$. Erunt etiam (per axiomata superius in hoc capite tradita) $2+3=1+1+3=1+4=5$. Ergo $2+3=5$. Vel $2+3=2+2+1=2+1+1+1=3+1+1=4+1=5$. Atque eodem modo tota tabella demonstrari potest.

Si quis autem Tabellam illam abbreviandam cupiat, poterit illa quidem fieri fere duplo minor. Cum enim sit, verbi gratia $4+3=3+4$, sufficiat horum summam semel poni, eo modo quo hic ostenditur: ubi duorum numerorum addendorum major semper in fronte tabellæ, minor ad latus quæratur, aggregatum in area.

Additionis Tabella Contractior.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	2	4	5	6	7	8	9	10	11	
		3	6	7	8	9	10	11	12	
			4	8	9	10	11	12	13	
				5	10	11	12	13	14	
					6	12	13	14	15	
						7	14	15	16	
							8	16	17	
								9	18	

In Numeris compositis. In numerorum compositorum additione major est difficultas, quæ tamen tota ex simplicium additione dependet. Hoc autem quo commodius fiat, numeri addendi ita scribendi sunt ut unus alteri directe subsit, ita nempe ut Monades unius Monadibus alterius subsint, & decades decadibus, reliquique loci inferioris iisdem respective superioris locis subscribantur: quod faciendum est sive duo sive plures quotvis numeri addendi sint: atque deinde, ducta subtus lineola, aggregatum monadum monadibus subscribendum, decadum decadibus, centuriarum centuriis, atque sic deinceps. Exempli gratia. Addantur $25634+63152$. Numeris igitur

 rite

rite ſcriptis, & lineola ducta; in columna ſeu columella monadum, pro $4+2$ ſubſcribo 6: in columella decadum pro $3+5$ ſubſcribo 8: quia ſcilicet (per tabellam præcedentem) $4+2=6$. $3+5=8$. atque eodem modo in reliquis columellis reperio $6+1=7$. $5+3=8$. $2+6=8$. adeoque cum ſubſcripta

25634	103605
63152	430120
88786	315032
	848757

ſummula cujuſque ſeriei, ejuſdem ſeriei particulis æquetur; (puta 6 monades $=4+2$ monadibus, 8 decades $=3+5$ decadibus, 7 centuriæ $=6+1$ centuriis &c.) erunt omnium ſummulæ ſimul ſumptæ (debita locorum ratione habita) 86786, omnium particulis ſimul ſumptis æquales. Atque eodem modo $103605+430120+315032=848757$.

Non raro autem accidit, particularium ſerierum ſummulas tantas eſſe, ut unica figura ſuæ ſeriei ſubſcribi non poſſint, (quoties nempe ſummula numerum novenarium excedit) quo caſu, ultima ſummulæ figuræ ſuo loco ſubſcribenda erit, reliqua autem loco proxime ſuperiori, (aut, ſi plures ſint, proximis quot opus eſt locis,) adeoque ſingulæ (ſi libet) ſummulæ diſtinctis lineis ſcribi poſſunt; ut in exemplis ſubjectis primo & ſecundo; vel etiam contractius, ut in tertio & quarto; illud autem ſemper cavendum, nequa figura debito loco extrudatur, ſed duæ potius eidem ſeriei ſubſcribendæ ſunt: illæ autem ſummulæ, in unam deinde ſummam (eodem artificio) collectæ, numerorum addendorum ſummam integram, ſive aggregatum exhibent. Non autem omnino refert ſive à dextra ſive à ſiniſtra operatio ordiatur: Neque etiam refert quis addendorum numerus ſupremus ſit, quis ſecundus, &c. (modo illud ſemper caveatur ut monades monadibus, decades decadibus, &c. directe ſubſint, ut vitetur confuſio locorum,) Additio enim non addendorum ordinem inquirit, ſed aggregatum. Patet hoc ex ſubjectis exemplis, ubi eadem ſumma, diverſo tamen ordine, emerget.

98697	87998	95588	67590
87998	98697	98697	87998
95588	67590	87998	98697
67590	95588	67590	95588
23	32 millium decad.	327553	22323
35	27 millia.	2232	32755
25	25 centuriæ.	349873	349873
27	35 decades.		
32	23 monades.		
349873	349873		

In his omnibus exemplis, ſummula monadum (ſive infimæ ſeriei) eſt 23; ſubſcripta igitur ſuo loco figura 3 (pro tribus unitatibus) reliqua figura 2 loco proxime aſcendente ſcribenda, quam ſive 20 unitates ſive 2 decades ſignificare dicamus, perinde eſt. Sic ſummula decadum eſt 35; ſubſcripta igitur 5 in decadum ſerie, reliqua 3 ſcribenda eſt in ſerie proxime aſcendente, ut 30 decades, ſeu (quod idem eſt) 3 centurias ſignificet. Et pariter in reliquis. Omnes autem ſummulæ collectæ, exhibent 349873 ſummam integram.

Totius proceſſus demonſtratio dependet ex illo axiomate (ſæpius applicato) *ſi æqualia æqualibus addantur tota ſunt æqualia.* Puta ſi pro tota monadum ſerie ſubſtituantur monades $23=7+8+8+0$, tantundem exhibetur; deinde ſi pro decadum ſerie ſubſtituantur decades $35=9+9+8+9$, tantundem adhuc exhibetur; item ſi in reliquis ſeriebus ſubſtituantur $25=6+9+5+5$, & $27=8+7+5+7$, & $32=9+8+9+6$, tantundem adhuc exhibetur; adeoque ſummulæ inventæ æquantur numeris propoſitis: & (eadem ratione) ſummularum ſumma æquabitur ipſis propoſitis numeris. *Additionis demonſtratio.*

Hic autem proceſſus (quem perſpicuitatis gratia diſtincte proponendum duximus ut operationis ratio perſpiciatur) poteſt aliquantulum (præſertim exercitatis) abbreviari, ſi nempe (a gradibus infimis ſemper incipiendo) cum gradus unius ſummula inventa eſt, ultima ipſius figura ſtatim ſuo loco ſubſcribatur, & reliqua (ſi qua ſit) memoria reſervetur (aut ſi libet, duabus lineolis, ne memoria excidat, interpoſita) ſequenti ſtatim ſeriei annumeretur. Hoc pacto. *Operationis compendium.*

98697	98697
95588	95588
87998	87998
67590	67590
	2232
349873	349873

Quoniam in ſerie monadum, eſt $7+8=15$. $15+8=23$. $23+0=23$. ſubſcripta figura 3, reliqua 2 (memoria reſervata, vel lineolis interſcripta) ſtatim ſequenti ſeriei adjungitur hoc modo: $2+9=11$. $11+8=19$. $19+9=28$. $28+9=37$; ſubſcripta figura 7, reliqua 3 transferatur in ſequentem ſeriem ſic, $3+6=9$. $9+5=14$. $14+9=23$. $23+5=28$. ſubſcripta 8, transferatur 2; adeoque $2+8=10$. $10+5=15$. $15+7=22$. $22+7=29$. ſubſcripta 9, transferatur 2; eritque $2+9=11$. $11+9=20$. $20+8=28$. $28+6=34$. Subſcribatur 4, & in ſequente ſerie (quia nihil ulterius addendum reſtat) 3. eritque ſumma totalis ut prius, 349873.

Cur autem figuras ſequenti ſeriei annumerandas, non memoria tantum reſervari, ſed & duabus lineolis interſcribi poſſe dixerim; ratio eſt, quia non raro expedit in grandioribus numeris, præſertim tironibus & parum exercitatis, illud ſic fieri; eo ſcilicet fine, ut, ſiquando operatio de errore ſuſpecta ſit, cujuſvis ſeriei ſummula commode poſſit ſeorſim examinari, errorque ſiquis ſit, facilius detegi; quod quidem non adeo commode peragi poterit, ſi, peracta operatione, nullum veſtigium remaneat numeri ab alia ſerie illuc tranſlati, ſed plurium ſerierum operatio iteranda erit ut unius error detegatur.

Additio Fractionum Decimalium.

Si quando numeri addendi fractiones decimales (ut loquuntur) annexas habeant, ſeu (quod idem eſt) gradus aliquot infra unitatem deſcendentes, operatio eodem omnino modo peragenda eſt, quo in numeris integris ſive abſolutis, & iiſdem principiis demonſtranda: Illud autem caute proſpiciendum eſt, ne gradus confundantur: Adeoque non ſemper ultima figura unius numeri ultimæ alterius eſt ſubſcribenda, ſed graduum ratio ſic habenda eſt, ut monades monadibus, decades decadibus, &c. in eadem ſerie ſubſcribantur; adeoque linea ſeparatrix (ſive illud quod ſeparatricis munus obit) in omnibus numeris apte conveniat ut in exemplo adjuncto videre eſt: nempe 17|25 + 3|5 + 0|005 + 16 = 36|755. Neque ulla hic nova difficultas occurrit.

17.25
3.5
0.005
16.
36.755

Additio plurium Denominationum

Si quantitates addendæ ex pluribus conſtent Denominationibus (ut loquuntur) prout in addendis Monetis, Ponderibus, Menſuris, Motibus, &c. contingere ſolet: curandum, ut quoties inferioris alicujus Denominationis ſummula euſque excreſcit, ut unitatem proxime ſuperioris denominationis vel æquet vel excedat, (aut etiam duas aut plures unitates,) ſubſcribendus eſt ſuo loco exceſſus (ſiquis ſit, vel ſi nullus ſit, ciphra) & reliquum ſuperiori ſeriei adjungendum eſt. Illud igitur curandum eſt, ut ſciatur quot unitates Denominationis inferioris unitatem ſuperioris Denominationis adæquent.

lib.	*ſ.*	*d.*
07.	19.	04.
16.	08.	06.
08.	13.	07.
	2	1
33.	01.	05.

Exempli gratia. In addendis monetis Anglicanis: 12 Denarii conſtituunt unum Solidum; & 20 Solidi unam Libram Anglicam (*Sterling* vocant.) Ideoque in exemplo appoſito cum numerus denariorum ſit $17=12+5$, in Denariorum loco ſubſcribo 5; & pro reliquis 12, adjungo 1 ſolidum proximæ ſeriei: Deinde, cum ſumma ſolidorum (ſimul cum 1 tranſmiſſo) ſit $41=40+1$; ſub ſerie ſolidorum ſcribo 1, & pro reliquis 40 adjungo 2 libras proximæ ſeriei: Denique librarum ſummulam (cum 2 tranſmiſſis) reperio 33. Adeoque omnium addendorum ſumma reperitur 33 libræ, 1 Solidus, & 5 denarii.

ſig.	*grad.*	′	″
1.	3.	16.	30
0.	12.	23.	15
2.	5.	47.	45
4.	23.	51.	00
1	2	1	
8.	15.	18.	30

Eodem modo in Fractionibus Aſtronomicis (ut vocantur) addendis procedendum eſt: Ubi diviſo (verbi gratia) Zodiaco in 12 ſigna, & quolibet ſigno in 30 gradus, quolibet gradu in 60 minuta prima, & quolibet horum in 60 ſecunda, & ſic deinceps; Pro 60 ſecundis ſubſtituendum 1 minutum primum; pro 60 primis, 1 gradus; pro 30 gradibus, 1 ſignum. Ut in appoſito exemplo videre eſt.

Atque eodem prorſus modo in aliis ejuſmodi Additionibus procedendum erit, ubi denominationum pluralitas occurrit. Nec quicquam intereſt diſcriminis, niſi quod nunc plures nunc pauciores unitates in gradu inferiori, adæquent Unitatem gradus proxime ſuperioris. Adeo ut non ſit opus exempla plura ſubjicere.

Addi-

Additionis praxis in speciebus (ut loquuntur) sive symbolis, & in potestatibus Algebricis, inferius, post explicatam Numerorum subductionem, tradetur.

CAP. XIV.

Subductio Additioni contraria. Subductio quid? Subductionis praxis: in Numeris Simplicibus: In numeris Compositis. Praxeos demonstratio Praxis in partibus Decimalibus: in variis Denominationibus. Subductio majoris ex minore, impossibilis. Quantitates negativæ seu Ablatitiæ; non absurde supponuntur; quid innuant. Subductio majoris ex minore, quatenus supponitur præstanda.

Subductio Additioni contraria.

POst Additionis traditionem, ad Subductionem seu Subtractionem deveniendum est; quæ Additioni contraria est: Ut enim Additio Numerum numero, vel saltem Quantitatem quantitati, adjungit; Subductio è contra Numerum numero, vel Quantitatem quantitati, aufert: Adeoque quod Additio componit id Subductio dissolvit. In praxi Additionis, datis partibus investigatur Totum; in praxi Subductionis, Dato Toto cum parte una, quæritur Residuum seu pars reliqua.

Subductio quid?

Est igitur *Subducere, Numerum a numero, vel potius Quantitatem a quantitate, auferendo, Residuum exhibere.* Subductionis autem sive Ablationis nota, hæc esse solet —. Adeoque si ex 5 auferamus 3, restabit 5 — 3. Si ex quantitate A auferatur quantitas B, manebit A — B. Illud autem Arithmetici practici, in praxi subductionis, munus est, ut Residuum quam fieri potest commode notis exprimat, ejusq; valorem intellectui exhibeat. Quod quo pacto fieri possit, nunc tradituri sumus.

In numerorum subductione, numeri duo dantur, quorum alter ab altero auferendus est, & tertius quæritur. Numerum illum à quo alter est auferendus, *Numerum Minuendum* appello; auferendum vero *Minutorem*; tertium autem quem quærimus, *Residuum* voco. Sic si ex numero quinario auferendus sit ternarius 3; Numerus Minuendus est 5, Minutor 3, qui restat autem 5 — 3 = 2 Residuus est. Vel universim (quoniam alias etiam quantitates subducendas esse non raro accidit) dici possunt Quantitas *Minuenda*, quantitas *Minuens*, & quantitas *Residua*, vel *Totum*, *Ablatum*, *Residuum*.

Subductionis praxis in numeris simplicibus.

Numerorum simplicium subductionem nemo supponitur ignorare, sed vel natura vel usu quotidiano didicisse; ut si ex 5 auferantur 3, restare 2. Aut saltem, si illud docere sit necesse; positis tot punctis quot est numerus minuendus, puta 5, si tot deleantur, quot est numerus minuens seu auferendus, puta 3, restare deprehendemus 2. Vel denique

Tabella Additionis & Subductionis.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

ex tabella quam supra posuimus, illud depromi potest. Si nempe numerus minuens vel auferendus in summitate sumatur, puta 3, atque inferius in eadem columna

quæratur numerus minuendus, puta 5, habebitur ad sinistram numerus residuus 2. Atque eodem modo in aliis simplicium subductionibus peragendum erit. Demonstratio satis patet ex iis quæ de Additione supra diximus.

Subductionis praxis in numeris compositis.

Ubi autem numerorum compositorum unus ab altero est auferendus (vel quidem simplex à composito qui numerum 18 excedit) Minutorem solemus Minuendo ita subscribere, ut singuli inferioris numeri gradus iisdem superioris gradibus directe subsint, (puta Unitates unitatibus, Decades decadibus, Centuriæ centuriis &c.) Deinde à dextra inchoando, singulis figuris seu notis numeri subducendi, ab ejusdem gradus nota in numero minuendo, sigillatim subductis, particulares numeros residuos suis locis subscribimus, quorum omnium aggregatum est totius subductionis peractæ Residuum. Sic si ex 1755898, subducendus sit numerus 650467: numeris his ita scriptis ut minutoris loci primus, secundus, tertius, &c. (à dextra sive gradu infimo inchoando) iisdem numeri Minuendi locis subsint: primo, ex 8 unitatibus, subductis unitatibus 7, manet unitas 1, (nam $8-7=1$) subscribenda igitur (infra lineolam ductam) nota 1, deinde ex decadibus 9, subductis 6, manent decades 3, (nam $9-6=3$) subscribenda igitur decadum loco nota 3: &, eadem ratione, centuriarum loco, subscribenda 4, quia $8-4=4$: & sic deinceps $5-0=5$: $5-5=0$: $7-6=1$: denique cum ex 1 in loco supremo nulla nota subducenda restat, subscribenda 1; nempe $1-0=1$. Adeoque totus Residuus est $1105431 = 1755898 - 650467$.

1755898	*Minuendus*
650467	*Minutor*
1105431	*Residuus*

Vel etiam Residuus superne notari potest, deletis successive notis tam Minuendi quam Minutoris. Sic quia $8-7=1$, deletis 8 & 7 repono 1: item quia $9-6=3$; deletis 9 & 6 repono 3: sic pro $8-4$, repono 4: & quia $5-0=5$, figuram 5 intactam relinquo, vel deletam restituo: pro $5-5$, repono 0; pro $7-6$, repono 1, denique 1 (quia nihil insuper inde subducendum est) intactam relinquo; Residuus est idem qui prius, 1105431. Ut in exemplo apposito videre est.

1 0 5 4 3 1
1 7 5 5 8 9 8
6 5 0 4 6 7

Quoties autem contingit notam aliquam numeri subducendi nota sibi suprapositâ majorem esse; augenda est nota supraposita mutuata 1 ex loco proxime superiori, quæ in loco præsenti valebit 10, adeoque sat grandem numerum efficiet ut inde nota subscripta auferri possit: adeoque nota Minuendi in loco sequente supponenda est unitate minor jam facta quam prius erat; vel (quod tantundem valet) nota inde auferenda supponenda erit unitate aucta: Unitas autem illa mutuata (si libet) potest duabus lineolis (memoriæ gratia) interponi. Sic si ex 730582 auferendus sit numerus 51368; numeris rite scriptis, ex unitatibus 2 auferendæ occurrunt 8, quod cum fieri non possit, mutuata ex sequentibus 1 decade (quæ valet 10 unitates,) fiunt unitates 12, unde subductis 8, restant 4.

730582
51368
11 1
679214

Deinde in loco sequente, ex decadibus 8, subductis $7=1+6$ (nam una jam inde desumpta in unitates resoluta priori loco annumerata est, & 6 insuper jam occurrunt subducendæ) restat 1: cum è millibus 5, subductis 3, restant 2: deinde in gradu sequente, subducto 1, ex $10=10+0$ (mutuatis nempe 10, ut fieri possit subductio) restant 9: item subductis $6=1+5$ (propter 1 jam subductum, & 5 jam subducenda) ex $13=10+3$ (mutuatis nempe 10 ut fieri possit subductio) restant 7: & denique $7-1$ (propter 1 inde jam mutuatum) $=6$. Adeoque totus numerus residuus est $679214 = 730582 - 51368$.

Atque jam ratio patet, cur, in subductionis praxi, à dextra sive gradu infimo inchoandum esse dixi: Ut nempe numerorum ex gradu superiori ad inferiorem transferendorum (ut fieri possit subductio) ratio habeatur, quod non adeo commode fieri potest si à sinistra praxin ordiamur.

Si tamen libeat à sinistra inchoare, potest etiam illud fieri, duplici saltem modo. Possumus enim Residuum vel Superius scribere vel Inferius, deletis successive notis numeri Minuendi (atque etiam, si libet, Minutoris) eorum loco Residui notis substitutis, quæ & ipsæ aliquoties etiam delendæ sive emendandæ erunt. Ita si ex 735806 auferendus sit numerus 650467: Scriptis ut prius numeris; à sinistra ordiendo, ex 7 subductis 6 restat 1, (hoc est revera propter locorum rationem ex 700000 subductis 600000 restat 100000; seu ex 7 millium centuriis subductis

ſubductis 6 millium centuriis reſtat 1 millium centuria;) deletis igitur 7 & 6, eorum loco ſuperne ſcribatur 1 (= 7 — 6:) deinde ſubductis 5 ex 13 (quoniam ex 3 ſubduci non poſſunt) reſtant 8 = 13 — 5; deletis igitur 13 & 5, ſcribatur ſuperne 8: tum quia 5 — 0 = 5, figuram 5 intactam relinquo (vel, ſi placeat, ipſa deleta aliam figuram 5 ſuperne collocare licebit) tum, quia 8 — 4 = 4, deletis 8 & 4 ſuperne pono 4: deinde ſubductis 6 ex 40 (quoniam ex 0 fieri non poteſt) reſtant 34, deletis itaque 6 & 40, ſuperne ſcribo 34: denique 46 — 7 = 39, deletis igitur 7 & 46 repono ſuperne 39. Adeoque numerus Reſiduus ſuperne repertus eſt 85339 = 735806 — 650467.

3 3	
1 8 4 4 9	*Reſiduus.*
7 3 5 8 0 6	*Minuendus.*
6 5 0 4 6 7	*Minutor.*

Vel etiam reſiduus inferne notari poteſt, hoc modo.

7 3 5 8 0 6	*Minuendus.*
6 5 0 4 6 7	*Minutor.*
1 8 5 4 4 9	*Reſiduus.*
0 3 3	

Praxeos demonſtratio. Totius proceſſus demonſtratio (ſive à ſiniſtra ſive à dextra ordiamur) dependet ex noto illo axiomate, *Totum æquatur partibus omnibus ſimul ſumptis*; adeoque ſubductio omnium *particularium* æquivalet ſubductioni *totius* ſubducendi.

Subductio Partium Decimalium. Si fractiones decimales ſint integris numeris adjunctæ, operatio nihilominus eodem procedit modo: id tamen ſemper cavendum eſt, ut quilibet gradus numeri inferioris pari gradui numeri ſuperioris ſubſit. Exemplum hoc eſto.

703.865
2.7136
701.1514

Subductionis praxis in variis Denominationibus. Si ſubductio inſtituenda ſit in quantitatibus plurium (ut loquuntur) Denominationum: eadem tamen eſt proceſſus ratio quæ prius. Illud tantum curandum erit, ut quoties ex claſſe ſeu ſerie ſuperiori (majoris ſcilicet denominationis) mutuanda eſt Unitas, pro illa in ſerie inferiori (ſive denominationis proxime minoris) tot numerentur unitates quot ſerierum ad invicem ratio poſtulat. Sic in ſubductione Monetæ Anglicanæ, pro 1 libra ſubſtituendi erunt 20 ſolidi, pro 1 ſolido 12 denarii. In Fractionibus Aſtronomicis pro 1 ſigno, reponendi erunt 30 gradus; pro 1 gradu, 60 minuta prima; pro 1 minuto primo, 60 ſecunda &c. ut in exemplis adjunctis videre eſt.

lib.	*ſ.*	*d.*
4.	3.	5.
2.	17.	6.
1	1	
1.	5.	11.

ſig.	*gr.*	′	″
8.	15.	3.	10.
3.	5.	18.	11.
	1	1	
5.	9.	44.	59.

Subductionis praxis ubi varii numeri ſunt ſubducendi. Denique ſi quando plures fuerint numeri ſubducendi, vel ex uno aliquo propoſito vel ex pluribus ſimul ſumptis; priuſquam ſubductio inſtituatur, tam numeri ſubducendi colligendi ſunt in unam ſummam ſeu aggregatum, quam numeri illi ex quibus ſunt ſubducendi: & tum demum, ex aggregato hoc, ſubducendum erit aggregatum illud, ut Reſiduum habeatur. (Atque idem omnino faciendum erit non modo in Numerorum ſed & in aliarum quarumlibet quantitatum ſubductione.) Ut in exemplo appoſito videre licet.

5369, 9572, 8360	23301	*Minuendus.*
3961, 5603, 1211	10775	*Minutor.*
	12526	*Reſiduus.*

Vel etiam ubi plures numeri, vel ex uno, vel ex plurium aggregato ſunt ſubducendi; poſſunt plures ſubductiones ſucceſſive fieri hoc modo.

23301
—3961
19340
—5603
13737
—1211
12526

Subduct. Majoris ex Minore, impoſſibilis. In omni autem Subductione actualiter præſtanda, notandum eſt, Quantitatem ſubducendam minorem eſſe debere (ſaltem non majorem) quantitate illa ex qua eſt ſubducenda: Impoſſibile enim eſt ut quantitas major ex minore deſumi poſſit, (cum pars ſuo toto major eſſe nequeat:) Adeoque ſiquando illud præſtandum proponatur, Propoſitum eſt impoſſibile. Verbi gratia, Impoſſibile eſt ut ex 5 ſubducantur 8, cum numerus hic ſit illo major.

Quantitates Negativæ. Nihilominus, quanquam hoc ſit reaple impoſſibile; non raro tamen apud Arithmeticos, præſertim Algebriſtas, tanquam eſſet poſſibile, præſtari jubetur: Supponunt enim (præter reales quantitates) quantitates quaſdam imaginarias, quæ minores

nores sint quam nihil, quas quantitates Negativas, sive Ablatitias appellant: Et prout (distinctionis gratia, ubi opus est,) quantitatibus veris (quas positivas vel affirmativas appellant) notam hanc + Additionis seu Affirmationis vel Positionis indicium præfigunt; ita quantitatibus imaginariis, negativis, sive ablatitiis, præfigunt notam hanc —, Subductionis vel Ablationis sive Negationis aut Defectus indicium. Adeoque si ex 5 auferenda sint 8, manere dicunt — 3, hoc est, quantitatem quæ sit, numero ternario, minor quam nihil.

Non absurde supponuntur. Hujusmodi autem (quæ supponuntur) quantitates Negativæ, quanquam videri possint non sine absurdo supponi, suos tamen habent usus eximios, neque sine magno commodo ab Arithmeticis (Geometris item, aliisque Mathematicis) introducuntur: ut suo loco aliquando patebit. Hic autem sufficiet ostendere eam suppositionem nihil absurdi supponere. Dum enim dicunt 5 — 8 = — 3: idem est ac si dicerent, *Qui supponit 8 ex 5 demi, supponit ille aliquid ternario numero minus quam nihil*; (qui enim supponit 8, hoc est 5 + 3, ex 5 subduci, supponit ille totum quinarium sublatum esse atque insuper 3 plus quam totum, adeoque restare tanto minus quam nihil.) Atque hoc quidem non magis incommode dicitur, quam hoc, *Qui supponit Hircocervum, supponit ille animal quoddam ex Hirco & Cervo conflatum*; quæ propositio vere enunciari potest quanquam neque *Hircocervus*, neque *Animal ita conflatum* existat, aut quidem existere possit: Potest enim Propositio vera esse, quamvis neque Prædicatum neque Subjectum actu existat, aut quidem sit possibile. Ita quamvis neque sit possibilis quantitas — 3, neque 5 — 8, tamen verum est has quantitates (suppositititias licet) æquales esse, atque qui alteram supponit reliquam etiam supponere. Et quidem qui dicit 5 — 8 = — 3, non modo dicit subductionem illam 5 — 8 impossibilem esse, sed ostendit mensuram impossibilitatis; nempe, numerum 8 tanto majorem esse quam ut possit ex numero 5 subduci quantus est numerus 3. Sic qui *habet* 5, sed *debet* 8; *habere* dicitur (computatis computandis) — 3; hoc est 3 minus quam nihil; seu (quod tantundem est) *debere* 3.

Subductio Majoris ex minore, quatenus præstanda supponitur. Quando autem hujusmodi subductio requiritur, (nempe ut major ex minore auferatur,) illa utcunque sic præstanda est; operatione scilicet præscriptæ contraria. Numerus qui ut Minuendus proponitur subducendus est ex eo qui proponitur ut Minutor, & Reliquo præponenda est nota negationis. Ut ubi requiritur subductio numeri 8 ex numero 5; subductis contra 5 ex 8, residuo 3 præponenda est nota —: Adeoque ut + 8 — 5 = + 3; sic + 5 — 8 = — 3. Atque eadem ratione, erit 546 — 987 = — 441: Nam subductis 6 ex 7 restat 1; subductis 4 ex 8 restant 4; subductis 5 ex 9 restant 4; & (quia operatio peracta est imperatæ contraria) præfigenda est nota —.

+ 546
— 987
— 441

Atque hæc de Subductionis Numerosæ praxi dicta sufficiant. De praxi tam Additionis, quam Subductionis Speciosæ sive Symbolicæ, proxime dicendum est.

CAP. XV.

Additio & Subductio Algebrica & Speciosa. Utriusque Regulæ & Praxis.

Additio & subductio Algebrica seu Speciosa. IN additione & subductione Algebrica, vel Speciosa, (de quibus jam dicendum est,) sive Veterum notis Cossicis sive Recentiorum Speciebus seu Symbolis perficiantur, (de quibus Cap. XI. diximus,) duo potissimum consideranda occurrunt; nempe, præter ipsas Species seu quantitatum Notas, *Signorum* etiam (uti vocari solent) habenda est ratio.

Signa + & — quid indicant. Sunt autem Signa ea (quæ nempe Additioni & Subductioni inserviunt) hæc duo, + & —. Quorum illud quidem + *Affirmativum* est, sive *Positivum*, & notat quantitatem cui præfigitur affirmari sive adesse; (quod quidem ubique intelligendum est ubi nullum signum præfigitur:) Hoc autem — Negativum seu Ablativum, denotans eam cui præfigitur quantitatem negari, sive deesse; & symbola

bola vel species sic insignita non tam quantitatem, quam quantitatis absentiam seu defectum indicant.

Et propterea Species quæcunque seu Symbolum quodvis, cui signum — negativum præfigitur, semper interpretandum est sensu contrario isti de qua quæritur quantitati, ejusmodi symbolo vel absoluto, vel (quod tantundem valet) signo affirmativo insignitæ. Verbi gratia, Si de Lucro quæratur, quod nota B vel + B denotetur, erit — B (sensu contrario interpretandum) tantundem Damni. Sic, si C vel + C indicet excessum; — C indicabit defectum. Item, si *a* vel + *a* sit augmentum, erit — *a* decrementum. Si 2 vel + 2 solem tot gradibus supra horizontem elevatum indicet, — 2 eundem denotabit totidem sub horizonte gradibus depressum. Et contra. Et quidem universaliter quicquid sit illud quantitatis quod signo Affirmativo designatur, ejusdem contrarium signo Negativo designari intelligendum est. Puta

Si signum Affirmativum indicet, *Affirmationem, positionem, augmentum, lucrum, accessum, ascensum, supra, ultra, plus, gravius, calidius, adjici, elevari, &c.*

Signum Negativum indicabit, *Negationem, ablationem, decrementum, damnum, recessum, descensum, infra, citra, minus, levius, frigidius, auferri, deprimi, &c.*

Et contra, ubi hæc signo affirmativo, illa signo negativo intelligenda erunt.

His intellectis, de ipsa Additionis & Subductionis praxi agendum; ubi hæ observandæ sunt regulæ.

De Speciebus, regula.

Si vel in Additione vel in Subductione plures occurrant species seu symbola, quantitates illæ quæ iisdem Symbolis designantur sunt invicem vel addendæ vel subducendæ (prout res postulaverit,) ut earum vel summa vel differentia intelligatur, seorsim notanda: quæ vero distinctis symbolis sive speciebus designantur, non ita invicem comparandæ sed sigillatim considerandæ & notandæ sunt. Causa est, quia dum distinctis symbolis denotantur, quorum ad invicem ratio vel ignoratur, vel saltem nondum consideratur, non possunt sine confusione conjungi. Puta si 2 solidi & 1 denarius, addendi sint, non dicendum est summam esse 3; sed 2 solidos & 1 denarium.

Ubi autem symbolorum utut distinctorum ratio ad invicem innotescit & actu consideratur, possumus, interpretando, etiam diversa symbola in unum colligere; nempe, pro quantitate eorum altero designanda, ipsi æqualem substituendo quæ symbolo altero indicetur, mutatis interim mutandis prout symbolorum ratio ad invicem postulat. Ut, si $1\frac{1}{2}$ solidis, addendi sint 6 denarii, dicimus fieri 2 solidos; quia nempe, ubi innotescit unum solidum tantundem valere atque 12 denarios, & proinde $\frac{1}{2}$ sol. = 6 den. possumus pro 6 denariis substituere, semissem solidi; & deinde $1\frac{1}{2}$ sol. + 6 den. hoc est, $1\frac{1}{2}$ sol. + $\frac{1}{2}$ sol. erunt 2 solidi. Et similiter in aliis. Atque hoc quidem indifferenter sive in Additione sive in Subductione intelligendum est.

De signis + & —, Regulæ. In Additione.

De signis autem + & —, aliæ Additioni aliæ Subductioni inserviunt regulæ. Quarum quæ Additioni inserviunt hæ sunt.

1. *In Quantitatibus addendis, si signa sint Similia, subscribenda est quantitatum summa cum communi signo.* Puta pro + 2 + 3 ponendum + 5; quia utraque quantitas ponenda intelligitur. Item, pro — 2 — 3 ponendum — 5; quia utraque auferri intelligitur.

2. *Si sint autem signa Dissimilia, subscribenda est quantitatum Differentia, cum signo majoris quantitatis.* Puta pro + 3 — 2 ponendum + 1; quia nempe ubi intelligitur, poni tria, & deinde illorum duo auferri, unicum eorum positum manet: item pro — 3 + 2 ponendum — 1; quia nempe uno plus aufertur quam quod restituitur. Et similiter in aliis.

Oughtredus utramque regulam sic breviter conjungit, *Additio speciosa conjungit omnes magnitudines datas, servatis signis.*

His intellectis, praxis non erit difficilis. Exemplum esto,

Addenda $\begin{cases} +3\mathfrak{C}+1\mathfrak{z}-2\mathfrak{R}+3 \\ -1\mathfrak{C}+2\mathfrak{z}-3\mathfrak{R}-4 \end{cases}$ vel $\begin{array}{l} +3C+1Q-2R+3 \\ -1C+2Q-3R-4 \end{array}$

Aggregatum $+2\mathfrak{C}+3\mathfrak{z}-5\mathfrak{R}-1$ $\quad +2C+3Q-5R-1$

Vel $\begin{array}{l} 3Ac+1Aq-2A+3 \\ -Ac+2Aq-3A-4 \\ \hline 2Ac+3Aq-5A-1 \end{array}$ vel $\begin{array}{l} 3aaa+aa-2a+3 \\ -aaa+2aa-3a-4 \\ \hline 2aaa+3aa-5a-1 \end{array}$ vel $\begin{array}{l} 3a^3+a^2-2a+3 \\ -a^3+2a^2-3a-4 \\ \hline 2a^3+3a^2-5a-1 \end{array}$

Nempe

Nempe si addantur $3\,\mathcal{C}$, & $-1\,\mathcal{C}$ hoc est, si intelligantur poni 3 Cubi, & (propter signum — contrario sensu exponendum) auferri 1 Cubus, tantundem est atque si ponantur 2 Cubi, (quia $3-1=2$.) ita si addantur $+1\,z$ & $+2\,z$, cum utrumque affirmetur, aggregatum est $+3\,z$. Item $-2\,\mathcal{R}$ & $-3\,\mathcal{R}$, cum utrumque negetur, erit $-5\,\mathcal{R}$, (qui enim tollit $2\,\mathcal{R}$, & tollit insuper $3\,\mathcal{R}$, tollit omnino $5\,\mathcal{R}$, quia $2+3=5$.) denique $+3$ & -4, sunt -1; nempe uno plus tollitur quam apponitur. Et propterea aggregatum duorum additorum (ex singulis summulis collectum) est $+2\,\mathcal{C}+3\,z-5\,\mathcal{R}-1$.

Sic in exemplis sequentibus, si addantur $A+B-C$, & $-2B+2C-D$ & $A-C+E$, (quæcunque demum sint quantitates symbolis illis A, B, C, &c. designatæ) aggregatum omnium erit $2A-B-D+E$. Et pariter in reliquis.

$$\begin{array}{rrrrr} A+ & B- & C & & \\ & -2B+ & 2C- & D & \\ A & & -C & & +E \\ \hline 2A- & B & & -D & +E \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} 5b^4- & 2b^3- & b^2+ & 4b & \\ & +b^3 & & +b & -3 \\ -b^4- & 5b^3- & b^2 & & +4 \\ \hline 4b^4- & 6b^3- & 2b^2+ & 5b & +1 \end{array}$$

Verbi gratia, si supponamus A, B, C, D, E, significare 1, 2, 3, 4, 5. Item b, b^2, b^3, b^4, significare 3, 9, 27, 81. tantundem valebunt ista atque hæc.

$$\begin{array}{l} 1+2-3 \quad\quad = 0 \\ \quad -4+6-4=-2 \\ 1 \quad\; -3+5=+3 \\ \hline 2-2\pm 0-4+5=1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 405-54-9+12 \quad = 354 \\ \quad\; +27 \;\; +3-3= \;\; 27 \\ -81-135-9 \quad +4=-221 \\ \hline 324-162-18+15+1= 160 \end{array}$$

In subductione hæ observandæ sunt Regulæ.

In Subductione. 1. *Si signa sint Dissimilia, subscribenda est quantitatum summa, cum signo superioris, nempe quantitatis minuendæ seu illius unde facienda est subductio.* Puta si ex -3 auferamus $+2$, residuum erit -5. Nempe si supponantur jam deesse 3, & ulterius auferantur 2, tandem deerunt $5=3+2$. Item si ex $+3$ auferantur -2, residuum erit $+5$. Nempe si jam adsint 3 & insuper tollatur, (hoc est, suppleatur) defectus duorum, sive restituantur 2, jam tandem aderunt $5=3+2$.

2. *Si signa sint Similia, subscribenda est quantitatum Differentia; cum signo communi, ubi quantitas auferenda minor est; sed cum signo contrario, ubi quantitas auferenda est major.* Puta, si ex $+3$ auferantur $+2$, manebit $+1$, quia $3-2=1$; Si vero ex $+3$ auferantur $+4$, manebit -1, quia $3-4=-1$, supponitur nempe 1 deesse. Item si ex -3 auferamus -2, manebit -1; quia nempe si intelligantur deesse 3, & auferantur -2 sive suppleatur defectus duorum, hoc est, si restituantur 2, tandem deerit non nisi 1: Si vero ex -3 auferamus -4, manebit $+1$; nempe ubi deerant 3, si restituantur 4, aderit 1. Et pariter in aliis.

Oughtredus utramque conjunctim sic effert, *Subductio speciosa conjungit utramque magnitudinem datam, mutatis omnibus signis quantitatis subducendæ.*

His explicatis exempla sequentia non difficulter percipientur. Nempe, si

$$\begin{array}{ll} \text{Ex} & +3\,\mathcal{C}-2\,z+3\,\mathcal{R}-5 \\ \text{aufer.} & +2\,\mathcal{C}-1\,z-2\,\mathcal{R}+3 \\ \hline \text{restat} & +1\,\mathcal{C}-1\,z+5\,\mathcal{R}-8 \end{array} \quad \text{vel} \quad \begin{array}{l} 3C-2Q+3R-5 \\ 2C-1Q-2R+3 \\ \hline 1C-1Q+5R-8 \end{array}$$

$$\text{vel} \quad \begin{array}{l} 3Ac-2Aq+3A-5 \\ 2Ac-\;Aq-2A+3 \\ \hline Ac-\;Aq+5A-8 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3a^3-2a^2+3a-5 \\ 2a^3-\;a^2-2a+3 \\ \hline a^3-\;a^2+5a-8 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3aaa-2aa+3a-5 \\ 2aaa-\;aa-2a+3 \\ \hline aaa-\;aa+5a-8 \end{array}$$

ex $3\,\mathcal{C}$ auferantur $2\,\mathcal{C}$, manebit $1\,\mathcal{C}$; quia $3-2=1$. Item, si ex $-2\,z$ auferamus $-1\,z$, manebit $-1\,z$; quoniam, si ubi deerant quadrata 2, auferatur vel suppleatur defectus unius, hoc est, restituatur 1, deerit adhuc quadratum unum sive $1\,z$. Item, si ex $3\,R$ auferamus $-2\,R$ supersunt $+5\,R$; nempe si ubi adsunt 3 radices, restituantur adhuc 2 radices, aderunt omnino 5 radices. Denique si ex -5 auferantur $+3$ residuum erit -8: nempe cum jam desint 5, si adhuc

adhuc auferantur 3, deerunt omnino 8. Si igitur residua ista omnia particularia in unum colligantur, erit illud 1 ℭ — 1 ℨℨ + 5 ℓ — 8.

Similiter in exemplis subsequentibus. Si ex A + 2 B — 3 C + D. auferantur, 2 B — 2 D + E, manebit A — 3 C + 3 D — E. Et pariter in aliis.

$$\begin{array}{llll} A + 2B - 3C + D & & & 3a^3 + 3a^2 - 2a - 2 \\ \quad + 2B \quad\quad - 2D + E & & & 2a^3 + 3a^2 + 2a - 10 \\ \hline A \quad\quad - 3C + 3D - E & & & + a^3 \quad\quad - 4a + 8 \end{array}$$

Quod si supponamus A, B, C, D, E, significare 1, 2, 3, 4, 5. Et a, a^2, a^3, significare 2, 4, 8. tantundem valebunt illa atque hæc.

$$\begin{array}{llll} 1 + 4 - 9 + 4 \quad = \ 0 & & & 24 + 12 - 4 - 2 = 30 \\ \quad + 4 \quad - 8 + 5 = + 1 & & & 16 + 12 + 4 - 10 = 22 \\ \hline 1 \pm 0 - 9 + 12 - 5 = - 1 & & & 8 - 0 - 8 + 8 = 8 \end{array}$$

Atque hæc quidem, de Additione & Subductione Algebrica & Speciosa, dicta sufficiant.

Quod autem superius de Additione monuimus, illud etiam de utrisque Additione & Subductione (sive Numerosis sive Speciosis) intelligendum est; Nempe *Quando plures quantitates sunt continuo vel addendæ vel subducendæ, vel partim addendæ partim subducendæ, perinde est quo ordine instituantur operationes, modo omnes continue peragantur.* Non enim de ordine seu situ quantitatum quæritur sed de earum magnitudine; (nempe quantum illud sit quod emergit, quocunque tandem ordine disponantur.) Nempe 6 + 3 — 4 = 6 — 4 + 3 = 3 + 6 — 4 = 3 — 4 + 6 = — 4 + 6 + 3 = — 4 + 3 + 6 = 5. Item A + B — C = B + A — C = A — C + B = B — C + A = — C + A + B = — C + B + A. Et similiter in aliis.

CAP. XVI.

Additionis & Subductionis, per contrarias operationes, probatio. Objectionibus Rami respondetur. Quæstiunculæ aliquot familiares solvuntur. Probatio novenaria. Utut lubrica sit, non tamen contemnenda. Quomodo reddi potest certa.

POst traditam Additionis & Subductionis praxin, annectendum videtur aliquid de utriusque Probatione sive Examine. Cum enim in Arithmetices praxi, tironibus præsertim & parum exercitatis, error calculi facillime possit irrepere: solent hic Arithmeticæ Practicæ Magistri methodos tradere operationem jam peractam examinandi, quo melius perspectum sit numquis error subsit. Quam ego rem in hunc locum distuli, quod Additionis & Subductionis examinationem simul tradendam esse duxerim; partim quod eadem fere sit utriusque methodus; partim etiam quod neutra seorsim tam commode tradi possit, cum altera alterius probationem præstet.

Additionem peractam solenne est per Subductionem (operationem ipsi contrariam) examinare. Cum enim duo numeri simul additi sunt, si ex summa subducatur eorum alteruter, restabit reliquus. Ut si 2 + 3 = 5; erunt 5 — 2 = 3, & 5 — 3 = 2. Hoc est, si 2 & 3 addita constituant 5; tum, si ex 5 auferantur 2, manebunt 3; si auferantur 3 manebunt 2. Atque idem patebit, si in tot punctis res peragatur. Si enim puncta bina & terna constituant quina; deletis 3 manebunt 2; *Examinatio sive Probatio Additionis.*

+ 2	2
+ 3	3
5	5
— 2	— 3
3	2

K vel

vel deletis 2 manebunt 3. Demonſtratio dependet ex illo axiomate, *Si æqualia æqualibus auferantur, reliqua erunt æqualia.* Ideoque ſi ſint $3+2=5$, deletis utrinq; 3 — 3, manebunt 2 — 2.

378569, 482586	addendi.
861155	Summa.
482586	Subducendus.
378569	Reſiduus.

Si igitur, ubi ex Additionis ſumma additorum alterum auferatur, quod reſtat æquatur additorum reliquo, operatio rite peracta eſt; ſi autem Reſiduum ſubductionis, reliquo addendorum non congruat; indicium eſt erroris. Atque idem in grandioribus numeris accidit. Ut in appoſito exemplo.

38925, 19634, 82703, 98516	addendi.
239778	Summa.
38925	Subducendus.
200853	Reſiduus.
19634	Subducendus.
181219	Reſiduus.
82703	Subducendus.
98516	Reſiduus.

Si autem plures numeri addantur; Subductionis opus ſæpius erit iterandum. Ut in exemplo appoſito.

Verum cum hoc pacto examinandi labor evadat ipſa primaria operatione major: Satius fortaſſe videbitur ipſam potius Additionis operationem repetere: præſertim ſi ordine retrogrado vel aliquo alio modo inverſo procedatur: verbi gratia, Si prius ſingulas ſeries à nota ſuprema deorſum proceſſimus (ut in exemplo ultimo, $5+4=9$. $9+3=12$. $12+6=18$) in repetita operatione ab infima nota incipientes procedamus ſurſum, (ut $6+3=9$. $9+4=13$. $13+5=18$,) ut eo minus ſit periculi in eundem errorem, ſi quis prius commiſſus fuerit, denuo incidendi.

Quod autem de Additionis probatione in addendis numeris abſolutis dictum eſt; pariter etiam in additione Algebrica & Specioſa locum habet; ut & in addendis quantitatibus plurium denominationum. Nam & hic eadem omnino ratio obtinet quæ ſuperius, ut non ſit opus alia demonſtratione. Exempla ſunto.

	lib.	*unc.*	*drach.*	*ſcr.*	*gr.*
Adde	13	9	5	1	18
	2	6	2	2	6
Summæ	16	4	0	1	4
Subduc.	2	6	2	2	6
Reſtat.	13	9	5	1	18

$2Q+1R+3$, $3Q-2R-1$	Additio.
$5Q-1R+2$, $3Q-2R-1$	Subduct.
$2Q+1R+3$	

Additio	$A+3B-C+2D$, $3A+2C-D$	b^3+3b^2-5b-1, $2b^3-b^2+4b+6$	addit.
	$4A+3B+C+D$	$3b^3+2b^2-b+5$	
Subduc.	$3A+2C-D$	$2b^3-b^2+4b+6$	ſubduc.
	$A+3B-C+2D$	b^3+3b^2-5b-1	

Probatio Subductionis. In Subductionis probatione, eadem fere methodo incedendum eſt, qua in probatione additionis: ſed vice verſa. Ut enim ſubducendo examinatur additio, ita addendo examinanda eſt ſubductio. Nempe, ſi quantitas Ablata & Reſidua ſimul additæ conſtituant quantitatem primo Propoſitam (unde nempe altera auferenda erat) indicium eſt operationem rite proceſſiſſe; ſin ſecus, erratum eſt. Nam *Ablatum & Reſiduum ſimul æquantur Integro* (quippe Totum ſuis Partibus ſimul ſumptis;) ideoque *ſi Reſiduo reſtituatur Ablatum, redibit Integrum.* Exempli gratia. Si ex numero quinario, auferatur binarius, & ternarius ſupereſſe dicatur, patet operationem probe peractam eſſe, quia numeri binarius & ternarius (ablatus & reſiduus) ſimul additi conſtituunt quinarium. Quod itidem in totidem punctis oſtendetur; nam ſi punctorum quinque deletis duobus, tria dicantur ſupereſſe; verum illud eſſe liquet, quoniam ſi tribus illis reſiduis reſtituantur duo ablata, redibit punctorum numerus quinarius primo poſitus. Vel denique ſi ſint

5	$5-2=3$
2	$5=3+2$
3	.. | ...
2	
5	

 $5-2=3$,

$5-2=3$, additis utrinque 2, aggregata erunt æqualia $5=3+2$; & contra si æqualibus $5=3+2$, auferantur æqualia puta 2, manebunt æqualia $5-2=3$.

$$\left.\begin{array}{r} 5-2=3 \\ 2=2 \\ \hline 5 \quad =3+2 \end{array}\right\} \text{Addit.}$$

Atque idem prorsus, iisdem de causis, in numeris majoribus non minus valebit; ut & in subductionibus Algebricis & Speciosis sive symbolicis; aut etiam in Quantitatibus plurium denominationum. Ubique enim & universaliter obtinebit illud, *Sublatum & Residuum æquantur Toti.* Exempla aliquot subjicimus.

$$\left.\begin{array}{r} 3+2=5 \\ 2=2 \\ \hline 3 \quad =5-2 \end{array}\right\} \text{Subduct.}$$

Ex.	$3\,\mathcal{C} + 2\,zz - 1\,\mathcal{R}$	$5\,Ac - 4\,Aq + A - 1$
tolle	$1\,\mathcal{C} - 1\,zz + 3\,\mathcal{R}$	$3\,Ac + 2\,Aq - 2\,A + 3$
Resid.	$2\,\mathcal{C} + 3\,zz - 4\,\mathcal{R}$	$2\,Ac - 6\,Aq + 3\,A - 4$
Summa	$3\,\mathcal{C} + 2\,zz - 1\,\mathcal{R}$	$5\,Ac - 4\,Aq + A - 1$

	dies.	horæ.	minuta.
$2A - 3B + C$	45.	12.	56.
$A + B - C$	13.	18.	7.
$A - 4B + 2C$	31.	54.	49.
$2A - 3B + C$	45.	12.	56.

Atque hactenus quidem ostendisse sufficiat mutuam tam Additionis quam Subductionis examen sive probationem per operationem contrariam.

Non ignoro interim Ramum, & post illum alios, censores forte plus satis rigidos, hujusmodi Additionis & Subductionis mutuas sive demonstrationes sive probationes rejicere; non quidem ut falsas aut fallaces, sed ut superfluas: quippe cum veritas operationis sive in addendo sive in subducendo ex ipso progressu satis appareat, (si nempe rite procedat uti regulis docetur,) ideoque demonstrationem aliunde frustra petendam esse. *Objectio Rami.*

Ego autem rationem illam Rami vix commode applicatam arbitror, aut rei, quæ jam agitur, rite accommodatam. Vix enim quisquam (uti credo) est, qui concessa firmitate regulæ, & exempli pariter cum illa regula conformitate, dubitabit adhuc de veritate operationis; (siquis enim ejusmodi reperiatur, fateor illum sub Rami censura merito cadere, ut qui, concessis præmissis, ipsaque syllogismi forma, de conclusione interim dubitat:) Verum concessa Regulæ certitudine, de præsentis operationis cum data regula conformitate, merito fortasse nonnunquam dubitabitur; hujusmodi autem dubitationes his probationibus tollendas docent. Cum autem doceat Ramus hæcce dubia, siqua sint, tollenda esse repetendo totam operationem peractam, eamque ad regulam exigendo: quanquam non negem rem ita peractam satis feliciter succedere posse, tamen (pace tanti viri) facilius eundem errorem calculi recurrere posse judico eodem opere iterato, quam opere aliquantum variato: (quod & facile concessuros arbitror qui vel leviter calculo exercitati sunt;) adeoque melius per operationem contrariam, quam eandem repetendo, examen faciendum.

Sed & alia me movet ratio cur nolui reciprocas has examinationes sive probationes exterminare; Nempe quod, hoc pacto exercitati, utriusque operationis, Additionis scilicet & Subductionis, comparatas vires persentiscent tirones Arithmetici: nimirum hanc resolvere quod illa componit. Est enim Additio istius quasi γένεσις, cujus Subductio est ἀνάλυσις. Ea vero quæ συνθετικῶς construuntur, ἀναλυτικῶς examinare, nec Arithmeticum dedecet, nec Geometram.

Iisdem item quæ jam tradidimus principiis solvuntur hujusmodi Quæstiones (quibus se exercere tirones non incommode poterunt.)

Quis numerus ille, unde si demantur 4, restabunt 3? Additis nempe 4 & 3 (sublato & residuo) prodibunt 7, numerus quæsitus. Item *A quo numero tollenda 7, ut restent 4?* Additis scilicet 7 & 4 prodibunt 11; hoc est, numerus ablatus & numerus residuus simul additi dabunt numerum minuendum. Ita in numeris grandioribus;

$$\left.\begin{array}{r} 4 \\ 3 \end{array}\right\} \text{additio} \left\{\begin{array}{r} 7 \\ 4 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{r} 7 \\ 4 \\ \hline 3 \end{array}\right\} \text{subductio} \left\{\begin{array}{r} 11 \\ 7 \\ \hline 4 \end{array}\right.$$

2436 } additio.
1563 }
3999 }
2436 } subductio.
1563 }

dioribus; *Qui, ære alieno obstrictus, jam solvit libras* 2436, *& etiamnum debet libras* 1563, *quanto primitus debito obstringebatur?* Seu (quod perinde est) à quo numero tollenda sunt 2436, ut restent 1563? Additis numeris 2436, & 1563 prodibit quæsitus 3999. Hos autem numeros ita repertos eos ipsos esse qui quærebantur, inde liquet, quod, si subductiones fiant prout quæstiones propositæ postulant, numeri residui iidem erunt quos quæstiones postulabant. Ut patet.

10 } subductio { 783
6 } { 356
4 } additio { 427
10 } { 783

Contra vero, si quæratur *Quis numerus ille sit cui si addantur 6 prodibunt* 10? Ex additionis summa 10, auferatur numerorum additorum alter (cognitus) 6, & prodibit reliquus (quæsitus) 4. Item *cui numero addenda sunt* 356 *ut fiant* 783? Subductione facta, prodibunt 427. Hos autem sic inventos numeros eos ipsos esse qui quærebantur, patebit, si additiones juxta quæstionum præscriptum peragantur, prodibunt enim summæ indicatæ.

5 } additio { 5371
2 } { 3758
7 } { 9129

5 } subd. { 5371
2 } { 3758
3 } { 1613

Eodem modo si quæratur *Quis numerus sit qui, a quinario, binario differt?* Quoniam differentia potest esse, vel in excessu vel in defectu; patet ejusmodi numeros duos esse, majorem nempe & minorem: illum addendo, hunc subducendo inveniemus. Est enim septenarius binario major, & ternarius binario minor, quam est quinarius. Sic 3758 est differentia numeri 5371 à duobus numeris nempe 9129 majore, & 1613 minore, quorum ille addendo, hic subducendo investigatur.

Possunt autem hæc omnia etiam per *Regulam Algebræ* (ut loquuntur) vel Analyticen, aut Arithmeticam Speciosam pariter ostendi. Verbi gratia. Si quæratur *Cui numero addenda* 7, *ut fiant* 20? Numerus quæsitus dicatur 1 ℞; ergo 1 ℞ + 7 = 20; auferantur utrinque 7; & restat 1 ℞ = 13, numerus quæsitus. Ita, *A quo numero auferenda* 325 *ut restent* 243? Numerus quæsitus dicatur A; erit ergo A − 325 = 243: Et (additis utrinque 325) A = 568. Item *Quis numerus est cujus differentia a* 261, est 141? Numerus quæsitus dicatur E; ergo erit 261 ± 141 = E = { 402. / 120. } numerus quæsitus. Et similiter in aliis.

1 ℞ + 7 = 20 }
7 = 7 } Subductio
1 ℞ = 13 }

A − 325 = 243 }
325 = 325 } Additio.
A = 568 }

Summa 402 = E
261
141
Residua 120 = E

Siquis autem inquirat verbi gratia, *Quinam addendi sint numeri, ut summa sit* 7; vel *Quinam ex quibus subducendi, ut restent* 7; Hujusmodi quæstiones essent plane ludicræ & nugaces; cum ex datis propositis in quæstione nihil certi elicitur; quippe modis innumeris responderi poterit: Puta 1 + 6, 2 + 5, 3 + 4, 1 + 2 + 4, 1 + 2 + 3 + 1, 5 + 1 + 1, 8 − 1, 10 − 3, 20 − 13, 5 + 6 − 4, 12 − 3 − 2, &c. Nam ex solo Aggregato, vel Residuo, de particulis additis aut subductis nil certi constabit.

Subductionis alia probatio. Notandum autem & hic est, aliam esse consimilem subductionis probationem, eidem prorsus fundamento innixam. Nempe (in operatione legitime peracta) *Si numerus residuus a numero primum posito auferatur restabit numerus prius ablatus.* Puta si ex 583 auferendo 291 deprehendero primum 312. Quod an recte probaturus, ex 583 (numero proposito) subduco 312 (residuum inventum,) ut videam num sic proveniet 291 numerus prius ablatus: invenio autem jam residuum esse non illum sed 271, ipso minorem; unde deprehendo errorem calculi alicubi irrepsisse; quem repetito opere in decadum serie commissum intelligo, dum

583 } subductio { 583
291 } mendosa { 312
312 } { 271

583 } subductio { 583
291 } emendata { 292
292 } { 291

I

dum decadas 31 pro 29 posuerim; & verum residuum esse 292. Fundamentum hujus probationis hoc est, quoniam cum ablatus & residuus æquentur toti, utrovis eorum ablato reliquus manebit. Adeoque si toti 583 æquentur duo simul 291 & 292, sicut sublato 291 manebit 292, ita sublato numero 292 manere necesse est alterum 291.

Superest adhuc alius tam Additionem quam Subductionem probandi sive examinandi modus; quam *probationem Novenariam* appellant. Eaque sic instituitur. *Probatio Novenaria.*

In Additione, Numerorum addendorum singulis figuris indiscriminatim, nulla locorum consideratione habita, simul additis; & 9 quoties fieri potest abjectis, residuum numero novenario minus observetur: atque idem etiam in additorum summa fiat. Quo facto, si duo ista residua sint invicem æqualia, operationem illam rite peractam esse conjicimus; sin secus, certum est alicubi errorem incidisse. Sic in apposito exemplo: 3, 5, 8, simul addita constituunt 16, unde abjectis 9 restant 7, (seu, quod eodem recidet, $1+6=7$;) huic numero 7 addantur insuper 1, & 2, ut fiant 10, unde demptis 9 restat 1: huic additis 3 & 5 fiunt 9, quæ abjiciantur; tum 6, 1, & 3, sunt 10, unde abjectis 9 restat 1; hoc residuum seorsim (memoriæ causa) noto. Deinde & in summa id ipsum faciendum est; ubi $1+1+9=11$. Et $11-9=2$. tum $2+4+4=10$. denique $10-9=1$. Quod etiam residuum seorsim noto. Cum residua (post 9 quoties fieri potest abjecta) sint æqualia (utrobique 1) conjicio operationem illam rite peractam esse. Si autem residua ista fuissent inæqualia, certum esset errorem alicubi admissum esse. *In Additione.*

```
 3581
 2350      ₁X₁
 6013
-----
11944
```

Quo fundamento nititur hæc probatio, nescio an quisquam tradiderit; ego certe non memini me uspiam legisse. Verum, uti in aliis soleo, ita hic mihi incumbere judico operationis fundamentum tradere, ut inde discant qui velint non rem tantum, sed & rei rationem; præsertim cum in disciplinis Mathematicis non sit adeo congruum ἀναποδείκτως effata pronunciare. Fundamentum igitur istius operationis (sive unde primitus originem sumpserit, sive saltem unde demonstrari possit;) hoc est. Cum numerorum loci ascendant (uti superius traditum est) proportione decupla, pro singulis decadibus unius gradus ponendæ sunt (in gradu superiori) totidem unitates: at idem omnino est à 10 abjicere 9, atque pro 10 substituere 1: & eadem ratione, pro 11 substituere 2 (nempe pro 10 unam, pro 1 alteram unitatem) atque ab 11 abjicere 9. Et sic in cæteris. Atque hinc fit, ut ubi posthabita locorum distinctione singuli characteres indiscriminatim considerantur, decem & unum eodem charactere notantur, hoc scilicet 1 utrumque. Atque hinc factum est quod 10 & 1 perinde habentur, hoc est, ex singulis decadibus ejiciuntur novem. *Quo fundamento nititur.*

Non diffiteor tamen probationem hanc lubricam esse. Quanquam enim residuorum dissensus certum sit erroris indicium, non tamen eorum consensus certum est indicium veritatis. Nam, verbi gratia, in exemplo præcedente, sive dicamus additionis summam esse 11944 (quod verum est) sive 19144, sive 11044, sive 11080; sive denique (ne plures memorem) 10000, utcunque post novenariorum quoties fieri potest abjectionem remanebit 1; adeoque probatio ista errorem non detegeret. Non est igitur cur huic probationi nimium fidamus, quasi, ubi illa nullum detegit, operatio plane esset erroris immunis. *Quam sit lubrica.*

Neque tamen suadeo ut penitus rejiciatur hæc examinandi methodus; quia non ita magno labore peragitur, & errorem nihilominus non raro detegit, (licet non semper,) imo rarissime fallit: Nisi enim quis data opera illud agat, ut numeros falsos pro veris substituat, & sponte erret, vix unquam tam felici successu (seu potius infelici) errabitur, quin se prodet error. Cum enim vel mediocriter cauti vix plusquam una aut altera unitate (in eadem serie) peccent; non autem latere possit error, nisi vel multiplex sit (ita ut unus alterum celet) vel novem præcise unitatibus (aut forsan 18, 27, &c.) in eadem serie erratum fuerit; rarissimo certe casu eveniet, ut error, siquis sit, lateat, & vel lubricam hanc probationem effugiat. *Non tamen rejicienda.*

Sed addo, probationem hanc tanta cautione (neque labore interim multum aucto) adhiberi posse, ut non minus certa sit & infallibilis, quam alii probandi modi. Ut autem hoc fiat, operæ pretium erit decadas in Superiores ordines transmissas continuo notare (ut supra ostendimus) intra duas lineolas: Atque examinare deinde singulas seorsim series, puta unitatum, decadum, centuriarum, &c. Quo facto, si quoties ex omnibus ejusdem seriei numeris *Quomodo fieri potest certa.*

ris simul additis abjiciantur 9, toties præcise ex ejusdem seriei summula abjici etiam possit, cum eodem utrobique residuo, certum est indicium operationem illam neutiquam mendosam esse. Exemplum esto operatio apposita. Ubi in unitatum serie occurrunt numeri 6, 8, 7, 6, 9. in quibus addendis, postquam 9 quater abjecta sunt, nihil superest, (nempe $6+8=14.$ $14-9=5.$ $5+7=12.$ $12-9=3.$ $3+6=9.$ $9-9=0.$ $0+9=9.$ $9-9=0.$) sed & in 36 (ejusdem seriei summula) 9 præcise quater continentur, sine ullo residuo. In sequenti decadum serie; in addendis 9, 7, 6, 5, 7, 3, postquam quater abjecta sunt 9, restat 1: sed & ita in 37. In serie centuriarum 8, 9, 8, 7, 7, 3, cum 9 quater ejecta sunt, 6 supersunt: atque ita in 42. In serie millium, tam in addendis 7, 9, 9, 8, 8, 4, quam in summula 45, cum 9 quinquies abjiciuntur nihil superest. In serie denique suprema, tam in particulis 9, 8, 5, 7, 8, 4, quam in earum summula 41, abjectis 9 quater supersunt 5. Certum est igitur & singularum serierum summulas, & omnium etiam aggregatum, vera esse, adeoque totam operationem rite processisse. Nec secus eveniet in aliis ejusmodi additionibus probandis. Hac autem si incedamus via, non novenarius magis quam quilibet alius numerus adhiberi possit, ut patet. Quod monuisse sufficiat.

```
 97896
 89978
 59867
 78756
 88779
  4433
------
415276
```

Subductionis probatio novenaria. In novenaria Subductionis probatione, eadem omnino est incedendum via, quam in Additionis probatione ostendimus: cum hoc solo discrimine, nempe quod in Additione numeri addendi cum summa conferuntur; in Subductione, ablatus & residuus (simul sumpti) conferuntur cum numero minuendo. Ratio est, quoniam ut in Additione, summa est quid integrum cujus partes sunt numeri addendi; sic in subductione numerus minuendus rationem habet Totius, cujus partes sunt ablatus & residuus. Exemplum esto illud quod apponitur. Ubi in figuris numeri minuendi simul indiscriminatim addendis, nempe 7, 3, 9, 8, 1, abjectis 9 quoties fieri potest, restabit 1: Sed & idem restabit in addendis 5, 2, 3, 0, 4, 2, 1, 6, 7, 7, figuris nempe ablati & residui: Unde operationem illam minime vitiosam esse conjicio; quod si diversa fuissent residua, certum esset operationem alicubi fuisse mendosam.

```
73981
52304     1 X 1
-----
21677
```

Quæ vero superius dicta sunt de Additionis probatione, nempe lubricam illam esse, nec tamen plane contemnendam: etiam de hac Subductionis probatione non minus intelligenda erunt, ut non sit opus ea denuo repetere.

Hæc autem sive Additionis sive Subductionis probatio novenaria, in additionibus & subductionibus Algebricis & Speciosis locum non habet: Sed neque ubi variæ sunt numerorum addendorum aut subtrahendorum denominationes (quod in monetis, ponderibus, aliisque similibus numerandis plerumque evenit) nisi saltem cum levi aliqua correctione, quam tamen vel mediocriter exercitati, ubi operæ pretium videbitur, facile adhibebunt.

Atque hæc, quæ dicta sunt, de toto & Additionis & Subductionis negotio tradidisse sufficiat. Alia minutiora quæ vel inter operandum se sponte offerent, vel in Arithmeticorum practicorum libris passim occurrunt, consulto omisi, ut quæ vel levioris sunt momenti, vel ex jam traditis satis intelligi poterunt. Libet autem, priusquam hanc rem penitus dimittam, utriusque exercitium aliquod, in re Chronologica, exhibere: ut intelligant saltem tirones quomodo universalia quæ tradidimus præcepta, sint (prout res postulat) in usum reducenda. Quod capite sequente fiet.

CAP.

CAP. XVII.

Additionis & Subductionis exercitium, in Chronologia, &c. De nativitate Arphaxadi & Abrahami; & Promissione facta. Gen. 15. *& Gal.* 3. *comparantur. De Israelitarum mora in Ægypto. De duræ servitutis initio. De Obstetricum responsione. Numerus descendentium in Ægyptum. Gen.* 46. *& Act.* 7. *comparantur. Immensum eorum incrementum.*

CUm harum rerum lectores, præsertim tirones, existimem, non tam nudis præceptis delectari, quam si eadem videant, ad usus communes applicata, unde & ipsi forsan impræsentiarum aliquid delectationis persentiscant, & discant interim similiter eadem ubi opus est in usum proferre: Non ingratum fore judicavi hujusmodi specimen in re Chronologica exhibere.

A Mundo Condito ad Diluvii initium, numerantur anni 1656. Annos autem qui ibi numerantur completos esse, patet ex vita Methusalæ, juxta illam quam habemus computationem Gen. 5. cujus ultimus annus concurrit cum anno Mundi 1656, uti illa computatione liquet. A diluvio autem inchoato ad Arphaxad natum numerat Helvicus annos 2, atque inde ad Tharam annos 220, inde autem ad Abrahamum natum, annos 70, quem annorum numerum colligit ex ea supputatione quæ habetur, Gen. cap. 11. Inde autem ad Promissionem datam (cujus mentio facta est Gen. 12.) numerat annos 75. propter Gen. cap. 12. v. 4. saltem annos completos 74. Hinc autem ad Exitum ex Ægypto numerat annos 430. juxta quod habetur Galat. 3. ver. 17. & Exod. 12. ver. 41. Ab exitu autem ad Templum Salomonis numerat itidem annos 480. Inde autem ad Christum natum numerat annos completos 1015. Unde etiam ad initium Æræ Christianæ vulgaris sive Dionysianæ annos adhuc 2 elapsos autumat. Atque inde ad annum præsentem (quo hæc scripta fuerant) completum numeramus 1655. Adeoque, numeris omnibus simul additis, fuerunt juxta Chronologiam Helvici (qui in plerisque cum Calvisio & Scaligero consentit) ab Orbe condito ad annum præsentem (inclusive) anni 5604, uti ex calculo adjuncto patet. *De Annis Mundi.*

A Mundo Condito,	Anni.
Ad Diluvium.	1656
Inde ad Arphaxad.	2
Inde ad Tharam.	220
Inde ad Abrahamum.	70
Inde ad Promissionem.	74
Inde ad Exitum ex Ægypto.	430
Inde ad Templum.	480
Inde ad Christum natum	1015
Inde ad Æram Dionys.	2
Inde ad annum præsentem.	1655
Millia	3
Centuriæ	22
Decades	38
Unitates	24
Summa	5604

Verum, ni fallor, calculus ille Helvici est aliquot in locis emendandus, ut cum veritate historica melius consentiat. Ego pauca tantum, circa Abrahami præsertim tempora, leviter attingam, exercitii gratia; (non enim expectandum est ut totam Chronologiam in transitu emendandam suscipiam.)

Incepit diluvium (uti ex *Gen. cap.* 5. constat) anno mundi completo 1656, currente vero 1657. (mense secundo) Annos enim qui *Gen. cap.* 5. numerantur completos esse, patet ex vita Methusalæ, quæ, si secus esset, ultra diluvii initium proroganda esset; incidit enim ejusdem annus ultimus in annum mundi 1656. Adeoque iste mensis secundus in quo incipit, est anni mundi 1657 currentis & anni vitæ Noachi 601 currentis. Duravit autem diluvium per annum integrum, & quod excurrit, adeoque finitum est post annum Mundi completum 1657, sive anno mundi currente 1658. Deinde natus dicitur Arphaxad *biennio post diluvium* *De Nativitate Arphaxad.*

Gen.

Gen. cap. 11. *v.* 10. cujus nativitatem incidisse putat Helvicus (aliique fere omnes) anno mundi completo 1658, hoc est, biennio post diluvium inchoatum. Quod si *biennio post diluvium* intelligatur de biennio post diluvium finitum, tum nasci dicendus erit Arphaxad anno mundi 1659 completo, sive anno 1660 currente; nempe uno anno serius quam vult Helvicus. Fateor interim voces illas *biennium post diluvium*, quanquam prima fronte potius diluvii finem quam initium spectare videantur, non tamen necessario eo trahendas esse; præsertim cum phrasis eadem aliter interpretanda videtur *Gen. cap.* 9. *v.* 28. *vixit autem Noachus post diluvium annos* 350; nempe, *post diluvium inchoatum*; ut patet ex collatis *Gen. cap.* 7. *v.* 6. & *cap.* 9. *v.* 28, 29. Adeoque si de Arphaxad, *biennio post diluvium* nato, biennium illud rectius à diluvii initio inchoandum, quam ab ipsius fine, judicaverint Viri docti, non ego repugno; quanquam etiam non desint qui & alterum senserint.

De Nativitate Abrahami. Deinde, post natum Arphaxad, ad Tharam usque, transierunt (ut constat ex *Gen. cap.* 11.) anni 220. Tharam vero 70 annos natum reputat ille (cum Eusebio & Scaligero) cum genuerit Abrahamum; quia nempe dictum est, *Gen. cap.* 11. *v.* 26. *Vixit Tharah* 70 *annos & genuit Abrahamum, Nachorem, & Haranem.* At vero non inde certo concludimus *Abrahamum* (quamvis primo nominatum) aut natu maximum fuisse, aut eo anno natum, sed eorum saltem alterum tunc fuisse natum. Et quidem Haranem, licet ordine ultimum, aliunde colligimus fuisse natu primum, utpote cujus duæ filiæ Milcah & Iscah (quam eandem & Saram dictam esse colligitur ex comparatis *Gen. cap.* 11. *v.* 29, 30. & *cap.* 20. *v.* 12. quam etiam eodem sensu sororem vocat *Abrahamus* quo & *Lotem* fratrem, *Gen. c.* 13. *v.* 8. & *c.* 14. *v.* 12, 14. unde etiam videtur Harani atque Abrahamo licet eundem patrem Tharam, non tamen eandem fuisse matrem;) Nachori & Abrahamo nuptæ fuerint; & quidem Sarah sive Isca nonnisi 10 annis Abrahamo natu minor, ut patet *Gen. cap.* 17. *v.* 17. Quot autem annos natus Thara Abrahamum genuerit, sic colligimus. Thara ex Ure Chaldæorum cum Abrahamo profectus Harane (sive Charris) mortuus est, natus annos 205, *Gen. c.* 11. *v.* 31, 32. Unde mortuo Thara decessit Abrahamus tunc annos natus 75, *Gen c.* 12. *v.* 4. Si igitur Abrahami annus 75 coincidat cum Tharæ anno 205 (aut saltem hunc annum non præcesserit,) fuit Thara saltem annorum 130 quum Abrahamum genuerit; adeoque 60 annis integris serius quam vult Helvicus &c. Qui plura hac de re quærit, videre poterit, totam hanc quæstionem satis prolixe agitatam apud D. *Gualterum Rauleigh* Equitem Anglum, in ipsius *Historia mundi*, Anglice edita.

De Promissione facta. Tum demum supponit Helvicus (ut & *Eusebius, Scaliger, Calvisius &c.*) Abrahamo 75 annos nato promissionem factam esse, tot enim annos natus dicitur Abrahamus quum Charris excesserit *Gen. c.* 12. *v.* 4. At vero non ab *Abrahami* decessu ex Charane reputanda est Epocha promissionis datæ, sed altius omnino repetenda est dum adhuc esset Ure Chaldæorum, ut liquet ex Actor. *cap.* 7. *v.* 2, 3. priusquam Charanem omnino advenerat. Adeoque & promissionis recensio *Gen. cap.* 12. *v.* 1, 2, 3. facta, quanquam in ordine historiæ posterior sit, quam profectionis prius memoratæ *cap.* 11. *v.* 31. tamen ordine temporis promissio illa hanc profectionem præcessit; eaque ὑστερολογία justum rerum ordinem turbare non debet, cum sit tantum αἰτιολογία profectionis prius per prolepsin memoratæ. Abrahamum vero postquam Ure Chaldæorum excesserat Charane aliquamdiu commoratum fuisse satis innui videtur in ipsa historia, quæ recensetur *Gen. c.* 12. præsertim *v.* 5. quanto autem tempore istic permanserit, non ῥητῶς ibidem affirmatur, sed ex circumstantiis colligitur fuisse per spatium circiter quinque annorum; saltem à promissione data in Ure Chaldæorum, ad Abrahami ex Charris decessum annos elapsos esse quinque. Quod confirmatur ex collatis, *Gen. cap.* 15. *v.* 13. & *Act. cap.* 7. *v.* 6. cum *Exod. cap.* 12. 40, 41. & *Gal. cap.* 3. 17. Quæ loca, quamvis primo aspectu inter se pugnare videantur, cum in illis mentio facta annorum tantum 400, in his autem annorum 430: tamen, si penitius introspiciamus, optime conveniunt; & simul nodum illum quem præ manibus habemus, de Abrahami mora in Charris, feliciter solvunt. In illis *Gen. cap.* 15. & *Act. cap.* 7. dicitur Abrahami semen, sive posteros, peregrinos fore in aliena terra per annos 400: In his autem annorum præcise 430 mentio facta est; Nempe *Exod.* 12. *v.* 40, 41. dicitur, Israelitas sive filios Israel, exactis annis 430, eodem ipso die, Ægypto exiisse: & *Gal. c.* 3. *v.* 17. legem, 430 annis post promissionem datam, fuisse promulgatam. Sed notandum est, annos illos

illos 400, de Abrahami ſemine, ſive poſteris, (non de ipſo Abrahamo,) ſignanter dictos; adeoque ab Iſaaco nato, (nam de Iſmaele, ejuſque poſteris non agitur;) cum Abrahamus annum jam centeſimum compleverat, numerandos eſſe: At ubi annorum 430 mentio facta eſt, ad ipſam promiſſionem factam, ipſamque Abrahami profectionem primam reſpiciendum eſt, (uti ex locis ipſis patet;) quæ propterea annis 30 præceſſit nativitatem Iſaaci, adeoque Abrahami anno 70 completo facta eſt, 5 annis priuſquam Charane exceſſit. Adeoque & hic emendandus erit calculus Helvici, &c. abjectione annorum 5, vel ſaltem annorum 4, propter annos tantum 74 completos ab ipſo Helvico numeratos. Alia ſiqua ſint animadvertenda, intacta prætereo; cum non ſit mihi animus omnes Chronologiæ difficultates excutere. Sufficit ſpecimen aliquod exercitii gratia exhibuiſſe, paucas has emendationes innuendo; juxta quas ſi corrigatur calculus Helvici, annum præſentem, annum ab Orbe Condito 5661, exhibebit; vel ſaltem, (ſi omittatur adjectitius ille ad Arphaxadi natales annus) annum 5660.

	Anni
Ad Diluvium.	1656
Ad Arphaxad.	2 + 1
Ad Tharam.	220
Ad Abrahamum.	70 + 60
Ad Promiſſionem.	74 — 4
Ad Exitum.	430
Ad Templum.	480
Ad Chriſtum.	1015
Ad Æram vulgarem	2
Ad annum præſentem	1655
	5604 + 61 — 4
	5661

Priuſquam autem rem hanc dimittam, prout annum mundi addendo inveſtigavi, libet etiam tempus, quo Iſraelitæ Ægypto permanſerint, ſubducendo inquirere.

Præmittendum autem, verba illa Exod. cap. 12. ver. 40. ומושב בני ישראל אשר ישבו במצרים שלשים שנה וארבע מאות שנה *Et incolatus Iſraelitarum* (ſive, *filiorum Iſrael,*) *qui commorati ſunt in Ægypto, fuit quadringentorum & triginta annorum:* &c. caute interpretanda eſſe. Non enim id volunt, quod Iſraelis poſteri per totos 430 annos in Ægypto permanſerint: ſed quod Familia iſta, (ex Abrahamo nempe ejuſque poſteris conſtans, quam Deus ex aliis omnibus ſibi ſpeciali modo ſelegerat;) quæ nunc paſſim *Iſraelitarum*, ſive *filiorum Iſrael*, nomine celebratur, (quæque jam aliquandiu in Ægypto fuerant inquilini, & duram ſervierant ſervitutem;) ex quo primum patriam ſuam Dei juſſu reliquerunt, inquilini erant (in aliena terra) per annos 430. *Exactis autem annis illis* 430, *eodem ipſo die egreſſi ſunt,* &c. *De Iſraelitarum mora in Ægypto.*

Cum igitur conſtet, totam eorum peregrinationem, (ab Abrahami prima profectione ex Ure Chaldæorum, ad Iſraelitarum exitum ex Ægypto computandam,) fuiſſe annorum 430. Quærendum reſtat quot ex illis annis ante Jacobi deſcenſum in Ægyptum tranſierant; ut conſtet quantam moram ipſius familia in Ægypto fecerint.

Dicimus igitur, A promiſſione data ad natum Iſaacum elapſos eſſe annos 30, (uti ex jam dictis patet:) Iſaacus autem annos 40 natus duxit Rebeccam; ex qua poſt annos adhuc alios 20, ſuſcepit Jacobum, uti patet *Gen. cap.* 25. *v.* 20, 26. Jacobus autem natus annos 130 cum familia ſua in Ægyptum deſcendit, ut patet *Gen. cap.* 47. *v.* 9. Quibus omnibus ex annis 430 ſubductis reſidui ſunt anni 210 quibus in Ægypto commorati ſunt. Neque tamen toto hoc tempore in ſervitutem redacti ſunt; ſed quamdiu vel Joſephus ipſe vixit (nempe per annos adhuc 71) aut etiam ipſius ἔγγονοι qui ipſum noverant, (quibus fortaſſe anni adhuc circiter 30 concedendi,) proſpere vixerunt; uti patet *Exod. cap.* 1. *v.* 6, 7, 8. adeoque ſuperſunt anni circiter 110 intra quos duram illam ſervitutem perpeſſi ſunt: num autem per totum hoc annorum 110 ſpacium male habiti ſint non certum eſt, (quia de præciſo initio iſtius malæ tractationis non conſtat) at per eorum longe majorem partem duraſſe perpeſſiones liquido conſtat. Nam Moſes annos 80 compleverat, quando coram Pharaone comparuit eorum dimiſſionem poſtulans, ut dictum eſt *Exod. cap.* 7. *ver.* 7. qui tamen ipſe natus eſt poſt inceptam illam ſervitutem, & quidem flagrante perſecutione, ut liquet *Exod.* 2. Non igitur ſtatim ab ipſo initio ſervitutis, nam multa prius tentata ſunt priuſquam eo deventum eſt. Nempe primo dura ſervitute conati ſunt Ægyptii Iſraelitarum animos domare, experturi num hac ratione eorum forte numerus minui poſſet, ut liquet

430
30
40
20
130
220
210

De duræ ſervitutis initio.

liquet *Exod.* 1. *v.* 10. &c. Cum vero hoc neutiquam ex animo successit, quin adhuc etiam auctis oneribus eo magis multiplicati sint: Obstetricibus (clam, ut videtur) in mandatis datum est ut filios eorum in ipso partu strangularent, filiabus interim salvis: adeoque secreta fraude parentibus interim ipsis vix advertentibus, & nihil forsan mali suspicantibus, filios etiam ab ipso partu eriperent. Hoc autem ipsis obstetricibus clanculum in mandatis datum, & quidem clam perpetrandum esse, ideo prætertim suspicor, (licet illud totidem verbis non affirmetur;) quoniam si aperte vellent, & palam professi, infanticidium illud aggredi, potuisset aliis quibusvis Rex illud in mandatis dedisse non minus quam obstetricibus; & forte melius, cum mulieri tale quid aggredienti facile posset vel viribus resisti; quid quod & ea quam postea in ipsarum defensionem obtendunt excusatio, nullius esset momenti; sive enim priusquam sive postquam ipsæ venerint nasceretur infans, quid hoc impedire posset, ne, si illud palam profiteri vellent, ipsum strangularent; aut, si vi fuissent impeditæ ne illud facerent, hanc ipsam vim potius causatæ essent cur regis mandato minus fuissent obsequentes. Videtur igitur infanticidium illud, quod palam profiteri puderet, obstetricum curæ commissum fuisse, ut quæ clanculum nec observatæ nec quidem suspectæ illud secreto possent in ipso partu assequi. Illæ vero inhumanum illud facinus detestatæ, cum non ausæ essent regis mandato palam contraire, aut disertis verbis renunciare, tamen rem dissimulandam putarunt, quod & fecerunt, infantes etiam masculos in vivis conservantes. Causatæ interim (fortassis) se satis fideliter quantum in ipsis erat negotium illud curasse, & quidem infantium non paucos reapse mortuos esse (vix enim credibile est, etiam Hebræorum fœminas nunquam fecisse abortum, aut infantes nunquam in partu periisse;) quod suæ deberi curæ credi posset; verum quod illud non semper fieret ipsis non dandum esse vitio; cum Hebrææ mulieres vegetæ essent, & quidem ipsis Ægyptiis multo vegetiores (quod & ipsum non est improbabile, sed certum potius putandum; cum partim dura earum servitus etiam huc facere posset, nemo enim nescit laboratrices mulieres mollibus & delicatulis vegetiores esse, & quidem in ipso partu minus non raro vel difficultatis vel periculi subire; partim etiam divinæ benedictioni insigni id deberetur,) adeo quidem ut obstetricis ope vix indigerent, & non raro antequam ipsa advocari posset peperissent, unde deesset opportunitas etiam maxime volentibus illud quod à rege in mandatis acceperant exequendi. Atque hanc posteriorem excusationis etiam partem eas obtendisse, satis constat, cum illud disertis verbis affirmetur; & quidem vix dubitandum est quin & reliquam obtenderint. Quam quidem excusationem, quamvis non sola causa fuerit (uti liquet ex elogio quod ipsis largitur Deus) non tamen plane fictam arbitror, aut eas hac in re, quantum ego video, mendacii reas; quod tamen non paucos video, quasi in confesso esset, non plane quidem approbantes, sed saltem temperare satagentes. Cum vero neque hoc secundum consilium successum quem voluit obtinuerit, quin Hebræorum numerus adhuc creverit, tum tandem re non diutius dissimulata, quod prius clandestina fraude & perfidia rex aggressus erat, palam atque ex professo denunciavit, publico edicto toti populo imperans ut Hebræorum infantes masculi mergerentur flumine, solis femellis salvis. Quantum autem temporis insumpserit, duobus illis prioribus experimentis, (quæ certe aliquot annorum moram postulabant priusquam constare posset quem essent exitum habitura,) non constat. At certe tertium illud facinus jam erat susceptum, & (uti videtur) aliquamdiu obtinuerat (licet quamdiu non constet) priusquam natus erat Moses. Unde certum est non primo statim initio durioris istius servitutis, sed post annos potius aliquammultos natus dicendus est. Et propterea probabili satis conjectura judicare possumus per centum plus minus annos rigidam illam durasse servitutem; saltem vix pauciores quam 90 aut plures quam 110.

Numerus descendentium in Ægyptum. Quamvis autem, uti dictum est, durioris istius servitutis duratio non ita accurate determinari possit; attamen (ut superius ostensum est,) tota Israelitarum in Ægypto mora, ex quo Jacobus cum ipsius familia in Ægyptum descendit, satis constat; nempe annorum 210. In hoc autem 210 annorum spacio (quod mirum est dictu) 70 personæ tam stupendo augmento in tam immensum numerum creverunt, ut omnem fere expectationem superaverit. *Septuaginta personæ*, inquam. Tantus enim erat totus Israelitarum numerus cum Jacobus in Ægyptum descendit, computatis interim tam ipso Jacobo, quam Josepho ejusque liberis qui jam in Ægypto prius erant: prout viritim nominantur *Gen. cap.* 46. Nempe ex

liberis Leæ recenſentur nominatim 34, quorum cum duo (Er & Onan) jam antea mortui fuerint, (ut dictum eſt v. 12.) reliqui 32 cum ipſo Jacobo, ſunt 33, quem numerum habemus v. 15. Tum ex liberis Zilphæ recenſentur nominatim 16. (ut v. 19.) Ex liberis Rachelis, inter quos Joſephus ejuſque duo filii, numerantur 14 (ut v. 22.) Ex liberis denique Bilhæ, 7, (ut v. 25.) Adeoque totus omnium numerus, puta Jacobus ejuſque poſteri ex eo nati quotquot tunc in vivis erant, ſunt ($33+16+14+7=$) 70, ut dictum eſt v. 27. atque iterum Exod. c. 1. v. 5. Deut. cap. 10. v. 22. Non ignoro quidem LXX Interpretes in locis illis habere ἑβδομήκοντα πέντε, ſed manifeſto, ut videtur, errore. Quem tamen lapſum ſequutus eſt Stephanus in ipſius oratione ad populum, uti illam habemus Act. 7. v. 15. Cum enim res eſſet levioris momenti, ipſique tunc temporis incubuerit ſumma brevitate uti, ſatius ipſi videbatur in re hiſtorica, (obiter tantum attingenda,) juxta receptam apud eos verſionem (quæ paſſim obtinuit) eandem repetere, quam ad importunam emendationem (quæ ad rem præſentem vix quicquam conferret) in illis temporis anguſtiis citra neceſſitatem divertere. Lucæ vero, qui hanc ipſius orationem, ſive potius ipſius ſummam recenſet, neutiquam incubuit narrationem illam (ſiquid inibi erratum eſſet) emendare, ſed ſatis ſuas egiſſe partes cenſendus eſt ſi orationem illam prout habebatur, fideliter recenſuerit. Neque enim expectandum eſt, ut, quotieſcunque in N. T. textus aliquis ex V. T. citatur, (juxta eam quæ tunc obtinuit verſionem,) ſinguli verſionis apices, re quæ præ manibus erat omiſſa, critice diſcutiantur. Satis eſt, ſi quem citant textus, quatenus ad præſens negotium applicatur, cum authentico textu Hebraico quoad ſenſum conveniat; quanquam fortaſſis in nonnullis apicibus non tam accurate ſuas partes egiſſent qui citantur interpretes. Qua de re videantur, ſi libet commentatores in locum.

In quam immenſam autem 70 illæ perſonæ multitudinem eruperint intra 210 annorum ſpacium, ſatis liquet ex ea quam habemus populi Iſraelitici recenſione, quando Ægypto exierunt. Nam Numeror. cap. 1. v. 46. Iſraelitis tributim computatis, reperti ſunt 603550 viri adulti, ad bellandum idonei, qui annum ætatis viceſimum compleverant; præter decrepitos ſenes, mulieres item, & infantes ſive etiam adoleſcentes, (quippe qui annum viceſimum nondum compleverant,) tota interim tribu Levi non numerata. Si vero numerus juniorum, qui nondum 20 annos nati, ſimul cum ſenibus ad bellandum ineptis, bellatorum numerum æquaſſe putemus (quod non iniquum eſt poſtulatum, cum ejuſmodi ni fallor, proportio in aliis etiam gentibus ſoleat occurrere; vix enim ſolet adultorum numerus, numerum ſimul puerorum, adoleſcentium, & ſenum, ſuperare,) atque horum numerus reliquis adjiciatur; reperietur numerus 1207100. His inſuper ſi adjiciatur totius numeri pars decima, pro tribu Levi, (quæ in priori catalogo recenſita non eſt,) exurgit omnium maſculorum numerus 1327810 circiter. Denique ſi fœminas judicemus maribus non fuiſſe pauciores, (quæ forte & multo plures eſſe poſſent, partim quod viri ſinguli non raro plures habuerint uxores, partim etiam quod eorum miranda multiplicatio & incrementum id ipſum ſuadeat, præſertim cum certum ſit ex infantibus maſculis non paucos flumine fuiſſe ſubmerſos,) earumque numerus numero marium adjungatur, emerget numerus omnium 2655620. Nempe *bis millena millia, ſexcenta quinquaginta & quinque millia, cum ſexcentis & viginti*; ſeu potius juxta ſtilum veterum Romanorum, (qui centena millia ſolebant numerare,) *vicies & ſexies centena millia, quinquaginta inſuper & quinque millia, cum ſexcentis adhuc & viginti.* Cumque hi omnes fuerint ſimul ſuperſtites; ſi illis ulterius annumerentur omnes qui interea temporis demortui fuerint, numerus in immenſum eſſet ampliandus. Hos autem omnes ex 70 (uti dictum eſt) perſonis intra 210 (aut ad ſummum 220) annorum ſpacium deſcendiſſe, tam incredibile prope, & ſtupendum plane eſt incrementum, ut nulla iſtius vel probabilis cauſa aſſignari poſſit, præter inſignem illam benedictionem Abrahamo divinitus promiſſam, Gen. cap. 15. v. 5. *Intuere verſus cælum, & numera ſtellas ejus, ſi poſſis eas numerare*; *nempe ſic*, inquit, *erit ſemen tuum.* Quod & mirifice adimpletum eſt: Quicquid enim ſit de arenulis ad maris littora poſitis, certe numerum ſtellarum, quas Abrahamus in firmamento ſimul intueri poſſet, longe ſuperat ipſius poſterorum multitudo. Cum enim numerus ſtellarum, quas

603550
603550
1207100
120710
1327810
1327810
2655620

L 2 facile

facile notare potest oculus intuentis, ultra unum mille non multum excedat, (numerari siquidem solent 1022, in tabulis Astronomicis,) quarum etiam non nisi pars media, uno scilicet hemisphærio contentæ, simul intuendæ patent; unius Jacobi posteri (Ismaelis interim & Esavi posteris, utut numerosis, ne quidem nominatus, nec qui à Ketura descenderunt,) qui, uno atque eodem hoc tempore vixerunt (omissis interim iis qui vel antea fuerant demortui, vel etiam per omnia deinceps secula nasciturі) numerum illum plus quam bis millies superavit.

Non dissimulandum interim est, hanc supputationem supra memoratam, non immediate post exitum ex Ægypto factam fuisse, sed post integrum annum, ineunte scilicet anno secundo, (die primo mensis secundi) uti constat *Num.* cap. 1. v. 1. Verum hoc non adeo magni momenti esse judico, cum eorum numerum eo anno non admodum auctum fuisse censendum erit; partim propter insignem illam cladem quam interim passi sunt, (Exod. cap. 32. v. 28, & 35.) ob vitulum aureum; partim etiam quod eundem circiter numerum habemus Exod. c. 12. v. 37. licet non accurate supputatum; dicitur enim ibidem Ægypto eadem nocte exiisse, ex Israelitis, viros adultos circiter 600000; numerantur autem (ut diximus) anno sequenti præcise, 603550.

Atque hæc quidem obiter dixisse sufficiat, quo ansam arriperem Additionis atque Subductionis praxin in exercitium revocandi.

CAP. XVIII.

De multiplicatione, Quid sit. Quid, Multiplicandus, Multiplicator, Factus. Quid Multiplum, Pars, Partes, Aliquota pars, Aliquanta pars. Multiplicatio sensu stricto, & sensu laxo sumpta. Non semper numerum auget. Multiplicatio est multiplex additio. Multiplicandus aut Multiplicator, utervis ex Factoribus dici potest. Multiplicationis praxis: in numeris simplicibus; in numeris compositis; in partibus decimalibus. De Indice numeri Facti.

POst absolutam in prioribus Numerorum Additionem & Subductionem, eorundem *Multiplicationem* tradendam aggredior.

Multiplicatio quid? Est autem Multiplicare, *Numerum invenire, qui numerum datum toties contineat quoties requiritur.* Sive *Numerum invenire qui datam rationem (sive proportionem) habeat ad numerum datum.* Puta, si quæratur numerus qui sit numeri cujusvis dati *duplus, triplus, quadruplus, decuplus, vigecuplus, centuplus, millecuplus,* aut quavis alia ratione seu proportione datum numerum superet: vel (quod perinde est) qui numerum datum *bis, ter, quater, decies, vicies, centies, millies,* aut quotiescunque contineat: Multiplicatio docet quæsitum numerum invenire. Vel etiam (si ulterius libeat quam ad solos numeros multiplicationis vocem extendere) *multiplicare* est, *datam quantitatem in data ratione augere,* sive *Quantitatem designare, quæ datam toties contineat, quoties requiritur:* aut etiam universalius *Datæ alicui quantitati aliam in data ratione exhibere.*

Multiplicandus. Numerus datus ille, cui in data proportione quæritur alius, (puta cujus duplus, triplus, quadruplus, &c. quæritur,) dicitur *Multiplicandus,* πολλαπλασιαζόμενος.

Multiplicator. Numerus ille qui datam proportionem exprimit, (puta qui dicit quotuplus futurus sit quæsitus numeri dati, sive quoties, aut quot vicibus illum continere debeat,) πολλαπλασιάζων dicitur, hoc est *Multiplicans* sive *Multiplicator,*

Factus. Numerus denique quæsitus dicitur γινόμενος, numerus *Factus,* sive multiplicatione *Productus.*

Multiplicationis signum. Multiplicationis autem *Signum,* sive *Nota,* sive *Character,* hoc esto ×. Nempe ut

I 10+2

10 + 2 Additionem innuit, sive numerum denarium binario auctum; & 10 − 2 Ablationem, sive Subductionem, nempe numerum denarium binario mulctatum, sive diminutum; sic 10 x 2 significat numerum denarium binario multiplicatum sive bis positum. Si itaque quæratur numerus qui numerum denarium *bis* in se contineat, hoc est, qui sit denarii *duplus*, seu qui in dupla proportione denarium superet: numerus Denarius dicetur *Multiplicandus*; numerus *Binarius* (qui datam proportionem exprimit) dicetur *Multiplicator*; numerus denique quæsitus (puta vicenarius) qui numerum denarium bis continet, *Factus* dicetur, seu *Productus*. Hoc est, si sit 10 x 2 = 20, erit 10 Multiplicandus, 2 Multiplicator, & 20 Factus, seu Productus.

His appellationibus intellectis, non erit difficile aliorum quas afferunt Multiplicationis definitiones intelligere; quales sunt hæ quæ sequuntur.

Multiplicare, est *numerum invenire, qui toties contineat Multiplicandum, quoties Multiplicans continet Unitatem.*

Item, Multiplicare, est *numerum invenire, qui eadem sit ratione ad Multiplicandum qua Multiplicans ad Unitatem.*

Has autem definitiones, aliasque ejusmodi, licet non ut falsas rejiciam, cum revera rem prout est exprimant; vix tamen usque adeo accommodas autumo. Cum enim Definitio sit definiti explicatio, debet ea per notiora procedere. Quid autem sit numerus *Multiplicandus*, *Multiplicans*, & *Multiplicatione factus*, non minus est ignotum quam quid sit ipsum *Multiplicare*. Qua etiam de causa non admittendam censui (in definitione nostra posteriori) ipsam *rationis* sive *proportionis* vocem, nisi & ipsam simul explicuissem; utpote quam nondum in præcedentibus ex professo exposueram.

Fateor interim ipsum Euclidem multiplicationem sic explicuisse, 15 *d 7*. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις. *Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot sunt in ipso unitates, toties componitur* (numerus) *qui multiplicatur, atque* (ita) *factus aliquis emergit.* Verum hic (si rite attendatur Euclidis scopus) non tam *Multiplicationem* definit, aut docet quid sit Multiplicare; sed exponit quid sibi velit apud illum phrasis illa cum dicitur *numerus numerum multiplicare*, (cujus quidem voces singulæ supponuntur prius fuisse cognitæ;) atque hoc quidem postquam exposuisset quid sit *ratio*, & speciatim quid sit πολλαπλάσιον seu *multiplum*, adeoque & quid significet πολλαπλασιάζειν notum est.

At meum est, non tam aliorum definitiones reprehendere, quam res ipsas explicare: adeoque mihi sufficit si vel ex eorum vel ex meis verbis res eadem quam & ego & illi volunt percipiatur: neque enim mihi lubitum est de verbis litem movere, ubi de re convenit, licet interim & verborum delectum adhibendum esse non diffiteor.

Multiplicatio Facta, seu sumpta, quomodo intelligenda.

Notandum autem est, ubi in explicatione definitionis nostræ dictum est, quod numerus multiplicatione quæsitus, sive etiam inventus, (*Factus* nempe) numerum datum (quem *Multiplicandum* diximus;) *bis, ter, &c. contineat*, vel in data ratione *superet*: non hoc temere dictum est: Quoniam in primaria vocis notione illud tantum intelligitur. Atque hoc quidem ipsa voce satis innuitur, nam *Multiplicare* sive πολλαπλασιάζειν, est numerum dati *multiplum* seu πολλαπλάσιον invenire. Quid autem sit πολλαπλάσιον seu *multiplum*, ut & è contra, quid sit μέρος sive *pars*, (seu, ut vulgo dicimus, *aliquota pars*,) definit Euclides 1 & 2 *d d 5*. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος. *Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor metitur majorem: Multiplex autem est major minoris, quando minor metitur majorem*: uti Commandinus & Clavius exponunt. Vel (aliquanto forsan explicatius, neque minus κατὰ τὸ ῥητόν,) *Magnitudo minor Magnitudinis majoris Pars est* (aliquota) *quando majorem metitur*, (mensurat, seu potius permetitur, permensurat, nempe quando aliquoties sumpta majori fiet accurate æqualis:) *Major autem minoris Multiplex est quando a minori* (sic) *mensuratur.* (Quod autem de Magnitudinibus hic dicitur, id ipsum totidem verbis de Numeris habetur, 3 & 5 *d d 7*. Et quidem de quantitate qualibet perinde intelligi debet.) Nempe *Partis* vox non de qualibet totius particula seu membro dicitur, (uti cum ax. 9. dicitur *Totum esse majus sua parte*,) sed definita sive determinata significatione restringitur ad ejusmodi partem, quæ nunc dici solet *aliquota pars* (puta *pars tertia*,

Quid sit Pars & Multiplum.

tia, pars quarta, pars centesima, &c.) quæ nempe aliquoties sumpta toti fiet æqualis: si autem non poterit ita aliquoties repetita toti fieri æqualis, (sed semper vel major, vel minor,) non ipsius *μέρος*, seu *pars* (aliquota) dicetur, (hoc sensu,) sed potius *partes μέρη*, uti dicitur 4 *d* 7, μέρη δ᾽ ὅταν μὴ καταμετρῇ: (Quam tamen definitionem de magnitudinibus non interposuit *lib.* 5. quoniam hoc de illis universaliter enunciari non posset; fieri enim potest ut magnitudo minor majoris neque *pars* sit, neque *partes*, quoties nempe toti est incommensurabilis: quod cum de numeris, proprie dictis, nimirum integris, de quibus solis hic agit Euclides, contingere non possit, ut qui sint omnes commensurabiles, cum saltem unitas eas omnes metiatur, necesse est ut numerus minor sit majoris vel *pars*, vel *partes*, hoc est partis aliquotæ aliquoties repetitæ aggregatum.) Sic verbi gratia, 2 est numeri 6 aliquota *pars* (puta triens, sive pars tertia,) quia $2 + 2 + 2 = 6$, hoc est numerus 2 ter repetitus æquatur numero 6; sed numerus idem 2 numeri 5 *pars* (aliquota) non est, quia si bis (aut rarius) ponatur est minor quam 5, si autem ter (aut sæpius) major erit quam 5; nam $2 + 2 = 4$ minor quam 5; $2 + 2 + 2 = 6$ major quam 5; adeoque numerus 2 numeri 5 non *pars* (aliquota) dicetur, sed *partes, puta* $\frac{2}{5}$ seu *duæ quintæ*; vel etiam, uti jam loqui solemus, *aliquanta pars* dici potest, sed non *aliquota pars*. Et similiter de *Multiplici* sive *multiplo* judicandum erit. Cum enim pars & multiplum sint relata, ex uno cognito cognoscetur reliquum: est enim Pars, multipli pars; & Multiplum, est partis multiplum; quod propterea partem aliquoties præcise continere debet, puta bis, ter, quater, aut sæpius.

Multiplicatio laxiori sensu accepta. Quoties igitur multiplicatio per unitatem, aut numeros fractos, aut etiam surdos, puta per 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$. &c. occurrit: *Multiplicationis* vox latiori sensu intelligenda erit, & καταχρηστικῶς neque alio sensu illud dici potest quam quo 1, aut etiam $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$, &c. numeri aut multitudines dici possunt.

Qui enim quantitatem quamlibet per unum multiplicat, hoc est, semel (præcise) ponit; non proprie multiplicare dicendus est, seu multoties ponere, sed eandem simpliciter quantitatem retinet; neque quod hac multiplicatione producitur est proprie expositæ quantitatis Multiplum, sed potius ea ipsa; (nisi & Æquale, eo sensu Multiplum esse dicatur, quo Unum supra contendimus esse Numerum; quod si dicatur, ego non repugno.) Atque hinc est quod dici solet, *Unitatem neque multiplicare neque dividere*; quia nempe sive multiplicemus sive dividamus per unum, quantitas ea multiplicatione aut divisione non mutatur, sed eadem quæ prius manet: non minus quam in Additione aut Subductione, ciphra seu 0, nihil mutat. Nam ut $2 + 0 = 2$, & $2 - 0 = 2$, sic $2 \times 1 = 2$, & $\frac{2}{1} = 2$. Estque potius multiplicationis aut divisionis negatio, quam multiplicatio aut divisio.

Qui autem, per, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. multiplicare supponitur, non tam revera multiplicare dicendus est quam dividere (ut infra melius patebit, ubi Divisionis naturam exposuerimus,) nam sicut qui multiplicat per 2, 3, 4, &c. datæ quantitatis quærit duplum, triplum, quadruplum, &c. sive expositam quantitatem bis, ter, quater, &c. ponit: sic qui per, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. multiplicat, non nisi datæ semissem, trientem, quadrantem, &c. quærit; neque ipsam quantitatem, nedum ipsius multiplum, sed ipsius saltem semissem, trientem, quadrantem, &c. exhibere putandus est, hoc est revera dividere per 2, 3, 4, &c. Adeoque ut qui quantitatem negativam supponitur Addere, (puta qui numero 4 adjungit -2,) reapse Tollit; (minuit enim, non auget; est enim $4 - 2$, minus quam 4; & tantundem est atque tollere 2:) ita qui per $\frac{1}{2}$ (aut aliam quamlibet aliquotam partem) supponitur Multiplicare, reapse Dividit; tantundem enim est atque per 2 dividere. Ut enim Additioni Subductio, sic Multiplicationi Divisio est contraria.

Tandem; qui per $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, &c. multiplicare supponitur, partim multiplicat, partim dividit; nempe multiplicat per 2, 3, &c. (numeratores,) & per 5, 4, &c. (denominatores) dividit: Sicut qui addere supponitur $4 - 2$, partim addit, partim aufert; nempe addit 4 & aufert 2. Ut & qui multiplicare supponitur per $\sqrt{3}$, duo facit, nempe quadratum multiplicat per 3, & radicem quadraticam educit. Verum hæc omnia rectius percipientur ubi de numeris Fractis, & Surdis dictum fuerit: at interim hæc expedit subinnuisse, ut intelligatur quid per *Multiplicationem* strictissimo sensu sumptam, & quid sensu laxiori intelligi debeat. Ut autem Multiplicationis nomen, sic & Definitio nostra utrique ut opus est accommodari potest.

Non semper auget numerum. Et propterea Multiplicatione, laxiore sensu sumpta, non semper augetur numerus, aut

aut multiplum producitur, (quanquam illud vi vocis perhiberi videatur, impofito nempe nomine, à famofiori fignificato.) Cum enim in multiplicatione fupponitur numerus Multiplicandus toties poni, quoties innuit Multiplicator; five (quod tantundem valet) numerus multiplicatione Factus toties contineat Multiplicandum quoties Multiplicator continet Unitatem: Prout Multiplicator major fit aut minor quam Unitas, aut etiam ipfi æqualis; ita numerus Productus five Factus major eft aut minor quam multiplicandus, aut ipfi æqualis. Nam qui quantitatem præcife femel ponit (hoc eft, multiplicat per 1,) eandem neque auget neque minuit; qui autem plufquam femel ponit (ubi nempe multiplicator eft major quam 1,) ille auget; qui autem minus quam femel ponit (five qui multiplicat per quid minus quam 1) ille fic multiplicando minuit.

Patet autem, ex jam traditis, Multiplicationem (faltem ftricte fumptam) vix aliud effe quam multiplicem additionem, five additionis compendium. Idem enim eft triplicare aut per 3 multiplicare, atque quantitatem ter ponere; adeoque Factum iftius multiplicationis tantundem erit, atque hujus additionis Aggregatum; & fimiliter in aliis. Puta $2\times2=2+2$. $2\times3=2+2+2$. $2\times4=2+2+2+2$. &c. ut patet. Ubi etiam obiter notetur, numerum binarium five fui adjectione, five in feipfum multiplicatione, tantundem augeri; nempe $2+2=2\times2$: quod in folo numero binario contingit. *Multiplicatio eft multiplex Additio.*

Porro, in numerorum multiplicatione, uti ex dictis item patet, duos numeros notos effe, five datos, conftat, nempe *multiplicandum* & *multiplicantem* (five multiplicatorem;) tertium quæfitum effe, quem *Factum* five *Productum* diximus. Sciendum tamen eft, perinde omnino effe five hunc five illum ex datis multiplicandum aut multiplicantem dicamus; idem enim omnino prodibit Factus, utervis datorum dicatur multiplicandus. Tantundem enim eft five velimus Quatuor Ter ponenda, five Tria Quater, utrobique enim exurgunt Duodecim. Hoc eft $4\times3=3\times4$. Et fimiliter in aliis. Quod quidem totidem punctis, eo quem hic videas ordine pofitis, fatis demonftrari poterit: five enim feriebus tranfverfis numeremus ter quatuor, five feriebus erectis quater tria, idem erit utrovis modo punctorum omnium numerus: ut patet. Atque hoc ipfum Euclides oftendit 16 e 7. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάζοντες ἀλλήλους, ποιῶσί τινάς, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν, ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται. *Si duo numeri fe mutuo multiplicantes aliquos effecerint, numeri fic facti, erunt inter fe æquales.* Hoc eft, fi numerus A multiplicet B, ut fiat $B\times A$; & vice verfa numerus B multiplicet A, ut fiat $A\times B$; numeri fic facti, erunt invicem æquales, nempe $B\times A=A\times B$. Cujus ulteriorem demonftrationem, fi noftra non fufficiat, videat cui libet apud Euclidem loco citato. *Multiplicandus aut Multiplicator, utervis ex Factoribus dici poteft.*

. . . .
. . . .
. . . .

Quum igitur Arithmeticæ practicæ magiftri non raro docent ex numeris datis, Majorem dicendum effe Multiplicandum, & præponendum effe: Minorem vero Multiplicantem, & fubfcribendum effe: non tamen illud putandum eft aut femper aut neceffario faciendum effe, fed prout fibi commodius putaverit calculator: quamvis enim nonnunquam expedire videatur, nulla tamen neceffitate imperatur.

Denique monendum infuper eft, duos illos numeros datos, quos *Multiplicandum* & *Multiplicantem* diximus, non raro apud Arithmeticos uno nomine *Factores* dici, ficut qui multiplicatione producitur dicitur *Factus*. Item Factores illi *invicem duci* five *Multiplicari* dicuntur. Idem enim omnino eft *numerum in numerum ducere*, atque *numerum per numerum multiplicare*. Item numerus multiplicatione productus five factus, non raro dicitur *Rectangulum*, vel *Planum*, vel etiam *numerus planus*; Metaphora nempe ex Geometricis ducta, ubi ex ductu longitudinis in latitudinem habetur planum five area Rectanguli vel Parallelogrammi.

Atque hactenus multiplicationis naturam fatis videar expofuiffe, feu quid fit Multiplicatio: fupereft ut ipfius etiam Praxin oftendam, five quomodo fit multiplicandum.

Monendum autem & hic eft de Multiplicatione, quod de Additione & Subductione fupra monuimus; eam nempe vel in numeris fimplicibus (unius tantum figuræ) vel in numeris Compofitis (figurarum plurium) exerceri. *Multiplicationis praxis.*

Quod ad numerorum fimplicium multiplicationem attinet, ea vel ex memoria petenda eft, vel ex Additionis principiis repetenda, ufque dum ufus & exercitatio eam familiarem reddiderint. Ita fiquis nefciat quot fint ter tria, vel feptics octo; poterit ille tres numeros ternarios, vel feptem octonarios fimul, addere; & pariter *Simplicium numerorum multiplicatio.*

in

in aliis. Sunt enim, ut jam ostendimus $3+3+3=3\times3$, & $8+8+8+8+8+8+8=8\times7$. Et sic in cæteris.

Ne autem ejusmodi additiones sæpius sint à tironibus repetendæ, Tabellam quandam solent huic rei accommodatam compingere, unde singulas simplicium numerorum multiplicationes velut ex promptuario petere licet, qualem hic subjecimus. Cujus quidem Tabellæ demonstratio quoad singulos istius numeros, ex Additionis fundamentis petenda est, ut modo ostendimus.

Tabella Multiplicationis & Divisionis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

In hac Tabella, numerorum invicem multiplicandorum altero in summitate seriei erectæ, altero in principio seriei transversæ, reperto; locus ille in area tabellæ qui utrique seriei communis est numerum exhibet ex eorum multiplicatione factum. Puta si quæratur, quis numerus factus erit ex ductu 8 in 7; (seu multiplicatione 8 per 7:) in fronte tabellæ quæratur 8, & ad latus 7, (vel contra, numerus hic in fronte, ille ad latus,) & in communi serierum concursu habebitur $56=8\times7$. & similiter in aliis quibuscunque.

Cum autem, uti superius ostendimus, perinde sit utrumvis ex Factoribus *Multiplicandum* dicamus, idem enim utrovis modo prodibit; puta $8\times7=7\times8=56$. adeoque perinde etiam sit utrumvis in fronte quæramus: poterit tabella ipsa in formam duplo fere minorem redigi, uti hic videtur. Ubi duorum numerorum invicem ducendorum major semper in fronte, minor ad latus quærendus sit; & in utriusque seriei concursu habebitur, ut prius, numerus factus.

Tabella Contractior.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	4	6	8	10	12	14	16	18
		3	9	12	15	18	21	24	27
			4	16	20	24	28	32	36
				5	25	30	35	40	45
					6	36	42	48	54
						7	49	56	63
							8	64	72
								9	81

Numerorum compositorum multiplicatio.

Ubi autem de simplicium numerorum multiplicatione constat, non erit difficilis ad compositorum multiplicationem progressus, ut quæ ex simplicium multiplicatione sæpius iterata tota dependet; uti inductione patebit.

Ubi multiplicator est numerus simplex.

Sit igitur numerus 3421 duplandus, sive per numerum 2 multiplicandus. Numero igitur multiplicando 3421, subscribatur Multiplicans 2, & (ducta lineola) cuilibet figuræ numeri multiplicandi, subscribatur ipsius duplum (quia nempe multiplicator est 2) eodem semper gradu cum illo cujus est duplum. Ita nempe duplum unius unitatis sunt unitates duæ; duplum duarum decadum sunt decades quatuor; duplum quatuor centuriarum sunt centuriæ octo; duplum trium millium sunt millia sex: qui quidem numeri in unam summam collecti, nempe 6842, sunt totius numeri multiplicandi 3421 duplum.

$$\begin{array}{r} 3421 \\ 2 \\ \hline 6842 \end{array}$$

duplum. Cum enim omnes partes simul æquentur toti; erunt etiam omnes partes bis sumptæ, æquales toti bis sumpto; hoc est, duplum partium omnium æquabitur duplo totius. Quæ quidem demonstratio (mutatis mutandis) de triplo, quadruplo, quintuplo, aut quovis alio multiplo pariter valebit.

Si vero, in hujusmodi processu numerus cujusvis loci seu gradus novenarium excedat, adeoque non sit unica figura exprimendus; ultima istius figura suo loco ponenda est, superiori interim in locum proxime ascendentem protrusa, cum figura istius loci deinceps numeranda. Exempli gratia, si numerus idem 3421 per 8 multiplicandus sit, singulæ figuræ numeri multiplicandi octuplandæ sunt; earumque octupla suis quæque locis subscribenda, & in unam deinde summam (habito locorum respectu) colligenda. Nempe Unitas 1 octuplata dat unitates 8, decades 2 octuplatæ dant decades 16, centuriæ 4 octuplatæ sunt centuriæ 32, & 3 millia octuplata sunt 24 millia. Quibus in unam summam Additione collectis, emergit totius numeri multiplicandi octuplum $27368 = 3421 \times 8$. ut patet.

$$\begin{array}{r} 3421 \\ 8 \\ \hline 8 \\ 16 \\ 32 \\ 24 \\ \hline 27368 \end{array}$$

Possunt autem illa particularia singulorum locorum multipla, vel totidem distinctis lineis collocari, ut modo; vel potius in duas omnino lineas cogi ad hanc formam. Dummodo enim illud utrobique curetur, ut quælibet figura debito suo loco seu gradu collocetur, perinde est sive illud duabus sive pluribus lineis fiat; eadem siquidem additionis summa emerget.

$$\begin{array}{r} 3421 \\ 8 \\ \hline 3108 \\ 2426 \\ \hline 27368 \end{array}$$

Verum & adhuc, ad commodius operationis compendium, poterit isthæc additionis summa etiam currente multiplicationis opere colligi, (quamvis, perspicuitatis gratia, distincte potius utramque operationem prima vice exponendam putaverim:) Nempe quoties figura quævis in superiorem locum sit transferenda, ea memoria retineatur, usque dum nota quicum addenda sit innotescat, ut utriusque loco earum aggregatum scribatur. Ita, in superiori exemplo, postquam in unitatum loco ponatur 8 (nempe figuræ 1 octuplum;) sequuntur 16 decades (nempe duarum octuplum) quarum 6 decadum loco repositis, pro reliquis decem reservo 1 centuriam: deinde 4 centuriarum octuplum sunt centuriæ 32, quibus adjungenda est 1 (nuper reservata) ut fiant centuriæ 33; quarum 3 centuriarum sede positis, pro reliquis centuriis 30 reservo 3 millia: His autem 3 millibus, si adjungantur millia 24, (nempe octuplum 3 millium in numero multiplicando repertorum,) emergunt millia 27, suis locis ponenda, ut in exemplo apposito.

Adeoque satis declaratum est quomodo in multiplicandis etiam numeris compositis procedendum est, si modo multiplicator sit numerus simplex, una figura scribendus.

$$\begin{array}{r} 3421 \\ 8 \\ \hline 27368 \end{array}$$

Si vero non modo numerus multiplicandus, sed & Multiplicator sit numerus compositus, duabus aut pluribus figuris scribendus; eadem quæ prius operatio toties repetenda erit, quot sunt Multiplicantis figuræ; numerique sic inventi (debita locorum ratione habita) in unam summam additione colligendi. Exempli gratia, si numerus idem 3421 per 28 multiplicandus sit: postquam subscripserim totius octuplum (modo superius tradito inventum) 27368; subscribendum est insuper ejusdem duplum, seu potius vigecuplum. Nempe ipsius duplum (ut supra docetur inventum) 6842, si ciphram adjectam habeat (puta 68420) sive, quod tantundem valet, uno gradu ascendendo promoveatur, (ita nempe ut ipsius figura ultima ponatur loco decadum, penultima loco centuriarum &c.) habebitur istius dupli decuplum, (quælibet nempe figura uno gradu promota decuplum istius valoris habet quem prius obtinebat,) hoc est, expositi numeri vigecuplum. Si itaque octuplum & vigecuplum simul addantur, habebitur viginti-octuplum: ut patet. Nempe $95788 = 3421 \times 28$. Similiter in aliis faciendum erit quotcunque demum in multiplicatore figuræ reperiantur. *Ubi multiplicator est numerus compositus.*

$$\begin{array}{r} 3421 \\ 28 \\ \hline 27368 \\ 6842 \\ \hline 95788 \end{array}$$

Ita siquis quærat, *Quot horas contineat annus integer?* Cum notum sit diem quemlibet horas continere 24, erit numerus horarum viginti-quadruplus numeri dierum. Adeoque cum Annus integer contineat dies 365, atque insuper 6 horas, si

```
  365
   24
 ----
 1460
 730
 ----
 8760
    6
 ----
 8766
```

si dierum numerus 365 multiplicetur per 24, habebitur numerus horarum quæ in diebus integris unius anni continentur, $8760 = 365 \times 24$. quibus si addantur reliquæ 6 horæ, erit omnium numerus $365 \times 24 + 6 = 8760 + 6 = 8766$. tot igitur horæ in uno anno integro continentur.

Si quis insuper quærat *Quot horæ fuerint elapsæ a nato Christo ad finem annorum inde subsequentium Mille sexcentorum quinquaginta & sex.* Si ducatur vel 8766 numerus horarum unius anni in 1656 numerum annorum; vel (quod eodem recidit) numerus annorum 1656, in 8766 numerum horarum cujusque anni, habebitur numerus horarum omnium $14516496 = 8766 \times 1656 = 1656 \times 8766$. ut in operationibus appositis patet.

```
     8766          1656
     1656          8766
    -----         -----
    52596          9936
   43830          9936
  52596         11592
  8766          13248
 --------      --------
 14516496      14516496
```

De Ciphris Multiplicatori intermistis.

Siquando numeris invicem multiplicandis, saltem multiplicatori, Ciphræ immisceantur; quanquam ipsæ ex se nihil significent, inserviunt tamen locis supplendis, adeoque aliarum figurarum valorem augendo, & propterea neutiquam sunt negligendæ. Exempli gratia, si numerus 2361 ducendus sit in 20104. Subscripto primum multiplicandi quadruplo 9444; cum deinde occurrat in multiplicatore ciphra, si illa in totum multiplicandum ducatur prodibit adhuc nihil (nam nullies 1 est nihil, & sic in reliquis,) adeoque nullies 2361 erit 0000. Deinde $2361 \times 1 = 2361$. Item $2361 \times 0 = 0000$. Denique $2361 \times 2 = 4722$. His igitur omnibus, eo quo hic locantur modo dispositis, in unam summam collectis, habebitur numerus $47465544 = 2361 \times 20104$. Ubi notandum est duas ciphrarum series, utut ex se nihil significent, tamen cum multiplorum particularium quodlibet uno semper ad sinistram loco ultra quam præcedens protruditur, ciphrarum series illud faciunt ut reliquæ suis singulæ sedibus collocentur.

```
     2361
    20104
    -----
     9444
    0000
   2361
  0000
 4722
 --------
 47465544
```

Cum autem illud solum præstent interpositæ ciphrarum series, ut reliquæ debitas suas sedes occupent, neque ulterius ex se quicquam valoris habeant; possunt quidem illæ non incommode penitus omitti, modo interim caveatur ut reliquæ series significativæ easdem sedes occupent acsi ipsæ (non-significantes) adessent: ut in eodem exemplo hic repetito (omissis tantum seriebus ciphrarum, reliquisque suas sedes retinentibus) videre est. Idem enim & hic & illic numerus Factus prodit.

```
     2361
    20104
    -----
     9444
   2361
 4722
 --------
 47465544
```

Ut autem suus cuique locus rite assignetur, curandum est ut hæc observetur regula; nempe, ut *cujuslibet particularis multipli ultima figura eodem gradu collocetur cum suo respective multiplicatore,* (reliquis proximos continue locos occupantibus.) Ut in eodem exemplo, multiplicandi (2361) quadruplum 9444, ultimam ipsius figuram habet in Unitatum loco positam, quia ipsius multiplicator 4, totidem unitates indicat. Item ejusdem multiplicandi simplum 2361, ultimam figuram in centuriarum loco positam habet, quoniam ipsius multiplicator 1, unam centuriam indicat. Denique ejusdem duplum 4722, ultimam suam figuram habet in decies-millium loco, quoniam ipsius multiplicator 2, duas millium decades significat. Et similiter in aliis quibusvis multiplicationibus faciendum erit. Atque hoc quidem si curetur, ciphrarum series quodlibet (siquando multiplicatori ciphræ immisceantur) penitus omitti possunt.

De ciphris finalibus.

```
       40851 00
       23004 0
   ------------
      163404
   122553
   81702
   ------------
   939736404000
```

Denique, *si e Factoribus* (sive numeris invicem multiplicandis) *vel alter vel uterque in ciphris* (sive una sive pluribus) *terminetur; sepositis illis ciphris finalibus, peragatur tota multiplicatio acsi non adessent; & numero tandem ita producto tot subjungantur ciphræ quot erant illæ omnes sepositæ.* Ita si numerus 4085100 ducendus sit

sit in numerum 230040; sepositis tribus ciphris finalibus (multiplicandi nempe duabus & multiplicatoris una) habebitur 939736404 = 40851 × 23004; cui numero Facto si restituantur tres illæ ciphræ sepositæ, prodibit 939736404000 = 4085100 × 230040. Et pariter in aliis.

Ratio operationis satis est evidens. Si enim, verbi gratia, 300 per 20 multiplicare oporteat; &, sepositis ciphris, ducantur 3 in 2 habebitur 6 = 3 × 2. Et, restitutis ciphris, 6000 = 300 × 20. Nam, si bis 3, sint 6; erunt bis 30 decies 6, hoc est, 60; & bis 300 decies 60, hoc est, 600; & denique si bis 300 sint 600, erunt vicies 300 (sive bis decies 300) decies 600, hoc est, 6000. Quælibet enim adjecta ciphra numerum cui adjicitur decuplum facit. Et pariter in aliis ejusmodi multiplicationibus quibuscunque.

300
20
6000

Atque hinc liquet, tantundem prorsus valere sive 2 ducantur in 3000, sive 20 in 300, sive 200 in 30, sive denique 2000 in 3; quippe in singulis emergit numerus 6000. ut patet. Et pariter in similibus.

3000	300	30	3
2	20	200	2000
6000	6000	6000	6000

Atque hactenus quidem de numeris integris invicem multiplicandis dixisse sufficiat.

Partium decimalium multiplicatio.

Siquando numeris integris annecti contigerit partes aliquot decimales, sive (quod idem est) loci aliquot infra unitatis locum descendentes; eadem omnino erit operationis methodus atque in numeris integris: cum hoc solo discrimine, quod postquam numerus productus eodem plane modo invenitur acsi essent numeri omnino integri, tandem tot loci in numero facto linea separatrice sunt abscindendi, ut partes decimales, quot erant in utroque simul Factore sic abscissi.

Exempli gratia, Si numerus 365|25 ducendus esset in 3|5. Postquam (quasi essent plane integri) invenerim productum 1278375 = 36525 × 35; tandem, quia in factoribus video tres locos partium decimalium (duos nempe in multiplicando, & unum in multiplicatore,) tres ultimas producti figuras linea separatrice abscindo ut partes decimales: adeoque habeo 1278|375 = 365|25 × 3|5. Atque idem in aliis partium decimalium multiplicationibus observandum erit.

365|25
3|5
182,625
1095,75
1278|375

Ratio hujus operationis hæc est. Quoniam, ut numerus quilibet, adjectione ciphræ in fine, decuplo augetur; promota nempe qualibet figura in locum proxime superiorem, ut quæ prius unitates significabat, jam significet decades, & sic de reliquis: ita figuræ finalis abscissione linea separatrice, numerus decuplo minuitur; detrusa nempe figura qualibet in locum proxime inferiorem, ut quæ prius decades significabat, jam significet unitates, & sic de reliquis. Puta, si numero 35 adjiciatur ciphra, fiet 350 decuplo major; sin ab eodem 35 abscindatur linea separatrice figura ultima, erit 3|5 decuplo minor. Et similiter judicandum erit ubi duæ, tres, aut plures adjiciuntur ciphræ, aut totidem abscindantur loci decimales: nempe numerus centuplo, millecuplo, &c. adjectione augetur, vel ablatione minuitur. Adeoque in exemplo proposito cum 365|25 sit centuplo minor quam 36525, erit etiam 365|25 × 35 centuplo minor quam 36525 × 35; cumque etiam 3|5 sit decuplo minor quam 35, erit 365|25 × 3|5 decuplo minor quam 365|25 × 35, adeoque decies-centuplo, hoc est millecuplo, minor quam 36525 × 35. Cum igitur sit 1278375 = 36525 × 35, abscindendæ sunt linea separatrice tres ultimæ figuræ ut numerus fiat millecuplo minor, nempe 1278|375 = 365|25 × 3|5; adeoque figura 8 quæ prius significabat tot millia, jam significat non nisi totidem Unitates, & sic de reliquis.

Atque hæc etiam sufficiant de partibus decimalibus multiplicandis.

De Indice numeri facti.

Tandem & hanc libet (ex Oughtredo) regulam generalem proponere, quæ in suos assignando numeris multiplicatione factis locos, sive in numeris integris, sive etiam partibus decimalibus, dirigat. Cum suos cuique loco indices assignavimus, ita nempe ut Unitatis locus indicem habeat 0 (ut qui neque ascendit neque descendit) loci autem supra illum ascendentes primus, secundus, tertius, &c. indices habeant affirmativos, 1, 2, 3, &c. & contra loci descendentes primus, secundus, tertius, &c. indices habeant negativos −1, −2, −3, &c. *Index cujusque particularis Facti in multiplicatione, æquatur indicibus utriusque Factoris simul sumptis.*

ſumptis. Exempli gratia, ſi multiplicandus ſit numerus 32|1 in 5|34. Multiplico primum 4 in 1 (quorum indices -2 & -1) & factus eſt 4 ($=1\times4$) ponendus loco tertio deſcendente, cujus index eſt -3, æqualis duobus -2 & -1. Tum 4×2 (quorum indices -2 & 0) factus eſt 8, loco ſecundo deſcendente ponendus, cujus index $-2=-2+0$. Tum 4×3 (quorum indices -2 & $+1$) factus eſt 12 ponendus (nempe quoad ultimam ipſius figuram 2) loco deſcendente primo cujus index $-1=-2+1$. Deinde 3×1 (quorum indices -1 & -1) factus 3, indicem habet $-2=-1-1$, ideoque ponendus loco deſcendente ſecundo. Sic 3×2, factus 6, indicem habet $-1=-1+0$, ponendus loco deſcendente primo. Et 3×3, factus 9, cujus index $0=-1+1$, ponendus loco Unitatum. Denique 5×1, factus 5, cujus index $-1=0-1$, ponendus loco deſcendente primo. Et 5×2, factus 10, indicem habet $0=0+0$, ideoque ad locum unitatum referendus, nempe ipſius ultima figura 0 illic collocanda, & reliqua 1 in locum proximum transferenda. Et tandem 5×3, factus eſt 15 (cui ſi addatur 1, figura huc transmiſſa, fit 16,) cujus index $1=0+1$, adeoque ad locum primum aſcendentem ſpectat. Quibus abſolutis, ſi additione colligantur in unam ſummam, habetur totius multiplicationis factus, 171|414, cujus index -3 (quoad ultimam ipſius figuram æſtimandus) æqualis duobus ſimul indicibus -2 & -1, nempe utriuſque factoris 32|1 & 5|34. Et ſimiliter in aliis hujuſmodi multiplicationibus quibuſcunque.

$$
\begin{array}{r}
1.0.\bar{1}.\bar{2}.\\
32|1\\
5|34\\
\hline
1,284\\
9,63\\
160,5\\
\hline
171,414
\end{array}
$$

Atque hactenus de multiplicatione tam numerorum integrorum, quam partium decimalium. Multiplicatio Algebrica & Specioſa, ut & quantitatum ex variis denominationibus conſtantium, mox tradetur poſt Diviſionis traditionem; quam ſequente Capite aggredior.

CAP. XIX.

De Diviſione. Quid ſit Diviſio, Dividendus, Diviſor, Quotiens. Diviſio ſenſu ſtricto, & ſenſu lato, ſumpta. Non ſemper numerum diviſum minuit. Diviſio eſt multiplex ſubductio. Diviſionis praxis: per diviſorem ſimplicem; per diviſorem compoſitum. Diviſionis praxis in partibus decimalibus. De Indice Quotientis, ſive numeri orti.

EXpoſita in præcedentibus Multiplicationis tam natura quam praxi; ad *Diviſionem* explicandam accedendum eſt.

Eſt autem Dividere, *Numerum quemvis datum in quotlibet æquales partes dirimere*; ſive *Numerum invenire, qui doceat quoties numerus quivis datus in dato quovis continetur.* Vel (ſi libet non ad ſolos numeros, ſed ad alias etiam Diviſiones vocem extendere) *Dividere*, eſt *datam quamlibet quantitatem in data ratione diminuere*; vel potius *Duarum ad invicem quantitatum homogenearum rationem invenire.* Nam ut Subductione quantitatum homogenearum *Differentiam*, ita Diviſione earundem *Rationem* inveſtigamus.

Sed de Numerorum Diviſione præſertim agendum eſt, quo vocis illa ſignificatio primario refertur, ad alias autem non niſi analogice applicatur.

Dividendus, Diviſor, Quotiens. In numerorum vero diviſione, duos habemus numeros datos, nempe *Dividendum* qui in partes aliquot æquales dirimendus eſt; & *Diviſorem* ſive Dividentem, qui numerum partium denotat in quas ſupponitur ille dirimendus: quibus datis, tertius quæritur, quem *Ortum* dicunt, ſive *Quotientem*, oſtendit enim quoties diviſor in dividendo continetur, ſive (quod eodem recidit) quoties ex illo auferri poteſt.

Sic si numerus 12 in 3 partes sit dirimendus, numerus *Ortus* sive *Quotiens* (puta 4) ostendit unius trientis valorem: vel etiam ostendit quoties *Divisor* 3, in *Dividendo* 12, continetur. Ita si numerus 20 dividendus sit per (divisorem) 4, sive partiendus sit in 4 partes, vel si 4 dividat 20, vel denique si quæratur quoties in 20 contineatur 4, aut quoties inde auferri possit: Numerus ortus sive quotiens, puta 5, ostendit quanta sit istius numeri pars quarta seu quadrans, hoc est, si supponatur numerus 20 in 4 æquales partes dividi, quanta sit earum quælibet, nempe 5; vel quoties in 20 contineantur 4, aut quoties inde auferri possit, nempe quinquies.

Divisionis autem operationem (sive perfectam, sive perficiendam) solemus sic indicare $\frac{12}{3}$; quod notat numerum 12 per 3 divisum vel dividendum; vel etiam 3) 12 (4; quod notat numerum 12 per 3 divisum, ejusque quotientem esse 4. Et similiter in aliis.

Quod vero tantundem sit inquirere Quoties in 12 contineantur 3? atque Quantus sit numeri 12 pars tertia sive triens? (& pariter in similibus;) hac facili demonstratione ostendatur. Statuantur in totidem Columnis, sive seriebus erectis, tot punctorum triades sive terniones, quot opus est ad complendum numerum 12, (puta 4;) quo facto, numerus columnarum simul ostendit; quoties in 12 contineantur 3 (toties nempe quot sunt ipsæ columnæ,) atque etiam quot puncta sunt in qualibet serie transversa, hoc est, in quolibet totius numeri triente; (tot enim sunt transversæ series quot sunt cujuslibet erectæ puncta, adeoque quælibet series transversa est totius numeri triens; tot autem sunt cujuslibet transversæ puncta, quot est serierum erectarum numerus, cum harum quælibet transversarum cuilibet unum subministret punctum: ut patet.

```
. . . .
. . . .
. . . .
```

Est autem Divisio eodem fere modo Multiplicationi opposita quo Additioni Subductio. Ut enim quæ Additio componit Subductio resolvit; ita quod Multiplicatione componitur, id resolvitur Divisione. Sic, ubi ex additis 3 & 4 fiunt 7; si ex 7 alterutrum auferas, alterum prodibit. Ita, ubi ex multiplicatis 3 in 4 fiunt 12; si 12 per alterutrum dividas alterum prodibit. Utrobique quod componendo ex suis componentibus conflatur, id resolvendo in sua componentia resolvitur. Nempe, quæ in Subductione sunt Ablatum & Residuum, ea in Additione sunt Integri Membra: & quæ in Divisione sunt Divisor & Quotiens, ea in Multiplicatione sunt Factores.

$3+4=7$	$3\times4=12$
$7-3=4$	3) 12 (4 $\frac{12}{3}=4$
$7-4=3$	4) 12 (3 $\frac{12}{4}=3$

Græce dici solet Μερισμὸς *divisio*, & μερίζειν *dividere*. Apud Euclidem interim passim μέτρον, μετρεῖν, μετρούμενος, idem sunt atque *Divisor*, *dividere*, *divisus* sive *dividendus*, & numerus καθ᾽ ὃν μετρεῖται *quotiens* est. Sic 9 d 7 *Numerus pariter par* definitur ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατ᾽ ἄρτιον ἀριθμόν. *Qui a numero pari per parem mensuratur*. sive *quem numerus par per parem metitur*; nempe, qui ita per Divisorem parem dividi potest, ut & quotientem parem habeat.

Notandum autem est, apud Euclidem, non numerum quemvis alium quemlibet καταμετρεῖν *dividere* vel *metiri* posse; sicut nec à quovis numero quilibet auferri potest, (puta major ex minore:) Cum enim ille de veris tantum numeris & proprie dictis (integros intellige) verba facit, qui ex Unitatibus componuntur; adeoque Unitatem semper habet pro indivisibili, quodque est, in numeris, minimum quod sic: non raro occurrit numerus qui in imperatas partes dividi non potest. Adeoque numerus ille solus alterum Dividere sive Metiri apud Euclidem dicendus erit, qui est ipsius *aliquota pars*, seu qui aliquoties positus Dividendum æquet; quoties autem ponendus est ut æquet numerum dividendum, id divisione quæritur. Verbi gratia, si dividatur numerus 12 per 3, sive quæratur quoties ponendus numerus 3 ut æquet numerum 12, Quotiens erit 4; quia nempe numerus 3 quater positus æquabit numerum 12. At si proponatur numerus 10 per 3 dividendus; id quidem fieri non potest, cum hic illius non sit aliquota pars, nec aliquoties repetitus ipsum æquabit; nam ter positus ($3\times3=9$) minor est, & quater positus ($3\times4=12$) major est quam 10; atque inter 3 & 4 non alius intercedit numerus, qui sit Quotiens quæsitus. Atque idem continget quotiescunque propositus Divisor non est numeri Dividendi aliquota pars. *Divisio stricte sumpta.*

Atque hoc quidem interest inter Arithmeticas operationes Syntheticas & Analyticas.

ticæ. Nempe, in Syntheticis, veris numeris datis verus semper numerus emerget; at non ita in Analyticis. Puta, in Additione $5+4=9$, $3+4=7$, &c. Et similiter continget quicunque sint numeri dati addendi: At in subductione, quanquam illud aliquando contingit, ut $5-4=1$, &c; non tamen id semper, nam $3-4$ æquabitur nulli vero numero possibili, cum majus ex minori auferri non possit; solemus tamen ejusmodi supposititiam subductionem utcunque innuere ad hanc formam $3-4$, vel etiam -1. Sic, in multiplicatione, propositis quibuscunque veris numeris invicem multiplicandis, verus semper emergit numerus, ut $4\times2=8$, $3\times6=18$, $5\times3=15$, &c. At in Divisione, licet illud aliquando contingit, ut $2)\,4\,(2$; non raro tamen secus accidit, ut si 3 per 6, aut 5 per 3, dividendi essent, ubi quotientes nullis veris numeris (integris) assignari possunt; solemus tamen & hic suppositios illos quotos utcunque innuere ad hanc formam $\frac{3}{6}$ vel $\frac{1}{2}$, & $\frac{5}{3}$ vel $1\frac{2}{3}$, &c. Et similiter in Potestatibus componendis & resolvendis, contingit; dati enim cujusque veri numeri Quadratum, Cubus, &c. veris numeris exhibebitur; at non item dati cujusque numeri Radix quadratica, cubica, &c. veris numeris exhiberi poterit: ut suo loco patebit.

Divisio laxiori sensu accepta. Verum ut multiplicatio, laxiori sensu sumpta, non ad illam solummodo restringitur ubi Factus est numeri propositi Multiplus; ita nec Divisio ita restringi solet ut Divisor necessario sit Dividendi aliquota pars; quanquam istiusmodi & Multiplicationem & Divisionem voces illæ primaria & maxime propria sua significatione innuant. Et quo sensu numeri fracti pro numeris habentur, eodem & pro Factoribus in Multiplicatione, & in Divisione pro Divisore vel Quotiente haberi possunt. Itaque & hoc sensu, quilibet numerus (sive integer sive etiam fractus) numerum quemlibet dividere poterit.

Adeoque, ut rem paucis comprehendam, cum sensu strictiori sumantur, *Multiplicatio quærit numeri dati multiplum*; *divisio aliquotam partem*: cum sensu vero laxiori usurpantur, dicenda potius est *Multiplicatio, quantitati aliam in data ratione exhibere*; sive *quantitatem, quæ ad datam habeat rationem, investigare*: *Divisio* vero, *datis duabus quantitatibus homogeneis earum ad invicem rationem investigare*. Neque interim aliquem terreat, quod hoc laxiori sensu eadem operatio utrovis ad libitum nomine appellari possit, nam illud omnino concedendum est, cum perinde sit omnino Multiplicare per 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, &c. atque dividere per $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{3}{2}$, &c. ut suo deinceps loco clarius patebit. Quod eo minus mirandum est, cum & idem in aliis oppositis operationibus contingat; utpote in Additione & Subductione, cum perinde omnino est sive addamus 2, -3, 4, &c. sive subducamus -2, 3, -4, &c. ut ex supra dictis patet.

Divisio non semper numerum minuit. Interim monendum est, quod, ut multiplicatione (laxiori sensu sumpta) non semper augetur quantitas multiplicata, sed aliquando vel eadem manet vel etiam minuitur: sic divisione (laxiori item sensu sumpta) non semper minuitur quantitas divisa, sed vel eadem manet vel etiam augetur. Nempe, quoties Divisor est unitate major, Quotiens erit numero dividendo minor; quoties autem Divisor est unitate minor, Quotiens erit numero dividendo major, si denique Divisor sit unitas, Quotiens numero dividendo æqualis erit. Ratio manifesta est. Cum enim numerus Dividendus ostendat quoties ipse contineat unitatem; Quotiens autem, quoties idem dividendus contineat divisorem: Si divisor sit unitate major, puta 2; manifestum est quotientem numero dividendo minorem esse, cum eodem numero dividendo pauciores continentur binarii (δυάδες) quam unitates: sin divisor sit unitate minor, puta $\frac{1}{2}$; manifestum item est quotientem numero dividendo futurum majorem, cum numerus dividendus plures contineat semisses quam integras unitates: si denique Divisor sit unitas, quotiens erit numero dividendo æqualis; toties enim dividendus divisorem continebit quoties quotiens continet unitatem.

Atque huc spectat quod apud Arithmeticos passim occurrit, Dividendum toties continere Divisorem, quoties Ortus seu Quotiens continet Unitatem; vel, eandem esse rationem Dividendi ad Divisorem, quæ est Quotientis ad Unitatem: Item, Dividendum toties continere Quotientem, quoties Divisor continet Unitatem; vel, eandem esse rationem Dividendi ad Quotientem, quæ est Divisoris ad Unitatem. Nam & hoc sciendum est, (quod & ex prædictis satis patet,) ut in Multiplicatione perinde est utrumvis è Factoribus Multiplicandum sive Multiplicatorem dicamus; adeo ut si hic dicatur Multiplicandus, ille erit Multiplicator, & contra; Sic in Divisione de Divisore & Quotiente contingit, qui alternatim sedes mutabunt,

mutabunt, ut si duorum componentium hic sit Divisor erit ille Quotiens, & contra, si ille Divisor hic Quotiens erit. Puta, cum in multiplicatione 3 & 4 invicem ducti constituant 12; si 3 dicatur multiplicandus, erit 4 multiplicator; & contra, si 4 sit multiplicandus, multiplicator erit 3. Si autem idem numerus 12, per 3 dividatur, quotiens erit 4; sin divisor sit 4, quotiens erit 3. Et quidem in omni divisione, si qui prius fuerat Quotiens fiat Divisor, qui fuerat Divisor fiet Quotiens.

$3 \times 4 = 12$ 3) 12 (4 $\frac{12}{3} = 4$

$4 \times 3 = 12$ 4) 12 (3 $\frac{12}{4} = 3$

Denique, ut de Multiplicatione monuimus, nempe eam vix aliud esse quam multiplicem Additionem, sive additionis compendium; ita & de Divisione monendum, eam nempe vix aliud esse (saltem cum Divisor est numerus integer) quam multiplicem subductionem, sive subductionis compendium. Qui quærit enim, quoties numerus 12 contineat 3; idem facit ac qui quærit, quoties ex 12 subduci possint 3: Qui igitur continua subductione invenerit, quoties possint 3 ex 12 auferri, ita ut nihil restet; invenit etiam eadem opera quoties 3 in 12 præcise contineantur; quod ipsum est 12 per 3 dividere, ut ex prædictis liquet. Sic si ex 12 punctis appositis 3 quoties fieri possit subducantur, patebit post quatuor subductiones nihil superesse. Quot autem subducta sunt, tot prius aderant; adeoque, cum nihil supersit, manifestum est 3 in 12 præcise quater contineri, (quod ipsum divisione quæritur,) vel etiam trientem numeri 12 esse 4, (ut supra ostensum est;) nempe si 12 per 3 dividatur, quotiens erit 4.

Divisio est multiplex subductio.

. . . | . . . | . . . | . . .

Quique hæc satis intelligit, is genuina divisionis fundamenta persentiscit. Cum enim infiniti prope laboris esset in divisionibus majoribus tot subductiones sigillatim peragere, quot numero dividendo grandiori penitus exhauriendo sufficiant; excogitarunt Arithmeticæ practicæ magistri, laboris magni magnum compendium; nempe *pro multiplici Divisoris subductione, subducunt divisoris Multiplum*; quod eodem plane recidit. Sic in exemplo præcedente, ubi numerus 12 per 3 dividendus proponitur; perinde est sive ternionem (*vicibus*) quater subducamus, sive ternionis quadruplum, (quia $3+3+3+3=3 \times 4$) & utrumvis fiat, nihil restabit. Quod & ipsum fieret si ternarii duplum bis subducamus; aut etiam triplum ternarii semel & semel ipsum ternarium: nempe $3 \times 3 + 3 \times 1 = 3 \times 2 + 3 \times 2 = 3 \times 4 = 3+3+3+3 = 12$.

. . . | . . . | . . . | . . .

Quo major autem fuerit numerus dividendus, & quotiens, eo magis patebit hujusce compendii utilitas. Si 20 sint per 2 dividenda; pro decem subductionibus numeri 2, substituenda est istius decupli subductio; nam $2 \times 10 = 20$. Si 360 dividenda per 6; pro sexaginta subductionibus numeri 6, semel subducendum erit ipsius sexagecuplum. Et similiter in aliis.

2) 20 (10

6) 360 (60

Atque hactenus quidem Divisionis naturam satis explicasse videar; ejusque cum Multiplicatione comparationem. Sequitur ipsius praxis exponenda.

Divisionis operatio.

Si Divisor simplex sit, una figura scriptus, & dividendus item sit divisoris decuplo minor; ex ipsa memoria petenda est solutio; vel, si opus est, ex ea quam

Per divisorem simplicem.

Tabella Multiplicationis & Divisionis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

supra exhibui Multiplicationis & Divisionis Tabella. Nempe, reperto in Tabellæ summitate

summitate Divisore, in eadem columna quæratur numerus dividendus, vel saltem numerus qui illic occurrit Dividendo proxime minor, & habebitur ad latus numerus in quotiente ponendus. v. g. Si quæratur quoties in 24 contineantur 3. Repertis in summo 3, & infra 24, habebitur ad latus numerus 8, in quotiente ponendus: quippe in 24 octies præcise continentur 3: nam $3 \times 8 = 24$. Unde patet numerum 3, numeri 24 esse partem aliquotam, nempe octavam. Si 26 per 3 dividenda sint; in columna tertia (ubi in fronte 3,) & serie transversa octava, repeiuntur, non 26, sed 24, binario minor, & ad latus 8; quod indicium est Dividendum 26, continere divisorem 3 octies, atque insuper 2: vel ex Dividendo 26, octies auferri posse divisorem 3, atque insuper restare 2. Hoc residuum, cum subjecto sibi divisore, & interjecta lineola, invento quotienti 8 postpono, ut habeatur perfectus quotiens $8\frac{2}{3}$. Quod etiam indicat numerum 3 numeri 26 aliquotam partem non esse, cum hic illum contineat plusquam octies, & minus quam novies.

3) 24 (8
3) 26 ($8\frac{2}{3}$

Si vero numerus Dividendus non sit decuplo Divisoris minor, gradatim procedendum est, & varia multipla successive subducenda; posito primum Divisore sub dividendi gradu supremo, seu ad sinistram primo, (saltem si divisor non sit major figura Dividendi eo gradu posita,) & deinceps successive in reliquos locos promoto, usque dum ad locum infimum tandem perveniatur; in singulis interim locis sublato quoties fieri potest Divisore, seu, quod idem est, sublato divisoris multiplo quam fieri potest amplo, è numeris dividendi suprapositis, notato ubique si quod sit residuo; numero item subductionum in quolibet gradu factarum, sive multipli subducti denominatore, seorsim in Quotiente notato; quorum omnium, respectu ad suos gradus habito, collectio (residuo, siquid operatione perfecta superfit lineolæ ut dictum est suprapostito, cui subscribatur ipse Divisor,) integrum quotientem constituet: sicut & multiplorum omnium subductorum aggregatum, si illa videbitur colligere, (adjecto interim siquid in fine supersit residuo) restituet integrum Dividendum; si enim singula subducta restituantur, redibit numerus primo positus: Ipseque numerus Dividendus toties Divisorem continet quoties indicat Quotiens, seu quoties ipse quotiens continet unitatem, ut & Quotientem toties quoties Divisor continet unitatem.

Exempli gratia. Si numerus 486 sit bisecandus, sive in duas æquales partes dividendus; vel, si quæratur quoties in numero 486 contineatur numerus 2; hoc est, si dividere oporteat 486 per 2: Ponatur Divisor 2, sub figura divisoris ad sinistram prima, nempe sub 4; & quæratur (vel ex memoria, vel ex tabella suprapostita) quoties in 4 contineantur 2; quod quidem bis fit, nec sæpius, (nam ipsius triplum, $2 \times 3 = 6$, majus est numero 4, adeoque auferri non potest) notato igitur in Quotiente numero invento 2, divisoris duplum (quotuplum nempe indicat Quotiens) nempe $4 = 2 \times 2$, è numero 4 suprapostito auferatur, & cum nihil restet utraque figura (2 divisoris, & 4 dividendi) deleantur, (ut quæ munus suum jam præstiterint;) estque hæc operatio prima. Deinde, promoto Divisore in locum proximum, sub Dividendi figura 8, eadem operatio (mutatis mutandis) repetenda est: nempe quæratur, quoties 2 in 8? & responsum 4 ponatur in quotiente (post numerum 2 istic prius positum) & Divisoris quadruplum, $8 = 2 \times 4$, ex 8 (dividendi numero suprapostito) auferatur, & cum nihil restiterit, deletis figuris 2 & 8, perfecta est operatio secunda. Tandem, promoto in locum proximum divisore, ad eandem formam præstanda est operatio tertia; quæratur nempe, quoties 2 in 6? responsum 3 in quotiente scribatur, & Divisoris triplum $6 = 2 \times 3$, ex numero 6 suprapostito ablatum, nihil relinquit; adeoque, deletis 2 & 6, cum nullæ supersint aliæ Dividendi figuræ, peracta est tota divisio; & repertus est Quotiens integer 243; qui propterea semissis est numeri 486; quippe toties in 486 reperitur numerus 2. Si autem plures adhuc superfuissent in numero Dividendo loci, plures etiam eadem plane methodo repetendæ essent operationes, quot opus esset.

2) 486 (2
2

2) 486 (24
22

2) 486 (243
222

Si quis interim objiciat, figuram 4, centuriarum loco positam, atque 8 positam in loco decadum, non tot simpliciter unitates, sed illam 4 centurias, hanc 8 decades significare, adeoque 2 in 400 non bis sed ducenties, & in 80 non quater sed quadragies contineri. Verum quidem illud est: sed & pariter verum est figuras 2

& 4 in quotiente positas, quanquam cum primum scriberentur, videri possent tot simpliciter unitates notare, tamen ubi tota perficitur divisio patet illam ducenta, & hanc octoginta, significare; adeoque non dicimus numerum 2 (divisorem) in numero 486 (dividendo) contineri bis & quater & ter, sed ducenties quadragies & ter. Et quidem in operatione prima, si locorum ratio habeatur, non simpliciter bis duo ex 4, sed ducenties duo ex 400, sive bis duas centurias ex quatuor centuriis; & in operatione secunda, non tam quater duo ex 8, quam quadragies duo ex 80, sive quater duas decades ex 8 decadibus, ablata esse dicendum erit. Et similiter in aliis quibuscunque divisionibus.

Eodem modo, si 138240 per 3 dividamus; Divisorem 3 (non quidem sub 1, quia ipso divisore minor est, adeoque 3 in 1 nullies continentur, & propterea in quotiente vel nihil ponendum esset, vel o ciphra, quæ hic loci nulli esset usui, cum nondum scriptam habeamus figuram significativam, sed) sub figura proxima 3 subscribo; &, cum 3 in 13 (figuris suprapositis) contineantur quater, scripto in quotiente 4, divisoris quadruplum $12 = 3 \times 4$, ex 13 sublatum, relinquit 1, quod residuum deletis 13 superscribo: Tum deletum etiam eo loci divisorem, in proximum transfero; &, cum 3 in 18 contineantur sexies, in quotiente post 4 subjungo 6, & divisoris sextuplum $18 = 3 \times 6$, ex suprascriptis 18 sublatum, nihil relinquit: Et, deletis tam 3 quam 18, divisorem in loco sequente sub 2 colloco: verum cum 3 in 2 ne semel contineantur, scripta in quotiente ciphra o, divisorem (istic deletum) in locum adhuc proximum promoveo, sub figura 4: Tum, quia 3 in 24 (figuris suprascriptis) continentur octies, posito in quotiente 8, divisoris octuplum $24 = 3 \times 8$, ex 24 sublatum, nihil relinquit: Deletis igitur 3 & 24, & posito sub o divisore 3, invenio 3 in o nullies contineri, adeoque & hic in quotiente ciphram colloco; & peracta est tota divisio. Adeoque reperio numeri 138240 trientem esse 46080, sive toties in eo numero dividendo contineri divisorem 3.

```
     1o
3) 138240 (46080
    33333
```

Residui notatio. Siquid autem, Divisore quoties fieri potest sublato, aliquid Dividendi adhuc restiterit, (quod ipso divisore semper minus esse necesse est, secus enim posset divisor saltem semel adhuc auferri,) post Quotientis numeros integros jam inventos adjungenda erit fractio, cujus numerator erit Residuum illud, denominator vero ipse Divisor, (vel saltem alia fractio, quæ tantundem valebit, minoribus numeris scribenda,) ut habeatur Quotiens accuratus.

Ita si numerus 2603561 dividatur per 9. Cum 9 in 26 bis contineantur, scripto in quotiente numero 2, & sublatis $18 = 9 \times 2$ ex 26, supersunt 8. Tum, promoto divisore, cum in 80 contineantur 9 octies, scripto in quotiente 8, & sublatis $72 = 9 \times 8$ ex 80 restant superius scribenda 8. Tum, promoto adhuc divisore, cum 9 in 83 contineantur novies, scripto in quotiente 9, & sublatis $81 = 9 \times 9$ ex 83 restant 2. Tum, promoto divisore, cum in 25 reperiantur 9 bis, scripto in quotiente 2, & sublato divisoris duplo $18 = 9 \times 2$ ex 25, supersunt 7. Cumque, promoto divisore, in 76 reperiantur octies novem, posito in quotiente 8, & ex 76 sublatis $72 = 9 \times 8$, restant 4. Denique cum, promoto divisore, 9 in 41 reperiantur quater, posito in quotiente 4, & subducto divisoris quadruplo $36 = 9 \times 4$, ex 41, restabunt superius notanda 5, & peracta est divisio. Cum vero divisione peracta supersint adhuc 5, post quotientis numeros integros 289284 subjungo fractionem $\frac{5}{9}$; adeoque liquet, diviso numero 2603561 per 9, quotientem accuratum esse $289284\frac{5}{9}$; sive numeri 2603561 partem nonam esse $289284\frac{5}{9}$; vel numerum 2603561, continere numerum 9, vicibus 289284, atque insuper $\frac{5}{9}$ (quinque nonas partes) ejusdem numeri 9: ipsum autem numerum $289284\frac{5}{9}$ (quotientem) præcise 9 vicibus contineri in 2603561 numero dividendo. Et similiter in aliis.

```
   882745
2603561 (289284 5/9
  999999
```

Alia operationis forma. Quod autem, in exemplis præmissis, singularum subductionum residua deletis Dividendi notis superposuerim, ipsaque subducta multipla nusquam scripserim; id majoris expeditionis causa factum est. Si cui vero libet omnia explicite contueri, poterit ille ad hanc formam præcedentem operationem peragere. Cum divisor 9 in suprascriptis 26, bis contineatur, posito in quotiente 2, & subscripto divisori 9 ipsius duplo 18; ex 26 subductis 18 manebunt 8, infra lineam ductam notanda: cui residuo adjungendæ dividendi figuræ adhuc intactæ (vel saltem

2603561 ($289284\frac{5}{9}$
9
18
803561
9
72
83561
9
81
2561
9
18
761
9
72
410
9
36
5

earum quot opus est,) & promoto divisore, secunda operatio ad eandem formam instituenda, nempe cum 9 in 80 contineantur octies, posito in quotiente 8, & subscripto octuplo, 72, his ex 80 subductis, manebunt 8, ductæ lineæ subscribenda: Et sic deinceps: usque dum tota operatione peracta, reperientur tandem restare 5. ut videre est.

Atque hactenus de Divisionis praxi, per Divisorem simplicem (unica figura scriptum) peragendæ.

Divisionis operatio per divisorem compositum.

Si Divisor compositus sit, (pluribus notis scriptus,) operationis methodus, quanquam aliquanto magis intricata, iisdem plane principiis nititur quibus præcedens. Nempe, Divisore sub tot quot opus est dividendi figuris ad sinistram proximis subscripto, ejusque multiplo quam fieri potest maximo ex iisdem sublato, (notato interim in quotiente istius multipli denominatore,) promovendus est Divisor in locum proximum, & sic deinceps quoties opus erit: totaque operatio ut prius peragenda.

Exempli gratia. Si 1290208 velim per 32 dividere. Divisorem 32, non sub Dividendi figuris 12 subscribo, quia 32 in 12 ne semel continentur, sed (omissa propterea figura prima) sub duabus sequentibus. Et quæro, quoties in 129 reperiuntur 32? vel, quo commodius illud assequar, per partes inquiro quoties in 12 reperiantur 3? quod cum quater fieri deprehendo (atque interim, in reliquo 9, quater contineri 2,) in quotiente scribo 4, ipsique 32 subscribo ipsius quadruplum 128, quod ubi ex 129 subduxerim restare video 1, cui subjunctis reliquis dividendi figuris nondum tactis, reliquum adhuc video 10208.

1290208 (40319
32
128
10208
32
32
96
608
32
288
32
288
00

Tum divisore uno gradu promoto, cum videam 32 in 10 nullies contineri, in quotiente scribo 0, & deleto ibidem divisore, uno adhuc gradu eundem promoveo (immutatis manentibus dividendi figuris 10208, cum inde nihil ablatum fuerit,) & quæro, quoties 32 in 102? sive, quoties 3 in 10? reperiuntur autem 3 in 10 ter, & quod superest 1 cum sequenti nota 2 facit 12 unde non dubito quin 2 (reliqua divisoris figura) possit saltem ter auferri; adeoque in quotiente scribo 3, & divisori 32 subscribo ipsius triplum 96: quod ubi ex suprapositis 102 subduxerim video restare 6, eique figuræ (alias adhuc intactas) 08 subjungo. Tum, promoto divisore, quæro quoties 32 in 60, vel (per partes) quoties 3 in 6, & invenio bis contineri 3 in 6; at interim cum videam nihil superesse unde reliquam figuram 2 bis auferam, scio totum 32 non nisi semel ex 60 auferri posse; ideoque in quotiente scribo 1. ipsumque divisorem 32 ex 60 semel aufero, & restant 28, quibus 8 (figuram intactam) adjungo: Et, promoto divisore, cum 32 reperiam in 288 novies contineri, scripto in quotiente 9, & divisori, subscripto ipsius noncuplo $288 = 32 \times 9$, ubi hoc ex 288 subduxerim invenio nihil restare; adeoque, cum nullæ adhuc supersint Dividendi figuræ, totam operationem peractam esse liquet, & quotientem repertum esse 40319 præcise.

6639642 (6789
978
5868
7716
978
6846
8704
978
7824
8802
978
8802
00

Ita si 6639642 per 978 dividatur. Operatione ut in præcedentibus peracta, reperietur quotiens 6789. ut videre est.

Alia operationis forma.

Vel etiam, si libet, residua superne notari possunt; atque interim singula divisoris multipla seorsim suis locis scribi,

scribi, ipsis Divisoris repetitionibus non intermissa: ad hanc quæ videtur formam.

```
    8                      8
   878                    878
  77100                  77100
 6639642 (6789          6639642 (6789
  978                    978888
   978                    9777
    978                    99
     978
 -------              -------
 5868                   5868
  6846                   6846
   7824                   7824
    8802                   8802
 -------              -------
 6639642                6639642
```

Ubi, cum (propter quotientis primam figuram 6) divisoris (978) sextuplum 5868 ex Dividendi numeris supra positis 6639 subductum sit, residuum superius notatum erit 771. Tum ex 7716 subducto divisoris septuplo 6846, residuum (superne notatum) erit 870. Tum ex 8704 subducto divisoris octuplo 7824, residuum erit 8802. Atque hinc denique subducto divisoris noncuplo, 8802, nihil restabit. Adeoque perfecta est tota divisionis operatio, & quotiens est 6789. Si autem, peracta operatione, placeat omnia hæc multipla in unam summam colligere, (simul cum finali residuo siquod fuerit,) erit ea numero dividendo æqualis: nempe, omnia ablata (simul cum residuo siquod fuerit,) simul addita, restituent numerum propositum: ut patet.

Sicui vero nimis operosum videbitur, tam singula divisoris multipla, quam ipsum divisorem toties repetitum scribere: poterit ille horum utrumvis omittere.

Nempe, Si singula divisoris multipla subducenda scribere supervacaneum esse duxerit; poterit ille duas illas operationes, multiplicationem scilicet & subductionem junctim perficere, (quod & plerique Arithmeticæ practicæ magistri faciendum docent,) ad hanc formam. *Alia operationis forma.*

Postquam, Dividendo & Divisore recte collocatis, inveniatur prima Quotientis figura 6; ducatur numerus ille sigillatim in omnes Divisoris figuras, à sinistra inchoando, numerique facti protinus ex Dividendo auferantur, notatis superne residuis. Sic sexies 9 sunt 54; ablatis 5 ex 6 restat 1, & 4 item ex 6 restant 2: deinde sexies 7 sunt 42; ablatis 4 ex 12 restant 8, & 2 ex 3 restat 1: deinde sexies 8 sunt 48, ablatis igitur 4 ex 81 restant 77, & 8 ex 9 restat 1.

```
   7
  87
 1211
 6639642 (6
  978
```

Tum promoveatur Divisor uno gradu dextrorsum, & inventa secunda figura Quotientis 7, ducatur ea ut prius in divisorem, & fiat subductio. Nempe septies 9 sunt 63; ablatis 6 ex 7 restat 1, & 3 ex 7 restant 4: deinde septies 7 sunt 42; sublatis 4 ex 4 restat 0, & 9 ex 101 restant 92: deinde septies 8 sunt 56; sublatis 5 ex 92 restant 87, & 6 ex 6 restat 0.

```
    8
    9
   10
  747
  872
 12110
 6639642 (67
  9788
   97
```

Tertio, promoveatur Divisor uno adhuc gradu, & inventa Quotientis figura tertia 8, fiat multiplicatio & subductio ut prius. Nempe octies 9 sunt 72; ablatis 7 ex 8 restat 1, & 2 ex 7 restant 5; deinde octies 7 sunt 56, sublatis 5 ex 5 restat 0, & 6 ex 100 restant 94; item octies octo sunt 64, subductis 6 ex 94 restant 88, & 4 ex 4 restat 0:

Denique, promoveatur Divisor adhuc uno gradu in locum infimum, & inventa figura Quotientis ultima 9, fiat multiplicatio & subductio ut prius. Nempe novies

```
   18
   89
   90
  105
  7478
  8724
 121100
 6639642 (678
  97888
   977
    9
```


9 sunt

18
89
992
1057
7478
87247
121100
6639642 (6789
978888
9777
99

9 sunt 81; quibus ablatis ex 88 restant 7: deinde novies 7 sunt 63; sublatis 6 ex 7 restat 1, & 3 ex 10 restant 7; item novies 8 sunt 72; quibus ablatis ex 72 nihil restat. Adeoque, tota jam divisione perfecta, habetur quotiens 6789, præcise. Singulas autem operationes seorsim posui, ut eo distinctius appareat quid quaque operatione accedat. Estque hæc methodus dividendi apud plerosque quos vidi Arithmeticos maxime usitata.

Operationis forma alia. At mallem ego, operatione parum variata, tam multiplicationes quam subductiones particulares, à dextra inchoare, (quamvis divisoris promotionem à sinistra dextrorsum fieri necesse sit;) hoc modo.

Scriptis ut prius Dividendo & Divisore, primaque figura quotientis reperta, 6; ducatur hæc in divisoris singulas figuras à dextra inchoando. Sic sexies 8 sunt 48, quibus subductis ex 49 (mutuatis scil. 4 ex gradu proximo superiori, figuræ 9 præponendis,) restat 1, & 4 transferenda: Tum sexies 7 sunt 42, quibus additis 4 (nuper mutuatis) fiunt 46; quibus demptis ex 53 (mutuatis scil. 5) restant 7, & 5 transferenda sunt: Tum sexies 9 sunt 54, quæ cum 5 nuper mutuatis fiunt 59, quibus ex 66 subductis restant 7. & perfecta est prima operatio.

771
6639642 (6
978

87
7710
6639642 (67
9788
97

Secundo, promoto Divisore, quæratur secunda Quotientis figura; fiatque multiplicatio & subductio ut prius. Nempe septies 8 sunt 56, quibus sublatis ex 56 (mutuatis scil. 5) restat 0, & transferenda 5: septies 7 sunt 49, quibus additis 5 fiunt 54, quibus subductis ex 61 (mutuatis 6) restant 7, & transmittenda 6: septies 9 sunt 63, & additis 6 fiunt 69, quibus subductis ex 77 restant 8.

Tertio, promoto Divisore, & inventa quotientis figura tertia 8, procedendum ut prius. Nempe octies 8 sunt 64, quibus subductis ex 64 (mutuatis 6,) restat 0, & transmittenda 6: octies 7 sunt 56, & 6 addita constituunt 62, quibus subductis ex 70 (mutuando nempe 7) restant 8, & transmittenda 7; octies 9 sunt 72, quibus additis 7 fiunt 79, eisque ex 87 subductis restant 8.

8
878
77100
6639642 (678
97888
977
9

8
87180
7710910
6639642 (6789
978888
9777
99

Denique, promoto Divisore, & reperta quotientis figura ultima 9, fiat multiplicatio & subductio ut prius. Nempe novies 8 sunt 72, quibus subductis ex 72 restat 0 & transmittenda 7: novies 7 sunt 63, & 7 additis fiunt 70, quibus ex 70 subductis, restat 0 & transmittenda 7: item novies 9 sunt 81, quibus additis 7 fiunt 88, eisque ex 88 subductis nihil manet. Totaque divisio est absoluta.

Atque hæc quidem methodus est ea quæ præcessit magis expedita, & quæ tam memoriam quam chartam paucissimis figuris onerat, minus item errori obnoxia, & siquis forte aliquando error inciderit, facilius detegitur & emendatur; cum enim, eodem manente divisoris situ, in singulis locis non nisi una fiat subductio, facile erit animadvertere quid in quaque operatione accedat, & quamlibet operationem seorsim examinare si quid erroris suspectum sit; quod quidem methodo præcedente vix aut ne vix fiet.

Siquando

De Ciphris finalibus.

Siquando (vel in hac vel in alia quavis operationis forma) Divisor Ciphris (una vel pluribus) terminetur; ne fiat inanis tot ciphrarum repetitio, rejectis ciphris illis & simul abscissis totidem ex ultimis dividendi figuris, in numeris reliquis fiat divisio: Ita tamen, ut peracto opere, restituantur tam divisori ciphræ abjectæ quam dividendi residuo abscissæ figuræ, ut in exemplo apposito.

```
            1
           234
           7431
20300) 6834927 (336 14127/20300
        2033300
          200
           2
```

Operationis forma alia.

Si denique mallet quis Divisoris multipla quam ipsum Divisorem toties describere; quod fortasse (præsertim in Divisionibus majoribus peragendis) non erit incommodum: poterit quidem illud fieri ad hanc formam.

```
       8                      8               978 1
      878                    878             1956 2
     77100                  77170            2934 3
978) 6639642 (6789    978) 6639642 (6789     3912 4
     000000                5868642           4890 5
    ------                  68420            5868 6
    5868                     788             6846 7
     6846                     8              7824 8
      7824                 -------           8802 9
       8802                6639642
    -------
    6639642
```

Cum enim omnino perinde sit sive Divisorem suo loco sub Dividendi figuris actu scribamus, sive quasi scriptum esset supponamus; licebit ipsum semel tantum loco commodo describere, ejusque deinceps repetitionem omittere; & (inventis successive Quotientis figuris) debita multipla suis locis describere, & descripta subducere. Sic verbi gratia, divisoris sextuplum 5868 ex 6639 subductum relinquit (superne scribendum) 771. Tum divisoris septuplum 6846 ex 7716 subductum, relinquit 870. Et divisoris octuplum 7824 ex 8704 subductum relinquit 880. Denique divisoris noncuplum 8802 ex 8802 subductum nihil relinquit.

Atque in hac operationis forma, præterquam quod parum memoriæ committitur, hæc saltem habet commoda; nempe, siquando eadem figura in Quotiente sæpius occurrere contingit, non opus erit toties multiplicationem exercere, sed multiplum prius inventum tot quot opus erit locis repetere; quod quidem in majoribus divisionibus non parvum aliquando erit compendium. Item, ubi peracta est operatio, licet omnia isthæc multipla (cum residuo siquod sit) simul addere, quo constet an subductiones recte fuerint peractæ (nempe ex consensu vel dissensu summæ sic inventæ atque propositi numeri dividendi;) atque multiplicationem quamlibet, siquid suspectum sit erroris, sigillatim examinare.

Si sit interim metuendum, nequa confusio oriatur ubi Divisor non sit sua sede conspiciendus; potest isti malo satis caveri, totidem vel punctis vel circellis (si opus sit) divisoris loco collocatis quot ipse continet figuras: puta (in exemplo præmisso) ponantur primum tres circelli sub dividendi figuris 639; & deinde (cum in proximum locum promovendus sit divisor) deleto eorum primo quartus apponatur, ut jam sub figuris 396 tres conspiciantur, & sic deinceps in singulis divisoris promotionibus uno deleto alius subjungatur.

Denique, utile nonnunquam erit, præsertim in Divisionibus grandioribus, (nam in minoribus vix erit operæ pretium) ante inchoatam Divisionis operationem singula Divisoris multipla (decuplo minora) simul descripta habere, (ut in exemplo præmisso exhibuimus,) unde ut opus erit in Divisionis operationem transferri possint; & quidem in quotientis figuris prompte inveniendis auxilio erit, statim enim sine aliis tentamentis inde patebit quod multiplum auferri poterit; ut in exemplo præmisso, statim video numerum 6639, divisoris (978) sextuplo majorem esse & septuplo minorem; adeoque primam Quotientis figuram 6. Et similiter in reliquis.

Atque hactenus præcipuas Divisionis exercendæ formulas exhibui, ut ex omnibus eam sibi quilibet seligat quæ sibi magis accommoda videbitur.

Divisionis operatio in partibus decimalibus.

Si partes Decimales numeris integris annexæ sint, (sive in Dividendo, sive in Divisore, sive etiam in utroque,) eadem omnino methodus observanda est ac si essent numeri plane integri: modo illud tantum curetur, ut operatione peracta tot sint partium decimalium loci in numero Dividendo, quot in divisore simul atque quotiente. Adeoque —

1° Si partium decimalium loci (sive loci infra unitatem descendentes) totidem sint in Dividendo quot in Divisore, erit in quotiente nullus: ut 9|78) 66396|42 (6789.

2° Si nullus sit in Divisore, tot erunt in Quotiente quot in Dividendo. ut 978) 66396|42 (67|89.

3° Si pauciores in Divisore quam in Dividendo, tot erunt in Quotiente quot desiderantur in Divisore. ut 97|8) 66396|42 (678|9.

4° Si plures fuerint in Divisore quam in Dividendo, tot saltem addendæ sunt ciphræ numero dividendo (post lineam separatricem) ante operationem peractam quot opus est ut ipsius loci descendentes tot sint quot sunt in Divisore; (vel saltem quotienti invento tot subjungendæ sunt ciphræ sine linea separatrice, aut linea separatrix in quotiente, siqua sit, tot locis ad dextram promovebitur;) ut 0|978) 66396|420 (67890. vel 9|78) 6639642|0 (67890.

5° Si post peractam aliquam divisionem (ut supra) superfuerit aliquod residuum; licebit (additis Dividendo, post lineam separatricem, quot opus est ciphris) divisionem ulterius continuare; unde, pro fractionibus ordinariis, provenient partes decimales, lineæ separatrici (in quotiente) postponendis. Sic pro 978) 6640131 (6789 $\frac{489}{978}$ prodibit 978) 6640131|0 (6789|5: Et pro 978) 6639805 (6789 $\frac{163}{978}$ prodibit 978) 6639805|000 (6789|166 &c.

Et quidem partes decimales |5 tantundem valent atque $\frac{489}{978}$ aut $\frac{1}{2}$; & partes decimales |16666 &c. tantundem valent atque $\frac{163}{978}$, vel $\frac{1}{6}$. Et similiter in aliis.

Ratio hujusmodi processuum in partibus decimalibus, per se satis patet, modo advertatur lineæ separatricis retractionem aut promotionem (singulis gradibus) numerum decuplo vel diminuere vel augere. Adeo ut non sit necesse diutius his immorari.

De Indice Quotientis.

Hanc saltem universalem (ex Oughtredo) regulam adjicere liceat, (quæ in numeris Divisione *Ortis* suos assignando locos dirigat,) *Index cujusque particularis figuræ Quotientis invenitur tollendo indicem figuræ dividentis ex indice figuræ divisæ.* Quæ quidem ex iis quæ de Indice numeri Facti in Multiplicatione dicta sunt, satis intelligi poterit, ut prolixa expositione non sit opus.

Divisio speciosa, simul cum speciosa Multiplicatione, mox tradetur.

CAP. XX.

De Multiplicatione & Divisione Algebrica & Speciosa: Et quantitatum ex pluribus denominationibus constantium: Earumque ad unam aliquam reductione.

Multiplicatio & Divisio simplicium quantitatum.

SIcut Additionis signum + fecimus, & Subductionis —: Ita Multiplicationis signum esto ×; Divisionis autem, lineola inter quantitatem Dividendam & Dividentem (ipsi subjectam) scripta. Adeoque significat V + A quantitati V quantitatem A adjectam esse: V — A quantitati V quantitatem A ablatam esse: V × A quantitatem V in quantitatem A ductam: & $\frac{V}{A}$ quantitatem V quantitate A Divisam, sive ad quantitatem A applicatam.

Nota tamen Multiplicationis signum ×, (præsertim ubi species qualibet unica nota designatur) sæpissime omitti: (cum illud nempe sine ullo incommodo fieri possit:) Sic verbi gratia AB pro A × B, & ABC pro A × B × C, & 2 ABC pro 2 × A × B × C.

Monen-

Monendum item est (ut de Additione & Subductione, quippe operationibus oppositis, sic etiam) de Multiplicatione & Divisione: Nempe *si plures occurrant vel multiplicationes, vel divisiones, vel partim hæ partim illæ, continue faciendæ, perinde est quo ordine perficiantur, modo omnes continue fiant.* Adeoque $\frac{A \times B}{C}$ $= \frac{B \times A}{C} = \frac{A}{C} \times B = B \times \frac{A}{C} = \frac{B}{C} \times A = A \times \frac{B}{C}$. Item $\frac{6 \times 4}{2} = \frac{4 \times 6}{2} = \frac{6}{2} \times 4$ $= 4 \times \frac{6}{2} = \frac{4}{2} \times 6 = 6 \times \frac{4}{2} = 12$. Et sic in aliis. Eadem nempe de causa qua supra ostendi $3 \times 4 = 4 \times 3$.

Dimensionum quantitatis productæ vel Ortæ numerus.

Cum quantitas aliqua componi supponitur ex duarum vel plurium quantitatum continua multiplicatione; dicitur ea tot dimensionum esse quot sunt quantitates illæ componentes. Puta $A \times A$ vel $A \times B$ quantitates sunt duarum dimensionum; $A \times A \times A$, vel $A \times A \times B$ vel $A \times B \times C$, sunt quantitates trium dimensionum.

Si tamen ejusmodi quantitas per quantitatem aliquam dividatur; tot auferri supponuntur dimensiones quot habet quantitas dividens. Sic $\frac{A \times B}{C}$ vel $\frac{A \times A \times B}{C \times C}$ sunt quantitates unius dimensionis; $\frac{A \times A \times B}{C}$ vel $\frac{A \times B \times D}{C}$ sunt quantitates duarum dimensionum.

Et quidem si eadem quantitas sit superne multiplicator, & inferne divisor, se mutuo perimunt; (puta $\frac{AB}{A} = B$:) quod enim multiplicando acquiritur, id æquali divisione destruitur. Sicut, & $B + A - A = B$, ubi quod acquiritur Additione, Subductione tollitur.

Ubi autem species aliquæ ducuntur in figuras numerarias, non solemus ea multiplicatione numerum dimensionum auctum reputare, (saltem nisi cum ipsæ species numeros significant:) adeoque $2A$ vel $2 \times A$ aut $A \times 2$ unius est dimensionis, & $2AB$ vel $2 \times A \times B$ duarum. Quia nempe 2 hic loci non pro alia ejusdem generis dimensione habetur, sed simpliciter pro rationis Duplæ indice; & tantundem valent atque $\frac{2}{1}A$, $\frac{2}{1}AB$. Et in aliis similiter. Estque $\frac{2}{1}A$, alia homogenea quantitas quæ se habet ad A, ut 2 ad 1; sive quæ toties contineat A quoties 2 continet 1.

Quæ quidem ratio etiam aliis characteribus seu symbolis, non minus exprimi poterit quam ipsis figuris numeralibus; ut $\frac{V}{A}B$, quo innuitur alia quantitas (ipsi B homogenea) quæ ipsam B toties contineat quoties V continet A; vel quæ ad B eandem habeat rationem quam habet V ad A.

Et quidem ubi species aliqua per aliam totidem præcise dimensionum dividitur, quantitas nullius dimensionis oritur, sed quæ potius pro *Rationis* indicio habenda est. Adeoque $\frac{A \times B}{C \times D}$ nil aliud indicat quam eam rationem quam habet quantitas $A \times B$ ad quantitatem homogeneam $C \times D$. Nam dividendo quantitatem quamlibet per aliam homogeneam, invenitur Ratio illius ad hanc: uti ex Divisionis natura superius explicata satis patet.

Si vero contingat quantitatis Dividentis dimensiones plures esse quam Divisæ, innuitur quantitas dimensionum pauciorum quam nullius. (Quod eadem ratione supponendum erit, qua supponimus quantitates negativas seu ablatitias, quæ sint minores quam nihil.) Sic $\frac{A}{B \times C}$, $\frac{A}{B \times C \times D}$, &c. erunt quantitates dimensionum -1, -2, &c. Nam $1 - 2 = -1$. $1 - 3 = -2$, &c. Quibus respondent *Gradus* (quos dixi) Descendentes.

Potestatum ejusdem quantitatis indices & characteres.

Siquando quantitas aliqua in seipsam aliquoties multiplicatur; puta, A, $A \times A$, $A \times A \times A$, $A \times A \times A \times A$, &c. ipsa quantitas A Radix seu Latus dici solet, $A \times A$ vel AA quadratum, $A \times A \times A$ vel AAA Cubus, $A \times A \times A \times A$ vel AAAA Biquadratum ejusdem quantitatis A. Vel ipsius quantitatis A potestas prima, secunda,

cunda, tertia, quarta, &c. Ita nempe ut cujusque potestatis index æqualis sit numero dimensionum.

Solent autem Radix, Quadratum, Cubus, Biquadratum, (reliquæque deinceps potestates,) sic notari, ℞, ʓ, ℭ, ʓʓ, &c. (ut olim,) vel R, Q, C, QQ, &c. vel etiam A, Aq, Ac, Aqq, &c. vel a, a^2, a^3, a^4, &c. (ut fusius diximus Cap. XI.) nempe compendii causa pro a, aa, aaa, $aaaa$, &c. Et propterea (notas illas in has, ubi opus erit, resolvendo) $a^2 = aa$. $a^3 = a^2 a = aaa$. $a^4 = a^3 a = a^2 a^2 = aa^3 = aaaa$, &c. Item Aq = AA. Ac = AqA = AAq = AAA. Aqq = AcA = AqAq = AAc = AAAA, &c. Sic 2 Aq × 3 Ac est 2 AA × 3 AAA. & ʓ × ℭ = ß seu ℞ × ℞ in ℞ × ℞ × ℞. Et contra A) Aqq (Ac, hoc est A) AAAA (AAA. ʓ) ß (ℭ, hoc est ℞ × ℞) ℞ × ℞ × ℞ × ℞ × ℞ (℞ × ℞ × ℞. Sic a^3) a^5 (a^2 hoc est aaa) $aaaaa$ (aa. Et sic in aliis.

De signis + & —. Quod autem attinet ad signa + & —, in multiplicationis Producto, vel divisionis Quotiente, ponenda; hæc observanda est Regula.

In Multiplicatione & Divisione, si datorum signa sint similia, Producti vel Orti signum erit + (affirmativum:) sin dissimilia, — (negativum.) Nempe + per +, vel — per —, dat +, (sive multiplicando sive dividendo;) & + per —, vel — per +, dat —.

Vel etiam (quod tantundem valet) *Si multiplicatoris vel divisoris signum sit +, Multiplicandi vel Dividendi signum retinetur; sin —, mutatur.* Nempe + per + dat +, & — per + dat —; item + per — dat —, & — per — dat +.

Bach. Diophant. l. 1 def. 9. citat Nonium Alg. part. 2. cap. 4. Ratio sive demonstratio hujus, ab ipsa Multiplicationis & Divisionis natura petenda est. (Quales ego malim, ubi fieri potest, afferre, quam demonstrationes à posteriori.) Quam igitur in singulis casibus ostendam.

Multiplicatione supponitur quantitas Multiplicanda toties poni quoties multiplicator indicat, ut ex supra dictis cap. 18. patet. Adeoque qui quantitatem quamlibet (sive positivam sive ablatitiam) multiplicat per 3 vel + 3, ille eandem quantitatem (signis non mutatis) ter ponit; qui per 2 vel + 2, bis ponit; qui per 1 vel + 1, semel tantum; qui vero per 0, ne semel quidem, sed nullies ponit, (adeoque quantitas quælibet, per 0 multiplicata, evanescit:) qui autem per — 1, — 2, — 3, &c. multiplicat, tot vicibus paucius quam nullies ponit, (cum — 1, — 2, — 3, &c. sint minus quam nihil, seu paucius quam nullum,) hoc est revera toties tollit, (per ea quæ diximus Cap. XV. de signis + & — contrario sensu exponendis;) qui vero tollit, ille tantundem ponit mutato signo, (ut ex legibus Subductionis Cap. XV. patet:) Et propterea qui multiplicat per 1, 2, 3, &c. vel alium quemvis multiplicatorem affirmativum, is quantitatem multiplicandam toties ponit servato signo; qui vero multiplicat per — 1, — 2, — 3, &c. aut alium quemvis multiplicatorem negativum, ille quantitatem multiplicandam toties vel tollit vel (quod tantundem est) sub contrario signo ponit. Quod erat ostendendum. Adeoque A × 2 = 2 A, A × — 2 = — 2 A, — A × 2 = — 2 A, — A × — 2 = + 2 A (nempe — A bis tollitur:) Sic A × B = B A, A × — B = — B A, — A × B = — B A, — A × — B = + B A (vel + A B quod tantundem est.) Et sic in reliquis.

In Divisione, quæritur quoties divisor, seu quantitas dividens, in quantitate Dividenda continetur; vel (quod tantundem est) in quam quantitatem ducendus est divisor ut fiat æqualis quantitati Dividendæ; ut patet ex iis quæ de Divisione tradita sunt Cap. XIX. Et propterea, ubi quantitatis Dividendæ signum est + (affirmativum,) signum Quotientis idem erit atque divisoris; sin quantitatis Dividendæ signum sit — (negativum,) signum Quotientis erit signo divisoris contrarium: cum enim divisoris in quotientem ducti productum futurum est æquale quantitati dividendæ; non potest illud affirmatum esse, nisi factores signa habeant similia; nec negativum, nisi dissimilia: ut ex modo probatis constat. Adeoque si dividatur + per +, vel — per —, quotiens erit +: sin + per —, aut — per +, quotiens erit —. Quod erat ostendendum. Adeoque 2) V ($\frac{V}{2}$, — 2) V (— $\frac{V}{2}$, 2) — V (— $\frac{V}{2}$, — 2) — V (+ $\frac{V}{2}$. Item A) V ($\frac{V}{A}$, — A) V (— $\frac{V}{A}$, A) — V (— $\frac{V}{A}$, — A) — V (+ $\frac{V}{A}$. Sic A) VA (V. — B) BCD (— CD.

(−CD. −C) BCD (−BD. NA) NV ($\frac{V}{A}$. A) Aq (A. −A) −AcB (AqB. Aq) −VA (−$\frac{V}{A}$. *a*) *abc* (*bc. ab*) *a²bc* (*ac.* 2℞) ℭ ($\frac{1}{2}$ℨ. 3ℨ) −6ℭ (−2℞. Et pariter in aliis.

Atque hactenus de quantitatum simplicium Multiplicatione & Divisione dictum est; sequitur ut de Conjunctis agam; eas intelligo quæ ex variis membris constant per signa + & − colligata.

Quando quantitates invicem multiplicandæ ex variis membris constant, singula membra multiplicantis in singula membra multiplicandæ (signis ut modo dictum est observatis) ducenda sunt, Facta deinde in unum aggregatum colligenda. Sive autem à dextra, sive à sinistra incipiamus, perinde est. Exempla sequuntur. *Multiplicatio quantitatum conjunctarum.*

Exempla Multiplicationis.

A + E = Z
B
BA + BE = BZ

A − E = X
B
BA − BE = BX

A + E − I = L
−C
−CA − CE + CI = −CL

2B + 3C
A − 2D
2AB + 3AC − 4BD − 6CD

A + E = Z
A + E = Z
AA + AE
+ AE + EE
AA + 2AE + EE = ZZ
Aq + 2AE + Eq = Zq

A − E = X
A − E = X
− AE + Eq
Aq − AE
Aq − 2AE + Eq = Xq

A + E = Z
A − E = X
Aq + AE
− AE − Eq
Aq − Eq = ZX

Z − E = A
E
ZE − Eq = AE

Z − A = E
A
ZA − Aq = AE

+2ℨ + 3℞ − 4
+1ℨ − 1℞ − 3
−6ℨ − 9℞ + 12
−2ℭ − 3ℨ + 4℞
2ℨℨ + 3ℭ − 4ℨ
2ℨℨ + 1ℭ − 13ℨ − 5℞ + 12

3C − 1Q + 3R − 2
−2Q − 1R + 6
+18C − 6Q + 18R − 12
−3QQ + 1C − 3Q + 2R
−6QC + 2QQ − 6C + 4Q
−6QC − 1QQ + 13C − 5Q + 20R − 12

BP + PC
AP
AP × BP + AP × PC

2Aq + Bq − 3A + 2
−Cq + 2B
−2CqAq − CqBq + 3CqA − 2Cq
+4BAq + 2Bc − 6BA + 4B
−2Cq, +4B } Aq; −Cq, +2B } Bq; +3Cq, −6B } A; −2Cq, +4B

O 2a

$$\begin{array}{l} 2a^2+3ba-bc \\ 3a^2-2ba-c^2 \\ \hline 6a^4+9ba^3-3bca^2 \\ \quad -4ba^3-6b^2a^2+2b^2ca \\ \quad\quad -2c^2a^2-3bc^2a+bc^3 \\ \hline 6a^4+5ba^3 \left.\begin{array}{l}-3bc\\-6b^2\\-2c^2\end{array}\right\} a^2 \left.\begin{array}{l}+2b^2c\\ \\-3bc^2\end{array}\right\} a+bc^3 \end{array}$$

Divisio quantitatum conjunctarum.

In dividendis quantitatibus conjunctis, si saltem Divisor sit quantitas simplex, vix quicquam peculiaris difficultatis est præter simplicis divisionis repetitionem; adeoque quotientis per partes inventionem: Et quidem parum refert an à dextra an à sinistra incipiamus.

Exempli gratia. Si quantitas DC − 6BC + 8Cq, dividenda esset per 2C;

$$\begin{array}{l} 2C)\ DC-6BC+8Cq\ (\tfrac{1}{2}D-3B+4C \\ \quad\ \ DC\ \ -6BC\ |\ 8Cq \\ \hline \quad\quad\ 0\ \ |\quad\ 0\ \ |\quad 0 \end{array}$$

Primum quæro quænam quantitas ducta in 2C faciet DC, & responsum ½D in quotiente pono, quam quotientem in divisorem ductam (2C × ½D = DC) ubi ex dividendi parte prima DC subduxerim, nihil restat. Similiter cum videam 2C ducendam esse in − 3B ut fiat − 6BC, scribo in quotiente − 3B, & multiplum (2C × − 3B = − 6BC) ex − 6BC subductum nihil relinquit. Denique cum 2C ducenda in 4C ut fiat 8Cq, posito in quotiente + 4C, & subducto multiplo (2C × 4C = 8CC = 8Cq) nihil manet. Et peracta est divisio, cujus quotiens seu quantitas orta ½D − 3B + 4C.

Si quid autem, divisione quantum fieri potest continuata, superfuerit, quod per divisorem propositum dividi non possit, vel etiam si ita se habeat Dividendum ut ipsius nulla pars per expositum divisorem dividi possit, (sive simplex sit, sive composita, quantitas dividenda, aut etiam dividens,) residuum illud collocandum est supra divisorem in modum fractionis (sicut in divisione numerosa) & invento quotienti adjungenda. Ut in exemplorum tam præcedentium quam subsequentium aliquot videre est.

$$A)\,CD\,(\frac{CD}{A}.\quad B)\,BD+Dq-4BE\,(D-4E+\frac{Dq}{B}.$$

$$A+B)\,DF\,(\frac{DF}{A+B}.$$

$$2\mathfrak{z})\,5\mathfrak{z}\mathfrak{z}+4\mathfrak{C}-2\mathfrak{C}+1\,(\tfrac{5}{2}\mathfrak{z}+2\mathfrak{C}-\frac{1}{2\mathfrak{C}}+\frac{1}{2\mathfrak{z}}$$

$$Rq)-ARc+4ABRq+CqFR\,(-AR+4AB+\frac{CqF}{R}$$

$$a)\,2ba-aa+\frac{da^2}{e}\,(2b-a+\frac{da}{e}.$$

Et quidem plerique sive Algebristæ sive Analystæ vix ulterius Divisionis Algebricæ aut Speciosæ traditionem prosequuntur; sed quantitatem dividendam dividenti supraponunt, interjecta lineola; & siquam animadvertant quantitatem quæ utramque communiter multiplicaverit eandem utrobique expungunt: nec ulterius satagunt curiosam Divisionem (præsertim cum divisor ex pluribus partibus constat) exercere.

Verum, etiam cum Divisor ex pluribus partibus constiterit, divisio nonnunquam satis feliciter exerceri potest, eadem plane premendo vestigia quibus in aliis Divisionibus inceditur. Quod (post Cartesium) animadvertit Schootenius (tam in ipsius ad Cartesii Geometriam notis, quam in speciali tractatu quem *Principia Matheseos Universalis* appellat, Arithmeticæ Speciosæ praxin exhibente.) Sed & olim,

olim, juxta Veterum Algebram, ejusmodi divisionis methodum ostendit *Thomas Diggesius*, Anglus, (vir Equestri familia natus, & egregius sui temporis mathematicus, uti ex ipsius editis operibus, sed plerisque lingua Anglicana, satis patet,) in libro qui inscribitur *Stratioticos*, (qui Londini prodiit Anno 1579.) ubi tam Arithmetica vulgaris, quam veterum Algebra succincte traditur.

Idemque præstitit *Robertus Record*, in libro cui titulus, *The Whetstone of Witt* (h. e. *Cos Ingenii*, allusione, ni fallor, facta ad nomen *numerorum Cossicorum*, seu *Regulam Cosæ*,) edito anno 1557, Ubi similem item tradit Radicum extractionem.

Ea vero sic commode præstabitur. Dispositis primo tam multiplicandæ quam multiplicantis partibus, prout negotio magis accommodum videbitur; quæratur quantitas quæ saltem in unum (quod seligere placeat) Divisoris membrum ducta, producat membrum aliquod quantitatis dividendæ :- quæ quantitas pro quotiente (particulari) habenda est, & in divisorem totum ducenda, & Factum ex quantitate dividenda auferendum, notato residuo. Atque idem iterandum erit quoties opus est; ut reliqua etiam quotientis membra reperiantur.

Ita si quantitas A B F + 2 C D F — 3 A q B — 6 A C D dividenda sit per F—3 A. Quoniam F) A B F (A B, scribo in quotiente A B, quæ ducta in divisorem F—3 A

```
F — 3 A) A B F + 2 C D F — 3 A q B — 6 A C D ( A B + 2 C D
         A B F             — 3 A q B
         ----------------------------
               + 2 C D F — 6 A C D
               + 2 C D F — 6 A C D
               -------------------
                   00          00
```

facit A B F — 3 A q B, quibus ex dividendo subductis, restare video 2 C D F — 6 A C D. Deinde, eandem operationem iterando, cum sit F) 2 C D F (+ 2 C D, subjungo quotienti priori + 2 C D, & ducto 2 C D in F — 3 A, fit 2 C D F — 6 A C D, quod ubi subductum est, nihil restat; totaque operatio est absoluta.

Item si dividendum sit A c — E c per A — E : cum sit A) A c (A q. Ducendo quotientem A q in divisorem A — E fit A c — A q E, & facta subductione restat A q E — E c. Tum quia A) A q E (A E, quotiens A E in divisorem A — E ductus,

```
A — E) A c — E c ( A q + A E + E q
       A c — A q E
       -----------
     + A q E — E c
       A q E — A E q
       -------------
     + A E q — E c
     + A E q — E c
       -----------
        00      00
```

dat A q E — A E q; & facta subductione, restat A E q — E c. Tandem, cum A) A E q (E q; & E q in A — E fit A E q — E c; subductione facta, nihil restat; adeoque absoluta est operatio, & quotiens A q + A E + E q.

Atque idem proveniet si à dextra incipiamus. Cum enim sit $-e)\,-e^3\,(e^2$, erit quotiens e^2, & e^2 in $a-e$, erit ae^2-e^3; & facta subductione, residuum a^3-ae^2. Tum $-e)\,-ae^2\,(+ae$; & ae in $a-e$ est a^2e-ae^2; & subductione facta, residuum est a^3-a^2e. Denique $-e)\,-a^2e\,(a^2$; & a^2 in $a-e$ est a^3-a^2e; &, facta subductione, restat nihil. Quotiens autem est ut prius, nisi quod qui tunc ultimus nunc primus est terminus.

```
a — e) a³ — e³ (e² + a e + a²
            ae² — e³
           ---------
        a³ — ae²
        a² e — ae²
       -----------
        a³ — a² e
        a³ — a² e
       -----------
        00     00
```

Ad eandem formam; si dividenda esset eadem quantitas a^3-e^3 per $a+e$. Cum sit $a)\,a^3\,(a^2$; & a^2 in $a+e$ fit a^3+a^2e; facta subductione, residuum erit

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{l}{a+e)\ a^3-e^3\ \left(a^2-ae+e^2-\frac{2e^3}{a+e}\right.} \\
\quad a^3+a^2e & \\
\hline
-a^2e-e^3 & \left(a^2-ae-e^2+\frac{2ae^2}{a+e}\right. \\
-a^2e-ae^2 & \\
\hline
+ae^2-e^3 & +ae^2-e^3 \\
+ae^2+e^3 & -ae^2-e^3 \\
\hline
-2e^3 & 2ae^2
\end{array}$$

$-a^2e-e^3$. Tum cum $a)-a^2e\ (-ae$; & $-ae$ in $a+e$ fit $-a^2e-ae^2$; facta subductione, restabit $+ae^2-e^3$. Denique cum sit $a)\ ae^2\ (e^2$, & e^2 in $a+e$ fit ae^2+e^3; facta subductione, restabit $-2e^3$: Et quotiens est $a^2-ae+e^2-\frac{2e^3}{a+e}$.

Vel, si in ultima operatione, pro quotiente $+e^2\ (=\frac{ae^2}{a})$ sumeretur quotiens $-e^2$, quia nempe $+e)-e^3\ (-e^2$; $-e^2$ in $a+e$, fuisset $-ae^2-e^3$; &, subductione facta, restaret $2ae^2$, adeoque quotiens $a^2-ae-e^2+\frac{2ae^2}{a+e}$. Quod tantundem valet: Nam $+e^2-\frac{2e^3}{a+e}=-e^2+\frac{2ae^2}{a+e}$ hoc est $\frac{ae^2+e^3-2e^3}{a+e}=\frac{-ae^2-e^3+2ae^2}{a+e}$.

Sed idem fere eveniret si præcedens operatio (ubi residuum est $-2e^3$) ulterius continuetur; & sumatur quotiens $\frac{-2e^3}{+e}=-2e^2$: nam $-2e^2$ in $a+e$ est $-2ae^2-2e^3$; quod, ex $-2e^3$ subductum relinquit $+2ae^2$, adeoque erit $a^2-ae+e^2-2e^2+\frac{2ae^2}{a+e}$.

Quod ideo moneo, ut appareat, (præsertim ubi necessario fractione terminetur) quotientem posse variis formis exhiberi (nam & multis adhuc modis variari potest) sed qui tantundem valeant; ut quilibet eam quæ sibi magis accommoda videatur seligat; & quidem nunc hanc nunc illam ut præsens negotium postulaverit.

Posset interim eadem operatio peragi eodem plane successu, si à dextra incipiamus, Nempe $e)-e^3\ (-e^2$; & $-e^2$ in $a+e$ facit $-ae^2-e^3$; & (subductione facta) residuum a^3+ae^2. Tum $e)+ae^2\ (+ae$: & ae in $a+e$ facit a^2e+ae^2: ergo residuum a^3-a^2e. Denique $e)-a^2e\ (-a^2$; & $-a^2$ in $a+e$ facit $-a^3-a^2e$: & residuum $2a^3$. Adeoque quotiens $-e^2+ae-a^2+\frac{2a^3}{a+e}$.

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{l}{a+e)\ a^3-e^3\ \left(-e^2+ae-a^2+\frac{2a^3}{a+e}\right.} \\
\quad -ae^2-e^3 & \\
\hline
a^3+ae^2 & \left(-e^2+ae+a^2-\frac{2a^2e}{a+e}\right. \\
+a^2e+ae^2 & \\
\hline
a^3-a^2e & a^3-a^2e \\
-a^3-a^2e & a^3+a^2e \\
\hline
2a^3 & -2a^2e
\end{array}$$

Vel, si in ultima operatione sumatur quotiens $+a^2\ (=\frac{a^3}{a})$ erit residuum $-2a^2e$ & quotiens $-e^2+ae+a^2-\frac{2a^2e}{a+e}$. Sed utrovis horum modorum procedatur, quotiens tantundem valet atque prius.

Ubi

Ubi autem tanta oritur varietas, judicio opus est ut quis eam seligat quotientis formam quæ præsenti negotio magis sit accommoda: vel etiam, sine alia divisione, ad instar fractionis exhibeat, $\frac{a^3 - e^3}{a + e}$.

Alíud libet exemplum ex *Diggesio* (supra citato) afferre, & simul huic negotio

6 𝔷 + 8 𝔷ℭ) 60 ß + 80 𝔷𝔷 + 72 ℭ + 96 𝔷 (10 ℭ + 12 𝔷ℭ
60 ß + 80 𝔷𝔷
———————————
72 ℭ + 96 𝔷
72 ℭ + 96 𝔷
———————
00 00

finem imponere. Nempe quantitatem 60 ß + 80 𝔷𝔷 + 72 ℭ + 96 𝔷 per 6 𝔷 + 8 𝔷ℭ sic dividit. Quoniam 6 𝔷) 60 ß (10 ℭ; quotientem inventum ducit in divisorem, & productum 60 ß + 80 𝔷𝔷 ex dividendo subducit; & restant 72 ℭ + 96 𝔷. Tum quia 6 𝔷) 72 ℭ (12 𝔷ℭ; quotienti priori adjungit + 12 𝔷ℭ: & ducto hoc quotiente in divisorem, productum aufert ex dividendo & nihil restat. Adeoque quotiens est 10 ℭ + 12 𝔷ℭ.

Sed & apud Clavium in *Algebra* operationem non absimilem reperio: quem, si libet, consule.

Atque hactenus Multiplicationem & Divisionem Algebricam & Speciosam absolvimus.

Multiplicatio & Divisio quantitatum ex pluribus Denominationibus aggregatarum, vix aliud est quam Multiplicatio & Divisio Speciosa. In hoc saltem differunt, quod harum denominationum ad invicem ratio supponitur cognita, ut fieri possit ab una ad aliam reductio; Specierum autem seu Symbolorum (in Arithmetica Speciosa) ratio ad invicem vel ignoratur, vel ita acsi esset ignorata tractatur. *Multiplicatio quantitatis plurium denominationum.*

Cum autem ejusmodi quantitas plurium denominationum per aliam unius tantum denominationis multiplicanda occurrit, incipienda est operatio ab intima sive minima denominatione, & sic ad majores ascendendum: transmisso semper in superiores quantum opus est. Exempli gratia. *Si quis singulis diebus expendit* 14 *libras* 10 *solidos & 8 denarios monetæ Anglicanæ, quantum expendit ille singulis septimanis?* Respondebitur, Expensam hebdomadis septuplam esse expensæ diurnæ (cum quælibet hebdomas contineat septem dies.) Adeoque expensa diurna multiplicanda est per 7. Nempe denarii $8 \times 7 = 56$. cum autem 12 *den*: = 1 *sol.* erunt $56\,d = 4\,f + 8\,d$. ideoque subscriptis 8 *d*, reservo 4 *sol*: reliquis solidis mox annumerandos. Tum solidi $10 \times 7 = 70$, quibus additis 4 huc transmissis fiunt 74: sunt autem 20 *sol*: = 1 *lib.* ergo 74 *sol*: = 3 *lib.* + 14 *sol.* Ergo subscriptis 14 *sol.* reservo 3 *libras* mox reliquis adjungendas. Denique libræ $14 \times 7 = 98$ quibus additis 3 fiunt 101 *libr*: quibus subscriptis, patet expensam hebdomadis esse 101 *lib.* 14 *sol.* 8 *den.*

14 lib.	10 s.	8 d
		7.
3	4	
101.	14	8

Si autem vel Multiplicator sit numerus grandior, vel etiam ex pluribus denominationibus constet; expedit plerumque (aut etiam aliquando prope necessarium erit,) quantitates illas plurium denominationum ad quantitates unius denominationis reducere, & tum demum multiplicationem perficere, & peracta tandem multiplicatione, pristinas eas (si opus erit) denominationes restituere. *Reductio plurium denominationum ad unam.*

Exempli gratia, *Si viris aliquot singulis debentur* 28 *libræ*, 13 *solidi*, & 9 *denarii*; *quantum debebitur eorum* 283 *viris?* Priusquam multiplicationem propositam aggrediar, commodum erit totam monetæ propositæ summam ad unam *denariorum* denominationem reducere: quod ipsum multiplicatione peragitur, hoc modo. Quoniam singulæ libræ (monetæ Anglicanæ) continent 20 solidos; numerum librarum expositum multiplico per 20, ut habeam numerum solidorum in illis 28 libris contentorum, quibus adjungendi 13 solidi (in quæstione expositi) ut habeatur numerus omnium solidorum; nempe 573. Deinde, quoniam singuli solidi continent 12 denarios, numerum illum solidorum (573,) multi-

```
 28 lib.  13 s  9 d
 20
 ----
 560
  13
 ----
 573 sol.
  12
 ----
 1146
 573
    9
 ----
 6885 den:
  283
 -----
 20655
 55080
 13770
 -------
 1948455
```

plico per 12, ut habeam numerum denariorum inibi contentorum: quibus adjungendi adhuc denarii 9 (in quæstione expositi) ut habeatur numerus omnium denariorum, nempe 6885*d*: = 28 *lib.* 13*s.* 9*d.*

Et tum demum, post hanc reductionem factam, multiplico 6885 (numerum denariorum) per multiplicatorem propositum 283; & producuntur denarii 1948455.

Denique, si velim intelligere quot libræ & solidi in hoc denariorum numero continentur; restituentur illæ denominationes dividendo. Nempe quia 12*d* = 1*s*. denariorum numerum 1948455 divido per 12, & prodeunt solidi 162371, atque insuper 3 denarii post peractam divisionem residui. Deinde, cum 20*s* = 1 *lib*: numerum solidorum 162371 divido per

```
      7 2 4 8 1|3 d
 12) 1 9 4 8 4 5 5 (162371 s. 3 d.
     1 2   3 6
       7 2   8 4
         2 4   1 2

           1|1 s
 20) 1 6 2 3 7 1 ( 8118 lib.  11 s.  3 d.
       2 2 2 2 0
```

20, & prodeunt libræ 8118, atque insuper 11 solidi residui. Adeoque 1948455*d* = 8118*lib.* 11*s.* 3*d.* summa quæsita.

```
 34 lib.  7 unc.      26 d.  15 h.
 12                   24
 ----                 ----
 68                   104
 34                   52
    7                    15
 ----                 ----
 415 unc.             639 horæ.
```

Item. Si ex scaturigine quadam singulis horis effluant aquarum pondo 34 cum unciis 7. quæritur quantum effluet 26 diebus & horis 15? Reduco primum aquæ quantitatem assignatam ad Uncias, multiplicando 34 (numerum librarum seu pondo) per 12 (quia nempe 1 *lib.* = 12 *unc.*) & adjungo uncias 7. Item tempus assignatum in horas reduco, multiplicando 26 numerum dierum per 24 (quia 1 *dies* = 24 *hor.*) & adjungo horas 15. Et, peracta reductione, multiplico 415 numerum unciarum singulis horis

```
   415 unc.                    unc.
   639 hor.                2 1 1 9|9      lib.   unc.
 --------            12) 2 6 5 1 8 5 (22098.   9.
   3735                  2 4
  1245                     2 4
 2490                        1 0 8
 --------                      9 6
 265185 unciæ.
```

effluentium, per 639 numerum horarum in tempore proposito; & producitur 265185 numerus unciarum toto isto tempore effluentium. Quem denique unciarum numerum divido per 12 (tot enim unciæ continentur in una Libra) & prodeunt 22098 *lib.* 9 *unciæ*, quæsita quantitas aquæ toto isto tempore effluentis.

Divisio quantitatis plurium denominationum. Quæ autem de quantitatum ex pluribus denominationibus constantium Multiplicatione dicta sunt, ea fere & de earundem Divisione intelligenda erunt. Nisi quod hic potius à denominatione suprema incipiendum sit, & quod illic superest ad proxime inferiorem reducendum.

Exempli

Exempli gratia; si defuncti facultates, 183 *lib.* 10 *sol.* 9 *den.* inter quatuor ipsius liberos sint æqualiter partiendæ; quæritur quantum cuique cedet. Primo dividantur libræ 183 per 4, & habebitur quotus 45, cum residuis 3 libris. Secundo, pro 3 libris, substitutis 60 solidis, (quia 1 *lib.* = 20 *sol.* adeoque 3 *lib.* = 60 *sol.*) & adjunctis 10 solidis (in quæstione expositis) habentur 70 solidi, qui per 4 divisi, quotum præbent 17, & supersunt 2. Denique, cum 2 *sol.* valeant 24 denarios; qui, adjunctis 9 in quæstione expositis, fiunt 33; hi per 4 divisi quotum exhibent 8; cui, propter 1 residuum (cum jam ad infimam denominationem perveniatur) adjungo fractionem ¼. Adeoque quotiens perfectus, ex omnibus aggregatus, est 45 *lib.* 17 *s.* 8¼ *d.* Cedent igitur unicuique ex liberis, libræ 45, solidi 17, & denarii 8 cum quadrante.

```
    lib.  s.   d     l.   s.   d.
4) 183 . 10 . 9 . (45 . 17 . 8¼ .
   44

    3                              2
   20          32                 12
   --                             --
   60      4) 70 (17              24
   10         44                   9
   --                             --
   70                             33

                  1
              4) 33 (8¼
                  4
```

Vel etiam, reducto primum tam Dividendo quam Divisore ad unam denominationem, operatio postea instituatur more superius tradito. Verbi gratia. Si quæratur, *In Annis Julianis 24, diebus 34, horis 2, & 32 minutis; quot sint Menses Synodici, seu Lunationes.* Quoniam Annus Julianus constat diebus 365 & 6 horis, hoc est (multiplicando 365 per 24 & addendo 6) horis 8766; Anni 24 constabunt horis 210384, (ut multiplicando patebit:) quibus si addantur dies 34, horæ 2, & 32 minuta; hoc est 818 horæ & 32 minuta: habentur horæ 211202 & 32 minuta: hoc est (multiplicando 211202 per 60 & addendo 32) minuta 12672152: quæ tantundem valent atque Anni Juliani 24, 34 *d*, 2*h*, 32′. Deinde Mensis Synodicus, (puta à Novilunio ad Novilunium) statuitur, dierum 29, cum 12 horis & 44 minutis, hoc est, (ut ex adjuncto calculo patet,) minutorum 42524. Quod quæritur igitur, hoc est, Quoties in minutis 12672152, (tempore proposito,) continentur minuta 42524, (tempus unius mensis Synodici.) Numero igitur illo per hunc diviso, habetur Quotiens 298 præcise. Tot igitur menses Synodici exposito tempore continentur. Quod erat investigandum.

```
      d     h                      d   h
     365.   6.                     34. 2.  32′.
      24                           24
   --------                     ----------
     1460                         136
     730                          68
       6                           2
   --------                     ----------
     8766   h.                    818. 32′
      24
   --------                        d   h
    35064                          29. 12. 44.
   17532                           24
   --------                     ----------
   210384   h.                    116
      818.  32′                   58
   ----------                     12
   211202.  32                  ----------
       60.                        708  h.
   ----------                      60
  12672120                      ----------
        32                        42480
  ----------                         44
  12672152  m.                  ----------
                                  42524  m.

           3401
          4267 3 9
  42524) 12672152 (298
          85048
          382716
          340192
```

Atque

Atque ad hujusmodi formas præstandæ sunt multiplicationis & divisionis operationes, ubi quantitates ex pluribus denominationibus constantur. Ubi interim judicio opus erit, ut præparatoriæ reductiones ita instituantur ut præsenti negotio maxime sit accommodum, & res tota quam fieri potest minimo labore peragatur. Quod quidem frequente exercitio edifcetur, & usu fiet familiare.

Multiplicationes & Divisiones continuæ. De Multiplicatione autem & Divisione notandum est universim (cui simile de Additione & Subductione superius tradidimus,) *ubi plures occurrunt numerorum Multiplicationes, vel Divisiones, vel simul utræque, continue faciendæ, perinde est quo ordine instituantur, modo omnes continue fiant*; tantundem enim utcunque prodibit. Exempli gratia. $2\times3\times4=2\times4\times3=3\times2\times4=3\times4\times2=4\times2\times3=4\times3\times2=24$. Item $ABC=ACB=BAC=BCA=CAB=CBA$. Et $\frac{4\times3}{2}=\frac{3\times4}{2}=\frac{4}{2}\times3=\frac{3}{2}\times4=\frac{1}{2}\times4\times3=6$. Item $\frac{AB}{CD}=\frac{BA}{CD}=\frac{BA}{DC}=\frac{A}{C}\times\frac{B}{D}=A\times\frac{B}{CD}=\frac{A}{CD}\times B=\frac{C)\,AB}{D}=\frac{D)\,BA}{C}=D)\,\frac{AB}{C}=C)\,\frac{BA}{D}=C)\,\frac{B}{D}\times A=C)\,\frac{A\times B}{D}$. Item, *Perinde est sive per duos pluresve divisores continue fiant divisiones, sive per productum ex divisoribus illis invicem multiplicatis*; puta $C)\,\frac{B}{D}=\frac{B}{CD}$. $3)\,\frac{24}{2}=\frac{24}{2\times3}=\frac{24}{6}=4$. &c. At interim *Cavendum est, nequis ex Divisoribus* (aut quod ab illis fit) *alium quam divisorem multiplicet*: Si enim vel multiplicatorem vel quotum multiplicet divisor, eo ipso ex divisore fit multiplicator & totius operationis processum immutat. Nam omnino aliud est $C)\,\frac{B}{D}=\frac{B}{D\times C}$ atque $\frac{B}{D}\times C=\frac{B\times C}{D}$. Sic aliud est $2)\,\frac{12}{3}=\frac{12}{3\times2}=2$, atque $\frac{12}{3}\times2=\frac{12\times2}{3}=8$. Quorum omnium demonstrationes ex superius traditis Multiplicationis & Divisionis principiis facile est colligere.

Atque hactenus de Multiplicationis & Divisionis praxi dictum esto. Sequitur, ut de utriusque Examine seu Probatione verba faciamus.

CAP. XXI.

De Multiplicationis & Divisionis Probationibus; earumque Probationum fundamentis. Familiares aliquot quæstiunculæ solvuntur.

QUæ de Additionis & Subductionis probationibus superius dicta sunt, non pauca & hic locum obtinent. Nempe non adhibentur illæ tanquam demonstrationes certitudinis regularum juxta quas proceditur; nam de illis satis constat ex principiis eis quibus innituntur: sed ad explorandum numquis error subrepserit in exercitio, quo à regulis deviatum sit. Non igitur ad probandas regulas, sed ad explorandum num operatio præstita regulis sit conformis, instituuntur hæ probationes. Et quanquam posset etiam examen institui repetendo ipsam operationem, & ad regulam ubique exigendo; tamen illud felicius ut plurimum instituitur operationis forma mutata; quippe hoc pacto minus est periculi in eundem errorem iterum incidendi.

Multiplicationis per Divisionem Probatio. Sicut Additio per Subductionem (operationem sibi contrariam:) sic Multiplicatio per (huic oppositam) Divisionem examinare sive probare solent. Quod enim Multiplicatione conficitur id Divisione dissolvitur. *Ubi enim duorum numerorum invicem multiplicatione, alius producitur; si hic per eorum alterutrum dividatur, reliquus prodit.* Puta, si quantitas A ducta in B fit AB; hæc ipsa AB divisa per B fiet A. (nempe $\frac{AB}{B}=A$.) Ratio est, quia subsequens divisio per B

destruit

destruit id quod præcedente multiplicatione per eandem quantitatem B efficiebatur, adeoque ipsa quantitas A quæ prius fuerat, jam iterum quasi ex postliminio redit. Eodem modo si eadem A B dividatur per A prodibit B; (nempe $\frac{AB}{A} = B$:) quia scilicet tam ex ductu A in B, quam ex ductu B in A, eadem prodibit quantitas, puta $AB = BA$. sic $\frac{6 = 3 \times 2}{2} = 3$, & $\frac{6 = 2 \times 3}{3} = 2$.

Atque idem in grandioribus numeris similiter obtinet. Si enim ex ductu 283 in 546, vel (quod tantundem est) ex ductu 546 in 283, proveniat 154518. Ut explorem num rite peracta sit operatio, hunc productum divido per multiplicatorum utrumvis, & si reliquum divisione provenientem comperio, argumento est operationem rite peractam fuisse; sin minus, certum est alicubi fuisse erratum. Et similiter in aliis quibusvis multiplicationibus, veritatem peractæ operationis examinare licet.

```
   283                  26
   546                 4533
  ----             546) 154518 (283
  1698                 1092
 1132                   4368
1415                     1638
------
154518

   546                  26
   283                 1399
  ----             283) 154518 (546
  1638                 1415
 4368                   1132
1092                     1698
------
154518
```

Ut autem per Divisionem Multiplicatio, sic per Multiplicationem Divisio examinabitur. Nam *si Quotiens in Divisorem ducatur* (*vel hic in illum*) *prodibit numerus pridem Dividendus.* Nam quod Dividendo fuerat dissolutum, multiplicando (per eundem numerum) iterum restituitur. Puta, si A) A B (B, hoc est $\frac{AB}{A} = B$, multiplicando B in A, prodibit A B. Ita, si 3) 12 (4, hoc est $\frac{12 = 3 \times 4}{3} = 4$; ducto 3 in 4 (Divisore in Quotientem) prodibit, $3 \times 4 = 12$. Et similiter in numeris grandioribus; si dividendo 154518 per 546 prodeat 283, vel eundem numerum 154518 dividendo per 283 proveniat 546; vice versa, multiplicando 546 in 283, vel hunc in illum, restituetur numerus pridem dividendus 154518. Ut in calculo mox ante apposito videre est. *Divisionis examen per Multiplicationem.*

Si autem, post peractam Divisionem, aliquod superfuerit Residuum; curandum est ut in probatione per multiplicationem instituenda, hoc etiam Residuum addatur: Secus enim non prodibit Dividendus integer, sed mancus. Nam, verbi gratia, si numerus 387 per 24 divisus exhibeat quotientem 16, & supersint 3; hoc residuum indicat, quod in dividendo illo contineatur divisor vicibus 16, (vel quotiens vicibus 24,) atque insuper numerus 3. Adeoque, præter Divisorem (vel Quotientem) toties positum (quod multiplicando præstatur) adjungendus erit numerus ille 3.

```
     143
 24) 387 ( 16
     24    24
     144   --
           64
          32
           3
          ---
          387
```

Ratio totius processus (si illa ex jam dictis nondum satis intelligatur) sic reddi poterit. Cùm numerus multiplicandus toties in Producto continetur, quoties Unitas in Multiplicatore, (nam toties est ille ponendus quoties jubet multiplicator;) si Divisione quæratur, quoties in Producto contineatur Multiplicandus? prodire debet (si operatio recte peracta fuerit) pro divisionis Quotiente,

tiente, numerus idem qui prius fuerat multiplicator. Et contra, cum Divisionis Quotiens ostendat, quoties in Dividendo contineatur Divisor, (vel præcise, vel quanto cum residuo;) si Divisor ille toties (multiplicando) ponatur, (&, siquod erat, adjiciatur residuum,) emergere debet numerus Dividendus; quippe ille in quo Divisor toties ut dictum est continetur.

Multiplicationis per Multiplicationem probatio.

Præter has autem Multiplicationis & Divisionis probationes, per operationem contrariam instituendas; potest utraque per eandem operationem probari. Cum enim (ut ex superius traditis patet) duorum numerorum invicem multiplicatorum, perinde est uter dicatur Multiplicator; (puta, perinde est, in exemplis nuper appositis, sive 283 per 546, sive numerus hic per illum, multiplicetur:) *Ubi peracta est operatio, si de ἀκριβείᾳ dubitetur; qui prius erat numerus multiplicandus, jam fiat multiplicator, & vice versa*; Et, si idem utrobique sit numerus Productus, argumento erit processum fuisse legitimum; sin minus, erroneum. Sic ductis 283 in 546, vel 546 in 283, prodibit utrobique 154518, ut supra patet.

Examen Divisionis per Divisionem.

Pariter in Divisione; Cum non minus ostendat Divisor, quoties in Dividendo contineatur Quotiens; quam Quotiens, quoties in eodem Dividendo contineatur Divisor; (quippe qui ita se habent ad Dividendum, ut Factores in multiplicatione ad Factum;) Si de peracta divisione occurrat dubium; *qui prius prodiit Quotiens jam fiat Divisor*, & si jam prodeat pro Quotiente numerus ille qui tum fuerat Divisor, argumento est operationem rite peractam esse; sin secus, erratum esse. Verbi gratia; si dividatur 154518 per 546 prodibit quotiens 283; de quo si dubitetur, numerus idem 154518 dividatur per quotientem 283, & prodibit numerus 546, qui prius fuerat divisor, (ut supra patet,) unde liquet operationem rite peractam esse. *Residuum autem, si quod est, idem esse debet utrobique.* Puta, cum diviso numero 387 per 24, quotiens sit 16, & residuum 3; si 387 dividantur per 16, quotiens erit 24, & residuum item 3: ut ex adjuncto calculo patet.

```
      63
16) 387 (24
     32
      64
```

Atque hæ quidem sive Multiplicationis sive Divisionis probationes, huc usque traditæ, in quacunque Multiplicatione aut Divisione locum habent; sive in numeris integris, sive in Fractionibus Decimalibus, aliisve; sive in operationibus Algebricis & Symbolicis vel Speciosis; sive item una, sive plures sint denominationes. Quippe idem est in omnibus processûs fundamentum.

Probationes minus certæ.

Quod autem de Probationibus Additionis & Subductionis superius monuimus; idem de Multiplicationis & Divisionis Probationibus pariter sciendum est: Eas nempe non omnes ejusdem esse generis; quippe aliæ certiores sunt, & fallaciæ minus obnoxiæ, (quales sunt, quas jam exposuimus,) sed laboriosæ magis, (& quæ quidem tantundem operis in examinandis quantum in peragendis operationibus postulant,) aliæ vero magis expeditæ, sed quæ nonnunquam fortasse fallant.

Divisionis per Additionem probatio lubrica.

Atque huc quidem referri potest ea methodus examinandi Divisionis operationem, per additionem multiplorum omnium subductorum, quæ (cum residuo si quod sit) restituent numerum Dividendum. Puta, si (in priori exemplo) dividamus 154518 per 283, unde quotiens emergit 546; si omnia multipla (infra dividendum subscripta) simul addantur, prodibit numerus Dividendus; quod ni fiat, erroris indicium est. Est autem hæc probatio admodum lubrica; quippe quæ solas subductiones examinat non item multiplicationes; & siquis prius, Divisorem in singulas quotientis notas ducendo, error irrepserit, idem adhuc intactus manet, neque hac probatione omnino detegitur, quippe quæ multiplicationes illas, sine examine, pro veris habet.

```
       16
      2300
283) 154518 (546
     1415
      1132
       1698
     ------
     154518
```

Probatio Novenaria.

Sicut autem nimis laboriosum videbitur, probationibus superius traditis uti; adeoque tantundem operis insumere in operis examinatione seu probatione, quantum in ipsa operatione: Poterit breviorem illam probationem adhibere, quam *Novenariam* vocant, (qualem supra ostendimus in probatione Additionis & Subductionis;) quæ sic instituitur.

In Multiplicatione.

Numeri Multiplicandi notis omnibus indiscriminatim additis (neglecta locorum consideratione,) indeque, quoties fieri possit, abjectis 9, residuum si quod sit seorsim notetur (vel, si nihil supersit, ciphra;) Deinde & Multiplicantis notis omnibus

omnibus similiter additis, & abjectis novenis omnibus, residuum item notetur: Hæc duo residua invicem ducantur, & abjectis inde 9 quoties fieri potest, Residuum, siquod sit, notetur: Denique si hoc residuum idem sit atque Residuum quod proveniet ex omnibus numeri Producti seu Facti notis, ita ut prius additis, abjectis novenis omnibus, indicium est (saltem probabile) operationem rite peractam esse; sin secus, certissimum est alicubi erratum esse. Exempli gratia: In Multiplicatione apposita, Multiplicandi notæ addantur $2+8=10$, $10-9=1$, $1+3=4$. Hoc residuum scribatur ad crucis sinistram. Deinde in Multiplicatore, $5+4=9$, quibus abjectis, reliqua nota 6, scribatur ad crucis dextram. His Residuis invicem ductis, est $4\times6=24$, unde bis abjectis 9, restant 6; (vel $2+4=6$:) Hoc Residuum superne scribatur. Deinde numeri producti notæ sic addantur, $1+5=6$, $6+4=10$, $10-9=1$, (vel $1+0=1$,) $1+5=6$, $6+1=7$, $7+8=15$, $15-9=6$ (vel $1+5=6$.) atque hoc Residuum inferne scribatur. Denique quoniam duo Residua, superne & inferne notata, deprehenduntur eadem; conjicio operationem rite peractam; sin fuissent diversa, certum esset admissum esse errorem.

```
   283
   546          6
  1698       4  X  6
 1132           6
1415
154518
```

In Divisione, pari modo procedendum est. Addantur indiscriminatim notæ Divisoris, &, abjectis novenis omnibus, notetur residuum. Quotientis item notæ addantur, &, abjectis novenis, notetur Residuum. His residuis invicem ductis, (& facto additis, siquod fuerit, Residui Divisionis notis,) &, abjectis novenis, notetur & hoc Residuum. Denique, facta simili notarum Dividendi additione, & novenorum abjectione, quod tandem restat æquabitur (si operatio rite sit peracta) Residuo proxime notato: Sin minus, erratum est. Sic in apposita divisione. Divisoris notæ $1+6=7$, (quod notetur ad sinistram.) Quotientis notæ $2+4=6$, (quod notetur ad dextram.) Factum ex his $7\times6=42$, unde quater abjectis 9, restant 6, (vel $4+2=6$.) tum (quia post peractam divisionem restabant 3,) $6+3=9$: quibus abjectis manet o, quod superne noto. Denique in Dividendo $3+8+7=18$, unde bis abjectis 9, manet o, (vel $1+8=9$, $9-9=0$) quod cum idem sit atque Residuum superne notatum, conjicio operationem fuisse rite peractam. *In Divisione.*

```
    63
16) 387 (24        0
    32          7  X  6
    64             0
```

Quod autem de Residuo Divisionis dictum est; nempe ipsius notas addendas esse, facto ex residuis Divisoris & Quotientis; pariter obtinet & in multiplicatione, si præter puram Multiplicationem accedat aliquod additamentum. Puta si 16 per 24 multiplicanda sint, & simul addenda 3, ut habeatur facti additique aggregatum 387: Ex multiplicandi notis emergit 7, ex multiplicantis 6, quorum factum $7\times6=42$, hoc est $4+2=6$, & (propter additamentum 3) $6+3=9$: & $9-9=0$; Sed & $3+8+7=18$, & $18-9-9=0$. unde conjicitur operationem rite peractam esse.

```
  16
  24            0
  64         7  X  6
 32             0
   3
 387
```

Fundamentum quo nititur hæc probatio, idem est quod supra docuimus de consimili Probatione Additionis & Subductionis. Nempe quod, ubi nulla locorum habetur ratio, tantundem valent 1 & 10, item 2 & 20, & pariter in similibus: At idem est substituere 1 pro 10, atque abjicere 9; item substituere 2 pro 20, atque abjicere bis 9; & sic in in reliquis.

Monendum autem est (quod & de Additionis & Subductionis simili probatione monuimus) probationem hanc nonnunquam fallacem esse, neque errorem semper detegere, (præsertim si is ob neglectam debitam locorum considerationem obtingat, quem frustra quis putet hinc detectum iri, cum nulla hic locorum habeatur ratio:) Quamvis enim, ubi numeri non conveniunt, certum sit erratum esse; non tamen certum est operationem recte procedere ubi conveniunt. *Lubrica.*

Nec tamen prorsus contemnenda. At interim (ne penitus abjiciendam putemus hanc probationem) probabile est (utut non certum) errorem siquis sit (præterquam qui ex indebito notarum situ oritur) hinc detectum iri, saltem nisi data industria fraus instituatur; raro enim (& quidem rarius quam quis putet) Errores siqui sunt tam feliciter (vel potius infeliciter) conspirant ut se mutuo tegant. Et propterea cum hæc probatio non adeo magno constet labore, non inutiliter adhiberi poterit.

Et quidem in prolixis præsertim Divisionibus, operæ pretium esse potest eam sæpius in ipso operationis curriculo adhibere (quod quidem fieri potest post quamlibet Divisoris promotionem) ne error in principio operis totum insecuturum laborem plane frustraneum reddat.

Minus universalis est. Sed & minus universalis est hujusmodi Probatio Novenaria; quippe quæ solis numerosis operationibus convenit, non item Speciosis sive Symbolicis, aut Algebricis; ut nec (nisi correctiones aliquoties adhibeantur) ubi plurium denominationum quantitates occurrunt. Cum enim ortum ducat hæc probatio ex graduum sive locorum dispositione in continua proportione decupla; ubi hæc dispositio non est, neque locus est huic probationi. Si vero Arithmeticis placuisset primitus, pro decupla, aliam quamvis proportionem adhibuisse; potuissent etiam & illi, quæcunque fuerit, hujusmodi probationem aptasse: Non quidem abjiciendo singula novena, uti jam; sed eum numerum, quoties fieri possit, abjiciendo, qui unitate minor sit quam Exponens istius qua proceditur continuæ proportionis: Puta, si (pro decupla) adhibuissent noncuplam, abjicienda essent (non novena, sed) octona omnia; si octuplam, septena; si septuplam, sena; si sextuplam, quina; & similiter de quavis alia.

Atque hactenus de Probationibus tum Multiplicationis tum Divisionis dixisse sufficiat: in quibus vel utendis vel negligendis suo quilibet utatur arbitrio.

Quæstiuncula familiares solvuntur. Iisdem autem, cum his probationibus, principiis nituntur hujusmodi quæstionum solutiones; (quibus se exercendo urones Multiplicationis & Divisionis naturam & consensum mutuum melius persentiscent.)

$$\begin{array}{r} 4 \\ 3 \\ \hline 12 \end{array} \quad 4)\ 12\ (3$$

$$\frac{A}{4} = 3. \qquad A = 3 \times 4 = 12.$$

Quis numerus est, qui per 4 divisus, quotientem dabit 3. Nempe 4 & 3 (Divisore & Quotiente) invicem ductis, prodibit 12, numerus quæsitus Dividendus. Vel, quod eodem recidit, si numerus quæsitus, Dividendus, dicatur A; quoniam (juxta quæstionis tenorem) $\frac{A}{4} = 3$; si pars utraque multiplicetur per 4, erit $A = 3 \times 4 = 12$.

$$\begin{array}{r} 235 \\ 3 \\ \hline 705 \end{array} \quad 3)\ 705\ (235 \qquad \frac{705}{3} = 235$$

$$\frac{A}{3} = 235 \qquad A = 235 \times 3 = 705$$

Item *Cujus numeri triens est 235.* Hoc est, Quis numerus per 3 divisus, quotientem dabit 235. Eadem methodo, ductis invicem 235 & 3, prodibit numerus quæsitus 705; qui nempe per 3 divisus quotientem imperatum exhibebit. Vel etiam quia 3) A (235, erit $A = 235 \times 3 = 705$.

Item (in numeris grandioribus) *Quot aurei distribuendi sunt inter milites 2646, ut quisque habeat 283?* Hoc est, Quis numerus dividendus est per 2646, ut prodeat 283; vel, per 283, ut prodeat quotiens 2646? Ductis invicem 2646 & 283, prodibit numerus quæsitus 748818.

$$\begin{array}{r} 2646 \\ 283 \\ \hline 7938 \\ 21168 \\ 5292 \\ \hline 748818 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2646)\ 748818\ (283 \\ 283)\ 748818\ (2646 \\ \frac{748818}{2646} = 283 \\ \frac{748818}{283} = 2646 \end{array}$$

Contra

Contra vero, si quæratur *Quis numerus est qui in 4 ductus faciet 12?* Factum 12 dividatur per 4 (alterum ex factoribus) & prodibit reliquus Factor quæsitus 3. Vel, si numerus quæsitus dicatur A; cum sit (juxta quæstionis tenorem) $A\times 4 = 12$, dividendo utramque æquationis partem per 4, erit $A = \frac{12}{4} = 3$.

4) 12 (3 $3\times 4 = 12$

$A\times 4 = 12$ $A = \frac{12}{4} = 3$.

Item *Cujus numeri triplum est 705?* Hoc est, Quis numerus in 3 ductus faciet 705? Si numerus factus 705 dividatur per factorem datum seu cognitum 3, prodibit Factor quæsitus 235. Vel quia $A\times 3 = 705$, erit $A = \frac{705}{3} = 235$.

```
       11
  3) 705 (235
     333    3
          ----
           705
```

$A\times 3 = 705$.

$A = \frac{705}{3} = 235$.

Item, *Inter quot milites distribuendi sunt 74818 aurei, ut quilibet habeat 283.* Divisis 748818 per 283, prodibit militum numerus quæsitus. Et pariter in similibus.

```
          1
         136
        18209
  283) 748818      (2646
       566           283
       1698         ----
        1132        7938
         1698     21168
                  5292
                 ------
                 748818
```

Si autem quæratur, Verbi gratia, *Quinam numeri sint invicem ducendi ut factus sit 24?* Vel *Quis per quem dividendus, ut quotiens sit 24?* Hujusmodi quæstiones nugaces essent; quippe ex datis in quæstione nihil certi elicitur: posset enim modis innumeris responderi: puta 1×24, 2×12, 3×8, 4×6, $2\times 2\times 6$, $4\times 2\times 3$, $2\times 8\times 1\frac{1}{2}$, $\frac{48}{2}$, $\frac{?}{?}$, 3) $\frac{24}{2}$, 2) $\frac{24}{3}\times 6$, &c. Nam ex solo facto in multiplicatione, de Factoribus neutiquam constabit; ut nec, in Divisione, ex solo Quotiente constabit de Dividendo aut Divisore. Sed de his hactenus.

Atque hactenus quidem de quatuor Arithmetices (ut vocantur) Speciebus, seu potius Partibus, Additione, Subductione, Multiplicatione, & Divisione, dicta sufficiant. Multa autem quæ de his operationibus apud Arithmeticæ practicæ magistros passim occurrunt, & speciatim operationum aliquot in nonnullis compendia, variosque modos has operationes peculiaribus subjectis applicandi, (puta, in re nummaria, de fœnore, de mercatura; in re astronomica, de tempore, de motu, eorumque reductionibus, &c.) sciens prætereo. Quippe infiniti esset laboris, & quidem supervacanei, ea omnia quæ id genus dici possent sigillatim prosequi. Nec quidem id nostri operis est; sed potius operationum fundamenta tradere, ipsosque fontes aperire, unde scientifice & demonstrative possint veræ procedendi rationes intelligi. Quas qui rite intelligit, non modo majori fructu & voluptate ipsas operationes exercebit, easque in usum proferet, quam si cæco ductu incedat, & quasi Andabatarum more pugnet; sed & multo firmius quæ novit memoria retinebit. Quas enim sæpius audimus querelæ, Rerum Mathematicarum cognitionem, Arithmetices præsertim, citissime deperditum iri nisi assidua exercitatione retineatur; non aliunde oriuntur, quam quod plerique Arithmetices praxin, sive operandi methodum, memoriter tantum edocti, ipsas operandi rationes penitus ignorent; quas quidem vulgares Arithmeticæ practicæ Magistri plerumque vel ipsi nesciunt, vel saltem plus satis reticent; eisque edocti Mechanicam potius (regulas minime intellectas persequendo) exercent, quam Arithmeticam. Qui autem ipsius praxeos rationem satis perspiciunt, (nec tantum cæco itinere, regularum memoriter cognitarum ductum implicita fide secuti, incedunt,) judicio magis quam memoria ducti, difficilius ea quæ intimis hauserunt medullis evulsum iri patientur.

CAP. XXII.

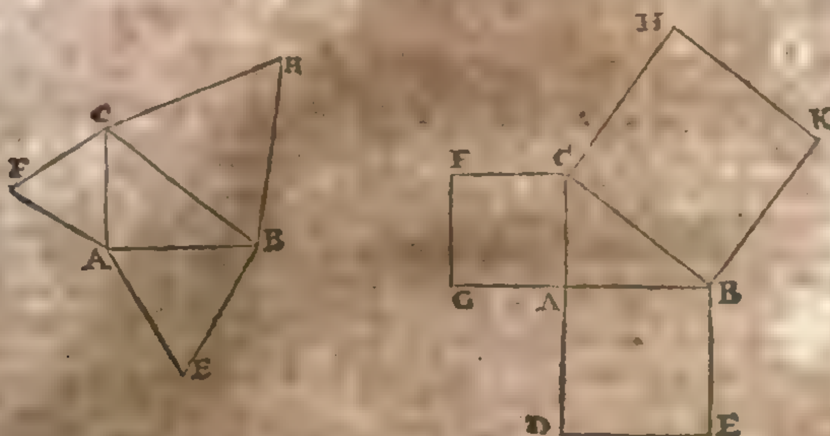
Multiplicationis exercitium in Parallelogrammis Rectangulis mensurandis, & invicem comparandis. Divisionis in Parallelogrammis Rectangulis exercitium.

PRiusquam Multiplicationis & Divisionis (quarum praxis superius ostensa est) negotium dimittam; nec inutile forsan erit, nec injucundum, pauca subtexere quibus utriusque utilitas innotescat, atque interim Geometriæ cum Arithmetica summa conjunctio percipiatur. Quamvis enim Arithmetica, quæ de Numeris agit, Geometricas mensuras per se non attingat; sed, propriis principiis nixa, neque Geometriæ auxilio indigens, regulas abstractas tradit, omni numerabili pariter applicabiles; (objectum quippe simplicius & latius nacta quam Geometria:) cum tamen objectum Geometriæ, viz. mensura, intra objecti Arithmetices terminos cadat, (quippe cujus partes numerantur;) non abs re erit, Arithmetices exercitium in re Geometrica paucis ostendere.

Hoc autem, dum de Additione & Subductione verba fecimus, parcius egimus, quia non magni forsan res videri possit, lineam lineæ adjungere, vel etiam demere, dum utraque data sit. Puta, si lineæ datæ A B adjungere oporteat lineam datam B C; vel datæ A C datam B C auferre. Cui tamen operi perficiendo aptata videmus tria successive problemata; nempe Prop. 1. 2. 3. primi Euclidis. Illæ autem propositiones, cum sint pure Geometricæ, possunt in traditione Arithmetica tuto omitti.

A B C

Quod autem de Angulorum, Superficierum, aut Solidorum, Additione vel Subductione dici possit; Vel erit penitus Geometricum, neque ad calculum omnino spectans; nempe si Anguli, superficies, aut corpora, non mutata adjungantur; ut, si dato Quadrato A B E D, vel A C F G, addendum esset Triangulum A B C; ubi nihil requiritur aliud, quam ipsorum in dato situ fabricam Geometricam: Vel, sicubi calculo opus sit, non solum Additione aut Subductione opus erit, sed



ut plurimum Multiplicatione item vel Divisione: ubi nempe proportionum ratio habenda est. Ut, si quæratur Quadratum B C H K, æquale quadratis A B E D & A C F G simul sumptis; vel Triangulum B C H, æquale similibus A B E, A C F, simul sumptis: aut si quæratur Quadratum A B E D, æquale quadrato B C H K dempto quadrato A C F G; vel Triangulum A B E, æquale triangulo B C H dempto triangulo A C F; ubi præter figurarum additionem & ablationem, earum item aggregati vel residui transformatio requiritur. Ideoque de hujusmodi Additionibus vel Ablationibus, priusquam de Multiplicatione & Divisione dixeramus, non ita opportunum erat verba facere.

Ut

Ut vero quæ de Multiplicatione & Divisione jam tradidimus, Geometricis mensuris applicentur, præmittenda sunt è Geometria quædam ad terminorum explicationem necessaria. Et quoniam ex mensura Parallelogrammi Rectanguli (quod, brevitatis gratia, simpliciter Rectangulum dici solet) reliquarum figurarum dimensiones deduci solent; de Parallelogrammo præmittendæ sunt quædam Definitiones, hoc est, Terminorum explicationes.

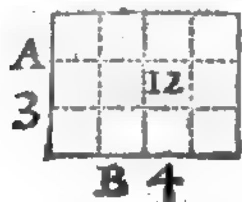
Parallelogrammum appellant figuram planam quadrilateram, cujus opposita latera, seu laterales lineæ, sunt rectæ parallelæ, hoc est, *æquidistantes, sive æqualem ubique habentes inter se distantiam.* Quales sunt quæ in Schematis mox apponendis conspiciuntur. *Definitiones aliquot Geometricæ.*

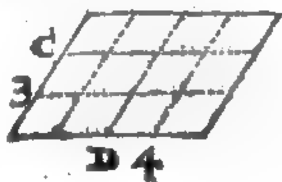
Parallelogrammum vero tunc *Rectangulum* dicitur, *quando ipsius omnes anguli sunt recti.* (Vel etiam *Cujus angulus aliquis est rectus*: Nam si Parallelogrammum habeat vel unum angulum rectum, reliquos item omnes rectos esse facile est demonstratu.)

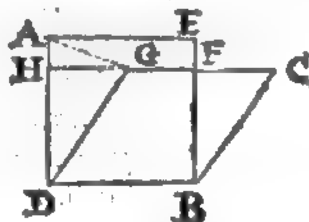
Angulus autem *Rectus* tunc esse dicitur, *quando linea recta in rectam angulum faciens ita recte incidit ut neutro magis inclinet.* Ut in figura præcedenti, recta CA in rectam GAB ita recte incidens ut non magis hac quam illac inclinet, facit angulos CAB, CAG, rectos. Et similiter anguli ad F, G, H, &c. recti sunt.

Si qua vero inclinet magis, angulum *obliquum* facit: Nempe *Acutum* (quippe *angulo recto minorem*) *ea qua propendet* seu magis inclinat; vel *Obtusum* (*angulo recto majorem*) *ea unde reclinat* sive divergit magis. Puta, si recta CA, quæ jam erecta est, supponatur versus AH nutare seu propendere, adeoque ab AG reclinari, pro duobus angulis jam rectis, fierent duo obliqui, CAB acutus, & CAG obtusus; qui tamen simul sumpti duobus illis rectis sunt æquales; nam quanto unus propter inclinationem minuitur, tanto alter propter reclinationem augetur; quodque huic accedit, illi aufertur. Similiter, angulus ABC acutus est, quippe recto minor; ABK obtusus, quippe recto major. Et similiter alias.

Parallelogrammum autem *Rectangulum, si latera habeat omnia invicem æqualia, Quadratum dicitur*; quale est, in subjecta figura tertia, ADBE: *Sin minus Oblongum*; quale est figura prima AB.







Parallelogrammum vero *Obliquangulum* (hoc est, *cujus anguli sunt obliqui*) *si latera habeat omnia invicem æqualia, Rhombus dicitur*; ut in figura tertia, GDBC: *Sin secus, Rhomboeides*; ut figura secunda CD.

Contineri vero vel *comprehendi* dicitur *Parallelogrammum Rectangulum* (sive quadratum sit, sive oblongum,) *duabus rectis lineis quæ rectum comprehendunt angulum.* Definiente Euclide 1 *d* 2. Non quidem eo sensu quo ipse alibi negat, *duabus rectis lineis spacium comprehendi*; (non enim duabus sed quatuor rectis hoc sensu parallelogrammum continetur, hoc est, ambitur sive undiquaque concluditur;) sed quia duabus illis parallelogrammi rectanguli spatium sive area determinatur, quippe altera longitudinem, altera latitudinem determinat. At in Parallelogrammis Obliquangulis, secus est: non duabus rectis circa angulorum obliquorum quodvis positis determinabitur istius parallelogrammi magnitudo; sed major, minorve erit, prout obliquitas minor majorve fuerit; adeoque præter rectarum longitudinem, anguli etiam sive obliquitatis determinatione opus erit, ut determinetur Parallelogrammi magnitudo. Et propterea, neque in hac definitione, nec (quantum memini) apud Euclidem alibi, Parallelogrammum Obliquangulum duabus ejusmodi circa ipsius quodvis angulum positis contineri dicitur. Si cui vero sic libeat loqui, anguli præterea mentionem facere oportebit ut magnitudinem determinet.

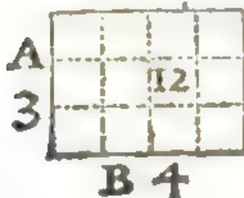
His præmissis, *Ad Parallelogrammi Rectanguli aream sive magnitudinem inveniendam, nil aliud requiritur quam ut duarum rectarum quibus contineri dicitur, altera in alteram ducatur, sive multiplicetur.* Exemplo res evadet perspicua. *Parallelogrammi Rectanguli mensuratio.*

Sint expositi Parallelogrammi Rectanguli latera circa rectorum angulorum quodlibet,

libet, duæ rectæ, quarum altera sit trium, altera quatuor pedum, (vel palmorum, calamorum, orgyiarum, spithamarum, aut quarumlibet aliarum mensurarum æqualium.) Rectanguli magnitudo sive area reperitur ductu linearum unius in alteram, longitudinis puta in latitudinem, vel contra: eodem plane modo quo totidem numerorum series essent computandæ. Si enim, verbi gratia, tot puncta, vel (si libet) tot milites ordinatim digesti, ea lege disponantur, ut, in qualibet serie transversâ, quaterni, in qualibet directa, terni conspiciantur: manifestum est ter quaternos, vel quater ternos, ita esse dispositos. Multiplicatis igitur 4 per 3, vel 3 per 4, emerget omnium numerus $12=3\times4$. Et pariter in simili quavis cujusvis numeri dispositione faciendum erit.

. . . .
. . . .
. . . .

Eodem modo Parallelogrammum 3 pedes latum, & 4 pedes longum, ex ductu latitudinis in longitudinem, reperietur pedum quadraticorum $12=3\times4$. Cujus quidem rei ratio sic facile percipietur. Si enim parallelogrammi istius tam altitudo sive latitudo A, pedum trium, quam basis sive longitudo, pedum 4, dividi intelligantur in suos respective pedes; atque à cujusque pedis termino ducantur rectæ lateribus parallelæ, quibus tota figura in particulas quadratas dirimatur, quarum quælibet sit tam longa quam lata pedem unum, (hoc est, quælibet contineat pedem quadratum;) manifestum erit, ex ipso Schematis inspectu, in qualibet serie transversâ (propter longitudinem quatuor pedum) quatuor quadraticos pedes contineri, ipsasque series (propter altitudinem trium pedum) numero tres esse; adeoque pedes quadraticos omnes esse ter quaternos, hoc est $12=4\times3$. Et quidem, pari ratione, manifestum erit (propter $A=3$) singulis seriebus erectis tres pedes quadraticos contineri, ipsasque series (propter $B=4$) numero quatuor; adeoque pedes quadraticos omnes esse quater ternos, hoc est $12=3\times4$. Et similiter in aliis quibusvis Parallelogrammis rectangulis mensurandis (sive quadrata sint sive oblonga) ex ductu longitudinis in latitudinem, (sive quod tantundem valet) basis in altitudinem (vel hujus in illam,) habetur area.



Atque hinc colligere licet, *Pedem quadraticum unum, continere Digitos sive Uncias*, 144. Cum enim longitudo Pedis unius sit unciarum 12; Et propterea Pedis quadratici tam longitudo quam latitudo sit 12 unc. ex ductu hujus in illam emergit area $12\times12=144$ unciarum quadraticarum. Adeoque, utut pes linealis contineat non nisi 12 uncias lineales; pes tamen quadraticus continet uncias quadraticas 144. Eodem modo cum apud nos *communis Virga mensoria officinarum* (*a Yard* dicta) *contineat longitudine pedes tres; eadem mensura quadratica continebit pedes quadraticos* $9=3\times3$.

$$\begin{array}{r} A=3 \\ B=4 \\ \hline AB=12 \end{array}$$

Hæc si per symbola libeat explicare; pro latitudine seu altitudine ponatur A, pro longitudine seu basi B; erit igitur Area seu magnitudo AB, sive $A\times B$. Ergo si $A=3$, & $B=4$, erit $AB=3\times4=12$. In quadratis autem, ubi longitudo latitudini est æqualis, erit $AB=AA=Aq$. Adeoque, cum longitudo pedis unius sit 12 unciarum; & propterea

$$\begin{array}{c} A=P=12\,U \\ B=P=12\,U \\ \hline AB=PP=Pq=144\,UU=144\,Uq. \end{array}$$

pedis quadratici tam basis quam altitudo 12 unc: ideoque $AB=PP=Pq=12\,U\times12\,U=144\,UU=144\,Uq$. Hoc est, $Pq=144\,Uq$, vel unus Pes quadraticus æqualis 144 Unciis quadraticis. Et eodem modo, in Virga quadratica, cum tam basis quam altitudo sit pedum 3, erit area $Vq=9\,Pq$. Et similiter alibi.

$$\begin{array}{r} A=V=3\,P \\ B=V=3\,P \\ \hline AB=Vq=9\,Pq \end{array}$$

Hac methodo, *In mensurandis*, verbi gratia, *Asserculis ligneis*; si Asseris unius latitudo A sit duum pedum, longitudo B pedum 20; erit area sive magnitudo $AB=40\,Pq$; hoc est pedum quadraticorum quadraginta.

$$\begin{array}{r} A=2\,P \\ B=20\,P \\ \hline AB=40\,Pq \end{array}$$

Similiter, *Si Camera mensuranda* sit longa pedes 18, lata pedes 12, erit totius area seu magnitudo, pedum quadraticorum $216=12\times18$.

$$\begin{array}{r} A=12\,P \\ B=18\,P \\ \hline AB=216\,Pq \end{array}$$

Pariter,

Pariter, cum *terræ Jugerum Anglicanum* (*Acra*, vulgo dicta) *statuta lege censeatur instar Parallelogrammi Rectanguli, Perticas 4 lati, longi vero 40 : continebit area Perticas quadraticas* 160 = 4 × 40. Vel etiam, cum Perticæ longitudo sit pedum $16\frac{1}{2}$; adeoque 4 Perticæ sint pedes 66 ; & perticæ 40, pedes 660 : Idem terræ Jugerum sive *Acra* *continebit pedes quadraticos* 43560 = 66 × 660.

A = 4 Pert.
B = 40 P.
AB = 160 P q.

A = 66 Ped.
B = 660 P.
AB = 43560 P q.

Hinc etiam patet, *varia esse posse parallelogramma, quorum magnitudo sit æqualis, ambitus autem admodum inæqualis ; & contra*, ambitus æqualis, at magnitudo inæqualis ; & quidem eousque *ut quorum ambitus major est, eorum area seu magnitudo sit minor.* Exempli gratia ;

De Parallelogrammis Rectangulis invicem comparatis.

Sit Rectanguli primi latus quodlibet sex pedum ; erit area, pedum 36 = 6 × 6. Secundi latitudo, pedum 4, longitudo pedum 9 ; erit area, pedum 36 = 4 × 9. Tertii latitudo pedum 3, longitudo 12 ; erit area 36 = 3 × 12. Quarti latitudo pedum 2, longitudo 18 ; erit area 36 = 2 × 18. Quinti denique latitudo 1, longitudo 36 ; erit area item 36 = 1 × 36. Est igitur eadem singulorum area seu magnitudo ; nempe pedum quadraticorum 36 ; at eorum ambitus longe diversi ; quippe primi, pedum 24 = 6 + 6 + 6 + 6 ; secundi, 26 = 4 + 9 + 4 + 9 ; tertii, 30 = 3 + 12 + 3 + 12 ; quarti, 40 = 2 + 18 + 2 + 18 ; quinti, 74 = 1 + 36 + 1 + 36, nempe plus quam triplo major quam primi.

Deinde, sit Rectangulum primum (ut prius) longum & latum pedes 6 : Secundum, latum pedes 5, longum pedes 7 : Tertium, latum 4, longum 8 : Quartum, latum 3, longum 9 : Quintum, latum 2, longum 10 : Sextum, latum 1, longum 11. Erunt hæc omnia Isoperimetra ; quippe perimeter, sive ambitus ubique pedum 24 = 6 + 6 + 6 + 6 = 5 + 7 + 5 + 7 = 4 + 8 + 4 + 8 = 3 + 9 + 3 + 9 = 2 + 10 + 2 + 10 = 1 + 11 + 1 + 11. At magnitudines longe diversæ : quippe primum est pedum quadraticorum 36 = 6 × 6 ; secundum, 35 = 5 × 7 ; tertium, 32 = 4 × 8 ; quartum, 27 = 3 × 9 ; quintum, 20 = 2 × 10 ; sextum denique 11 = 1 × 11, plus triplo minus quam erat primum.

Denique sit expositum Parallelogrammum rectangulum, cujus latitudo sit pedis 1, longitudo, 11 ; adeoque ambitus 24 = 1 + 11 + 1 + 11, area vero pedum quadraticorum 11 = 1 × 11. Ad quod comparentur alia quatuor, quorum primum sit latum pedes 2, longum 9 ; secundum, latum 3, longum 8 ; tertium, latum 4, longum 7 ; quartum latum 5, longum 6. Erit singulorum ambitus minor quam parallelogrammi expositi, (quippe pedum 22, cum illius fuerit pedum 24 :) area vero major ; nempe primi, pedum quadraticorum 18, secundi 24, tertii 28, quarti 30, expositi vero non nisi 11.

Ex quibus omnibus abunde patet, *quam lubricum sit figurarum magnitudinem ex solo ambitu æstimare.*

Porro ; Hinc liquet etiam, *ex Parallelogrammis Rectangulis Isoperimetris* (hoc est, quorum ambitus sunt invicem æquales,) *Quadratum esse omnium maximum* ; *Oblongorum vero illud majus est quod propius ad Quadratum accedit*, hoc est, cujus laterum differentia minor est. Quod sic probatur.

Rectangulorum Isoperimetrorum, quodnam est maximum.

Sit quadrati cujusvis latus A ; erit ipsius quadrati area A × A = A q. Deinde sit Rectangulum oblongum, quadrato illi isoperimetrum : Quod ut fiat, tantun-

$$\begin{array}{r} A \\ +A \\ +A \\ +A \\ \hline 4A \end{array} \qquad \begin{array}{r} A+C \\ +A-C \\ +A+C \\ +A-C \\ \hline 4A \mp 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} A+C \\ \text{in}: A-C \\ \hline Aq+AC \\ -AC-Cq \\ \hline Aq-Cq \end{array} \qquad \begin{array}{r} A \\ \times A \\ \hline Aq \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A+C \\ \text{min}: A-C \\ \hline \text{differ}: \quad 2C \end{array}$$

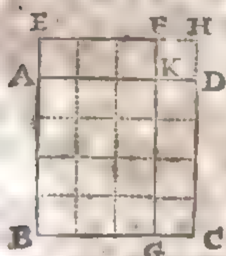
dem addendum est longitudini, quantum latitudini aufertur ; illud autem quantumcunque sit dicatur C ; fietque longitudo A + C, latitudo A − C ; adeoque Rectangulum Quadrato Isoperimetrum, quippe utriusvis ambitus 4 A, ut laterum ubique additione patet. Erit Oblongi hujus area (ductu longitudinis in latitudinem

Q

tudinem inventa) Aq — Cq, (ut multiplicando patet;) adeoque minor quam area quadrati, A q; quod erat primo probandum. Sed & tanto minor est quantum est quadratum quantitatis C, (ut patet;) hoc est, quadratum semidifferentiæ laterum, (nam si ex A + C, auferatur A — C, residuum sive differentia est 2 C, ut subducendo patet:) & propterea quo majus est C q, eo plus ab A q deficit oblongum, & proinde minus est; & contra: quod erat secundo probandum.

Potest quidem hoc ipsum Geometrice demonstrari; at ego demonstrationem Arithmeticam hanc ideo adhibui, quod ea præsenti negotio magis sit accommoda, (dum Arithmetices usum in rebus Geometricis ostendo,) & quidem per se magis universalis. Geometricam vero demonstrationem siquis postulet, hanc habeat.

Sit quadratum quodvis A B C D, (puta longum & latum 4 pedes,) eique isoperimetrum Rectangulum oblongum B E F G, (puta longum pedes 5, latum 3,) tanto nempe magis longum quanto est minus latum quam est Quadratum illud. Est autem rectangulum A K G B utrique illorum commune; cui si addatur rectangulum K C, absolvitur Quadratum A C; sin addatur rectangulum K E, absolvitur oblongum G E. At Additamentum K C majus est additamento K E, (ut mox probabitur,) adeoque (propter commune A G) quadratum A C majus oblongo G E, (quia si æqualibus addantur inæqualia, aggregata erunt inæqualia, illud autem majus ubi plus additur.) Quod autem K C majus est, & quanto majus, quam K E, sic ostenditur.



Rectangulum K C æquatur toti E D (quia longitudines A D, D C, æquales sunt, quippe latera quadrati, & latitudines K F, K D, æquales item ex hypothesi, quippe tantundem additur quadrati longitudini quantum latitudini aufertur; & anguli utrobique recti,) majus igitur est K C quam K E, (quippe æquale toti E D = K E + K H,) eorumque differentia est K H quadratum (propter K F, K D, rectas æquales,) hoc est, quadratum rectæ K F, vel K D, semidifferentiæ laterum. Et propterea, in rectangulis Parallelogrammis Isoperimetris, cujus laterum differentia minor est, illud est majus: & cujus laterum differentia nulla est (nempe quadratum) id omnium maximum. Quod erat demonstrandum.

Divisionis exercitium in Parallelogrammis rectangulis.

Verum ut Multiplicationis ope, quæ jam tradidimus, peracta sunt omnia, ita & Divisione pariter similia fere problemata absolvi possunt. Verbi gratia.

8) 144 (18
A) A B (B

18) 144 (8
B) A B (A.

Cum supra ostensum est, pedem quadraticum valere 144 uncias quadraticas, (quippe 12 x 12 = 144.) Si *asserculus ligneus* sit 8 uncias latus; quæritur quam longus sit oportet, ut habeatur pes quadraticus. Dividendo 144 (aream datam) per 8 (datam latitudinem) habetur longitudo quæsita $18 = \frac{144}{8}$. Quippe area A B per latitudinem A divisa exhibet longitudinem quæsitam B. Sin data esset longitudo 18, area 144 per eam divisa exhiberet latitudinem $8 = \frac{144}{18}$. Vel B) A B (A.

8) 160 (20
20) 160 (8

A) A B (B
B) A B (A

Eodem modo. Cum *Jugerum Anglicanum* (ut supra dictum est) contineat Perticas quadratas 160 = 4 x 40. In agro (parallelogrammo) cujus latitudo est perticarum 8, quæritur, quanta sit oporteat longitudo, ut habeatur Jugerum terræ? Dividendo 160 per 8, habetur longitudo quæsita $20 = \frac{160}{8}$. Vel, data longitudine 20, dividendo habetur latitudo 8. Hoc est A) AB (B. & B) AB (A.

12
20
2) 240 (120

Pari modo, Si *Planities Cameræ* pedes 12 lata, longa vero 20; tegenda sit asserculis ligneis latis pedes 2: quanta sumenda est asserculorum (conjunctorum omnium) longitudo, ut operi sufficiant? Primo, ducta latitudine 12, in longitudinem 20, habetur area pedum quadraticorum 240 = 12 x 20. Deinde, dividendo aream 240, per asserculorum latitudinem 2, habetur longitudo quæsita 120.

24
8
6) 192 (32

Item. Si tapeti *holosericæ* longæ pedes 24, latæ 8; inducendus sit à tergo pannus vilior latitudinem habens pedum 6: quæritur quanta longitudo requiritur ut operi sufficiat? Primo,

Primo, ducendo 24 in 8 habetur area tota $192 = 24 \times 8$. Deinde aream totam 192 per 6 latitudinem panni dividendo, habetur longitudo quæsita, $32 = \frac{192}{6}$. Et similiter alibi.

Atque hactenus tum Multiplicationis tum Divisionis exercitium, in mensurandis Parallelogrammis Rectangulis quantum opus est, ostendimus.

CAP. XXIII.

Euclidis Elementum Secundum Arithmetice demonstratur.

Eadem qua supra methodo; ex solo parallelogrammi rectanguli calculo, totum fere Elementum secundum Euclidis facile demonstratur Arithmetice. Exempli gratia,

1 e 2. *Si sint duæ rectæ* (puta R, B,) *quarum altera* (B) *secetur in quotcunque partes* (puta M, N, O,) *rectangulum duabus illis rectis comprehensum* ($R \times B = RB$,) *æquale est iis rectangulis quæ recta insecta* (R) *& singulis sectæ segmentis comprehenduntur.* Hoc est, Si $B = M + N + O$, est $RB = RM + RN + RO$. Quod ex multiplicationis calculo patet. Vel, si ponantur R, B, M, N, O, æquales numeris 4, 10, 5, 3, 2. erit $4 \times 10 = 4 \times 5 + 4 \times 3 + 4 \times 2$. ut ex calculo item patet.

	M	N	O
R	RM	RN	RO
		B	

$$\begin{array}{l} B = M + N + O \\ \underline{\;R \quad R\;} \\ RB = RM + RN + RO \end{array} \qquad \begin{array}{l} 10 = 5 + 3 + 2 \\ \underline{\;4 \quad 4\;} \\ 40 = 20 + 12 + 8 \end{array}$$

2 e 2. *Si recta linea* (Z) *secetur utcunque* (in A & E,) *rectangula quæ tota & utroque segmento comprehenduntur* (ZA + ZE) *æquantur quadrato totius,* (Zq.) Hoc est, si $Z = A + E$, est $Zq = ZA + ZE$. Vel si tota sit 5, segmenta 3, 2: erit $5 \times 5 = 5 \times 3 + 5 \times 2$.

	Z	
Z	ZA	ZE
	A	E

$$\begin{array}{l} Z = A + E \\ \underline{\;Z \quad Z\;} \\ Zq = ZA + ZE \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5 = 3 + 2 \\ \underline{\;5 \quad 5\;} \\ 25 = 15 + 10 \end{array}$$

3 e 2. *Si recta* (Z) *secetur utcunque* (in A, E,) *Rectangulum tota & uno segmentorum comprehensum* (ZA,) *æquatur rectangulo segmentis comprehenso* (AE) *una cum prædicti segmenti quadrato* (Aq.) Hoc est, Si $Z = A + E$; erit $ZA = AE + Aq$: vel (in numeris) si $5 = 3 + 2$, erit $5 \times 3 = 3 \times 3 + 2 \times 3$.

	Z	
A	Aq	Æ
	A	E

$$\begin{array}{l} Z = A + E \\ \underline{\;A \quad A\;} \\ ZA = Aq + AE \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5 = 3 + 2 \\ \underline{\;3 \quad 3\;} \\ 15 = 9 + 6 \end{array}$$

4 e 2. *Si recta* (Z) *secetur utcunque* (in A, E:) *Quadratum totius* (Zq) *æquale est quadratis segmentorum* (Aq + Eq) *una cum rectangulo segmentis comprehenso, bis sumpto,* (2AE.) Hoc est, Si $Z = A + E$; est $Zq = Aq + Eq + 2AE$. vel (in numeris,) si $5 = 3 + 2$. erit $5 \times 5 = 3 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + 3 \times 2$.

	A	E
A	Aq	Æ
E	Æ	Eq
	Z	

$$\begin{array}{l} Z = A + E \\ \underline{Z \quad A + E} \\ \quad Aq + AE \\ \underline{\qquad + AE + Eq} \\ Zq = Aq + 2AE + Eq \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5 = 3 + 2 \\ \underline{5 \quad 3 + 2} \\ \quad 9 + 6 \\ \underline{\qquad + 6 + 4} \\ 25 = 9 + 12 + 4 \end{array}$$

5 e 2. *Si recta* (Z) *secetur in segmenta æqualia* (S, S,) *& inæqualia* (A, E, vel S + V, S − V,) *rectangulum segmentis totius inæqualibus comprehensum,* (A E,) *una cum quadrato rectæ inter puncta sectionum* (V q;) *æquatur quadrato dimidiæ.* (S q.) Hoc est, Si $Z = 2S = A + E$, sitque $S + V = A$, $S - V = E$, (adeoque $A - S = V = S - E$.) Erit $AE + Vq = Sq$. Vel (in numeris) si $12 = 6 + 6 = 8 + 4$; adeoque $8 - 6 = 2 = 6 - 4$. Erit $8 \times 4 + 2 \times 2 = 6 \times 6$.

Z: S | V + E (= S) ; S + V (= A) | E

6 | 2 + 4 (= 6) ; 6 + 2 (= 8) | 4 = 6 − 2

$$\begin{array}{ll} S + V = A & 6 + 2 = 8 \\ S - V = E & 6 - 2 = 4 \\ \hline Sq + SV & 36 + 12 \\ \quad - SV - Vq & \quad - 12 - 4 \\ \hline Sq - Vq = AE & 36 - 4 = 32 \\ Sq = AE + Vq & 36 = 32 + 4 \end{array}$$

6 e 2. *Si recta* (2 E) *bifariam secetur; eique adjiciatur in directum recta quædam* (X:) *Rectangulum quod tota cum adjecta* (2 E + X quæ dicatur Z) *& ipsa adjecta* (X) *comprehenditur* (Z X;) *simul cum quadrato dimidiæ* (E q:) *æquatur* (A q) *quadrato compositæ ex dimidia & adjecta;* (E + X, quæ dicatur A.) Hoc est, si $E + E + X = Z$, & $E + X = A$: erit $ZX + Eq = Aq$. Vel (in numeris) si $3 + 3 + 4 = 10$, & $3 + 4 = 7$: erit $10 \times 4 + 3 \times 3 = 7 \times 7$.

Z (= E | E | X) ; E | E + X (= A)

$$\begin{array}{ll} Z = 2E + X & E + X = A \\ \times X \qquad \times X & E + X = A \\ \hline ZX = 2EX + Xq & Eq + EX \qquad A \\ + Eq \qquad + Eq & \quad + EX + Xq \qquad \times A \\ \hline \multicolumn{2}{l}{ZX + Eq = Eq + 2EX + Xq = Eq + 2EX + Xq = Aq} \end{array}$$

10 (= 3 | 3 | 4) ; 3 | 3 4 (= 7)

$$\begin{array}{ll} 10 = 6 + 4 & 3 + 4 = 7 \\ \times 4 \qquad \times 4 & 3 + 4 = 7 \\ \hline 40 = 24 + 16 & 9 + 12 \qquad 7 \\ + 9 \qquad + 9 & \quad + 12 + 16 \qquad \times 7 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{40 + 9 = 9 + 24 + 16 = 9 + 24 + 16 = 49} \end{array}$$

Sed & hæc cum præcedente sic conjunctim efferri potest. *Si ab assignato in eadem recta (utcunque continuata) puncto* M, *sumantur tum æquales utrinque rectæ* M L, M N, *tum punctum* D *ubivis: rectangulum* L D N *æquabitur differentiæ quadratorum rectarum* M D, M L *vel* M D, M N. Quod sic ostenditur.

M L = M N dicatur S; M D dicatur V. Duarum igitur D L, D N, (ubicunque sumatur D) altera erit S + V (summa duarum S, V,) altera S − V) differentia duarum S, V,) ut schematis inspectu patet. Ideoque

L M N

$$\begin{array}{ccccccc} & & L & M & N & & \\ \ldots & & \overline{} & \overline{} & \overline{} & & \ldots \\ D & & D & D & & D & \end{array}$$

$$LD \times DN = \left\{\begin{array}{c} S+V \\ \text{in} \\ S \backsim V \end{array}\right\} = Sq \backsim Vq = MLq \backsim MDq.$$

Ubi notandum est $S \backsim V$ interpretandum esse nunc per $S - V$, nunc per $V - S$, prout S vel V major fuerit, (hoc est, prout D vel intra vel extra puncta L, N, fuerit assignatum,) & proinde $Sq \backsim Vq$ illic erit $Sq - Vq$, hic $Vq - Sq$. Ut multiplicando patebit.

$$\begin{array}{ll} S+V & \\ S-V & \\ \hline Sq+SV & \\ \quad -SV-Vq & \\ \hline Sq-Vq & \\ MLq-DMq & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} V+S & \\ V-S & \\ \hline Vq+VS & \\ \quad -VS-Sq & \\ \hline Vq-Sq & \\ MDq-MLq. & \end{array}$$

7 e 2. *Si recta* (Z) *secetur utcunque* (puta, in A, E:) *quadrata totius* (Zq) *& unius ex segmentis* (puta Aq) *simul sumpta,* (Zq + Aq,) *æquantur rectangulo bis comprehenso a tota & dicto segmento* (2ZA) *una cum quadrato reliqui segmenti* (Eq.) Hoc est, si $Z = A + E$, erit $Zq + Aq = 2ZA + Eq$; Item $Zq + Eq = 2ZE + Aq$. Et similiter in numeris, quod experienti patebit.

$$\begin{array}{l} \quad Z = A + E \\ \times Z = A + E. \\ \hline \quad Zq = Aq + 2AE + Eq \\ +Aq \qquad +Aq \end{array} \qquad \begin{array}{l} A + E = Z \\ \;\; 2A \quad 2A \\ \hline 2Aq + 2AE = 2ZA \\ \quad +Eq \qquad +Eq \end{array}$$

$$Zq + Aq = 2Aq + 2AE + Eq = 2Aq + 2AE + Eq = 2ZA + Eq$$

$$\begin{array}{l} \quad Z = A + E \\ \times Z = A + E \\ \hline \quad Zq = Aq + 2AE + Eq \\ +Eq \qquad\qquad +Eq \end{array} \qquad \begin{array}{l} A + E = Z \\ \times 2E \quad \times 2E \\ \hline 2AE + 2Eq = 2ZE \\ +Aq \qquad\quad +Aq \end{array}$$

$$Zq + Eq = Aq + 2AE + 2Eq == Aq + 2AE + 2Eq = 2ZE + Aq$$

8 e 2. *Si recta* (Z) *secetur utcunque* (in A, E,) *rectangulum quater comprehensum a tota & uno ex segmentis* (puta 4ZA) *una cum quadrato reliqui segmenti* (Eq) *æquatur quadrato compositæ a tota & prædicto segmento* (Q: Z + A.) Hoc est, Si $Z = A + E$; erit $4ZA + Eq = Q{:}Z + A{:} = Zq + 2ZA + Aq$. Et (eadem ratione) $4ZE + Aq = Q{:}Z + E$. Et in numeris pariter.

$$\begin{array}{l} \quad Z = A + E \\ \times 4A \quad \times 4A \\ \hline 4ZA = 4Aq + 4AE \\ +Eq \qquad +Eq \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2A + E = Z + A \\ 2A + E = Z + A \\ \hline 4Aq + 2AE \\ \quad + 2AE + Eq \end{array}$$

$$4ZA + Eq = 4Aq + 4AE + Eq = 4Aq + 4AE + Eq = Q{:}Z + A.$$

$$\begin{array}{l} \quad Z = A + E \\ \times 4E \quad \times 4E \\ \hline 4ZE = 4AE + 4Eq \\ +Aq \quad +Aq \end{array} \qquad \begin{array}{l} A + 2E = Z + E \\ A + 2E = Z + E \\ \hline Aq + 2AE \\ \quad + 2AE + 4Eq \end{array}$$

$$Aq + 4ZE = Aq + 4AE + 4Eq = Aq + 4AE + 4Eq = Q{:}Z + E.$$

9 e 2. *Si recta* (Z) *secetur tum in segmenta æqualia* (S, S,) *tum inæqualia* ($A = S + V$, $E = S - V$;) *quadrata inæqualium segmentorum* (Aq + Eq) *sunt dupla quadratorum e dimidia & e recta inter puncta sectionum,* (2Sq + 2Vq.)

Hoc est, Si $Z = S + S = A + E$. & $A = S + V$, $E = S - V$. erit $Aq + Eq = 2Sq + 2Vq$.

$$\begin{array}{l} Aq = Q:S+V: = Sq + 2SV + Vq \\ Eq = Q:S-V: = Sq - 2SV + Vq \\ \hline Aq + Eq = = = 2Sq + 2Vq \end{array}$$

10 e 2. *Si recta* (2 E) *secetur bifariam, eique recta quædam* (X) *indirectum adjiciatur; quadratum compositæ ex tota & adjecta* (Q: 2E + X: = Zq) *& quadratum adjectæ* (Xq) *simul sumpta, sunt dupla quadratorum dimidiæ* (2 Eq) *& compositæ ex dimidia & adjecta*, (2 Q: E + X: = 2 Aq.) Hoc est, Si $2E + X = Z$, & $E + X = A$; erit $Zq + Xq = 2Eq + 2Aq$.

$$\begin{array}{llll} Zq = Q:2E+X: = & 4Eq + 4EX + Xq & Q:E+X: = Eq + 2EX + Xq = & Aq \\ + Xq & \quad\quad + Xq & \quad + Eq & + Eq \\ \hline Zq + Xq = & 4Eq + 4EX + 2Xq \text{ dupl: } & 2Eq + 2EX + Xq = & Aq + Eq: \end{array}$$

Sed & hanc cum præcedente sic conjunctim efferre licet. *Si ab assignato, in eadem recta* (*utcunque continuata*) *puncto* M, *sumantur tum utrinque æquales rectæ* L M, M N, *tum punctum* D *ubivis: duo simul quadrata rectarum* L D, D N, *dupla sunt duorum simul quadratorum rectarum* D M, M N, *vel* D M, M L. Hoc est $DLq + DNq = 2MDq + 2MNq = 2MDq + 2MLq$. Quod sic ostenditur. $ML = MN$ dicatur S. MD dicatur V. Duarum igitur DL, DN, (ubicunque sumatur D) altera erit $S + V$ (summa duarum S, V,) altera $S \backsim V$ (differentia duarum S, V.) ut schematis inspectu patet. Ideoque

```
 L    M    N
....————————....
D    D    D    D
```

$$\begin{array}{l} Q:S+V: = Sq + 2SV + Vq \\ +Q:S \backsim V: = Sq - 2SV + Vq \\ \hline DLq + DNq = 2Sq + 2Vq = 2MLq + 2MDq. \end{array}$$

Ubi notandum est $S \backsim V$ interpretandum esse nunc per $S - V$, nunc per $V - S$, prout S vel V major fuerit, hoc est, prout D fuerit intra vel extra puncta L, N. Sed quadratum utrobique tantundem erit, ut multiplicando patet.

$$\begin{array}{ll} S - V & V - S \\ S - V & V - S \\ \hline Sq - SV & Vq - SV \\ \quad - SV + Vq & \quad - SV + Sq \\ \hline Sq - 2SV + Vq = & Vq - 2SV + Sq \end{array}$$

Atque hactenus decem primores propositiones secundi Elementi Euclidis demonstravimus Arithmetice. Reliquæ quæ supersunt quatuor, Arithmetice item demonstrari possunt, sed assumptis in auxilium aliis quam quæ adhuc exposuimus principiis Geometricis, quibus itaque impræsentiarum supersedendum duxi. Sed & aliæ passim apud Euclidem (aliosque) propositiones occurrunt Geometricæ, quæ hujusmodi calculo Arithmetico facillime demonstrantur. Sufficit autem præsenti nostro instituto specimen in paucis exhibuisse.

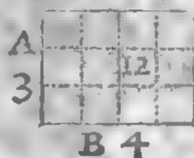
CAP.

CAP. XXIV.

Geodæsia Parallelogrammi Rectanguli; Obliquanguli; cujusvis. Mensuratio Trianguli Rectanguli; Obliquanguli; cujusvis. Mensuratio cujusvis figuræ rectilineæ. Mensuratio figuræ regularis. Mensuratio circuli, ejusque portionum, sectorum, & segmentorum. De circuli quadratura, & ratione perimetri ad diametrum. De figuris mistis. De figurarum metamorphosi.

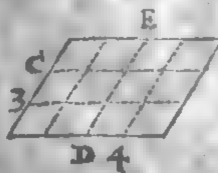
De Geodæsia Parallelogrammi Rectanguli.

OStendimus (in Capite 22) methodum Parallelogramma Rectangula mensurandi, & inter se comparandi. Nempe *Parallelogrammi Rectanguli cujusvis area, æqualis est quantitati quæ ex duarum rectarum circa angulum rectum, invicem ductu emergit.* Ut, si latitudo A=3 ducatur in longitudinem B=4, emergit area AB=12. Adeoque, verbi gratia, Rectangulum latum 3 pedes, & longum 4, continet pedes quadratos 12. Quod etiam liquet in Parallelogrammo apposito in 12 spacia quadrata diviso, quorum singula latera sint (puta) pedalia.



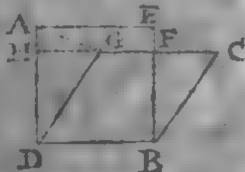
De Parallelogrammis Obliquangulis.

At interrogabitur forsan, Cur hoc ad Parallelogrammum Rectangulum restringatur; cum idem videatur dicendum de Obliquangulo. Puta, si lineæ C, D, circa angulum acutum, (vel etiam C, E, circa angulum obtusum,) invicem multiplicentur, quarum altera sit 3, altera 4 pedes longa; emergit numerus 12: ipsumque Parallelogrammum Obliquangulum in totidem spatia dividitur æqualia, quorum item latera singula contineant (puta) pedem unum; non minus quam si esset parallelogrammum Rectangulum.



Respondeo; *Posse quidem Parallelogrammum, etiam Obliquangulum, in totidem spatia æqualia & similia dividi, quot indicat mutua multiplicatio laterum duorum circa ipsius quemvis angulum constitutorum; eorumque spatiorum latera esse æqualia, (puta unius pedis singula) non minus quam si parallelogrammum fuisset Rectangulum. Sed nego spatia illa esse pedes quadratos, aut quidem totidem quadratis pedibus æqualia, utut quatuor lineis pedalibus terminentur singula. Rhombi* nempe sunt, non quadrata, propter obliquitatem angulorum, cum quadrata omnia (ex definitione) sint rectangula. Sed & *quadratis minora* sunt, propter eandem obliquitatem: quod ipsum evenit in aliis parallelogrammis omnibus, sive æquilatera sint, sive inæquilatera, hoc est, sive sint Rhombi sive Rhomboidea; minora nempe sunt quam si essent rectangula, quamvis iisdem lineis terminata. Quod sic demonstro Geometrice: (quippe cum de solo situ agitur, qui ad Geometriam peculiariter attinet, demonstratio Arithmetica vix locum habet.)

Sit parallelogrammum Rectangulum AB, eique Isoperimetrum Obliquangulum DC, ita ut latus DB sit utrique commune, & DG ipsi DA æquale, (reliquaque latera sibi oppositis parallela & æqualia.) Quamvis autem latera BC, DG, parallelogrammi obliquanguli, sint sigillatim æqualia lateribus BE, DA, parallelogrammi Rectanguli, (& reliqua reliquis;) est tamen ipsum parallelogrammum Obliquangulum DC, minus Rectangulo AB, æquale quippe Rectangulo HB. Producatur enim latus CG ad H: eritque GH=CF, (quia tam CG quam FH æquatur ipsi BD, opposito lateri in utroque parallelogrammo; &, eadem ratione, HD=FB,) & DG=BC, (sed & anguli ad B, C, F, æquales angulis ad D, G, H,) æquale est igitur triangulum DHG, triangulo BFC, (eique congruit;) quorum priori



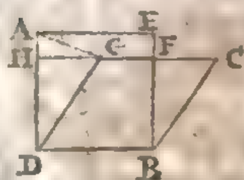
priori si addatur commune segmentum H D F G, fit parallelogrammum rectangulum H B; sin posteriori, fit obliquangulum C D, quod igitur ipsi H B æquale est, & propterea minus quam A B, quod erat demonstrandum. Et similiter procederet demonstratio in parallelogrammo quovis obliquangulo,

Patet igitur 12 Rhombos Parallelogrammi propositi Obliquanguli D C, minores esse totidem Quadratis Rectanguli, A B, utut tam hæc quam illi quaternis lineis pedalibus terminentur.

Si quæratur insuper, Quid impediat quo minus mensuras exprimere liceat per Rhombos æque ac Quadrata? Respondeo, Magnitudines explicandas esse per mensuras certas, (secus enim de magnitudine non constabit,) ideoque per Quadrata potius quam per Rhombos. Cum enim Quadratorum omnium anguli recti sint, adeoque invicem æquales, dato illic latere de magnitudine constabit; Rhomborum autem anguli cum possint majus minusve obliqui esse, dato latere non tamen de magnitudine constabit, quæ quidem major minorve erit, prout obliquitas minor majorve fuerit. Non igitur Rhombis sed Quadratis potius determinandæ sunt figurarum magnitudines.

Addo tamen, si non de Rhombis utcunque sumptis, sed de Rhombis in certo quovis obliquationis angulo, agatur; non minus certa est Rhombi mensura quam Quadrati. Verbi gratia, in oblongo C D obliquangulo non minus certum est tot pedales Rhombos, in eodem, cum ipso oblongo, inclinationis angulo, contineri, quot in oblongo Rectangulo A B continentur Quadrata pedalia; (propter latera utrobique sigillatim æqualia.) Et quidem propositiones illæ omnes quæ superius (ex Euclide) demonstrantur de Quadratis & Rectangulis, non minus valent de Rhombis & Rhomboidibus in eodem quocunque inclinationis angulo. Quod quidem notare magno esse potest usui Geometris.

Parallelogrammi Obliquanguli Geodæsia.



Patet autem, ex jam dictis, methodus mensurandi Parallelogramma Obliquangula. Non quidem ex ductu D B in B C, sed D B in B F vel in D H. Cum enim, ut modo demonstratum est, Parallelogrammum Obliquangulum CD, æquale sit Rectangulo H B; eadem erit utriusque area seu magnitudo. At ex ductu D B in B F, vel in DH, habetur area rectanguli H B (per ea quæ dicta sunt Cap. XXII.) ergo & Obliquanguli C D.

Parallelogrammi cujusvis Geodæsia.

Hoc est, *Si in Parallelogrammo quolibet, (sive Rectangulo sive Obliquangulo,) a latere quovis ad oppositum ducatur perpendicularis, eaque in eorum utrumvis multiplicetur, prodibit Parallelogrammi area.*

Atque hujus quidem operationis ratio, præterquam quod jam fuerit demonstrata, hinc satis intelligi potest, si advertamus, quod, si in parallelogrammo quovis (puta G B) unum aliquod ex lateribus pro longitudine habeatur (puta DB,) ejusdem latitudo æstimanda erit non ex linea utcunque transversim ducta (ita enim latitudo esset plane incerta, & modo major modo minor dicenda, prout illius transversæ lineæ ad arbitrium sumptæ minor majorve fuerit obliquitas) sed ex linea directe sive perpendiculariter transeunte; puta non ex linea inclinata D G vel B C, sed B F vel D H. Et quidem si supponatur asserculus, in illa forma constitutus, longitudinem habere D B quantamcunque, ejus latitudo non æstimanda erit (ne quidem usu communi) quanta est D G, sed quanta est B F, aliave ejusmodi recta perpendiculariter ducta. Quæ quidem ut transeuntium omnium est brevissima, ita sola certa est; cum quæ oblique transeunt, pro variata obliquitate, variant etiam longitudinem.

Atque hæc de magnitudine parallelogrammi dixisse sufficiat. Nempe, si *Parallelogrammum comparare libeat (non præcise ad quadratum, sed) ad Quadrangulum æquilaterum, (sive quadratum fuerit, sive Rhombus,) quod exposito Parallelogrammo sit æquiangulum, hoc est, pariter inclinatum; ducenda sunt invicem duo latera ad eundem quemlibet angulum constituta: Si vero Parallelogrammum, utcunque inclinatum, ad solum Quadratum comparare placeat; ducendum est latus quodvis in rectam ab eo latere ad latus oppositum perpendiculariter ductam.* Qui quidem duo rectarum invicem ductus, in parallelogrammo Rectangulo, tantundem valent; in Obliquangulo, non item.

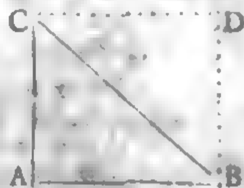
Quæ autem de Multiplicatione jam dicta sunt, & de Divisione (mutatis mutandis) intelligenda sunt. Quippe *quod Multiplicatione conficitur, id Divisione dissolvitur.*

dissolvitur. Ut igitur ex datis longitudine & latitudine, (sive in Parallelogrammo rectangulo, sive obliquangulo,) habetur area multiplicando: sic ex data area cum longitudine, habetur latitudo; vel ex data area cum latitudine, habetur longitudo, dividendo. Atque de Parallelogrammis hactenus.

Cum autem Geodæsiam jam sim aggressus, hoc est, mensurationem Planorum; operæ pretium erit etiam alia breviter attexere quæ eo spectant, ut totum illud plana mensurandi negotium, saltem prout præsentis instituti ratio postulat, absolvam. Illud vero, quantum superest, mensuratione Trianguli fere totum perficitur.

Est autem *Triangulum* (intellige *figuram planam tribus rectis terminatam*) vel *Rectangulum, cujus alter angulus est rectus* (nam plures esse recti non possunt;) vel *Obliquangulum, cujus omnes anguli sunt obliqui*: Hoc autem, vel *Obtusangulum, cujus unus aliquis angulus* (quippe plures non possunt) *obtusus est*; vel *Acutangulum, cujus anguli omnes sunt acuti.* *Mensuratio Trianguli.*

Aggrediar primo, Triangulum Rectangulum. Est autem *omne Triangulum Rectangulum, Parallelogrammi Rectanguli dimidium.* Si enim Parallelogrammum Rectangulum quodvis (puta A D) diagonali linea (CB) secetur, dividitur illud in duo triangula (A B C, B C D,) ut patet; quorum utrumque est Rectangulum, (propter angulos ad A & D rectos;) sed & invicem æqualia, (propter angulos æquales rectos ad A & B, & latera respective æqualia;) & proterea utrumlibet parallelogrammi dimidium. Et contra, si Triangulum Rectangulum quodlibet (puta A B C) duplicetur, ita nempe ut latera secundi circa angulum rectum sint homologis lateribus prioris parallela, & latus reliquum utrique triangulo commune, fiet rectangulum parallelogrammum. Si enim sumatur latus C D æquale & parallelum lateri A B, & similiter B D lateri A C, (quæ propterea convenient in angulo recto ad D,) habebitur triangulum exposito simile & æquale, complens parallelogrammum rectangulum. *Trianguli Rectanguli.*



His positis; cum ex jam dictis innotescat area parallelogrammi A D, innotescet etiam area trianguli A B C, quod nempe istius est dimidium. Est autem area parallelogrammi A D, quantitas producta ex ductu lateris A B in A C, puta AC × A B; adeoque area trianguli (quippe illius semissis) ½ A C × A B. Vel, si altitudo A C dicatur A, & basis A B dicatur B, erit area Parallelogrammi A B, area Trianguli ½ A B. Ideoque

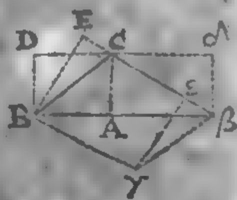
In Triangulo Rectangulo, si laterum circa angulum rectum, ducatur alterum in alterius dimidium, emergit area Trianguli. Quippe dimidium areæ parallelogrammi. Atque hinc quidem *ex datis trianguli rectanguli lateribus circa angulum rectum constitutis* (quarum alterum Basin, alterum Altitudinem exhibet,) *multiplicando cognoscitur ejusdem area.*

A
B
2) A B.

Contra vero; *Ex cognitis area & laterum eorum uno, innotescit alterum, dividendo.* Nempe, si duplum areæ (A B) per altitudinem dividatur, habetur Basis; sin per basin, habetur altitudo. Puta A) A B (B. B) A B (A. Atque de Triangulo Rectangulo hactenus.

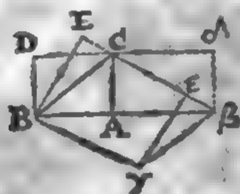
A) A B (B
B) A B (A

Trianguli Obliquanguli (sive Acutangulum sit, sive Obtusangulum,) calculus à Trianguli Rectanguli calculo dependet. Demissa enim ab angulo quovis in latus oppositum perpendiculari emergunt duo Triangula Rectangula; ex quorum calculo cognoscitur area Trianguli expositi. Exempli gratia, In triangulo B β C, ab angulo C demissa perpendiculari C A, (unde fiunt ad A anguli utrinque recti) emergunt triangula rectangula C A B, C A β. Si igitur C A dicatur A, A B dicatur b, A β dicatur β, & B β dicatur B = b + β: erit (per modo demonstrata) ½ A b area trianguli C A B, ½ A β area trianguli C A β, ideoque ½ A b + ½ A β = ½ A B area totius C B β = C A B + C A β. Hoc est, *Trianguli Obliquanguli.*



Si trianguli cujusvis Altitudo (*sive perpendicularis a vertice ad basin*) *ducatur in semissem Basis,* (*vel Basis in semissem altitudinis,*) *emergit area trianguli.*

R b + β



$$\begin{array}{c} b+\beta=B \\ \tfrac{1}{2}A \qquad \tfrac{1}{2}A \\ \hline \tfrac{1}{2}Ab+\tfrac{1}{2}A\beta=\tfrac{1}{2}AB \end{array}$$

Notandum autem est, *quod in triangulo Obtusangulo, si ab utrovis acutorum angulorum demittatur perpendicularis* (ut nempe angulus ille acutus, puta B, habeatur pro vertice trianguli, & laterum breviorum alterum, Cβ, pro base,) *perpendicularis illa* (puta BE) *cadet extra expositum triangulum in basin productam*; (quod Geometrice, si opus sit, facile est probatu :) invariata tamen præcedentis regulæ veritate ; quæ quidem hic Subductione colligitur, sicut in præcedente exemplo Additione. Quod sic ostenditur.

Trianguli BEβ rectanguli (propter angulum rectum ad E, demissâ perpendiculari factum,) area habetur ex ductu altitudinis BE in ½Eβ, semissem basis ; Trianguli vero BEC (pari de causa) ex ductu ejusdem altitudinis BE in ½EC semissem basis suæ ; Horum itaque triangulorum differentia, quod est ipsum triangulum BCβ expositum, est ½Eβ×BE − ½EC×BE, quod tantundem est atque ½Eβ − ½EC (hoc est ½Cβ) in BE. (Nam Eβ − EC = Cβ, ideoque ½Eβ − ½EC = ½Cβ, vel $\frac{E\beta - EC}{2} = \frac{C\beta}{2}$.) Itaque & hoc pacto emerget area æqualis semissi altitudinis in basin ductæ.

$$\begin{array}{c} \tfrac{1}{2}E\beta - \tfrac{1}{2}EC = \tfrac{1}{2}C\beta \\ \times BE \\ \hline \tfrac{1}{2}E\beta\times BE - \tfrac{1}{2}EC\times BE = \tfrac{1}{2}C\beta\times BE \end{array}$$

Sed & idem aliter ostenditur ; (Atque eadem opera, non modo Triangulum rectangulum, quod modo dictum est, sed & *Triangulum quodvis rectilineum esse Parallelogrammi dimidium.*) Si Triangulum expositum BCβ (sive Rectangulum, sive acutangulum, sive obtusangulum) super basi Bβ constitutum (ita nempe ut perpendicularis à vertice cadat intra Triangulum) inscribatur Parallelogrammo Rectangulo super eadem base, eandem item altitudinem habenti cum ipso triangulo, nempe Dβ. Cum enim triangula rectangula CAB, CAβ, sint sigillatim æqualia semissibus parallelogrammorum AD, Aδ ; erit & aggregatum illorum, hoc est, Triangulum BCβ, semissi totius Dβ parallelogrammi (ex duobus AD, Aδ, aggregati) æquale.

Sin extra triangulum cadat perpendicularis (quod in triangulo Obtusangulo fieri posse diximus) illud idem ostenditur hoc pacto. Completo parallelogrammo BCβγ (ductis nempe Bγ, βγ, lateribus trianguli BC, βC, parallelis) erunt duo triangula BCβ, βγB, invicem similia & æqualia, & propterea utrumvis, parallelogrammi semissis : At parallelogrammum illud æquatur rectangulo, altitudine BE vel γε, & basi Cβ vel Bγ, comprehenso (ut supra ostensum est,) ergo Triangulum ejusdem semissi æquatur : nempe semissi quantitatis factæ ex ductu basis Cβ in altitudinem BE, vel quantitati factæ ex ductu semissis basis in totam altitudinem, vel semissis altitudinis in totam basin ; quæ omnia tantundem valent ; quippe $\frac{C\beta\times BE}{2} = \tfrac{1}{2}C\beta\times BE = C\beta\times\tfrac{1}{2}BE$.

Trianguli cujusvis.

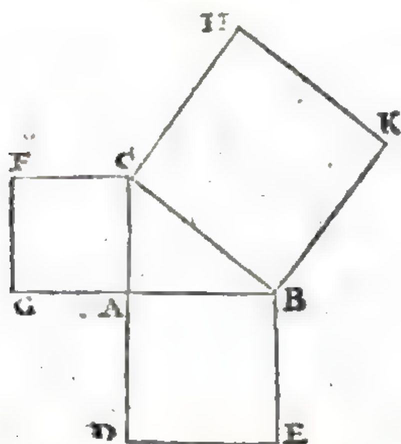
Patet igitur universim methodus mensurandi *Triangulum quodvis* (sive Rectangulum sive Obtusangulum sive Acutangulum.) Nempe, *a quovis ipsius angulo demissa in latus oppositum* (productum, si opus,) *perpendiculari* ; *harum rectarum* (scil. perpendicularis, & dicti lateris,) *si altera in alterius semissem ducatur, prodibit area Trianguli.* Contra vero ; *Si areæ duplum per earum rectarum alteram dividatur, habetur reliqua* : puta si per basin, habetur perpendicularis sive altitudo ; si per altitudinem, habetur basis. Atque de Triangulis mensurandis hactenus.

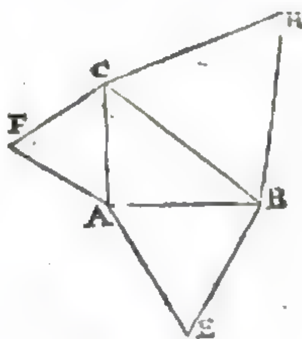
Mensuratio figuræ cujusvis rectilineæ.

Exposita jam methodo mensurandi quodvis sive Parallelogrammum sive Triangulum ; eadem opera & figuras alias rectilineas qualcunque mensurare docuimus : saltem si illud addatur *Figuram quamvis rectilineam vel in Parallelogramma dividi posse, vel saltem in Triangula* : Ex quorum igitur calculo, propositæ figuræ calculus statim innotescit.

Exempli

Exempli gratia. Figurarum appositarum altera in tria Quadrata & unum Triangulum dividitur; Altera, in quatuor Triangula. Quæ si seorsim mensurentur; illorum aggregatum priori, horum posteriori figuræ æquatur. Atque eodem prorsus modo faciendum erit in figuris quibusvis multangulis, præsertim irregula-

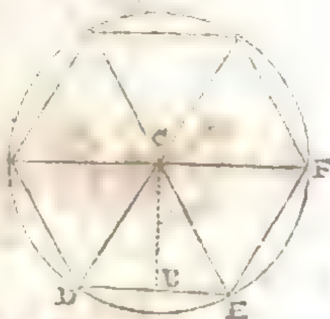




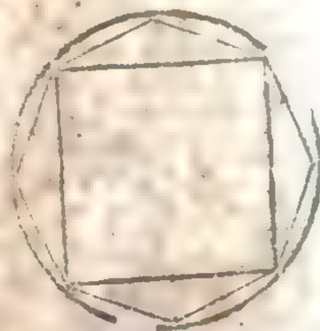
ribus; resoluta scilicet figura multangula in tot parallelogramma vel triangula quot figuræ ratio postulat, & prout Calculo magis videbitur expedire; quod cujusque prudentiæ permittendum erit.

Si vero figura mensuranda, quotcunque demum habuerit latera, Regularis sit; hoc est, *quæ tum omnia latera invicem æqualia, tum omnes angulos item æquales habeat*: calculus sic commode poterit institui. *Invento figuræ regularis centro,* (quod & circuli sive inscripti sive circumscripti centrum est, ut ex principiis Geometricis liquet, & à singulis lateribus æqualiter distans;) *recta a centro in latus quodvis perpendicularis, si in semiperimetrum multiplicetur, figuræ regularis aream exhibebit.* *Mensuratio figuræ regularis.*

Exempli gratia. Sit Sexangulum regulare (puta æquilaterum & æquiangulum) circulo inscriptum. A centro C ad latus quodvis DE agatur perpendicularis CB; hæc ducta in semissem perimetri sexanguli, vel hujus semissis in perimetrum, exhibet totius aream. Nam, ductis cruribus CD, CE, formatur triangulum CDE, cujus area est $CB \times \frac{1}{2} DE$, vel $\frac{1}{2} CB \times DE$, (ut ex calculo trianguli superius tradito liquet.) Item, ductis insuper ab eodem centro C ad reliquos sexanguli angulos totidem rectis, constituentur tot triangula quot sunt figuræ latera; eruntque ea singula triangulo CDE æqualia per 4 & 8 e. 1. (propter tum æquales rectas à centro, quippe quæ sunt radii circuli ambientis, tum æquales item rectas in ambitu figuræ, ut quæ supponitur æquilatera:) toties itaque repetenda erit præcedens mensuratio, quot sunt figuræ latera, quia tot erunt triangula invicem æqualia; puta CDE = CEF, &c. figuram integram complentia. Hoc est, in exposita figura sexangulari, area trianguli CDE sexies repetita, exhibet totius aream, puta $6\,CB \times \frac{1}{2} DE$ vel $\frac{1}{2} CB \times 6\,DE$, vel $CB \times 3\,DE$; ducto nempe $\frac{1}{2}$ CB semisse perpendiculi, in perimetrum 6 DE; vel perpendiculari CB in semissem perimetri 3 DE. Atque similiter faciendum erit in alia quavis figura regulari sive plurium sive pauciorum laterum.

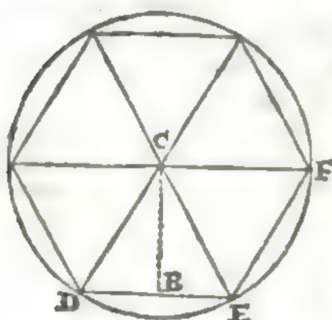


Quod autem de figura regulari rectilinea dictum est, idem & de circulo dicendum est. Est enim *circulus figurarum planarum omnium maxime regularis*; omnes enim à centro ad circumferentiam lineæ quorsumcunque ductæ æquales sunt, & æquales ad circumferentiam constituunt angulos. *Omnesque* *Mensuratio circuli, ejusque portionum.*



que figuræ regulares, quo plura habent latera, eo propius ad circulum accedunt; (ut, in appoſito ſchemate, Octogonum magis quam Tetragonum; & pariter in aliis.) Quod ſi figura regularis ſupponatur laterum numero infinitorum, circulus erit. *Perinde enim eſt ſive Peripheriam circuli unica linea curva conſtare dicamus, ſive rectis numero infinitis.*

Si itaque circulum conſideremus tanquam figuram planam maxime regularem, laterum numero infinitorum; omneſque angulos, linea à centro ad peripheriam ducta factos, utrinque æquales conſtitui, ideoque rectos, (ut nos alibi, ubi *Angulum Contactus & Semicirculi* tractamus oſtendimus,) rectamque a centro ductam perimetro perpendicularem: *Quantitas producta ſive ex ductu radii in ſemicircumferentiam, ſive ſemiradii in circumferentiam, erit area circuli.* Puta $\frac{1}{2}$ CD × DEFD, vel CD × $\frac{1}{2}$ DEFD.



Sectorum. Cognita autem methodo menſurandi circulum integrum, innoteſcit etiam methodus menſurandi portionem circuli (arcu & recta una pluribuſve comprehenſam.) Nempe, ut $\frac{1}{2}$ CD in totam perimetrum DEFD dat aream totius circuli; ſic eadem $\frac{1}{2}$ CD in DE, perimetri ſextantem, dat aream ſextantis circuli; puta Sectoris DCE: eademque $\frac{1}{2}$ CD in DF, perimetri trientem, exhibet aream trientis circuli, puta ſectoris DCF. Et ſimiliter de Sectoribus aliis, qui arcu quovis & rectis duabus in centro C coeuntibus terminantur, judicandum erit.

Segmentum. Sin menſurandum eſſet ſegmentum DEB, arcu DE rectaque DBE comprehenſum. Cognita menſura Sectoris DCE, ſi inde auferatur area trianguli DEC, quod reſtat eſt area ſegmenti minoris DEB. Atque hoc quidem ſegmentum minus, ſi ex integro circulo auferatur, relinquet majoris ſegmenti aream EFDB.

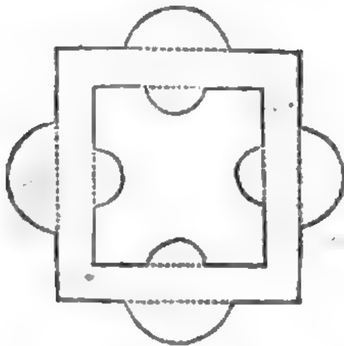
Denique, Si alia quæcunque circuli portio arcu & rectis utcunque poſitis contenta, menſuranda proponatur: id fiet, Sectori, ſuper arcum illum conſtituto, addendo vel auferendo triangulum unum aut plura, prout res poſtulaverit. Puta ſi quod rectis ED, DC, CF, & arcu FE continetur, menſurandum ſit; Sectori ECF, addendum erit triangulum EDC. Et ſimiliter alibi.

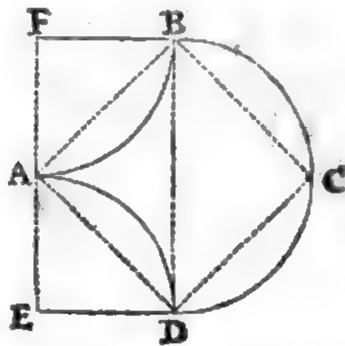
De Circuli quadratura. Quod autem de circuli menſura jam dicitur, aut ſegmentorum, non ita intellectum velim, acſi jam diu quæſitam circuli quadraturam hic doceam. Utut enim Mathematice verum ſit, Aream Circuli parallelogrammo quod ſemidiametro & ſemicircumferentia continetur æqualem eſſe, (quod ab Archimede demonſtratis convenit:) Ratio tamen Radii ad Perimetrum circuli, ita ut uno cognito alterum innoteſcat, nondum reperta eſt numeris explicabilis, ne quidem irrationalibus, (fortaſſe nec reperienda, de quo alibi à nobis fuſius dictum eſt, in noſtra *Arithmetica Infinitorum*:) neque etiam Geometrice Regula & Circino exhibenda. Quod cum ſe inveniſſe putaverint, poſt alios, *Joſephus Scaliger, Severinus Longomontanus,* & nuperrime *Thomas Hobbes,* immortales ſibi inde ſinguli laudes deberi ſomniantes, mire hallucinati ſunt.

Ratio perimetri circularis ad diametrum. Quæ autem vulgo recepta eſt proportio ſeu ratio perimetri circularis ad ſuam diametrum, quæque à vera non multum abeſt, eſt tripla ſeſquiſeptima, ſive ut 22 ad 7, aut $3\frac{1}{7}$ ad 1; quod ab Archimede jam olim demonſtratum eſt; (nempe minorem eſſe quam $3\frac{1}{7}$, majorem vero quam $3\frac{10}{71}$.) Eſtque hæc ratio ſatis accurata quæ vulgaribus menſurationibus applicetur. Siquis autem accuratiorem quærat, poterit illam à *Ludovico van Culen, Willebrordo Snellio,* aliiſque qui rem illam tractarunt, petere; vel, ſi malit, ſuo calculo inveſtigare, ut proportionem habeat quamlibet accuratam, modo non Mathematice exactam. Sed de circulo ejuſque portionibus hactenus.

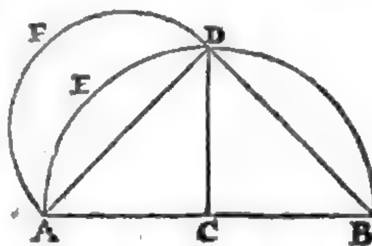
Menſuratio figuræ mixtæ. Siquando figura menſuranda occurrat mixta, ſive variis lineis circularibus, vel etiam circularibus ſimul & rectis, terminata; inveſtigabitur ipſius area, eandem in figuras ſimpliciores dividendo, & per partes menſurando. Ut, in ſchemate appoſito; ut habeatur area figuræ exterioris, areæ quadrati, addendæ ſunt quatuor ſemicirculorum areæ; Figuræ item interioris area, totidem ſemicirculis ex area quadrati ſubductis inveſtigatur.

Nonnun-





Nonnunquam vero sola figurarum Metamorphosi res erit facilitanda. Ut, si mensuranda sit figura *Pelicoides* dicta (linea semicirculari concava BCD, & duabus quadrantalibus convexis, AB, AD, terminata,) æquabitur illius area vel areæ quadrati ABCD, vel Parallelogrammi BDEF. Tantundem enim sive Quadrato sive Parallelogrammo ex una parte accedit, quantum ex altera parte aufertur. *De figurarum Metamorphosi.*



Et similiter, Lunula AEDF quæ arcu quadrantali AED majoris, & semicirculari AFD minoris circuli continetur, æquatur triangulo, ADC quadranti inscripto. Ut ex Hippocratis Chii *quadratura Lunulæ* notum est: & apposito schemate exhibetur. Nam propter ABq = (ADq + DBq =) 2ADq, adeoque semicirculum majorem minoris duplum; erit ADF semicirculus æqualis quadranti ACDE; demptoque communi segmento ADE, residua lunula AEDF residuo triangulo ADC æqualis.

Et similiter alias non raro faciendum erit. Quod breviter insinuasse sufficiat.

Atque hoc quidem omnino utile est in figuris maxime irregularibus, quorum ambitus neque rectis neque circularibus lineis terminatur. Sufficit quippe practico Geometræ, si quam fieri potest proxime, hic addendo, illic tantundem detrahendo, ad huic æqualem rectilineam reducat. Quod quo fiat, consilium in arena capiendum.

Atque hactenus quidem universæ prope planorum Geodæsiæ fundamenta breviter tradidi. Quo, tum Multiplicationis tum Divisionis exercitium ostenderem; tum Arithmetices in Geometricis utilitatem, & utriusque simul scientiæ affinitatem patefacerem.

CAP. XXV.

Numerorum invicem comparatio. Aliarum item quantitatum: sed nonnisi invicem homogenearum. Comparantur tum quoad Differentiam, tum quoad Rationem. Harum comparationum ab invicem discrimen. Differentia subductione investigatur: Ratio, Divisione; sed ea tantum quæ est quantitatum homogenearum. Quantitatum ad heterogeneas Applicatio, quatenus ad Divisionem referenda sit. Rationes omnes invicem homogeneæ: non item omnes Differentiæ, Ratio an ad quantitatem, an potius ad Qualitatem pertineat. Πηλικότης, *quid. Progressio Arithmetica & Geometrica: Continua, & Disjuncta. Proportionalium notatio. Proportio Harmonica.*

Tradidimus, in Præcedentibus, celebres illas Arithmeticæ Practicæ sive Species, sive potius Partes; *Additionem, Subductionem, Multiplicationem*, & *Divisionem*: quibus, ut instrumentis, quæ deinceps tradentur sunt peragenda.

 Hinc

Numerorum invicem comparatio. Aliarum item quantitatum.

Hinc autem oritur duplex Numerorum (vel etiam aliarum quarumlibet quantitatum homogenearum) invicem comparatio. Altera secundum *Differentiam*, altera secundum *Rationem* sive *Proportionem*. Illa Additionis & Subductionis, Hæc Multiplicationis & Divisionis naturæ maxime est affinis.

Quo autem has numerorum invicem comparationes rectius instituamus, sciendum est Primo; tum quæ nos de Numerorum invicem comparatione jam sumus tradituri, tum quæ Euclides per totum librum quintum de Magnitudinum ad invicem ratione tradit; non Numeris solum aut Magnitudinibus competunt, sed & aliis quibusvis quantitatibus. Quicquid scilicet vel per se vel per accidens quantitatis aut mensurationis capax est, eatenus etiam ad alia sibi homogenea comparari potest, tum quoad differentiam, tum quoad rationem; quippe quibus æquale esse potest aut inæquale.

Sed tantum homogenearum.

Sciendum secundo; res invicem comparandas esse secundum commune quiddam quod utrisque comparandis inest, aut quidem inesse supponitur; non autem juxta quicquam quod illis vel alteris vel utrisque est alienum. Et propterea quantitates non nisi *homogeneas* comparandas esse, & quidem prout sunt homogeneæ. Sic lineas lineis comparamus, & superficies superficiebus, corpora item corporibus, & numeros numeris, ponderaque ponderibus, aliasque quantitates non nisi quantitatibus sibi homogeneis. Siquis autem contrarium fecerit, puta datæ lineæ ad datam superficiem, vel temporis ad lineam, &c. rationem sive proportionem inquirens, vel etiam unius super alterum excessum: idem hoc erit acsi quæsiverit quot lineæ constituant superficiem, vel quantum temporis æquetur lineæ, sive quot longitudines efficiant latitudinem; quod non minus absurdum esset quam si quæratur; quot Colores constituant Sonum, & quot Soni constituant Gravitatem. Hoc ipsum tamen sciscitari videntur nonnulli de rebus hujusmodi parum intelligenter philosophantes, dum lineas ex punctis constare somniant, & ex lineis superficies: Nescientes interim se idem agere atque si numeros omnes ex ciphris, sive nullitatibus, componi affirmarent: quippe punctum nihil habet longitudinis, nec latitudinis linea.

Tum quoad Differentiam tum quoad Rationem.

Sciendum porro, Res homogeneas, & comparationis invicem capaces, comparari posse (juxta illam qua homogeneæ sunt mensuram) dupliciter. Vel enim simpliciter de Differentia sive excessu quæritur; scilicet, Num inter se differant & Quantum differunt; An & Quanto alterum altero majus est aut minus: Vel de Ratione; puta quotuplum vel quantuplum sit hoc illius; num hoc illud contineat semel, bis, ter, &c. aut semel cum semisse, bis cum triente, &c. Utrovis modo comparatorum, alterum *Antecedens* dici solet, alterum *Consequens*: quorum quidem illud Relatum est, hoc Correlatum: Nempe illud, cujus ad alterum relatio exponitur; hoc, cui illud sic relatum perhibetur. Puta si A ad B comparatur; A dicetur Antecedens, B Consequens, dum scilicet A dicitur majus esse quam B, vel minus, vel æquale; aut etiam A ipsius B duplum, triplum, semissis, &c.

Earum comparationum ab invicem discrimen.

Priori quæsito satisfit, si ostendatur res comparatas æquales esse; vel, si inæquales, quanto hæc illam excedit, vel hanc illa. Verbi gratia, Linea bipedalis est bipedali æqualis; & numerus binarius binario; ejusdem item rei (vel etiam æqualium) semisses sunt invicem æquales; & pariter in aliis. Contra vero; numerus octonarius senarium, & hic itidem quaternarium, duabus unitatibus superat; linea tripedalis bipedali est uno pede longior; quadripondium quam tripondium est uno pondo gravius; atque in aliis pariter.

Secundo quæsito satisfit, ubi ostenditur Quotuplum seu Quantuplum sit hoc ad illud comparatum, sive quam rationem (ut dici solet) vel proportionem habeant inter se. Hoc modo dicimus, quadripondium bipondii duplum esse; numerum senarium binarii triplum; lineam tripedalem bipedalis sesquialteram; unitatem binarii semissem esse, aut subduplam, aut etiam dimidium; binarium item binario æqualem esse, vel in ratione aut proportione simpla; & pariter alibi.

In priori, ubi de Differentia sive Excessu quæritur, Rationis sive Proportionis nulla ratio habetur: In posteriori, de Ratione sive Proportione quæritur, Differentia interim minime considerata. Sic quaternarius ternarium, & ternarius binarium, eodem Excessu superant; sed non in eadem Ratione: excessus enim utrobique est Unitas; at ratio illic Sesquitertia, hic Sesquialtera. Contra vero, quaternarius binarium, & binarius unitatem, eadem Proportione superant; sed non eodem Excessu. Est enim proportio sive ratio utrobique Dupla; at excessus illic quidem Duarum unitatum, hic autem Unius.

Prio-

Differentia Subductione investigatur.

Prioris quæsiti solutio, Subductione investigatur. Si subducatur enim numerus ex numero, quod restat est Excessus sive differentia. Ita si ex 12 auferantur 10, restant 2; duabus itaque unitatibus, hoc ille major est, hic illo minor numerus. Si ex tripondio bipondium auferatur, excessus reperitur esse Unius pondo. Nempe, si peracta subductione nihil vel supersit vel deficiat, Æquales sunt illæ quantitates: sin secus, inæquales; quippe Major illa, ubi aliquid redundat; Minor, cui aliquid deest, quo minus alteri sit æqualis.

Ratio investigatur Divisione.

Posterioris solutio Dividendo investigatur. Divisionis nempe quotiens ostendit rationem Dividui ad Divisorem. Sic si 12 per 6 dividantur, prodibit Quotiens 2; cui cognominis ratio *Dupla*, illa est quam habet numerus 12 ad 6. Item quadripondium est bipondii duplum; quia si 4 pondo per 2 pondo dividantur, prodibit quotiens 2: quippe toties hoc illo pondus continetur. Et propterea, *Ubi quotientes invicem æquantur, ibi & quantitates sunt in eadem ratione constitutæ.* Quippe *Ratio* ex *Quoto* æstimatur; adeoque & ex horum æqualitate æqualitas earum.

Sed ea tantum quæ est quantitatum homogenearum.

Verum interim notandum est; de illa tantum Divisione jam agi, qua quantitas per aliam quantitatem sibi homogeneam dividitur: (quippe homogenearum tantum quantitatum est ad invicem ratio.) Qua Quotiens semper sit numerus, vel quid numero homogeneum, quod quæstioni *Quot* vel *Quoties* respondeat. Sic ratio 4 A ad A (sive sint illæ duæ lineæ, vel duæ superficies, vel duo pondera, vel duæ aliæ quæcunque quantitates homogeneæ,) est quadrupla, quia A) 4 A (4; nempe quantitas 4 A, quantitatem A, continet quater. Sic ratio 3 A ad 2 A est sesquialtera, ea nempe quæ est 3 ad 2, quia 2 A) 3 A ($\frac{3}{2}$; nempe major minorem continet $\frac{3}{2}$ vicibus, sive semel cum semisse, sive toties quoties 3 continet 2. Sic ratio rectanguli V B ad A B est $\frac{V}{A}$, quia A B) V B ($\frac{V}{A}$; nempe rectangulum V B toties continet rectangulum A B, quoties recta V continet rectam A. Sic ratio 6 ad 2 est tripla, quia 2) 6 (3. Ratio 6 ad 4 est sesquialtera, sive ea quæ 3 ad 2, quia 4) 6 ($\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. Sic 3) 2 ($\frac{2}{3}$. A) V ($\frac{V}{A}$. Et in aliis similiter.

Atque hinc est, quod ratio alterna non ubique obtineat; sed solum in quatuor proportionalibus homogeneis. (Quod notant interpretes ad 16 e 5.) Puta, si sit pondus A ad pondus B, ut linea α ad lineam β: non tamen dici potest, pondus A ad lineam α, ut pondus B ad lineam β. Ob causam jam assignatam. Ideoque quotiescunque de proportione alterna, seu permutata agitur, (aliave quæ hanc involvit;) hæc semper subintelligenda est cautio, etiam si non disertis verbis adjuncta fuerit. Qua de re plura dicentur ubi propositionem illam Euclidis 16 e 5 tractabimus.

De quantitatum ad heterogeneas Applicatione, quid sentiendum.

Ea vero Divisio sive Applicatio, qua, verbi gratia, rectangulum A B applicari dicitur ad latus vel altitudinem A ut proveniat basis B, vel contra; nempe A) AB (B, vel B) A B (A; vel etiam qua solidum A B C applicatur ad planum B C ut proveniat latus A, vel ad rectam A ut proveniat planum B C; nempe B C) A B C (A, vel A) A B C (B C; aliæque hujusmodi; nonnisi καταχρηστικῶς Divisiones vocantur: nec præsenti negotio sunt accommodæ. Quod enim prodit, *Quotiens* proprie non est, nec quæstioni *quot* aut *quoties* respondet. Quippe quæ de *numero* quærit (aut quod numero est homogeneum) non de magnitudine, aliave quantitate numero heterogenea. Nec quidem Applicationes illæ, ad Divisionem, alio nomine videntur referendæ, quam prout quantitates illæ singulæ ad instar numerorum considerantur. Non enim quæritur, quoties linea A in superficie rectangula A B continetur; aut quoties vel A linea, vel B C planum, continet in solido A B C: (quippe hoc omnino esset incongruum.) Sed, quoties *numerus* puta quadratorum in area parallelogrammi A B, contineat *numerum* longitudinum in latere A, ut proveniat *numerus* longitudinum in latere reliquo B. Item, quoties *numerus* cuborum in solido A B C contineat, vel *numerum* longitudinum in recta A, ut habeatur *numerus* quadratorum in basi B C; vel *numerum* quadratorum in basi B C, ut habeatur *numerus* longitudinum in recta A.

Sed & ubi magnitudo aliqua numero dividitur, puta 2) A ($\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ A, non tam divisio est (saltem quæ præsenti negotio conveniat) quam multiplicatio; (nempe quantitas A non tam dividitur per 2, quam multiplicatur per $\frac{1}{2}$;) quipppe non quæritur, quoties *numerus* 2 contineatur in *magnitudine* A (quod absurdum esset) sed

sed datæ quantitati A, alia in data ratione quæritur; quod *Multiplicationis* est, potius quam *Divisionis* opus; quippe quæ in Multiplicatione Ratio datur, in Divisione quæritur.

Rationes omnes invicem homogeneæ.

Atque hinc patet, *Rationes omnes, quarumcunque ad invicem quantitatum, esse inter se homogeneas.* Utut enim, verbi gratia, Linea & Pondus, sint res plane heterogeneæ, nec rationem ad invicem habeant; Ratio tamen Lineæ ad Lineam, & Ponderis ad Pondus, sunt plane homogeneæ; puta ratio lineæ bipedalis ad pedalem, & Bipondii ad pondo, homogeneæ sunt, imo eadem ipsa ratio, puta dupla: nam si instituatur Divisio, erit utrobique quotiens 2. Et quidem dum quærenti, Quotuplum sit hoc illius, respondetur, Duplum, Triplum, Quadruplum, Sesquialterum, Sesquitertium &c. tantundem est atque si quærenti, Quot vicibus hoc illud contineat, respondeatur, Duabus, tribus, quatuor, una cum semisse, una cum triente, &c. Atque hoc perinde sive de lineis sive superficiebus sive aliis quibusvis quantitatibus invicem homogeneis quæratur. Et quidem ubi non distincte indicatur quoties, sed per circuitum, eodem tamen res recidit. Nam si dicatur eandem esse rationem, verbi gratia, solidi V B q ad A B q, quæ est rectæ V ad rectam A; de numero tamen respondetur, nempe toties V B q continere solidum A B q, quoties recta V continet rectam A; utut non distincte dicatur quoties vel hoc vel illud fiat.

Sed non item omnes differentiæ.

Atque hinc quidem amplum emergit discrimen, inter duas quas diximus quantitatum homogenearum comparationes. Quamvis enim tam quæ quoad Differentiam, quam quæ quoad Rationem, instituitur comparatio, non fit nisi inter homogeneas: quæ tamen ex comparatis homogeneis emergit Ratio, cum Ratione quæ ab aliis invicem homogeneis, sed ad priores illas heterogeneis, emergit, comparari potest ut quid homogeneum; quod interim in comparatione quoad Differentiam non obtinet. Exempli gratia; Si comparatur quoad rationem quadripondium ad bipondium, ratio est dupla; si linea quadripedalis ad pedalem, ratio est quadrupla: quæ rationes invicem comparari possunt; nempe hæc illius dupla est. At, si quoad differentiam instituatur comparatio; Quadripondii & bipondii, differentia est Bipondium; Lineæ quadripedalis & pedalis, differentia est linea tripedalis: Harum vero Differentiarum nulla poterit comparatio institui (vel quoad differentiam vel quoad rationem) cum linea tripedalis, & bipondium, sint quantitates plane heterogeneæ: altera in genere Lineæ, altera in genere Ponderis.

Discriminis causa.

Causa hujus discriminis hæc est; Quoniam ubi comparatio instituitur quoad Differentiam, Residua sive Excessus ejusdem semper sunt generis cum comparatis (quippe totum & pars sunt invicem homogenea;) adeoque si hæc bina comparata, sint binis illis heterogenea, etiam horum differentia heterogenea erit differentiæ illorum, & propterea comparationis incapax. Ubi autem comparatio fit quoad Rationem, quæ emergit ratio comparatorum genus non raro deserit, & transit in genus numerosum, cujuscunque sint generis quæ comparantur; & propterea, utut bina comparata binis comparatis aliis heterogenea sint, ratio tamen rationi homogenea est, ut comparationi locus sit. Et quidem cum duplum & dimidium, triplum & triens, &c. perinde pro rationum nominibus habenda sint; dimidii autem & trientis notæ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, numeris (fractis) accenseantur; quidni & dupli, triplive notæ $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, vel 2, 3. Atque hac potissimum de causa, ego totam Rationum doctrinam Arithmeticæ potius quam Geometricæ speculationis esse autumo; totumque Euclidis Elementum quintum Arithmeticum esse, utut speciatim de Magnitudinibus efferantur propositiones, quæ interim non minus recte de Quantitatibus simpliciter quibusvis efferri possent, quo sensu apud Euclidem μεγέθη intelligenda sunt.

Differentia Quantitatem respicit, ratio Qualitatem.

Fortasse autem dicendum insuper erit, comparationem quæ est quoad differentiam, simpliciter ad *Quantitatem* ποσότητα, referendam esse; at quæ quoad Rationem, ad *Qualitatem* ποιότητα. Eo enim respicere videtur quæ apud Euclidem extat Rationis definitio, Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις 3 d 5. Cur enim ποιὰ σχέσις reddatur *quædam habitudo*, (quod solent interpretes,) non video; mallem *habitudo qualitativa*. Ut enim figuræ *Magnitudo* (quanta sit) ad Quantitatem referri solet; at *Species* figuræ, lineæve, (qualis sit,) quæ in terminorum, partiumve homologarum ratione ad invicem maxime consistit, ad *Qualitatem* (quartam nempe illius speciem:) quidni & in præsenti negotio similiter faciendum sit; ut nempe comparatio quæ est quoad Differentiam dicatur comparatio

Quanti-

Quantitativa; at quæ secundum Rationem, *Qualitativa*. Unde, ex rationum identitate, non tam oritur *Æqualitas* (quæ Quantitatum est affectio) quam *Similitudo*, quæ Qualitates magis quam quantitates respicit. Per πηλικότητα vero id intelligit quod nos *Quotientem* dicimus.

Æqualitas quantitatum est, similitudo qualitatum.

Ex dictis itaque patet, Quid sit quantitates invicem homogeneas, tum quoad Excessum sive Differentiam, tum quoad Rationem sive Proportionem, invicem comparare. Nempe illic quæritur, Quanto sit hoc illo majus, vel contra; cui Subducendo satisfaciendum est: hic, Quotuplum vel quantuplum sit hoc illius, vel hujus illud; cui satisfaciendum est Dividendo. Illic excessus prodit, sive differentia; hic quotus, sive ratio.

Progressio duplex.

Ex duplici autem hac sive Numerorum, sive quantitatum quarumlibet homogenearum, comparatione; duplex oritur, quæ tradita est, *Progressio*; quarum altera *Arithmetica* dicitur, altera *Geometrica*: (nominibus, credo, mere ad placitum impositis; cum utravis perinde Arithmeticam Geometriamve spectet; quæ tamen cum hactenus obtinuerint, per me immota sunto.) *Progressionem* autem dicere mallem quam vel *Proportionem* vel *Proportionalitatem*, (quanquam non ignorem voces has non minus quam illam, & forsan sæpius, apud authores hoc sensu occurrere;) ea potissimum de causa ut vocum ὁμωνυμία vitetur. Nam *Proportio* non raro vel apud Mathematicos non tam ἀναλογίαν, quam λόγον, *rationem* significat, & quidem jam fere obtinet ut *ratio* & *proportio* Mathematicis promiscue usurpentur, aliis vero scriptoribus *rationis* vox hoc sensu rarius occurrat, sed eo sensu in communi loquela *proportionis* vox ut plurimum usurpetur quo apud Mathematicos *Ratio*. *Proportionalitas* autem, utut de progressione Geometrica minime displiceat, ut quæ tantundem valeat, an tamen ad progressionem Arithmeticam ita commode referenda sit, haud mihi constat. Quippe *Proportionalitas*, vi vocis, *proportionum* tantum, hoc est *rationum*, comparationem videtur innuere, non item *differentiarum*. Quod vero nonnullis placet, ut & *differentia* vocetur *ratio Arithmetica*, (& Ratio simpliciter sumpta, *ratio Geometrica*,) non mihi admodum placet, cum λόγον (sive *rationem* sive *proportionem*, libeat interpretari,) non nisi de ea, quam vocant *rationem Geometricam*, apud Euclidem usurpari video, nescio an apud Veterum quemvis alium; quod & de *proportionis* voce perinde intelligendum videtur. Cum vero mos ille loquendi jam obtinuerit, nos etiam eadem nonnunquam utemur formula; *Arithmetice proportionalia* appellando, quæ sunt in progressione Arithmetica, constituta.

Progressio Arithmetica.

Progressio Arithmetica dicitur, ubi numeri plures (aliæve quantitates invicem homogeneæ) æqualibus differentiis (sive excessibus sive defectibus) procedunt. Ut 2. 4. 6. 8. &c. & 3. 5. 7. 9. &c. & contra 9. 7. 5. 3. &c.

Progressio Geometrica.

Progressio Geometrica, ubi plures numeri (aliæve quantitates invicem homogeneæ) eadem (vel æquali) ratione sive proportione progrediuntur. Ut 2. 4. 8. 16. 32. &c. & 3. 9. 27. 81. 243. &c. & 8. 12. 18. 27. &c. & contra 32, 16, 8, 4, &c. & pariter in similibus. Ut enim progressio Arithmetica, æqualitatem Differentiarum spectat; sic Geometrica, Rationum sive æqualitatem sive identitatem dicas, sive etiam similitudinem: Unde illic *communis excessus* sive *differentia*, hic *communis ratio* sive *proportio*, progressionis *speciem* determinat.

Progressio est vel continua vel disjuncta.

Harum autem Progressionum utraque (tum Arithmetica tum Geometrica) est vel *Continua*, vel *Disjuncta*, (sive discreta, discontinua, interrupta;) Illa, ubi quantitates continue positæ æqualibus aut differentiis aut rationibus ubique procedunt. Hæc, ubi eadem quidem differentia aut ratio identidem redit, sed non continue. In illa, quilibet terminus intermedius tum antecedens est tum consequens, communis sive differentiæ sive rationis; In hac, non item. Sic 3, 5, 7, 9, 11, vel 11, 9, 7, 5, 3, sunt in progressione Arithmetica continua (vel, si libet, Arithmetice proportionales continuæ,) quia quilibet numerus illic antecedentem, hic consequentem, binario superat. At 3, 5; 9, 11. vel 9, 11; 5, 7. sunt in progressione Arithmetica disjuncta sive interrupta constituti; nam eodem excessu secundus primum, & quartus tertium superat, at non item tertius secundum. Et pariter 5, 3; 11, 9; 17, 15; 19, 17. sunt in eadem progressione Arithmetica, sed interrupta. Eodem modo, 2. 4. 8. 16. 32. &c. vel 32. 16. 8. 4. &c. sunt in progressione Geometrica continua; quippe illic numerus consequens antecedenti suo est ubique in ratione dupla, hic dimidia sive subdupla. At 2. 4 :: 3. 6 :: 4. 8. sunt quidem in eadem progressione Geometrica, sed interrupta; quippe secundus primum, &

quartus tertium, & sextus quintum eadem ratione superant; sed non item tertius secundum, vel quintus quartum. Similiter, de 4. 1 :: 12. 3. dicendum est, qui quidem numeri sunt Geometrice proportionales, sed non continue.

Proportionalium notatio.

Et quidem (quod semel dictum esto) hujusmodi sive numerorum sive quantitatum designatio A. B :: C. D, in sequentibus sæpissime intelligatur quantitates designare proportionales (Geometrice intellige) saltem discontinue; nempe qua ratione A ad B, eadem & C ad D. Hujusmodi autem A. B. C. D. ∺ notabit easdem esse continue proportionales. Progressio autem Arithmetica, ubi opus est, sic poterit notari A, B; C, D; vel, si continua fuerit, A, B, C, D ∺.

Atque hactenus tum duplicem quantitatum invicem comparationem satis aperuisse videamur; tum utriusque progressionis, Arithmeticæ scilicet & Geometricæ, naturam, quas in sequentibus capitibus fusius prosequar.

Proportio Harmonica.

Progressionem autem sive *proportionalitatem Harmonicam* vel *Musicam* dictam, cum ad scopum nostrum minus videatur pertinere, omittendam censui. *Ea vero est* (siquis quæ sit scire desiderat) *quando in quatuor terminis est ut primus ad quartum, sic differentia primi & secundi ad differentiam tertii & quarti.* Puta si A. D :: B − A. D − C. Hoc est, $\frac{A \backsim B}{C \backsim D} = \frac{A}{D}$. Erunt illæ quantitates A, B, C, D, harmonice proportionales. Sic numeri 5, 8, 12, 30. quia 5. 30 :: 8 − 5 = 3. 30 − 12 = 18. Seu $\frac{8-5}{30-12} = \frac{5}{30}$. Vel etiam, *tres quantitates Harmonice proportionales sunt, si ut prima ad tertiam, sic differentia primæ & secundæ, ad differentiam secundæ & tertiæ.* Puta A. C :: B − A. C − B. hoc est $\frac{A \backsim B}{B \backsim C} = \frac{A}{C}$: Erunt, hoc casu tres A, B, C, Harmonice proportionales; vel, si libet, quatuor A, B, B, C. Sic numeri 3, 4, 6, vel 3, 4, 4, 6. Nam 3. 6 :: 4 − 3 = 1. 6 − 4 = 2. hoc est $\frac{4-3}{6-4} = \frac{3}{6}$. Sic $1.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{3}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{5}.$ &c. sunt *continue proportionales Harmonice.* Nam $1.\ \frac{1}{3} :: 1 - \frac{1}{2}.\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} ::$ 6. 2 :: 6 − 3 = 3. 3 − 2 = 1. Et sic in cæteris. Et universaliter, $\frac{1}{A-1}.\ \frac{1}{A+1}\ (:: A+1.\ A-1) :: \frac{1}{A-1} - \frac{1}{A}.\ \frac{1}{A} - \frac{1}{A+1} :: \left(\frac{A - A+1 = 1}{A \text{ in } A-1}.\ \frac{A+1-A=1}{A \text{ in } A+1} ::\right)$ A + 1. A − 1. Quod innuisse sufficiat.

CAP. XXVI.

Progressio Arithmetica variorum problematum familiarium solutione explicatur.

Problemata Progressionem Arithmeticam spectantia.

DE Arithmetica Progressione continua, solent hujusmodi proponi Problemata, aliaque multa his similia.

1 Dato termino primo, & communi terminorum excessu; terminum ultimum, aliumve in progressione quemlibet, investigare.

2 Dato termino primo, communi item excessu, & numero terminorum; summam terminorum omnium invenire.

3 Dato termino primo, cum excessu communi, & alterius cujusvis termini valore; invenire quoto loco in serie terminus ille reperitur. Vel (quod perinde est) dato termino primo, & ultimo, cum excessu communi; invenire numerum terminorum.

4 Dato termino primo, & ultimo, cum numero terminorum; communem excessum investigare.

5 Dato numero terminorum, cum terminorum omnium aggregato, & excessu communi; primum terminum invenire.

Per terminum primum jam intelligo (quod & deinceps intelligatur) terminum minimum; & per ultimum, maximum. Quamvis enim progressio, sive crescendo sive decrescendo fieri possit; ego tamen tanquam crescentem considero, atque eo sensu quæ dicenda sunt intellecta velim. Et propterea, siquis ea decrescenti seriei accommodare velit, id fiet mutatis tantum his vocibus primo & ultimo: Nempe quæ jam de primo crescentis dicuntur, illic de termino ultimo decrescentis

crescentis seriei intelligenda erunt; quæ hic de ultimo, illic de primo. Quod semel dictum esto, ne sæpius opus sit utrumque casum seorsim proponere.

Exempli gratia. 1. Siquis iter conficiens ambulaverit primo die 3 milliaria, secundo 5, tertio 7, & sic deinceps, diurnum iter quotidie augendo binis milliaribus; Quæritur quot milliaria ambulaturus est die Decimo? *Solvuntur.*

Quoniam singuli dies post primum, addunt incrementum duorum milliarium; multiplicetur numerus dierum post primum, nempe 9, in communem excessum 2; & productum $18 = 9 \times 2$, addatur itineri primi diei, eritque $21 = 18 + 3$ numerus quæsitus: tot nempe milliaria confecturus est die decimo.

2 Si quæratur insuper, Quot toto itinere ambulaverit?

Additis termino primo & ultimo (ita ut jam dictum est invento,) ducatur summa in numerum terminorum: producti dimidium est numerus quæsitus. Puta $3 + 21 = 24$; & $24 \times 10 = 240$; hujus numeri semissis, 120, est numerus milliarium toto decem dierum itinere confectorum.

3 Si quæratur, Quoto itineris die ambulaverit 15 milliaria?

Ex numero assignato 15, auferatur terminus primus 3; & residuum per communem excessum dividatur: quod prodit, indicat quot diebus post primum ambulaverit. Nempe $15 - 3 = 12$, & 2) 12 (6. Septimo igitur die, (sive post primum sexto,) ambulantur milliaria 15.

4 Si ambulaverit primo die 3 milliaria, decimo 21; & quæratur communis excessus.

Demantur ex termino maximo minimus: quod restat dividatur per numerum terminorum post primum; Quod prodit est communis excessus. Nempe $21 - 3 = 18$. & 9) 18 (2. ergo communis excessus est, duorum milliarium.

5 Si totum iter milliarium 120, sit diebus 10 confectum, quotidiano incremento duorum milliarium; & quæratur primi diei iter.

Dividantur 240, duplum numeri milliarium toto itinere confectorum, per numerum dierum 10; prodeunt 24, summa milliarium dierum primi & ultimi conjunctim. Ducantur insuper 9, numerus dierum post primum, in communem excessum 2, & prodeunt 18, excessus totus termini ultimi supra primum. Quibus demptis ex primi & ultimi aggregato 24, restant $24 - 18 = 6$. Horum semissis, 3, est iter primi diei.

Porro; Ponamus alium exire die quinto, & æquabili itinere progredi. Quæritur, quot illum oporteat milliaria quotidie conficere, ut eodem tempore cum præcedente idem iter confecerit.

Cum ex 10 diebus, ponantur elapsi 4, restant 6. Cum igitur diebus 6 confecturus sit iter milliarium 120; facta divisione 6) 120 (20, prodit numerus milliarium quolibet die conficiendorum, nempe 20, ut eodem die cum præcedente idem confecerit iter.

Exemplum aliud esto hujusmodi; cum notum sit horologium hora post meridiem prima sonitum 1 edere, secunda 2, tertia 3, & sic deinceps: Quæratur, quot edat sonitus, duodecim succedentium horarum spacio. Vel etiam, quot ab hora tertia, ad horam nonam. Aliaque similia. Quibus quæsitis, eodem quo supra modo satisfaciendum erit.

Item, Si ponamus 20 lapides ita collocatos, ut primus absit uno milliari, secundus duobus, tertius tribus, & sic deinceps; oporteat autem aliquem hos omnes lapides sigillatim afferre: Quæritur, quot ille milliaria confecturus sit priusquam omnes attulerit.

Cum ad primum lapidem eundo & redeundo, duo milliaria eunda sint; ad secundum, 4; ad tertium, 6; &c. Communis excessus est 2; idemque terminus primus: numerus autem terminorum 20. Cumque etiam idem sit terminus primus & communis terminorum excessus; ducto excessu communi in numerum terminorum, habetur terminus ultimus $40 = 20 \times 2$. cui si addatur terminus primus 2, erit $40 + 2 = 42$ extremorum aggregatum; quod ductum in numerum terminorum, dat $42 \times 20 = 840$ duplum totius itineris; (vel aggregatum ductum in semnumerum terminorum, aut aggregati semissis in numerum terminorum, dat ipsum iter; puta $42 \times 10 = 21 \times 20 = 420$;) conficienda igitur sunt milliaria 420, quo omnes illi lapides sigillatim afferantur.

Et pari modo alia hujusmodi problemata de Progressione Arithmetica, & excogitari & resolvi facile poterunt; vel etiam ex vulgaribus Arithmeticæ practicæ

S 2 libris

libris depromi; quibus se exercere poterunt tirones. Nobis recensendis pluribus immorandum esse non duxi. Sed nec in jam traditis singularum operationum rationes aperui, cum non sint adeo intricatæ, quin possint, ex operationum Arithmeticarum superius expositarum natura satis intellecta, vel à tirone, modo advertente, satis percipi; unde & ipse inibi se exerceri non gravatim feret: sed præsertim quod sequente capite tum horum tum aliorum plurimorum problematum huc spectantium traditionem demonstrativam aggressurus sim.

CAP. XXVII.

Progressio Arithmetica fusius traditur.

Quo Progressionis Arithmeticæ doctrinam plenius aperiam, libet eam sequentibus propositionibus succincte, sed & perspicue tradere.

Siquem autem male habeat, quod hic aliquoties Æquationum vel ordinationes, vel etiam Analyses, adhibeam, priusquam illarum traditionem docuerim, (adeoque methodi leges violatas causetur;) poterit ille tum hoc, tum sequens caput, tum etiam Cap. 32, & 33, vel penitus omittere, vel saltem intermittere, donec Æquationum doctrinam tradidero; & quasi essent postposita reputare.

Quod autem aggredior quo rectius fiat, hæc sunto quibus sum usurus symbola.

Terminus minimus, quem primum appello, sit A; maximus, quem ultimum appello, sit V; communis excessus E. Numerus Terminorum, T. Terminorum quorumvis ab invicem distantia, D. Extremorum (maximi & minimi) aggregatum $Z = A + V$. eorundem differentia $X = V - A$. Terminorum omnium summa vel aggregatum S. Singuli autem, à minimo inchoando, dicantur *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, &c. à maximo vero inchoando, dicantur α, β, γ, δ, ε, &c. Numeros, qui cujuslibet termini distantiam à primo indicant, *Indices* appello, puta 0, 1, 2, 3, &c. His præmissis, sequuntur propositiones.

Distantia à primo.						Distantia ab ultimo.
0	*a*	A	3	V − 9E	κ	9
1	*b*	A + E	5	V − 8E	ι	8
2	*c*	A + 2E	7	V − 7E	θ	7
3	*d*	A + 3E	9	V − 6E	η	6
4	*e*	A + 4E	11	V − 5E	ζ	5
5	*f*	A + 5E	13	V − 4E	ε	4
6	*g*	A + 6E	15	V − 3E	δ	3
7	*h*	A + 7E	17	V − 2E	γ	2
8	*i*	A + 8E	19	V − E	β	1
9	*k*	A + 9E	21	V	α	0
		S	120	S		

1 Si continuæ progressionis Arithmeticæ primus terminus seu minimus sit A, erit secundus $A + E$, tertius $A + 2E$, quartus $A + 3E$, & sic deinceps quilibet terminus continue augendus est communi excessu semel addito. Nempe illud postulat Arithmeticæ progressionis definitio. Puta $a = A$. $b = A + E$. $c = A + 2E$, &c.

2 Constat igitur terminus quilibet, ex termino primo seu minimo, cum communi excessu toties addito, quot terminus ille gradibus à primo distat, (ipso primo non computato,) sive (quod tantundem est) cum excessu communi in Indicem ducto. Sequitur hæc ex præcedente. Cum enim pro quolibet distantiæ gradu excessus semel additur; toties addendus erit, quot sunt distantiæ gradus. Puta, terminus sextus $f = A + DE = A + 5E$.

3 Dato igitur termino primo, cum communi Excessu, & termini cujusvis assignati Indice, sive distantia à primo; A, E, D; invenitur terminus assignatus. Nempe $A + DE$. per præced. quod enim illic theorematice affirmatur, hic problematice proponitur.

4 Si

4 Si terminus ultimus sit V; erit penultimus $V - E$; antepenultimus $V - 2E$; quartus à fine $V - 3E$; & sic deinceps quilibet terminus continue minuendus est communi excessu semel detracto. Id enim postulat definitio. Quanto enim quilibet locus progrediendo augetur, tanto retrocedendo quilibet minuitur. Puta $\alpha = V$. $\beta = V - E$. $\gamma = V - 2E$, &c.

5 Constat igitur terminus quilibet ex termino maximo, dempto toties excessu communi, quot terminus ille gradibus ab ultimo distat: (ipso interim ultimo non computato.) per præced. Puta, sextus à fine $\zeta = V - DE = V - 5E$.

6 Dato igitur termino maximo, cum excessu communi, & termini cujusvis assignati distantia ab ultimo; V, E, D; invenitur terminus assignatus. Nempe $V - DE$. per præced.

7 Dato termino quovis, cum excessu communi, & cujusvis assignati termini majoris à dato distantia, (puta f, D, E;) invenitur terminus assignatus. (ut i.) Nempe toties addendo excessum communem termino dato, quot assignatus à dato gradibus distat. Puta $i = f + DE = f + 3E$. Nam per def. vel prop. 1. pro singulis gradibus semel addendus est communis excessus.

8 Dato termino quovis, cum excessu communi, & cujusvis assignati minoris distantia à dato; (puta f, D, E;) invenitur assignatus. (ut c.) Nempe toties auferendo excessum communem, quot assignatus à dato gradibus distat. Puta $c = f - DE = f - 3E$. Nam per def. vel prop. 4. pro singulis gradibus semel auferendus est communis excessus.

9 Dato igitur excessu communi, cum terminorum quorumvis ab invicem distantia; E, D; datur illorum terminorum differentia. (puta $f - c$: vel $i - f$.) nempe DE. per prop. 7 & 8. Puta $i - f = DE = 3E$. per prop. 7 & $f - c = DE = 3E$. per prop. 8. transpositis scilicet utrobique æquationum terminis.

10 Data vero terminorum quorumvis differentia, cum eorundem ab invicem distantia; (puta $f - c$, D,) datur communis excessus E; Dividendo scilicet differentiam per distantiam. Nam cum sit, verbi gratia, $f - c = DE$, per præcedentem; erit $\frac{f - c}{D} = E$.

11 Item data terminorum quorumvis differentia, cum communi excessu; ($f - c$, E:) datur eorundem distantia D; Dividendo scilicet differentiam per communem excessum. Nam cum sit (per prop. 9.) $f - c = DE$; erit $\frac{f - c}{E} = D$.

12 Porro; Termini duo quilibet, cum duobus aliis ejusdem progressionis quibuslibet, in eadem ab invicem distantia positi, habent & eandem differentiam. Cum enim per prop. 9. differentia sit DE; si utrobique æqualis sit, non modo E communis excessus, sed & distantia D; erit eadem utrobique differentia DE. Puta si a, b, c, d, e, f, ÷÷, erit $c - a = f - d$.

13 Et contra; Si eadem sit utrobique differentia, eadem est & utrobique distantia. Nam si tum excessus communis E, tum differentia DE, sit utrobique æqualis; erit utrobique æqualis D. Puta a, b, c, d, e, f, ÷÷, & $c - a = f - d$; erunt a, c, & f, d, æqualiter remoti.

14 Ergo etiam; Si ex terminis quotvis in continua progressione Arithmetica constitutis, seligantur quodlibet in eadem continue ab invicem distantia; erunt & hi in continua progressione Arithmetica constituti. Puta si $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k$, ÷÷, erunt item tum a, c, e, g, i, ÷÷ tum b, d, f, h, k, ÷÷; tum a, d, g, k, ÷÷; tum a, e, i, ÷÷; in continua progressione Arithmetica constituti. Nam æqualibus continue differentiis continue crescunt, per prop. 12.

$a, b, c, d, e, f, g, h, i, k$, ÷÷
a, c, e, g, i, ÷÷
b, d, f, h, k, ÷÷
a, d, g, k, ÷÷
a, e, i, ÷÷

15 Et contra; si ex terminis ita continue progredientibus, selecti quotlibet continue item progrediuntur; æqualibus ab invicem distantiis sumpti sunt, per prop. 13.

16 Dato excessu communi, cum numero terminorum, E, T: invenitur extremorum differentia, X. Est enim extremorum distantia unitate minor, quam numerus terminorum; $D = T - 1$. ut patet. Ergo, per 9. $X = V - A = DE = TE - E$.

17. Et, Data extremorum differentia, cum numero terminorum; X, T: habetur communis excessus, E. Nempe, cum sit per præced. $X = DE = TE - E$. Erit $\frac{X}{D} = \frac{X}{T - 1} = E$.

18. Et, Data extremorum differentia, cum communi excessu; X, E: habetur terminorum numerus, T. Cum enim sit $DE = X$, erit $\frac{X}{E} = D = T - 1$. Et $\frac{X}{E} + 1 = D + 1 = T$.

19. Dato termino primo seu minimo, cum communi excessu, & numero terminorum; A, E, T: habetur terminus ultimus, V. Cum enim, per 16. $X = V - A = TE - E$; erit $V = A + TE - E$, vel $V = A + DE$.

20. Dato termino maximo, cum communi excessu, & numero terminorum, V, E, T; invenitur minimus, A. Nempe sublata, ex maximo, extremorum differentia, manet minimus. Cum ergo per 16. $X = DE = TE - E$. Erit $V - X = A = V - TE + E = V - DE$.

21. In continua progressione Arithmetica, si ex summa duorum quorumvis terminorum auferatur progressionis terminus primus; quod restat, est progressionis terminus ille cujus à primo distantia æquatur ipsorum à primo distantiis simul sumptis. Sive, cujus Index æquatur eorum Indicibus simul sumptis. Nam, per prop. 2. quilibet terminus constat ex primo cum tot excessibus quot gradibus a primo distat: Ergo duo additi continent primum bis, cum tot excessibus quot sunt utriusque distantiæ gradus simul additi. Hinc si semel auferatur primus; manet primus terminus semel cum tot excessibus quot sunt utriusque distantiæ gradus simul additi; hoc est (per eandem prop. 2.) terminus ille cujus distantia est eorum distantiis simul additis æqualis. Puta terminus tertius $c = A + 2E$, sextus $f = A + 5E$, horum aggregatum $c + f = 2A + 7E$; hinc sublato A, restat $A + 7E$ terminus octavus, h; cujus à primo distantia 7, æqualis est distantiis tertii & sexti simul sumptis $2 + 5$.

dist: c + dist: f = dist: h.
$$c + f - a = h$$

$$c = A + 2E$$
$$f = A + 5E$$
$$c + f = 2A + 7E$$
$$c + f - A = A + 7E = h$$

22. Eodem modo; summa trium, quatuor, quinque aut plurium terminorum; abjecto primo tot vicibus una minus; æquatur termino illi cujus Index est eorum omnium Indicibus simul sumptis æqualis. Puta si dist. b + dist. d + dist. e = dist. i; erit $b + d + e - 2a = i$. Probatur ut præcedens.

dist. b + dist. d + dist. e = dist. i.
$$b + d + e - 2a = i$$

$$b = A + E$$
$$d = A + 3E$$
$$e = A + 4E$$
$$b + d + e = 3A + 8E$$
$$b + d + e - 2A = A + 8E = i$$

23. Ergo, si primus progressionis terminus sit 0 ciphra, vel nihil: duorum pluriumve terminorum summa, æqualis est illi termino cujus Index est eorum Indicibus simul sumptis æqualis. Sequitur ex prop. 21, 22. quia sublatio primi termini $A = 0$, nihil immutat. Puta in progressione 0, 3, 6, 9, 12, 15, est $6 + 9 = 15$, quippe cujus Index æquatur eorum Indicibus simul sumptis, $5 = 2 + 3$.

24. Item, in ejusmodi progressione (cujus primus terminus est 0) terminus quilibet æquatur illi communis excessus multiplo, quod est Indici, sive à primo distantiæ cognomine. Cum enim per prop. 2. Sit terminus quilibet $A + DE$; si sit $A = 0$, erit $A + DE = DE$.

25. In continua progressione Arithmetica, si duorum terminorum differentiæ, addatur terminus primus; emergit terminus cujus distantia à primo est eorum distantiarum item à primo differentiæ æqualis: sive, cujus Index æquatur Indicum illorum

lorum differentiæ: vel qui tantundem distat à primo quantum illi ab invicem. Sequitur ex prop. 21. Si enim, verbi gratia, dist: b — dist: c = dist. f, hoc est, dist. b = dist. c + dist. f; erit (per prop. 21.) $b = c + f - a$; ergo $b - c + a = f$.

26. Si igitur primus terminus sit 0; duorum quorumvis differentia est terminus ille cujus index sive distantia à primo est illorum indicum differentiæ æqualis. Quoniam hoc casu $b - c = b - c + a = f$.

27. Item, hoc casu, terminus ille, cujus index æquatur duorum indicum differentiæ, est multiplum excessus communis, indici suo (sive duorum illorum indicum differentiæ) cognomine. Cum enim indicum differentia ostendat terminorum distantiam; sitque per prop. 9. differentia terminorum, DE (multiplum excessus cognomine distantiæ, sive indicum differentiæ;) erit terminus ille, cujus index huic indicum differentiæ æquatur, item DE; quippe quæ est terminorum illorum differentia, per præced.

28. In continua progressione Arithmetica, extremorum aggregatum æquatur aggregato duorum quorumvis terminorum æqualiter ab extremis utrinque remotorum; (Intellige, quorum unus à primo tot abest gradibus, quot alter ab ultimo.) Nam, per prop. 2. & 5; tanto unus minimum superat, quanto alter à maximo deficit; propter æqualem utrobique distantiam. Puta $c = A + 2E$, & $\gamma = V - 2E$; ergo $c + \gamma = A + 2E + V - 2E = A + V$. Et sic ubique.

$$\begin{array}{r} c = A + 2E \\ \gamma = V - 2E \\ \hline c + \gamma = A + V \end{array}$$

29. Sin terminus omnium medius ab utroque extremo æqualiter distet, (quod, ubi numerus terminorum est impar, contingit) terminus ille bis sumptus æquatur extremorum aggregato. Puta expositis a, b, c, d, e ∺ erit $a + e = 2c$. quia $c - a = e - c$, propter æqualem utrobiq; distantiam. Ideoque $c + c = a + e = 2c$.

30. Similiter in quatuor terminis Arithmeticæ progressionis interruptæ. Nempe Aggregatum extremorum æquatur aggregato mediorum. Puta A, M; N, V. Cum enim, propter communem utrobique excessum, sit $M - A = V - N = E$, ideoque $A + E = M$, & $N + E = V$, hoc est $V - E = N$; erit $M + N = A + E + V - E = A + V$. Vel expositis V, N; M, A. quoniam $V - N = M - A = E$, ideoq; $V - E = N$, & $M - E = A$, hoc est $M = A + E$; erit $N + M = V - E + A + E = A + V$.

$$\begin{array}{r} M = A + E \\ N = V - E \\ \hline M + N = A + V \end{array}$$

31. Ergo, Quatuor terminorum Arithmetice (ut loquuntur) proportionalium, datis tribus quibuslibet datur & reliquus. Cum enim expositis A, M; N, V. sit, per præced. $A + V = M + N$; erit (æqualibus utrinque subductis) $A = M + N - V$, $V = M + N - A$, $M = A + V - N$, $N = A + V - M$.

$$\text{Datis}\left\{\begin{array}{l} A, M, N. \\ A, M, V. \\ A, N, V. \\ M, N, V. \end{array}\right\}\text{Datur}\left\{\begin{array}{l} V = M + N - A. \\ N = A + V - M. \\ M = A + V - N. \\ A = M + N - V. \end{array}\right.$$

32. Ex tribus autem in Arithmetica progressione continua constitutis, Aggregatum extremorum æquatur duplo medii. Quippe terminus medius, eodem excessu superat extremorum unum, quo ab altero superatur. Puta A, M, V ∺ quoniam est $M - A = V - M = E$, sive $A + E = M = V - E$, erit $M + M = 2M = A + V$.

$$\begin{array}{r} M = A + E \\ M = V - E \\ \hline 2M = A + V \end{array}$$

33. Ergo, ex tribus terminis continue progredientibus Arithmetice, datis duobus quibusvis datur & reliquus. Cum enim, per præced. sit $2M = A + V$; erit $2M - A = V$, $2M - V = A$, $M = \frac{A+V}{2}$.

Datis

Datis	A, M,	Datur	$V = 2M - A$.
	A, V,		$M = \frac{A+V}{2}$.
	M, V,		$A = 2M - V$.

34. Atque idem valet de tribus quatuorve terminis progressionis Arithmeticæ, utut non immediate proximis, modo æqualibus utrobique intervallis distantibus. Puta, si a, b, c, d, e, f, g, ∺ erit $a + e = 2c$. Nam & a, c, e, ∺ per prop. 14. Item $a + f = c + d$. & $d + e = b + g$. Et sic alibi. Nam $a, c; d, f$. vel $a, d; c, f$. & $b, e; d, g$, vel $b, d; e, g$. &c. per pr. 12.

35. Sed & præcedentium aliquot conversæ pariter demonstrantur. Puta conversa pr. 28. In continua progressione Arithmetica, (excepta tantum progressione æqualium, ubi excessus est ubique nullus, puta, 1, 1, 1, 1, &c. ∺; quæ & deinceps aliquoties excepta intelligatur,) si duorum intermediorum terminorum aggregatum aggregato extremorum æquetur, sunt illi ab extremis æqualiter utrinque remoti; (hoc est, quot gradibus intermediorum alter ab altero extremorum, tot reliquus à reliquo distat.) Puta in progressione a, b, c, d, e, f, g, ∺ si $c + e = a + g$, totidem gradibus distant a, c, atque e, g; item a, e, atque c, g. Cum enim quanto duorum c, e, alter major est quam a, tanto alter minor sit quam g, (secus enim aggregata non essent æqualia,) distantia utrobique æqualis erit, per prop. 13.

36. Et conversa prop. 29. Si termini alicujus intermedii duplum æquetur aggregato extremorum: æqualiter ille ab utroque extremo distat. Probatur ut præcedens.

37. Item conversa prop. 32. Si unius termini duplum æquetur duorum aggregato, erit ille medius Arithmeticus inter hos. Nam, nisi æqualibus differentiis horum tum alter major sit tum alter minor, quam est expositus, non constaret æqualitas.

38. Similiter & conversa prop. 30. Si bini binis simul sint æquales, erunt illi quatuor termini Arithmetice (ut loquuntur) proportionales. Puta si $A + V = M + N$, quanto horum alter puta M, superat alterum illorum puta A, tanto horum reliquus ab illorum reliquo deficit; (nam nisi excessus & defectus se mutuo perimant, non constabit aggregatorum æqualitas:) Ideoque $M - A = V - N = E$. Ergo $A, M = A + E; N, V = N + E$. Vel sic, quia $A + V = M + N$; erit $V = M + N - A$, & $V - N = M - A$: Ergo, per def. A, M; N, V. Sed & eodem argumento M, A; V, N. vel V, N; M, A. Item, cum sit $V = M + N - A$ (ut dictum est) erit etiam $V - M = N - A$; Ideoque V, M; N, A, & M, V; A, N, vel A, N; M, V. Atque hinc sequitur, non tantum

39. Si quatuor termini sint Arithmetice proportionales, sunt & inverse proportionales; (Intellige, si A, M; N, V. vel N, V; A, M, tum M, A; V, N, vel V, N; M, A.) quod ex ipsa definitione sequitur. Nam si in alteris sit æqualis excessus, in alteris erit æqualis defectus; adeoque utrobique progressio Arithmetica. Sed &

40. Si quatuor termini sint Arithmetice proportionales, sunt & alterne (permutatim, vicissim,) proportionales. Hoc est, si A, M; N, V, ideoque $A + V = M + N$; erit A, N; M, V, ut ostensum est prop. 38. Item N, A; V, M, ut ibidem, & prop. 39.

41. Item si Arithmetice proportionalium vel primus & tertius, vel secundus & quartus, æqualiter vel augeantur, vel minuantur; manent adhuc Arithmetice proportionales. Puta, si A, M; N, V, hoc est $A, A + E; N, N + E$; erit etiam $A, M + B; N, V + B$, hoc est $A, A + E + B; N, N + E + B$; Nempe illic communis excessus est E, hic $E + B$. Item $A + B, M = A + E; N + B, V = N + E$, ubi communis excessus est $E - B$. Et, pari de causa, $A \pm B, M \pm C; N \pm B, V \pm C$; Et pariter in similibus. Quippe qui prius erat communis excessus, utrobique vel pariter augetur, vel pariter minuitur, adeoque etiamnum utrobique æqualis; & propterea termini Arithmetice proportionales.

42. Item, si Arithmetice proportionales sint tum A, M; N, V. tum $\alpha, \mu; \nu, \upsilon$; tum $a, m; n, u$, (tum, si placet, quaterni plures:) erunt item tum aggregata, tum differentiæ, terminorum respective sumptorum, termini proportionales. Puta $A + \alpha \pm a$, $M + \mu \pm m; N + \nu \pm n, V + \upsilon \pm u$. Nam si in primis excessus sit ubique E, in secundis ε, in tertiis $\pm e$; erit in quartis $E + \varepsilon \pm e$. Ut additione patebit.

$$\begin{cases} A, \\ \alpha, \\ a, \end{cases} \quad \begin{cases} M = A + E; \\ \mu = \alpha + \epsilon; \\ m = a \pm e; \end{cases} \quad \begin{cases} N, \\ \nu, \\ n, \end{cases} \quad \begin{cases} V = N + E. \\ \upsilon = \nu + \epsilon. \\ u = n \pm e. \end{cases}$$

$$A + \alpha \pm a,\ A + \alpha \pm a + E + \epsilon \pm e;\ N + \nu \pm n,\ N + \nu \pm n + E + \epsilon \pm e.$$

43. Sed & idem obtinet in Arithmeticis progreſſionibus continuis. Quod ſimiliter probandum erit. Puta, ſi tum A, B, C, D, ÷÷, tum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ÷÷; tum a, b, c, d, ÷÷ erunt $A + \alpha \pm a$, $B + \beta \pm b$, $C + \gamma \pm c$, $D + \delta \pm d$, ÷÷.

44. Et quidem, licet altera progreſſio creſcens fuerit, altera decreſcens.

$$\text{Puta} \begin{cases} A + E,\ A + 2E,\ A + 3E,\ A + 4E,\ \div\div \\ \upsilon - \epsilon,\ \upsilon - 2\epsilon,\ \upsilon - 3\epsilon,\ \upsilon - 4\epsilon,\ \div\div \end{cases}$$

Quippe aggregatorum exceſſus continuus eſt $E - \epsilon$.

Atque hujuſmodi complures proportionalium immutationes & comparationes facile eſſet tum comminiſci tum demonſtrare. Verum illud haud eſt neceſſe, ſed cujuſlibet potius arbitrio permittendum, ut id, prout opus fuerit, pro re nata curet; & cum res poſtulaverit ipſe perficiat.

45 In continua progreſſione Arithmetica, Aggregatum extremorum ($Z = A + V$) per numerum terminorum multiplicatum T, eſt duplum ſummæ terminorum omnium. Hoc eſt $TZ = 2S$. Progreſſionis termini ordine directo (à primo inchoati) dicantur a, b, c, d, &c. Iidem termini ordine retrogrado (ab ultimo inchoati) dicantur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. Quoniam igitur, per prop. 28. tum $a + \alpha$, tum $b + \beta$, tum $c + \gamma$, &c. æquantur aggregato extremorum $A + V = Z$: erunt omnes a, b, c, d, &c. cum omnibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. æquales ipſi Z toties ſumpto. Hoc eſt, omnes termini bis ſumpti (nempe, tum ordine directo, tum ordine retrogrado,) æquantur extremorum aggregato Z toties ſumpto quot ſunt termini. Hoc eſt $TZ = 2S$.

$$\begin{array}{l} a + \alpha = Z = A + V \\ b + \beta = Z \\ c + \gamma = Z \\ d + \delta = Z = A + V \\ \quad \&c. \\ \hline S + S = TZ = TA + TV. \end{array}$$

46 Idem valet in quatuor diſcontinue proportionalibus Arithmetice. Puta A, M; N, V. Cum enim, per prop. 30, ſit $A + V = Z = M + N$, erit $4Z = 2S$.

47 Datis igitur, in Arithmetica progreſſione continua, extremorum aggregato & terminorum numero; Z, T; habetur totius progreſſionis ſive terminorum omnium ſumma. S. nempe $TZ = 2S$, per prop. 45. Ergo $\frac{TZ}{2} = S$.

48 Et Dato extremorum aggregato, cum progreſſionis ſumma; Z, S; habetur numerus terminorum. T. Nam, quia $2S = TZ$; erit $\frac{2S}{Z} = T$.

49 Et Dato terminorum numero, cum progreſſionis ſumma; T, S; datur item extremorum aggregatum. Z. Nam, quia $2S = TZ$; erit $\frac{2S}{T} = Z$.

50 Datis terminorum numero, progreſſionis ſumma, & termino minimo; T, S, A; habetur maximus. V. Eſt enim per p. 49. $\frac{2S}{T} = Z = A + V$. Ergo $\frac{2S}{T} - A = Z - A = V$.

51 Datis iiſdem; datur extremorum differentia. X. Nam, per præced. $\frac{2S}{T} - A = V$. Ergo $\frac{2S}{T} - 2A$ $(= Z - 2A) = V - A = X$.

52 Datis numero terminorum, progreſſionis ſumma, & termino maximo; T, S, V, habetur item minimus. A. Cum enim, per pr. 49. $\frac{2S}{T} = Z = A + V$, erit $\frac{2S}{T} - V = A$.

53 Datis iisdem; datur extremorum differentia. X. Nam, per præced. $\frac{2S}{T} - V = A$. Ergo $V - \frac{2S}{T} + V = 2V - \frac{2S}{T}$ $(= 2V - Z) = V - A = X$.

$$\begin{array}{r} V + A = Z \\ \text{mi:}\ V - A = X \\ \hline 2A = Z - X \end{array}$$

54 Datis extremorum summa & differentia, Z, X; datur extremum minus, seu terminus minimus. A. $Z - X$ ($V + A$ minus $V - A$) $= 2A$. Ergo $\frac{Z - X}{2} = A$.

$$\begin{array}{r} V + A = Z \\ \text{pl.}\ V - A = X \\ \hline 2V = Z + X \end{array}$$

55 Datis iisdem; datur terminus maximus. V. Nempe $Z + X$ ($V + A$ plus $V - A$) $= 2V$. Ergo $\frac{Z + X}{2} = V$.

56 Datis extremis (vel eorundem summa & differentia,) cum excessu communi, Z, X, E, datur progressionis summa. S. Nempe per pr. 18. habetur T, ergo & per pr. 47. $S = \frac{ZX + ZE}{2E}$.

57 Datis extremis, cum summa progressionis, A, V, S, datur communis excessus. E. nempe, per prop. 48. habetur T, ergo & per pr. 17. $E = \frac{ZX}{2S - Z}$.

58 Datis termino minimo, terminorum numero, & communi excessu; A, T, E; datur progressionis summa. S. Nempe per pr. 19. habetur V; ergo & per pr. 47, $S = \frac{2A + TE - E}{2} T$.

59 Datis termino minimo, terminorum numero, & progressionis summa; A, T, S; datur communis excessus. E. nempe per pr. 51. habetur X; ergo & per pr. 17, $E = \frac{2S - 2TA}{Tq - T}$.

60 Datis termino maximo, terminorum numero, & communi excessu; V, T, E; datur progressionis summa. S. nempe per prop. 20. habetur A; ergo & per prop. 47, $S = \frac{2V - TE + E}{2} T$.

61 Datis termino maximo, terminorum numero, & progressionis summa; V, T, S; datur communis excessus. E. nempe per prop. 53, habetur X; ergo & per prop. 17. $E = \frac{2TV - 2S}{Tq - T}$.

62 Datis terminorum numero, communi excessu, & progressionis summa, T, E, S; datur terminus minimus. A. nempe per pr. 16. habetur X, & per pr. 49, Z; ergo & per prop. 54. $A = \frac{2S - TqE + TE}{2T}$.

63 Datis iisdem; datur terminus maximus. V. nempe per prop. 16 & 49, habentur Z & X; ergo & per prop. 55. $V = \frac{2S + TqE - TE}{2T}$.

64 Datis termino minimo, communi excessu, & progressionis summa, A, E, S: datur numerus terminorum. T. Nam per pr. 19. $A + TE - E = V$: adeoque $2A + TE - E = A + V = Z$. Ergo, per pr. 45. $2S = TZ = 2TA + TqE - TE$. adeoque $\frac{2S}{E} = Tq + \frac{2A - E}{E} T$. Et (resolvendo æquationem) $\frac{-A + \frac{1}{2}E + \sqrt{:\frac{1}{4}Eq + Aq - AE + 2SE:}}{E} = T$.

65 Datis iisdem; datur terminus maximus. V. nempe, per præcedentem, habetur T. adeoque V per. pr. 19.

Vel sic. Quia, per pr. 18. $\frac{X + E}{E} = T$; erit per prop. 45. $2S = TZ$ $= ZX$

$= \frac{ZX+ZE}{E}$. Et $2SE = ZX + ZE$. Hoc est (quia $ZX = Vq - Aq$, & $Z = A + V$;) $2SE = Vq - Aq + VE + AE$. Adeoque $Vq + EV = Aq + 2SE - AE$. Ergo (resolvendo æquationem) $\sqrt{:\tfrac{1}{4}Eq + Aq - AE + 2SE:} - \tfrac{1}{2}E = V$.

$$\begin{array}{r} V + A = Z \\ V - A = X \\ \hline Vq + VA \\ - VA - Aq \\ \hline Vq - Aq = ZX. \end{array}$$

Si autem hac methodo reperiatur V; Investigabitur T, propositionis præcedentis, per pr. 48. (alia quidem forma, sed eodem valore quo prius.) nempe $T = \frac{2S}{-\tfrac{1}{2}E + A + \sqrt{:\tfrac{1}{4}Eq + Aq - AE + 2SE:}}$

66 Datis termino maximo, communi excessu, & progressionis summa; V, E, S; datur numerus terminorum. T. Nam, per prop. 20. $V - TE + E = A$. adeoque $2V - TE + E = V + A = Z$. Ergo, per prop. 45. $2S = TZ = 2TV - TqE + TE$. adeoque $\frac{2S}{E} = \frac{2V + E}{E} T - Tq$. Et (resolvendo æquationem) $\frac{V + \tfrac{1}{2}E \mp \sqrt{:\tfrac{1}{4}Eq + Vq + VE - 2SE:}}{E} = T$.

Notandum autem est, hujus æquationis (utpote ambiguæ) radicem minorem tunc convenire, cum A major est quam $\tfrac{1}{2}E$, (adeoque radicem universalem $\sqrt{:\tfrac{1}{4}Eq}$ &c. afficiendam signo $-$;) majorem vero (adeoque $+\sqrt{:}$ &c.) quoties A minor est quam $\tfrac{1}{2}E$. Sin $A = \tfrac{1}{2}E$; perinde erit utra eligatur; nam hoc casu totum illud quod nota radicalitatis afficitur, evanescit.

67. Datis iisdem; datur terminus minimus A. Nam, per præcedentem habetur T. adeoque A per prop. 20.

Vel sic. Quoniam (ut in prop. 65.) $2SE = Vq - Aq + VE + AE$. Transponantur termini (si sit $Vq + EV$ plus quam $2SE$; quod tum continget, cum A major est quam E;) ad hanc formam, $Aq - AE = Vq + EV - 2SE$: cujus æquationis radix est $\tfrac{1}{2}E + \sqrt{:\tfrac{1}{4}Eq + Vq + EV - 2SE:} = A$. Vel (si sit $Vq + EV$ minus quam $2SE$: quod tum continget, cum A minor est quam E;) transponantur ad hanc formam, $EA - Aq = 2SE - Vq - EV$; cujus æquationis radix est ambigua, nempe $\tfrac{1}{2}E \pm \sqrt{:\tfrac{1}{4}Eq + Vq + EV - 2SE:} = A$. quarum radicum major convenit quoties A major quam $\tfrac{1}{2}E$; minor autem quoties A minor est quam $\tfrac{1}{2}E$. Si autem sit $Vq + EV = 2SE$, manifestum est (utrovis modo disponantur termini) $Aq \backsim EA = 0$, adeoque $A = E$.

Si autem hac methodo reperiatur A; investigabitur T, propositionis præcedentis, per prop. 48. Nempe $T = \frac{2S}{V + \tfrac{1}{2}E \pm \sqrt{:\tfrac{1}{4}Eq + Vq + EV - 2SE:}}$. Ubi non temere factum, quod cum forma superius tradita, fuerit $\mp$, jam sit $\pm$. Nam quo casu in illa forma eligenda erat radix major, in hac minor eligenda erit.

Atque hactenus Progressionis Arithmeticæ traditionem satis videamur absolvisse; cujus breviorem synopsin capite sequente exhibebimus.

Notandum autem est, propositiones omnes hoc capite de Progressione Arithmetica traditas, posse item ad Progressionem Geometricam (mutatis mutandis) non difficulter accommodari. Nempe substitutis fere illic Multiplicatione & Divisione pro hic imperatis Additione & Subductione; item potestatum Constructione & Analysi, pro Multiplicatione & Divisione; & denique Rectangulorum aggregato pro Duplo summæ; (cum paucis insuper aliis immutationibus:) Quod ex comparatis his cum primoribus totidem propositionibus: Cap. XXXIII. (eodem ordine positis) videre est.

CAP. XXVIII.

Progressionis Arithmeticæ brevior Synopsis.

CUM in præcedente Capite doctrinam Progressionis Arithmeticæ fusius prosecuti simus: libet hoc Capite selectas aliquot propositiones, progressionem continuam spectantes, alio ordine summatim tradere; ut uno quasi intuitu oculo subjiciantur. Retentis iisdem quibus supra Symbolis usi sumus.

Theoremata.

1	$D = T - 1.$
2	$V = A + DE$
3	$S = \frac{1}{2} TZ.$

Problemata.

	Data.	Quæsita.	
1	A, V:	$Z = V + A.$	
2		$X = V - A.$	
3	A, Z:	$V = Z - A.$	
		X per 2.	
4	A, X:	$V = A + X$	
		Z per 1.	
5	V, Z:	$A = Z - V.$	
		X per 2.	
6	V, X:	$A = V - X.$	
		Z per 1.	
7	Z, X:	$A = \frac{Z - X}{2}.$	
8		$V = \frac{Z + X}{2}.$	
9	T, E:	$X = DE$	
10	T, X:	$E = \frac{X}{D}$	
11	X, E:	$T = \frac{X}{E} + 1$	
12	Z, T:	$S = \frac{ZT}{2}$	
13	Z, S:	$T = \frac{2S}{Z}$	
14	T, S:	$Z = \frac{2S}{T}$	
15	A, V, T:	Z, X,	per 1, 2,
		E, S,	per 10, 12.
16	A, V, S:	Z, X,	per 1, 2.
		T,	per 13.
		E,	per 10.
17	A, V, E:	Z, X,	per 1, 2.
		T,	per 1, 11.
		S,	per 12.
18	A, Z, T:	V, X, S,	per 3, 12.
		E,	per 10.
19	A, Z, S:	V, X, T,	per 3, 13,
		E,	per 10.
20	A, Z, E:	V, X,	per 3.
		T,	per 11.
		S,	per 12.
21	A, X, T:	V, Z, E,	per 4, 10.
		S,	per 12.
22	A, X, S:	V, Z,	per 4.
		T,	per 13.
		E,	per 10.
23	A, X, E:	V, Z, T,	per 4, 11.
		S,	per 12.

	Data.	Quæsita.	
24	V, Z, T:	A, X, S,	per 5, 12.
		E,	per 10.
25	V, Z, S:	A, X, T,	per 5, 13.
		E,	per 10.
26	V, Z, E:	A, X,	per 5.
		T,	per 11.
		S,	per 12.
27	V, X, T:	A, Z, E,	per 6, 10.
		S,	per 12.
28	V, X, S:	A, Z,	per 6.
		T,	per 13.
		E,	per 10.
29	V, X, E:	A, Z, T,	per 6, 11
		S,	per 12.
30	Z, X, T:	A, V, S, E,	per 7, 8, 12, 10.
31	Z, X, S:	A, V, T,	per 7, 8, 13.
		E,	per 10.
32	Z, X, E:	A, V, T,	per 7, 8, 11.
		S,	per 12.
33	Z, T, E:	X, S,	per 9, 12.
		A, V,	per 7, 8.
34	Z, S, E:	T,	per 13.
		X,	per 9.
		A, V,	per 7, 8.
35	T, S, A:	Z,	per 14.
		V, X,	per 3.
		E,	per 10.
36	T, S, V:	Z,	per 14.
		A, X,	per 5.
		E,	per 10.
37	T, S, X:	E, Z,	per 10, 14.
		A, V,	per 7, 8.
38	T, S, E:	X, Z,	per 9, 14.
		A, V,	per 7, 8.
39	T, E, A:	X,	per 9.
		V, Z,	per 4.
		S,	per 12.
40	T, E, V:	X,	per 9.
		A, Z,	per 6.
		S,	per 12.
41	X, E, S:	T,	per 11.
		Z,	per 14.
		A, V,	per 7, 8.
42	S, E, A:	$V = -\frac{1}{2}E + \sqrt{:}\ \frac{1}{4}Eq + Aq - AE + 2SE.$	
		Z, X,	per 1, 2.
		T,	per 13.
43	S, E, V:	$A = +\frac{1}{2}E \pm \sqrt{:}\ \frac{1}{4}Eq + Vq + VE - 2SE.$	
		Z, X,	per 1, 2.
		T,	per 13.

Datis.

A, V, Z, X. vel Z, T, S. vel T, E, X. } nihil ulterius inde innotescit.

Atque hactenus de Progressione Arithmetica dictum esto.

CAP.

CAP. XXIX.

Rationum Distributio, & Nomina. Ratio Multiplex; Super-particularis, Superpartiens, Submultiplex, &c. Rationum Designatio, & Notatio.

EXposita in superioribus capitibus Progressione Arithmetica, quæ ex æqualitate Differentiarum ortum ducit: Priusquam Progressionem Geometricam distinctius tractandam aggrediar, quæ ex Rationum sive Æqualitate sive (ut plerique loquuntur) Identitate trahit originem; De Rationibus, sive proportionibus, quædam adhuc restant exponenda; præsertim de Rationum tum Nominibus sive appellationibus, tum Notatione.

Quid sit Ratio, jam satis innotescat, tum ex iis quæ superius tradidimus Cap. XXV tum ex Euclidis definitione 3 d 5. λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. *Ratio est, duarum magnitudinum homogenearum, quæ secundum quantitatem est, ad invicem* (ποιὰ σχέσις) *habitudo qualitativa.* Nempe, qua dicitur, ποσαπλάσιον, *quantuplum* vel *quotuplum* sit hoc illius; puta duplum, triplum, dimidium, &c. vel, quoties hoc illud contineat. Adeoque divisione innotescit, (sicuti subductione Differentia,) divisionis *Quoto* sive Quotiente determinanda. Et propterea, *ex Quotientum identitate, identitas Rationum colligitur, & contra.* Puta, tum numeri quaternarii ad binarium, tum senarii ad ternarium, eadem est ratio, nempe dupla; quia utrobique antecedens consequentem bis continet; quod antecedentem utrumque per consequentem suum dividendo innotescit. Nam 2) 4 (2, & 3) 6 (2. *Ratio, quid?*

Distribuitur autem Ratio sive proportio in *Rationalem & Irrationalem.* Rationalis dicitur, quæ potest veris numeris exhiberi: puta 6 ad 4, quæ est ratio Sesquialtera. Irrationalis autem quæ veris numeris exhiberi non potest: ut, in quadrato, ratio Lateris ad Diagonium. Quamvis enim hujusmodi ratio utcunque explicari solet per numeros quos *Surdos* vocant, puta ut 1 ad $\sqrt{2}$; tamen, cum numerus Surdus, proprie loquendo, numerus non sit, sed imaginarii cujusdam numeri nota, ideo nec ea ratio veris numeris explicabilis censenda erit. Est nempe, $\sqrt{2}$, nota numeri qui supponitur in se ductus numerum 2 producere; sicut $\sqrt{4}$, numerum notat (nempe 2) qui in se ductus producit 4. Cum autem nullus omnino numerus possibilis sit (vel integer, vel fractus,) qui sui in se multiplicatione producere possit numerum 2; est igitur $\sqrt{2}$ numeri tantum suppositiții & imaginarii, non veri alicujus numeri, nota. Non est itaque illa ratio veris numeris explicabilis, ideoque ratio ἄλογος, ἄῤῥητος, *irrationalis.* *Rationalis & Irrationalis.*

Non autem dissimulandum est, *Rationalitatis* appellationem, ab Euclide passim in Elemento decimo, etiam eis lineis attribui quæ potentia tantum sunt commensurabiles; hoc est, quarum saltem quadrata rationem habent numeris explicabilem, utut longitudine sint ἀσύμμετροι, incommensurabiles. Atque hoc sensu Latus & Diagonium quadrati erunt Rationalia, quippe quorum quadrata sunt ut numerus ad numerum, puta ut 1 ad 2 Verum alibi non raro obtinet, *Rationalia* tantum ea dicere quæ & σύμμετρα sunt: ut perinde sit ἄλογον esse sive ἄῤῥητον, atque ἀσύμμετρον.

Sicut vero duriuscula videri possit *Rationis Irrationalis* appellatio; quæ enim λόγον rationem habent ad invicem, quî dici possint ἄλογα? aut etiam ipse λόγος, ἄλογος? Dicendum est, hoc ob vocis λόγος apud Græcos homonymiam obtingere, (quos & Arithmetici Latini sequuntur.) Quippe λόγος (præter alia significata) etiam *Ratiocinium* sive *Computum* significat; unde *Logista* idem est qui *Calculator* sive *Computator*; atque illud ἄλογον, quod calculum fugit, nec vero numero est explicabile: qua de causa & ἄῤῥητον & ἀνεκφώνητον dicitur, inexplicabile, ineffabile, inenarrabile: non quod omnino enarrari non possit, sed non veris numeris possit enarrari.

Distribuitur porro *Ratio,* in rationem *Æqualitatis,* & rationem *Inæqualitatis.* Illa est, cum comparata sunt æqualia. Hæc, cum inæqualia. Sic 2 ad 2, & 4 ad 4, *Ratio Æqualitatis, & Inæqualitatis.*

T 3 &

& $\frac{1}{2}$ ad $\frac{2}{4}$, &c. sunt in ratione Æqualitatis constituta. At 2 ad 3, & 5 ad 4, & 4 ad 5, &c. in ratione Inæqualitatis. Sicut interim nomina Æqualitatis & Inæqualitatis, potius ad alteram comparationem, quæ est quoad Differentiam, referenda videantur, quam ad hanc quæ est quoad Rationem: Ego quidem non repugno. Nam quod, quoad differentiam, alteri *Æquale* dicitur; id forsan, quoad rationem, rectius dicatur *Simplum*. Verum hoc non tanti est ut receptas jam appellationes innovandas contendam.

Notandum hic est, Rationem Æqualitatis, & Rationalem esse; nempe ut 1 ad 1: At non contra, rationem omnem Rationalem esse & rationem Æqualitatis. Item, omnem rationem Irrationalem, esse & Inæqualitatis rationem; non autem contra, omnem Inæqualitatis rationem, esse & Irrationalem: quippe dupla, tripla, aliæque infinitæ Inæqualitatis rationes sunt, Rationales tamen.

Ratio Majoris inæqualitatis, & Minoris. Ratio Inæqualitatis (sive Rationalis fuerit sive Irrationalis,) subdividitur rursus in rationem (sive proportionem). *Majoris inæqualitatis*, & *Minoris*. (Vel in rationem *Majoritatis* & *Minoritatis*.) Illa est, quantitatis majoris ad minorem; ut 4 ad 2. Hæc, minoris ad majorem; ut 2 ad 4.

Rationis sive proportionis Majoris inæqualitatis (Rationalis intellige; nam, de rationum irrationalium nominibus Scriptores nondum fuerunt solliciti;) quinque solent constitui genera, *Multiplex*, *Superparticularis*, *Superpartiens*, *Multiplex-superparticularis*, & *Multiplex-superpartiens*.

Et pariter Minoris inæqualitatis ratio (rationalis) in totidem solet genera distribui, iisdem insignita nominibus, præfixa tantum particula *Sub* nempe *Submultiplex*, *Subsuperparticularis*, *Subsuperpartiens*, *Submultiplex-superparticularis*, *Submultiplex-superpartiens*. Siquem interim terreat nominum barbaries; in vocibus technicis; liberum ipsi erit illis abstinere; dummodo mihi permittat indicare, quid alii his nominibus intellectum volunt.

Multiplex. Quantitas major minoris *Multiplex* dicitur, (vel multipla,) quæ minorem aliquoties exacte continet, vel, cum minor metitur majorem. Πολλαπλάσιον τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος, definiente Euclide 2 *d* 5, & speciatim de numeris 5 *d* 7. Hoc est, cum minor aliquoties accepta æquatur majori. Ea enim est vocis καταμετρεῖσθαι apud Euclidem significatio. Sic enim Euclides 23 *d* 7. *Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, illum producit*: Et eodem modo Quantitas quantitatem metiri censenda est. Si ergo quantitas minor per nullum numerum (integrum intellige) multiplicata producat majorem, hanc illa non metitur. Ita numerus senarius est binarii multiplus; quia binarius aliquoties acceptus, nempe ter, æquatur ipsi senario; sive (ut loquitur Euclides) numerus 2 metitur 6, per 3; quia bis tria sunt sex. $2 \times 3 = 6$. At 8 ad 3 non esse dicimus in ratione multiplici: quia, quamvis 3 in 8 aliquoties contineantur, nempe bis; non tamen 3 exacte metiuntur 8, quia bis ablata relinquunt 2, ter autem auferri non possunt.

Submultiplex. Multiplicis correlatum (in proportione minoris æqualitatis constitutum) dicitur *Submultiplex*. Apud Euclidem simpliciter *Pars* dicitur 1 *d* 5. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. *Magnitudo minor majoris Pars est, quando exacte metitur majorem.* Ubi autem minor majorem non metitur (at saltem in ratione rationali constituta sit,) quantitas illa non hujus *Pars*, sed *Partes*, ab Euclide dicitur; quippe ille, hic loci, per *partem* non aliam quam *partem aliquotam* intelligit; & per *partes*, partium aliquotarum aggregatum. Quæ autem hic Euclides *partem* & *partes* appellat; appellant alii recentiores, *partem aliquotam*, & *partem aliquantam*. Sic Semissis, Triens, Quadrans, Sextans, Uncia, dicuntur singulæ, *aliquota pars* Assis; quoniam aliquoties acceptæ integrum Assem complent. Nempe Semissis bis, Triens ter, Quadrans quater, Sextans sexies, & Uncia duodecies, præcise, continentur in Asse, sive integro. Est autem Quincunx, Assis pars aliquanta, non aliquota: Nam quincunx bis acceptus, est asse minor, nempe decem unciæ; at ter acceptus, major erit, nempe 15 Unciæ, quæ assem tribus unciis superant. Atque idem de Septunce, Besse, Dodrante, Decunce, Undecunce, (sive, ut loquuntur alii, Dextante, Deunce,) dicendum est. Nam, verbi gratia, Bes, non assis aliquota *Pars* dicitur, sed *Partes*, nempe duæ tertiæ; & Dodrans, tres quartæ; & sic de cæteris. Sic enim Euclides, 3 & 4 *d d* 7. Pars est numerus minor majoris, cum minor metitur majorem: Partes autem, cum non metitur.

Proportionis (sive Rationis) Multiplicis species sunt, *Dupla*, *Tripla*, *Quadrupla*, &

& ſic deinceps in infinitum. Et contra proportionis (ſive Rationis) Submultiplicis ſpecies ſunt, *Subdupla*, *Subtripla*, *Subquadrupla*, &c. vel etiam Semiſſis, Triens, Quadrans, &c. vel etiam Pars dimidia, tertia, quarta, decima, centeſima, milleſima, &c. Græce ἡμιμόριον, τριτημόριον, τεταρτημόριον, δεκατημόριον, ἑκατοστημόριον, χιλιοστημόριον, &c.

Quantitates autem quantitatum *Æquimultiplices*, Euclidi aliiſque, dicuntur, quas ſuæ reſpective partes per eundem numerum metiuntur. Vel (quod perinde eſt) prima ſecundæ, & tertia quartæ æque-multiplices ſunt, quando prima ſecundam toties præciſe continet, quoties tertia quartam. Sic quaternarius binarii, & ſenarius ternarii ſunt æque-multiplices; utrobique ſcilicet in proportione dupla: quia tum illum binarius, tum hunc ternarius, per binarium metitur; & toties 2 in 4, quoties 3 in 6 continentur, nempe utrobique bis.

2) 4 (2
3) 6 (2

Ratio (ſive proportio) *Superparticularis*, eſt ratio majoris quantitatis ad minorem, quando major minorem ſemel quidem, nec ſæpius continet, ſed & ipſius partem aliquotam. Sic 3 ad 2, & 6 ad 4, ſunt in ratione ſuperparticulari; uterque enim numerus antecedens conſequentem ſuum ſemel continet & ipſius inſuper ſemiſſem. Diviſo nempe numero majore per minorem, prodibit utrobique Quotiens $1\frac{1}{2}$. *Superparticularis.*

2) 3 ($1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
4) 6 ($1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Hujus Rationis ſpecies ſunt, *Seſquialtera*, *Seſquitertia*, *Seſquiquarta*, *Seſquiquinta*, *Seſquidecima*, *Seſquicenteſima*, *Seſquimilleſima*, & ſic deinceps in infinitum: prout ſcilicet major minorem ſemel continet, & inſuper minoris partem dimidiam, tertiam, quartam, quintam, decimam, centeſimam, milleſimam, &c.

2) 3 ($1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	10) 11 ($1{,}1 = \frac{11}{10}$
3) 4 ($1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$	100) 101 ($1{,}01 = \frac{101}{100}$
4) 5 ($1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$	1000) 1001 ($1{,}001 = \frac{1001}{1000}$
5) 6 ($1\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$	10000) 10001 ($1{,}0001 = \frac{10001}{10000}$

Ubi autem major ad minorem eſt in ratione *Superparticulari*, ſeſquialtera, ſeſquitertia, &c. erit minor illa quantitas ad majorem in ratione *Subſuperparticulari*, ſubſeſquialtera, ſubſeſquitertia, &c. Sic 18 ad 16 ſunt in ratione ſeſquioctava, (nempe ut 9 ad 8,) ergo 16 ad 18 in ratione ſubſeſquioctava. Et pariter in ſimilibus. Apud Ariſtotelem, ἐπιμόριος & ὑπεπιμόριος hoc ſenſu occurrunt Metaph. 4. & alibi. Et apud alios paſſim. *Subſuperparticularis.*

Ratio ſeu proportio *Superpartiens* ἐπιμερὴς eſt ratio quantitatis majoris ad minorem, quando major minorem ſemel quidem, nec ſæpius, continet; ſed & aliquot inſuper ipſius partes aliquotas. Sic 5 ad 3, ſunt in ratione Superpartiente: numerus enim quinarius ternarium continet ſemel, & duos inſuper ipſius trientes. Si enim 5 per 3 dividamus, erit quotiens $1\frac{2}{3}$. *Superpartiens.*

3) 5 ($1\frac{2}{3}$

Hujus proportionis ſpecies duplicem characterem poſtulant. Cum enim major minorem contineat, & inſuper aliquot ipſius partes aliquotas; dicendum eſt, *quot* partes, & quidem *quotas* continet. Priori reſpectu dicitur, *Superbipartiens*, *Supertripartiens*, *Superquadripartiens*, *Superdecupartiens*, *&c.* prout quantitas major, præter ipſam minorem, contineat inſuper ipſius partes aliquotas, duas, tres, quatuor, decem, &c. Poſteriori reſpectu dicitur *ſuperpartiens tertias*, *ſuperpartiens quartas*, *quintas*, *decimas*, *centeſimas*, *&c.* prout partes illæ aliquotæ ſint trientes, quadrantes, &c. hoc eſt, partes tertiæ, quartæ, quintæ, decimæ, centeſimæ, &c. Sic ratio numeri 5 ad 3, vel 10 ad 6, eſt ſuperbipartiens tertias: Major enim minorem utrobique ſemel continet, & inſuper duos ipſius trientes, ut ex diviſione liquet. Sic 7 ad 4, eſt ſupertripartiens quartas. Et pariter in ſimilibus.

3) 5 ($1\frac{2}{3}$	5) 7 ($1\frac{2}{5}$	6) 11 ($1\frac{5}{6}$	10) 13 ($1{,}3 = 1\frac{3}{10} = \frac{13}{10}$
6) 10 ($1\frac{4}{6}$	5) 8 ($1\frac{3}{5}$	7) 10 ($1\frac{3}{7}$	100) 107 ($1{,}07 = 1\frac{7}{100}$
4) 7 ($1\frac{3}{4}$	5) 9 ($1\frac{4}{5}$	8) 15 ($1\frac{7}{8}$	100) 108 ($1{,}08 = 1\frac{8}{100} = 1\frac{2}{25}$.

Ubi

Subsuperpartiens. Ubi vero quantitatis majoris ad minorem ratio est *Superpartiens*, superbipartiens, supertripartiens, &c. Erit minoris hujus ad illam majorem, ratio *Subsuperpartiens*, subsuperbipartiens, subsupertripartiens, &c. Nempe ratio 3 ad 5, vel 6 ad 10, est subsuperbipartiens tertias; & 4 ad 7, subsupertripartiens quartas. Et in aliis pariter.

Notandum autem est, in rationibus superpartientibus, Denominatorem partis aliquotæ majorem esse debere quam est Numerus earundem aliquotarum partium assumptarum. Non igitur dicitur supertripartiens tertias, vel superquadripartiens quartas: nam $\frac{3}{3}$, vel $\frac{4}{4}$, tantundem sunt ac 1. Et $1\frac{3}{3}$, vel $1\frac{4}{4}$, &c. idem est atque 2: ideoque major minorem sæpius quam semel contineret; (nempe bis,) quod est contra definitionem rationis superpartientis. Multo minus dicendum erit, Superquadripartiens tertias vel Superquintupartiens quartas, &c. (ut denominator aliquotarum partium minor sit quam earundem numerus;) ita enim major saltem bis supponetur minorem continere, & aliquid insuper.

Sed neque rite dicitur, Ratio superbipartiens quartas, sextas, &c. vel supertripartiens sextas, nonas, &c. vel superquadripartiens octavas, decimas, duodecimas, &c. & pariter in similibus: ut denominator aliquotarum partium assumptarum, & earundem numerus, communem aliquem divisorem habeant qui utrumque exacte metiatur. Sunt enim $1\frac{2}{4} = 1\frac{1}{2}$, & $1\frac{2}{6} = 1\frac{1}{3}$, & $1\frac{3}{6} = 1\frac{1}{2}$, & $1\frac{3}{9} = 1\frac{1}{3}$, & $1\frac{4}{8} = 1\frac{1}{2}$, & $1\frac{4}{10} = 1\frac{2}{5}$, & $1\frac{4}{12} = 1\frac{1}{3}$, &c. Non igitur dicenda est ratio superbipartiens quartas, aut supertripartiens sextas, aut superquadripartiens octavas; sed ratio sesquialtera. Neque item superbipartiens sextas, aut supertripartiens nonas, aut superquadripartiens duodecimas, sed ratio sesquitertia. Neque, superquadripartiens decimas, sed superbipartiens quintas. Et similiter alibi.

Siquis urget; per Rationis superpartientis definitionem, hujusmodi loquendi formulas non excludi: Dicendum erit, Rationum definitiones intelligendas esse de *Rationibus ad minimos terminos reductis*. Prout enim in Fractionibus, (ut post dicetur,) ita & in Rationibus describendis, plerumque expedit, ut terminis quam fieri potest minimis describantur, quo melius animus valorem assequatur. Secus enim eadem non raro Ratio & superbipartiens, & supertripartiens, & superquadripartiens, &c. dicenda erit. Siquidem superbipartiens quartas, supertripartiens sextas, superquadripartiens octavas, aliaque hujusmodi rationum nomina, eandem ipsam rationem designabunt. Imo vero eadem ipsa Ratio & superparticularis erit, & superpartiens: siquidem illa ipsa nomina nuper recensita, quæ rationes superpartientes videantur indicare, revera superparticularem rationem significant, nempe sesquialteram. Sunt enim $1\frac{2}{4} = 1\frac{3}{6} = 1\frac{4}{8} = 1\frac{1}{2}$.

At siquis nihilominus contendat; neque necesse esse, nec quidem semper expedire, ut vel fractiones vel rationes in minimis terminis exprimantur: Neque etiam magnum esse incommodum, eandem ipsam rationem nunc superbipartientem, nunc supertripartientem, &c. fortasse & nonnunquam superparticularem, vel etiam multiplicem, dici posse: Vel etiam, si ratio multipla aut quæcunque alia, tanquam si esset superparticularis, vel superpartiens, vel cujusvis generis, proponatur; neutiquam id formidandum esse, dummodo utcunque sic proponatur ratio ut ipsius valorem mens satis assequi valeat. Ego quidem fateor, non tanti rem esse ut de verbis contendamus: Imo non sine magno nonnunquam commodo, hujusmodi rationum quasi metamorphoses exerceri posse; atque eandem ipsam quantitatem, Protei instar, quacunque libet forma exhiberi posse: quod & ubi opus postulet faciendum erit. At cæteris paribus, ubi nihil in contrarium suadet, tum rationes, tum fractiones, aliæve quantitates, terminis quam fieri potest simplicibus explicari par est.

Restant adhuc duo Rationum genera explicanda; Multiplex-superparticularis, & Multiplex-superpartiens; cum correlatis.

Multiplex-superparticularis. *Multiplex-superparticularis*, est ratio majoris quantitatis ad minorem, quando major minorem aliquoties continet (saltem bis) & unam insuper ipsius aliquotam partem. Ut 9 ad 4, Quippe novenarius quaternarium bis continet, & ipsius insuper quadrantem.

4) 9 $(2\frac{1}{4}$
2) 7 $(3\frac{1}{2}$
10) 42 $(4{,}2 = 4\frac{1}{5}$
10) 101 $(10{,}1 = 10\frac{1}{10}$

Hujus species sunt, Dupla-sesquialtera, Dupla-sesquitertia, Dupla-sesquiquarta, &c. Tripla-sesquialtera, Tripla-sesquitertia, &c. aliæque ejusmodi in infinitum. Sic ratio 9 ad 4, est dupla-sesquiquarta; 7 ad 2, est tripla-sesqualtera; 42 ad 10 est, quadrupla-

pla-ſeſquiquinta; 101 ad 10, eſt decupla-ſeſquidecima. Et pariter in aliis.

Duplici itaque charactere opus eſt ad hanc rationem exprimendam; altero, quo ſpecies multiplicitatis indicetur, (dupla, tripla, &c.) altero, quo deſignetur aliquota pars, puta, num dimidia, tertia, &c.

Submultiplex-ſuperparticularis.

Ubi autem ratio quantitatis majoris ad minorem eſt multiplex-ſuperparticularis; minoris hujus ad illam majorem dicitur *Submultiplex-ſuperparticularis*. Hujuſque ſpecies ſpeciebus illius correſpondent. Eſt igitur 4 ad 9, ratio ſubdupla-ſeſquiquarta; 2 ad 7, ſubtripla-ſeſquialtera; 10 ad 42, ſubquadrupla-ſeſquiquinta; 10 ad 101, ſubdecupla-ſeſquidecima. Et ſic in aliis.

Multiplex-ſuperpartiens.

Ratio multiplex-ſuperpartiens, eſt ratio quantitatis majoris ad minorem, quando major minorem aliquoties continet, & ipſius inſuper aliquot partes aliquotas. Ut 8 ad 3. Nempe numerus ille hunc continet bis, & duas inſuper hujus partes tertias, ſive trientes.

Hujus ſpecies ſunt; Dupla-ſuperbipartiens-tertias, Dupla-ſuperquadripartiens-quintas; Tripla-ſupertripartiens-quartas, Quadrupla-ſupertripartiens-ſeptimas, aliæque ejuſmodi infinitæ. Tales ſunt rationes 8 ad 3; 14 ad 5; 15 ad 4; 31 ad 7. &c.

3) 8 ($2\frac{2}{3}$
5) 14 ($2\frac{4}{5}$
4) 15 ($3\frac{3}{4}$
7) 31 ($4\frac{3}{7}$

Triplici itaque charactere opus eſt ad hanc rationem exprimendam: quo tum numerus multiplicitatis, tum numerus partium aliquotarum, tum harum denominatio indicetur: ut patet.

Submultiplex-ſuperpartiens.

Ubi autem quantitas major ad minorem eſt in ratione Multiplici-ſuperpartiente; eſt minor hæc ad illam majorem in ratione *Submultiplici-ſuperpartiente*: & ſpecies hujus ſpeciebus illius correſpondent. Ita ratio 3 ad 8, eſt ſubdupla-ſuperbipartiens-tertias; 5 ad 14, ſubdupla-ſuperquadripartiens-quintas; 4 ad 15, ſubtripla-ſupertripartiens-quartas; 7 ad 31, ſubquadrupla-ſupertripartiens-ſeptimas. Atque in aliis pariter.

Quæ autem ſuperius notanda monuimus de ratione (ſimplici) ſuperpartiente; eadem & hic, mutatis mutandis, notanda ſunt de ratione multiplici ſuperpartiente. Nec opus eſt ut repetantur.

Eſtque hæc Rationum diſtributio quam tradunt Recentiores Arithmetici. Quippe non hæc omnia Rationum nomina apud Euclidem occurrunt; ſed quædam eorum præcipua. Cum tamen hujuſmodi paſſim apud Mathematicos recentiores occurrant Rationum nomina; ne quis de illis hæreat, exponenda duxi.

Sicut vero nimis intricatæ videantur hæ Rationum appellationes; poterunt illæ ſimplicius deſignari per duos numeros ea qua res poſtulet ratione conſtitutos, præſertim qui ſunt in eadem ratione minimi. Puta ſi, pro ratione ſubquadrupla-ſupertripartiente-ſeptimas, eam dicamus rationem quæ eſt 7 ad 31. Ita, qui dicit, ſit A ad B, ut 7 ad 31; tantundem innuit ac ſi diceret, ſit ratio quantitatis A ad quantitatem B, ſubquadrupla-ſupertripartiens-ſeptimas. Atque ad hanc formam Rationes ſæpiſſime exponi ſolent.

Rationum Deſignatio.

Rationes itaque pluribus modis deſignari poſſunt. Nempe

Vel, nominibus ſuis, modo indicatis. Ut Duplum, Triplum, Dimidium, Seſquialterum, &c.

Vel quidem, Figuris numericis rationes illas denominantibus: affixa ſaltem, vel quidem ſubintellecta, multiplicationis nota. Puta, 2, 3, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, &c. vel $\times 2$, $\times 3$, $\times\frac{1}{2}$, $\times 1\frac{1}{2}$, &c. Quid enim eſt Duplum, Triplum, Dimidium, Seſquialterum, &c. aliud quam, Multiplicatum in 2, 3, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$ &c.

Vel etiam, per duos numeros in ea ratione conſtitutos. Puta, Ratio ea quæ eſt 2 ad 1; 3 ad 1; $\frac{1}{2}$ ad 1, vel 1 ad 2; $1\frac{1}{2}$ ad 1, vel 3 ad 2, &c.

Vel quidem, duabus quibuſvis quantitatibus homogeneis ita conſtitutis; ut lineis, planis, ſolidis, angulis, &c. (quorum ad invicem ratio exponitur ut jam cognita, vel quaſi cognita,) eorumve ſymbolis. Puta, ut V ad A; ut L ad M; ut R ad S, &c.

Vel item, Fractionum inſtar $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{V}{A}$, $\frac{L}{M}$, $\frac{R}{S}$, &c. Cum enim Rationum denominatores nil aliud ſint quam Diviſionum Quotientes, (ut jam ante fuit expoſitum,) Diviſiones autem indicare ſolenne ſit interjecta virgula, Dividuum inter & Diviſorem, (idque neceſſario, ubi numerus dividendus eſt dividente minor, ut $\frac{1}{2}$, atque etiam alias, aliis de cauſis, non raro commode,) Quidni & Rationes ita deſignen-

designentur? præfixa tamen, ubi opus fuerit, multiplicationis nota. Et quidem ipsæ Fractiones nil aliud sunt quam Rationum Indicia; nempe $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, &c. illam indicant partem, quæ ad integrum sive unitatem eam habent rationem quam 1 ad 2, 3 ad 5, &c. numerator ad denominatorem: Atque ut 2 est duplum unius, sic $\frac{1}{2}$ est semissis unius, & sic in cæteris. Fractionis itaque Numerator & Denominator, perinde sunt atque Rationis Antecedens & Consequens: Si saltem & Fractiones impropriæ (ut loquuntur) unitate quippe majores vel saltem æquales simul intelligantur, quæ rationem æqualitatis, & majoritatis indicent; sicut fractiones propriæ indicant rationes minoritatis, sive minoris inæqualitatis.

Vel etiam, si libet, (quodque non raro expedit,) simplicibus symbolis, aliarum quantitatum instar. Puta $\frac{3}{5} = \frac{X}{Y} = R$ &c. Sunt enim Rationes, non minus quam numeri, veræ quantitates.

Perinde igitur est, verbi gratia, sive dicamus, Duplum quantitatis A, sive 2 A vel $2 \times A$ vel $A \times 2$, sive $\frac{2}{1}$ A, vel $A \times \frac{2}{1}$, sive quod est ad A ut 2 ad 1, sive ad quod A est ut 1 ad 2. Sic Triplum A, $= 3A = A \times 3 = \frac{3}{1}A$. Et semissis A, $= 2)A = \frac{A}{2} = \frac{1}{2}A$. Et sesquialterum ipsius A, $= 1\frac{1}{2}A = 1\frac{1}{2} \times A = A \times 1\frac{1}{2} = A \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}A = 2)\,3 \times A = \frac{3A}{2}$ &c.

Similiter in proportionalibus designandis; ubi nempe eadem utrobique ratio esse significatur. Puta, A ad B ut 1 ad 2, vel A.B :: 1.2. vel $A = \frac{1}{2}B$, vel $\frac{A}{B} = \frac{1}{2}$, vel B)A($\frac{1}{2}$.

Item, Ratio lateris ad diagonium quadrati, L.D :: 1.$\sqrt{2}$, vel $\frac{L}{D} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vel $L = \frac{1}{\sqrt{2}}D$, vel $L = \frac{D}{\sqrt{2}}$. Diagonii vero ad Latus, D.L :: $\sqrt{2}$.1. vel $\frac{D}{L} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$, vel $D = \frac{\sqrt{2}}{1}L = \sqrt{2} \times L = L \times \sqrt{2} = L\sqrt{2} = \sqrt{:2Lq:} = \sqrt{:2 \times Lq}$.

Item, L ad M ut R ad S, vel L.M :: R.S. vel $L = \frac{R}{S}M$, $\frac{L}{M} = \frac{R}{S}$. Et similiter alibi.

Qua vero ex omnibus designandi formulis, Rationes quilibet designare velit, penes se sit optio: Liberum quippe cuique erit, quam velit eligat; vel etiam nunc hanc nunc illam, prout præsenti negotio magis accommodum videatur.

CAP. XXX.

De Rationum Compositione sive Continuatione, & Imminutione. Ratio Duplicata, Triplicata, &c. Item Subduplicata, Subtriplicata, &c. Et Subduplicatæ-triplicata, &c.

AD pleniorem Rationum traditionem, superest ut Rationum Compositio, sive Continuatio, & Imminutio exponantur.

Rationum Compositio, sive continuatio, quid.

Rationum Compositionem, sive Continuationem, sive (ut nonnulli loquuntur) Additionem, definit Euclides, 5 d 6 Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσι τινάς: Malim τινά. *Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquas* (seu potius *aliquam*) *efficiunt.*

Quid per *Rationum quantitates* intelligit Euclides non inter interpretes convenit: num scilicet ipsos terminos; an quod ex eorum comparatione provenit. Utrumvis autem dicatur perinde est. Puta, si rationis A ad B termini, in terminos rationis

rationis α ad β respective ducantur; nempe $A \times \alpha$, $B \times \beta$; ut proveniat ratio $A \times \alpha$ ad $B \times \beta$: sive etiam ratio $\frac{A}{B}$ ducatur in rationem $\frac{\alpha}{\beta}$, ut proveniat $\frac{A}{B} \times \frac{\alpha}{\beta}$ non multum interest; nam $\frac{A}{B} \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{A\alpha}{B\beta}$: ut ex fractionum multiplicandarum regulis suo loco patebit. Fusius hæc exponit Eutocius ad prop. 4. lib. 2. Archim. *de Sphæra & Cylindro.*

Quod autem volunt tum Euclides, tum alii, hoc est, verbi gratia, *Duplum tripli*, vel *Triplum dupli*, componi ex *Duplo* & *Triplo*, (vel, ut Latinius dicam, Ratio quam habet *Duplum tripli* componi dicatur ex ratione *Dupli* & ratione *Tripli*) quippe quæ quantitates invicem ductæ constituunt duplum tripli: puta $\frac{2}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{6}{1}$, vel $2 \times 3 = 6$. Sic Tripli dimidium, vel Dimidii triplum, (quod est, Sesquialterum,) componitur ex Triplo & Dimidio: puta $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. Sic ratio *Dupla*, componi dicitur ex *Sesquialtera* & *Sesquitertia*. (hoc est, ut loquuntur Musici ex Diapente & Diatessaron componitur Diapason,) quia $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{2} = 2$. Sic ratio $\frac{ABC}{\alpha\beta\gamma}$ componitur ex rationibus $\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}$. Item $\frac{A}{D}$ componitur ex $\frac{A}{B}, \frac{B}{C}, \frac{C}{D}$, quia $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \times \frac{C}{D} = \frac{ABC}{BCD} = \frac{A}{D}$. quæ dicitur λόγος δίισυ, *ex æquo*, sive *ex æqualitate*. 18 *d* 5.

Contra vero, Ratio $\frac{AB}{\alpha\beta}$, imminuta ratione $\frac{A}{\alpha}$, est $\frac{B}{\beta}$; quia $\frac{A}{\alpha}\Big) \frac{AB}{\alpha\beta} \Big(\frac{B}{\beta}$. Quod nonnulli sic efferunt, si ex ratione $\frac{AB}{\alpha\beta}$ auferatur ratio $\frac{A}{\alpha}$, manebit ratio $\frac{B}{\beta}$. *Rationis Imminutio.*

Cur autem hanc rationum Imminutionem non pariter definiverit Euclides atque Compositionem sive Continuationem; causa est, quoniam id minus erat necesse, cum utrumque per compositionem fieri possit. Perinde enim est rationem $\frac{AB}{\alpha\beta}$ ratione $\frac{A}{\alpha}$ imminuere, atque cum ratione $\frac{\alpha}{A}$ componere. Nam $\frac{A}{\alpha}\Big) \frac{AB}{\alpha\beta} \Big(\frac{B}{\beta} = \frac{AB\alpha}{\alpha\beta A} = \frac{AB}{\alpha\beta} \times \frac{\alpha}{A}$.

Hæc autem Rationum Compositio, an Additio judicanda sit an Multiplicatio, haud satis videtur apud scriptores Arithmeticos (vel etiam Geometricos) constare. Utut enim certum sit quantitates invicem *Multiplicari*, non Addi: (nam verbi gratia, *duplum tripli* non idem est atque *duplum & triplum*, quippe hoc est *quintuplum*, nam $3 + 2 = 5$; sed *Triplum in 2 multiplicatum*, adeoque *Sextuplum*. Nempe $3 \times 2 = 6$:) Attamen usu fere obtinet, ut rationum potius *Additio* dicatur, quæ est revera multiplicatio. Et quidem ne Multiplicationis nomine jam tandem ex postlimino gaudeat, id maxime impedit, quod *Multiplicatio rationum* jam alio sensu usurpetur, adeoque homonymia metuenda sit, si pro rationum continuatione sive compositione usurpandam velimus. Nam rationum Duplicatio, Triplicatio, aliasve multiplicatio, alio plane sensu jam solet usurpari, quam quo jam loquimur, ut mox dicetur.

Malim itaque ut vel *Compositio* vel (quod vox Græca συνθέσις magis innuere videtur) *Continuatio* dicatur, quam vel Additio vel Multiplicatio.

Designandam autem malim per notam $\times$ Multiplicationis, quam per $+$ Additionis; (nam praxin multiplicando exerceri nemo dubitat:) adeoque quæ ex $\frac{A}{\alpha}$, & $\frac{B}{\beta}$, componitur ratio, scribenda est $\frac{A}{\alpha} \times \frac{B}{\beta}$, non autem $\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta}$. Adeoque tota illa de Fractionum Multiplicatione & Divisione tradenda doctrina; de Rationum Continuatione & Imminutione pariter intelligenda erit: sunt enim ipsissima eadem res. Rationum itaque continuandarum praxin in illum locum rejiciendam censui.

At cavendum interim ne *Ratio composita*, λόγος συγκείμενος, 5 *d* 6 tradita, atque *Compositio rationis*, σύνθεσις λόγου 14 *d* 5 definita, pro eodem habeantur. Sunt enim res satis diversæ. Quippe illud Additionis, hoc Multiplicationis est negotium. Ut ex ipsis definitionibus citatis constat. Quod innuisse sufficiat.

 Verum

Ratio Duplicata, Subduplicata, &c. quid.

Verum huc omnino spectat, quod de Ratione Duplicata, Triplicata, aliasve multiplicata tradit Euclides 10 *d* 5, & alibi; vel etiam Subduplicata, Subtriplicata, &c. (Eodem plane modo quo ad Multiplicationem referendæ sunt Quadratio, Cubicatio, aliæve multiplicationes potestatum generativæ; de quibus post dicetur.) Non enim tantundem significant atque ratio Dupla, Tripla, Subdupla, Subtripla, &c. vel Duplex, Triplex, &c. (neque enim ratio Sextupla, rationis Triplæ, ratio Duplicata dicitur, utut Dupla sit; quippe Sextuplum est Tripli Duplum.) Sed cum ratio aliqua (sive majoris sive minoris inæqualitatis) cum seipsa continuatur, quæ prodit ratio, rationis expositæ ratio *Duplicata* dicitur; sin in eandem iterum continuetur, ratio *Triplicata* dicitur; & sic deinceps: Quibus, ut correlata, opponuntur ratio *Subduplicata, Subtriplicata, &c.* (sicut quantitas in se ducta, expositæ *Quadratum* producit; sin in eandem iterum ducatur, *Cubum*, &c.) Sic rationis $\frac{A}{B}$ ratio duplicata est $\frac{A}{B} \times \frac{A}{B} = \frac{AA}{BB} = \frac{Aq}{Bq}$; triplicata, $\frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \frac{A}{B} = \frac{Ac}{Bc}$, &c. Et contra; Rationis $\frac{Ac}{Bc}$, ratio subtriplicata est $\frac{A}{B}$: Et rationis $\frac{Aq}{Bq}$, ratio subduplicata est $\frac{A}{B}$. (Ipsius autem $\frac{A}{B}$ rationis, ratio subduplicata erit $\sqrt{\frac{A}{B}}$; subtriplicata, $\sqrt{c}\,\frac{A}{B}$. Ut plenius patebit, postquam potestatum Genesis & Analysis tradita fuerit. Nam si exposita Ratio dicatur Radix, vel potestas prima; Ratio Duplicata erit Quadratum, sive potestas secunda; Ratio Triplicata Cubus, vel potestas tertia; &c. Et Ratio Subduplicata, erit expositæ Radix-quadratica, vel potestas subsecunda; Subtriplicata, expositæ Radix-cubica, vel potestas subtertia, &c.) Sic ratio quadrupla est, rationis duplæ, ratio (non modo dupla, quia $2 + 2 = 4$, sed) duplicata, quia $2 \times 2 = 4$; & hujus illa subduplicata. Item rationis triplæ, ratio duplicata est (non sextupla, quod sit $3 + 3 = 6$, sed) noncupla, quia $3 \times 3 = 9$: triplicata vero vigintiseptupla, quia $3 \times 3 \times 3 = 27$. Sic rationis $\frac{1}{2}$, duplicata est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; triplicata, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, &c. Et rationis $\frac{1}{3}$, duplicata est $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$; triplicata, $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$. Item rationis $\frac{2}{3}$, ratio duplicata est $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; triplicata, $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$; quadruplicata $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$, &c.

Neque aliud volunt definitiones Euclidis, 10 *d* 5. Ὅταν τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ. *Cum tres magnitudines* (continue) *proportionales fuerint, prima ad tertiam, duplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines* (continue) *proportionales fuerint; prima ad quartam, triplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam: & semper deinceps, uno amplius, quamdiu proportio extiterit.* Verbi gratia, si quantitas prima A, sit semissis secundæ B, & hæc tertiæ C, atque hæc quartæ D, & sic deinceps, (ubique scilicet in ratione subdupla;) Erit $B = 2A$, $C = 2B = 4A$, $D = 2C = 4B = 8A$, &c. Ideoque ratio A ad B est $\frac{1}{2}$, (cum enim $B = 2A$, erit $A . B :: 1 . 2$.) Ratio A ad C (duplicata) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, (nam propter $C = 4A$, erit $A . C :: 1 . 4$.) Ratio A ad D (triplicata) $\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, (nam propter $D = 8A$, erit $A . D :: 1 . 8$.) Et sic deinceps.

Atque hic non incommodum erit notare; quod Euclides non διπλοῦν, τριπλοῦν, &c. vel διπλάσιον, τριπλάσιον, &c. dicit, (quibus vocibus alibi id innuere solet quod Latini vocibus *duplum, triplum, &c.* vel etiam *duplex, triplex, &c.*) sed διπλασίονα, τριπλασίονα, &c. (quod & perpetuo hoc sensu observat,) quem aliquatenus imitari conantur interpretes, dum non tam rationem *duplam, triplam, &c.* vel etiam *duplicem, triplicem, &c.* hoc sensu; sed potius, mutata forma, *duplicatam, triplicatam, &c.* dicunt: tum ut diversitatem formarum διπλάσιος, & διπλασίων apud Euclidem, aliquatenus referant; tum ut ὁμωνυμία aliquatenus caveatur.

Ratio Subduplicata-triplicata, &c.

Verum & hujusmodi rationes (puta duplicata, triplicata, subduplicata, &c.) invicem continuari possunt, unde ratio ex illis composita emergat. Puta rationis $\frac{A}{B}$, ratio triplicata est $\frac{Ac}{Bc}$, hujus autem Subduplicata est $\sqrt{\frac{Ac}{Bc}}$: ergo rationis

nis $\frac{A}{B}$ ratio Triplicatæ Subduplicata, erit $\sqrt{\frac{Ac}{Bc}}$. Sic rationis $\frac{Y}{A}$, ratio Triplicatæ-fubduplicata, erit $\sqrt{\frac{Y}{A}c}$. Eodem modo, cum rationis $\frac{Y}{A}$ ratio duplicata fit $\frac{Y}{A}q = \frac{Y}{A} \times \frac{Y}{A}$, atque hujus triplicata $\frac{Y}{A}q \times \frac{Y}{A}q \times \frac{Y}{A}q = \frac{Y}{A} \times \frac{Y}{A} \times \frac{Y}{A} \times \frac{Y}{A} \times \frac{Y}{A} \times \frac{Y}{A}$; erit hæc, rationis $\frac{Y}{A}$ expofitæ, ratio duplicatæ-triplicata, (five triplicatæ-duplicata,) nempe fextuplicata. Vel etiam fi ratio quævis fimplici fymbolo defignetur, puta R, erit Rq vel R^2 ratio duplicata, R^3 triplicata, R^4 quadruplicata, $R^6 = R^2 \times R^3$ fextuplicata, five triplicatæ-duplicata, $\sqrt{R}$ fubduplicata, $\sqrt[3]{R}$ fubtriplicata, $\sqrt[3]{R^2}$ duplicatæ fubtriplicata. Nec fecus alibi.

Totius autem hujus negotii praxis Arithmetica, (puta datæ rationis rationem duplicatam, triplicatam, fubduplicatam, fubduplicatæ triplicatam, &c. invenire, vel numeris aut etiam fymbolis defignare,) ex fractionum multiplicatione, quadratione, cubicatione, & radicum cujufvis poteftatis analyfi, dependet : quæ fuis locis tradentur.

CAP. XXXI.

Progreffio Geometrica. Continua: Disjuncta. Inveftigatio Summæ. Inveftigatio termini ultimi ; vel cujufvis remoti.

PRogreffionis Geometricæ originem & naturam fuperius tradidimus Cap. XXV. Quippe quæ Rationum æqualitatem (fimilitudinem, identitatem,) refpicit, ut progreffio Arithmetica æqualitatem Differentiarum, exceffuum puta five defectuum. *Progreffio Geometrica, quid?*

Euclidi dicitur 'Αναλογία : Interpretibus, *Proportio*, *Proportionalitas*, *Progreffio.* Cicero ἀναλογίαν interpretatur *Comparationem* & *Proportionem* ; & quidem primus, ipfo tefte, (in Plat. Timæi interpretatione,) *Quæ Græce* ἀναλογία *Latine* (*audendum eft enim, quoniam hæc primum a nobis novantur*) *Comparatio Proportiove dici poteft.*

Euclidi definitur 'Αναλογία ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης, *Rationum fimilitudo.* 4 *d* 5. vel (fecundum alios) 8 *d* 5. Ariftoteli, Ethic. 5. ἰσότης τῶν λόγων. *Rationum æqualitas.* Proclo in Plat. de Rep. λόγου ἐστὶν ἀναλογία ταυτότης, *rationis Identitas.* Theoni Smyrnæo ἀναλογία ἐστὶ πλειόνων λόγων ὁμοιότης ἢ ταυτότης, *rationum fimilitudo feu identitas.* Fabius Quintilianus *Similitudinis* vocem comprobat, l. 5. c. 11. 'Αναλογίαν *quidem a Simili feparaverunt, nos eam fubjectam huic generi putamus. Nam, ut Unum ad Decem, fic Decem ad Centum, Simile certe eft.* Euclides ipfe, utut, in Definitione, *Similitudinis* vocem adhibeat, alibi tamen paffim, *Identitatem* potius innuit; nec tam Rationem rationi *æqualem* dicit, aut *fimilem*, quam *eandem.* Ut per totum lib. 5. paffim eft videre. Perinde autem eft five Similitudinem, five Æqualitatem, five etiam Identitatem dicamus ; dummodo enim de fenfu convenit, non eft ut de verbis admodum litigemus.

Diftribuitur autem (ut fupra dictum eft) in Continuam, & Disjunctam (five difcretam, difcontinuam ; Budæo, hiulcam & interruptam.) Illam appellat Ariftoteles συνεχῆ : hanc διῃρημένην.

Illa eft, ubi termini ita continue procedunt, ut intermedius quilibet fit tum antecedentis confequens, tum confequentis antecedens, in eadem ratione. Ut 2. 4. 8. 16 ∺ *Continua.*

Hæc, ubi eadem quidem recurrit ratio, non autem continue, fed disjunctim. Ut 2. 4 : : 3. 6. *Disjuncta.*

Proportio itaque five Progreffio, tribus ad minimum terminis conftituitur. Quod & notat Euclides 9 *d* 5. 'Αναλογία δὲ, ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν. *Analogia* (proportio, proportionalitas,) *in tribus terminis pauciffimis confiftit.* Nempe, proportio continua, ut 2. 4. 8 ∺ ubi eadem intercedit ratio inter primum & fecundum, atque inter fecundum & tertium. Proportio autem difcontinua five interrupta, nonnifi

 quatuor

quatuor saltem terminis constituitur; puta 2. 4 :: 3. 6. Cum enim ratio quælibet duos terminos postulet, quippe qui invicem comparantur; eademque ratio saltem bis occurrat ut constituatur analogia, quæ rationes comparat: si terminus medius sit utrique rationi communis (puta prioris consequens, & posterioris antecedens) in tribus terminis eadem bis reperiri potest ratio; sin minus, non nisi in quatuor, cum utriusque rationis duo termini, à duobus reliquis terminis alii sint. Potest autem tum analogia continua pluribus adhuc quam tribus; & disjuncta, pluribus quam quatuor absolvi. Puta 2. 4. 8. 16. 32 ∺ sunt continue proportionales; discontinue vero 2. 4 :: 3. 6 :: 9. 18 :: 5. 10. Vel etiam (nam & sic proportionales notare licebit) 2. 3. 5 :: 4. 6. 10. puta, ut sunt ad invicem 2, 3, 5; sic & 4, 6, 10.

De Progressione Geometrica continua, duo præsertim tradi solent operationum compendia; duobus Problematis proposita. Primum est; Totius progressionis summam, sine continua intermediorum additione, invenire. Alterum est; Terminum ultimum, aliumve à primo satis remotum, neglectis intermediis, invenire.

Investigatio Summæ.

2	0
6	1
18	2
54	3
162	4
486	5
1458	6
4374	7
13122	8
39366	9
59048	

Primum quod attinet. Continuæ Progressionis summa sic reperitur. Si terminus ultimus per communis rationis Exponentem multiplicetur, (sive, quod tantundem est, progressio per unum adhuc gradum continuetur;) atque inde auferatur terminus primus, & quod restat per numerum unitate minorem quam est communis rationis Exponens dividatur; prodibit progressionis summa. Hoc est, si terminus primus seu minimus dicatur A, maximus V, communis rationis Exponens R, & progressionis summa S. erit $\frac{VR - A}{R - 1} = S$. Cujus Regulæ demonstrationem infra exponemus.

$$\begin{array}{r} 39366 \\ \times 3 \\ \hline 118098 \\ -2 \\ \hline 2)\,118096 \\ 59048 \end{array}$$

Sic in progressione adjuncta, decem terminorum Terminus ultimus 39366 in communis rationis Exponentem 3 ductus, facit 118098; unde demptis 2 (termino primo) restant 118096. Qui numerus per 2 (numerum unitate minorem quam est 3, rationis communis Exponens) divisus, quotientem exhibet 59048, totius progressionis summam. Quæ quidem eadem est & quæ ex terminis omnibus continue additis emergit.

Cum autem res tædio plena videri possit, in prolixioribus saltem progressionibus, singulos terminos continua multiplicatione sigillatim investigare; Hujus itaque operationis compendium quærit problema illud alterum; Nempe

Investigatio termini ultimi.

Progressionis cujusvis inchoatæ, terminum ultimum, aliumve quemvis assignatum, à primo satis remotum, invenire. Quod hoc pacto faciendum docent. Progressio exposita per aliquot saltem gradus inchoetur. Et singuli termini notari intelligantur totidem numeris naturali serie progredientibus à ciphra inchoatis; puta 0, 1, 2, 3, 4, &c. (vel etiam quibusvis aliis, continua progressione procedentibus, ab 0 inchoatis:) qui *Indices* vocari solent, sive *Exponentes*; distantiam cujusque termini à primo indicantes. Hac præparatione facta; si terminorum jam inventorum quilibet multiplicetur vel in se vel eorum alium quemlibet; & productum per terminum primum dividatur: prodibit terminus ille cui respondet Index ex invicem multiplicatorum Indicibus additis conflatus. Atque hoc, quoties opus fuerit, iterandum erit.

Exempli gratia. In exposita progressione; Inventis terminis primoribus quatuor, 2, 6, 18, 54, quibus respondent indices 0, 1, 2, 3. Ductis 54 in 54 (termino quarto in seipsum, cujus index 3, 3,) fiunt $54 \times 54 = 2916$; quem numerum si per 2 terminum primum dividamus, proveniet 2) 2916 (1458 terminus septimus cujus index $6 = 3 + 3$. Deinde, si 1458 terminus septimus jam inventus, (cujus index 6,) ducatur in 54 terminum quartum, (cujus index 3) prodibunt 78732, quæ per 2 (terminum primum) divisa, exhibebunt 2) 78732 (39366 terminum decimum, cujus index $9 = 6 + 3$. Et sic deinceps, quousque opus fuerit, progressio per saltus continuabitur.

2	0	54	3
6	1	× 54	+ 3
18	2	2) 2916	
54	3	1458	6
1458	6	× 54	+ 3
		2) 78732	
39366	9	39366	9

Exemplum hujusmodi aliud notissimum libet adjungere. Sint in equi cujusdam calceis singulis sex clavi, adeoque in omnibus 24. Et venum expositus equus ea lege, ut emptor pro primo clavo denarium solvat, pro secundo duos, pro tertio 4, & sic deinceps, singulorum clavorum pretium continue duplando. Quæritur, quanti emendus est Equus?

Vel etiam, Si quis servum conduxerit in annum integrum, ea lege ut prima septimana recipiat denarium, secunda duos, tertia 4, & sic deinceps, singulis septimanis mercedem duplando. Quæritur, quantam habiturus est mercedem servus anno integro, sive septimanis 52?

Constituantur primo, continua multiplicatione, numeri aliquot primores, puta sex, 1, 2, 4, 8, 16, 32. quorum Indices 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ductis itaque in se 32 (termino sexto cui index 5) fiunt 1024. Quæ cum per terminum primum dividenda sint, sitque ille 1, numerus dividendus inde non mutatur; & propterea 1024 terminus ille est cui convenit Index $10 = 5 + 5$, nempe undecimus, sive post primum decimus. Ille autem in se ductus producit (eadem ratione,) terminum post primum vicesimum, quia $10 + 10 = 20$. Hic autem (eadem ratione) ductus in 16, terminum post primum quartum (cui index 4) producit terminum cui index $24 = 20 + 4$. Qui quidem terminus cum sit ordine vicesimus quintus; adeoque clavi ultimi, nempe vicesimi quarti, pretium exhibeat uno adhuc gradu auctum; sive quod tantundem est, terminum ultimum in communis rationis Exponentem ductum; Hinc si auferatur terminus primus 1, numerus residuus 16777215 (qui, cum per communem multiplicatorem unitate minutum, nempe $2 - 1 = 1$, dividendus sit; hac divisione non immutetur,) est ipse numerus denariorum quibus emendus est equus: qui 16 millena millia superat.

1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
1024	10
1048576	20
16777216	24
281474976710656	48
4503599627370496	52
− 1	
4503599627370495	

Sin adhuc continuanda sit progressio ad locum usque quinquagesimum secundum; id eodem modo fiet. Nempe ducto in seipsum termino modo invento, (cujus index 24,) habebitur ille cujus index $48 = 24 + 24$. Atque hic item in illum cujus index 4, habebitur ille cujus index 52. (nempe ultimus in communis rationis Exponentem ductus) qui, unitate minutus, summam totius progressionis exhibet: mercedem quidem satis amplam.

Atque hinc abunde liquet in quam immensam & plane incredibilem summam ab exiguis principiis in continua progressione Geometrica perveniatur.

Priusquam autem hoc negotium dimittam; libet & Exemplum aliud annectere, ex Authore Arabico desumptum; (quod D. *Pocockio* nostro, summæ in linguis Orientalibus Eruditionis viro, debeo:) unde, non modo hujusmodi computi exemplum, (fortasse, omnium antiquissimum, ad cujus imitationem alia fuerint excogitata;) sed & aliarum aliquot inventionum originem videre licet. Nempe in Commentariis quos scripsit *Selâho 'ddîn Mohámmed Alsĕphadi*, in Nobilissimi Poetæ *Tograii* Poema, *Lamiato'lAjam* dictum, ad hunc versum

ان العلي حدثتني *Enna'l ola hadathatni*

hæc habentur

الصحيح ان هذه لفظة عجمية واصلها بالعجمية شش رذك معناه
ستة ادوات وهي الشاه والفرزان والفيل والفرس والرخ والبيدق والناس
تخبير

كثير منهم من يغلط في الصولي وهو ابو بكر بن محمد بن يحيي
بن عبد الله بن العباس ابن صول تكين الكاتب ويزعم انه وضع
الشطرنج لما ضرب المثل فيه والصحيح ان واضعه صصه بن داهر الهندي
لان اردشير بن بابك اول ملوك الفرس الاخرة قد وضع النرد ولذلك
قيل له نردشير جعله مثلا للدنيا واهلها فرتب الرقعة اثني
عشر بيتا بعدد شهور السنة والمهارك ثلثين قطعة بعدد ايام
الشهر والفصوص مثلا للافلاك الدايرة ورميها مثل تقلبها ودورانها والنقط
فيها بعدد الكواكب السيارة كل وجه منها سبعة الشش ويقابله
اليك والبنج ويقابله الدو والجهار ويقابله السه وجعل ما ياتي به
اللاعب من النقوش كالقضا والقدر تارة له وتارة عليه وهو يصرف
المهارك علي ما جات به النقوش لكنه ان كان عنده حسن نظر عرف
كيف يتاتي وكيف يتحيل علي الغلب وقهر خصمه مع الوقوف
عند ما حكمت به الفصوص وهذا هو مذهب الاشاعرة اخبرني
من اثق به ان الشيخ تقي الدين احمد بن تيمية كان يقول اللعب
بالنرد خير من اللعب بالشطرنج لان لاعبه يعترف بالقضا والقدر
والشطرنج لاعبه ينفي ذلك وهو اقرب الي الاعتزال ـــــ فلما
وضعت الفرس ذلك افتخرت به وكان ملك الهند يوميذ بلهيت
فوضع له صصه المذكور الشطرنج فقضت حكما ذلك العصر بتفضيله
ولما عرضه علي الملك واوضح له امره ساله ان يتمني عليه فتمني عليه
عدد تضعيف قمحا فاستصغر الملك ذلك من همته وانكر عليه ما قابله
به من طلب النزر القليل في ذلك المقام فقال ما اريد غير ذلك
فامر له بذلك فلما حسبه ارباب الديوان قالوا للملك ما عندنا ما يقارب
ذلك القليل منه فانكر ذلك فاوضحوه له فاعجبه الامر الثاني
اكثر من الاول * قال القاضي شمس الدين احمد بن خلكان ولقد
كان في نفسي من هذه المبالغة شي حتي اجتمع لي بعض
حساب الاسكندرية وذكر لي طريقا تبين لي ما ذكروه واحضر لي
ورقة بصحة ذلك وهو انه ضاعف الاعداد الي البيت السادس عشر فاثبت
فيه اثنين وثلثين الفا وسبع مائة وثمانية وستين حبة وقال نجعل
هذه الجملة مقدار قدح وقد عيرتها وكان كما ذكر والعهدة
عليه من هذا النقال ثم ضاعف السابع عشر الي البيت العشرين فكان
فيه ويبة ثم انتقل من الويبات الي الارادب ولم يزل يضعفها حتي
انتهي في بيت الاربعين الي مائة الف اردب واربعة وسبعين الف اردب
وسبع مائة واثنين وستين اردبا وثلثي اردب وهذا المقدار شونة ثم
انه ضاعف الشون الي بيت الخمسين فكانت الجملة الفا واربعا
وعشرين شونة وهذا المقدار مدينة ثم انه ضاعف ذلك الي البيت الرابع
والستين وهو اخر الابيات فكانت الجملة ستة عشر الف مدينة
وثلث مائة واربعا وثمانين مدينة وقد تعلم انه ليس في الدنيا مدن
اكثر

اكثر من هذا العدد انتهي قلت اخر ما اقتضاه تضعيف رقعة الشطرنج
ثمانية عشر الف الف ستة مرات واربع ماية واربعون الفا خمس مرات
وسبع ماية واربع واربعون الفا اربع مرات وثلثة وسبعون الفا ثلث
مرات وسبع ماية وتسعة الاف مرتين وخمس ماية واحد وخمسون الفا
وستماية وخمسة عشر عددا ——————

١ ٨ ٤ ٤ ٦ ٧ ٤ ٤ ٠ ٧ ٣ ٧ ٠ ٩ ٥ ٥ ١ ٦ ١ ٥

٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١

واذا جمع هذا لعد هرما واحدا مكعبا طوله ستين ميلا وعرضه كذلك
وارتفاعه كذلك بالميل الذي هو اربعة الاف ذراع بالعمل الذي
هو ثلثة اشبار معتدلة علي ان الاردب المصري مساحته ذراع مكعبا
وزنته ما يتان واربعون رطلا وكل رطل ماية واربعة واربعون
درهما الدرهم اربعة وستون حبة من القمح وكل بيت اذا ربعنا ما
فيه من العدد حصل من مربعه ما يجب ان يكون في البيت الذي
عدده ضعف ذلك البيت الا واحدا فاذا ربعنا ما في الثالث حصل
ما في الخامس واذا ربعنا ما حصل في الخامس حصل
ما في التاسع فاذا ربعناه حصل ما في السبع عشر فاذا ربعناه حصل
ما في الثالث والثلثون فاذا ربعناه حصل ما في الخامس والستين
فاذا انقصنا منه احدا كان الباقي جملة ما في البيوت كلها
الي البيت الرابع الستين وان نصفناه قبل ان ننقص منه واحدا كان
نصفه حاصل البيت الرابع والستين وبهذا العمل يحصل تضعيف رقعة
الشطرنج من خمس ضربات —— ويقول فضايل الهند ثلثة سبقوا بها من
سواهم من الناس كتاب كليلة ودمنة ولعبة الشطرنج والتسعة
احرف التي تجمع انواع الحساب ٭

[1] Quæ Latine ſic ſonant. “Certum eſt, vocabulum hoc [ſhetrunge, *Scaccho-* “*rum ludus*;] Perſicum eſſe, cujus Thema Perſice eſt *ſheſh ranc*, quod ſignificat “*ſex ſpecies*, quæ ſunt *Alſhâh*, *Alpharzân*, *Alphil*, *Alpharas*, *Alrôch*, & *Baidak*. “[Hoc eſt, Rex, Regina, Elephas, Equus, Roch, Pedes.] Hominum autem non “pauci falluntur, quod ad *Alſûli*, qui eſt *Abu Beker Ebn Mohammed Ebn Yahya* “*Ebn Abdollah Ebno'l Abbâs Ebn Sûl Takin* ſcriba, autumantes illum, Scaccho- “rum ludum inveniſſe, eo quod Proverbio originem dederit. Certum autem eſt “ludi hujus authorem fuiſſe *Seſſa Ebn Dahir* Indum. Cum enim *Ardſhîr Ebn* “*Babec*, primus Regum Perſiæ Poſteriorum, Calculorum ludum [*Tables*] inve- “niſſet; unde & *Nardſhîr* appellatus eſt [*ludus ille*] quem ad exemplar mundi “compoſuit: Abacum in duodecim domos diſtinguens, ad numerum menſium “Anni; Calculos triginta, numero dierum menſis; Talos, ad inſtar ſphærarum “circumrotantium; eorumque jactum, ad inſtar motus & circulationis earundem; “in eiſque puncta numero Planetarum, quorum ſitus quilibet numerum exhibet “ſeptenarium, (dum ſenioni opponitur monas, quinternioni dyas, quaternioni “ternio opponitur;) notas quas jactu ſortitur ludens, inſtar prædeterminationis “& decreti divini, quæ ipſi aliquando favent, aliquando adverſantur; ipſe autem “calculos pro ratione notarum movet, ita interim ut, ſi perſpicaci ſit ingenio, “dignoſcere queat res ea arte diſponere, ut victoriam conſequatur, atque adver- “ſarium ſuum ſuperet, ſtante quod determinaverint tali; quæ eſt via Aſſhario- “rum. ——— Narravit mihi quidam fide dignus, *Sheich Takioddin Ahmed*

“*Ebn Tamimah* dixisse, ludum Calculorum præstantiorem esse ludo Scacchorum, quod illis ludens agnoscat Decretum & Prædeterminationem: at Scacchiis ludens, eadem neget; quod propius accedit ad *Matazalorum* sententiam. ———

“Cum ergo hoc invenissent Persæ, eoque glorientur; . . . Regi Indiæ, invenit *Sessa* prædictus Scacchorum ludum, quem illius temporis sapientes isti præferendum censuerunt. Quem ergo cum Regi exhibuisset, ejusque rationem ipsi declarasset; ab ipso jussus, quicquid liberet, petere; petiit ille grana tritici juxta [areolarum] numerum [continue] duplicanda. Quod, ut parum quid, existimans Rex, præ eo quod animo conceperat; male ab illo tulit, quod eum rei tam modicæ ac tenuis petitione exceperit eo in loco. Respondit ille; se nolle aliud. Hoc igitur illi dari jussit. At ubi, qui Ratiociniis præerant, illud computassent: Regi dixerunt; Non esse penes ipsos, quod ad illius Exiguum istud, prope accederet. Cui cum Rex haud adhiberet fidem; rem ipsi demonstrarunt. Adeo ut, Secundum hoc, majorem ipsi admirationem incuteret, quam illud Prius.

“Refert *Al Kadi Shemso 'ddin Ahmed Ebn Chalecân*: Hærebat mihi animo [scrupulus] de hac summa, donec computista quidam Alexandrinus, qui me convenerat, viam mihi ostenderat qua manifestum mihi factum est quod dixerant; chartam mihi exhibens, qua veritas ipsius constaret. Nempe numeros duplicans usque ad areolam decimam sextam, illic statuit granorum triginta duo millia, septingenta sexaginta & octo; summam hanc, inquit, statuamus mensuram *Kibah*. Quod cum examinaveram, ita se habuit uti dixit. ——— Deinde duplicando decimam septimam & sic deinceps ad vicesimam; in ea fuit mensura *Waibah*. Dein à *Waibis* transiit ad *Ardubbas*; quas duplicare non desiit [hoc est, continue duplicavit] donec in areola quadragesima pertingeret ad centena & septuaginta quatuor millia, & septingenas & sexaginta duas Ardubbas, cum duobus trientibus. Atque hæc summa esto Granarium. Deinde Granaria duplicans ad areolam usque quinquagesimam, prodiit summa, mille & viginti quatuor granariorum. Atque hæc mensura, pro urbe habeatur. Dein, illud duplicans, ad areolam usque sexagesimam quartam, quæ est omnium ultima, prodiit summa urbium, sexdecim mille & tercentum octoginta quatuor. Scias autem non esse in universo mundo urbes hisce plures numero. Atque hactenus ille.

“Dico ego; ultimum quod producitur duplicando abacum Scacchorum, est octodecies mille mille, sexies; quadringenta quadraginta sex mille, quinquies; septingenta quadraginta quatuor mille, quater; septuaginta tria millia, ter; septingenta novem mille, bis; quingenta quinquaginta unum mille; atque sexcenta & quindecim. 18446744073709551615.
6 5 4 3 2 1

“Atque si collecta fuerint illa in unam pyramidem quadratam; longitudo erit sexaginta milliarium; latitudo, par; altitudo etiam, par. secundum milliare quod constat quatuor mille cubitis vulgo usitatis: quorum quisque est trium spithamarum mediocrium. Cum etiam Ardubbæ Ægyptiacæ mensura sit cubitus cubicus; pondus ipsius erit, Rotalarum ducentarum & quatuor: quarum unaquæque Rotal est centum quadraginta quatuor drachmarum: Drachma autem est granorum tritici sexaginta quatuor.

“Porro si numerum, in qualibet areola, quadraverimus; quadrando producitur qui statuendus est in areola cujus numerus duplus est numeri istius areolæ, uno minus. Exempli gratia; ubi quadraverimus quod est in tertia, prodit quod quintæ est: Cumque quadraverimus quod prodiit in quinta, producitur quod nonæ est: Et cum hoc quadraverimus, prodit, quod est decimæ septimæ: Hoc item quadrato, prodibit quod est tricesimæ tertiæ: atque hoc quadrato, prodit quod est [loci] sexagesimi quinti: Unde si unitatem subtraxerimus; reliquum, est summa istius quod est in areolis omnibus usque ad sexagesimam quartam. Quod si, ante subductam unitatem, dimidiaverimus; erit semissis, id quod prodit in areola sexagesima quarta. Atque hac praxi prodit duplicatio abaci Scacchorum, quinque operationibus. ———

“Dicitur, ex quibus excellunt Indi, quibusque reliquis hominibus præiverunt, “tria

"tria esse. viz. Librum *Golailah Wadamnah*; ludum Scacchorum; atque novem "Figuras numerarias.

Cum autem in superioribus, laudatus sit *Ebn Chalecan*; gravis apud suos author, & magni nominis; lectori forsan non ingratum erit quæ apud ipsum, in vita *Alsuli*, habentur, recitare: quæ, latine reddita, sic sonant.

'Vidi multos qui assererent, *Alsuli* Scacchorum [sive *latrunculorum*] ludum 'invenisse. Quod error est. Ejus enim Author fuit *Sessa Ebn Daher* Indus; 'Regique, cujus gratia illum invenit, nomen *Shehram*. Siquidem *Ardshir Ebn 'Babec*, primus Regum Persiæ posteriorum, ludum Calculorum invenerat, (*Nardshir* inde dictum, ab Authore sic denominatum:) quo mundi, ejusque incolarum, specimen exhibuit; dum Alveum in duodecim domos distinxit, mensium 'anni numero; calculos triginta, numero dierum cujuslibet mensis, statuens; talos autem, decreti Divini, & mutationum quibus mundi incolas agitat, loco posuit. In summa; longus esset his de rebus sermo, & à proposito nostro alienus. 'Gloriantibus ergo Persis, ludi calculorum inventione; in Regis Indorum gratiam, *Sessa* Scacchorum ludum composuit: Quem calculorum [*ludo*] longe antecellere censuerunt istius temporis sapientes, ob multa quæ enarrare longum esset. 'Ferunt autem, quod, ubi *Sessa* ludum istum, à se inventum, Regi *Shehramo* 'prædicto exposuisset, ille de hoc miratus, valdeque lætatus, jussit ut in Ratiocinatorum consessibus usurpetur; omniumque quæ nosset præstantissimum judicavit; utpote qui bello instrumentum esset, religioni vitæque communi stabilimentum, omnisque commenti fundamentum; atque se gratum ostendit & lætitia 'affectum, ob insigne quod sibi in regno suo hac ratione contigisset beneficium. 'Jussitque *Sessam*, ut, quicquid sibi libuerit, peteret. Qui ergo, Opto, inquit, 'ut tritici granum prima domo [areola] positum, continue duplicetur, donec 'ad ultimam perventum fuerit; illudque quicquid fuerit, mihi concedas. Rex autem illud, ut parum quid, contemptu accepit; & male tulit, quod ille exiguum 'quid & tenue proposuisset, cum ipse magnum aliquod animo concepisset. Cui 'ille, Nolo, inquit, aliud quam hoc; atque in ea petitione perseveravit; donec 'ipsius voto annuens [*Rex*] id ipsi dari jussit. Quod ubi computistis suis dictum esset; illi, facto computo, retulerunt, non esse penes ipsos frumentum, 'quod summam istam æquaret, vel ad eam prope accederet. Quod cum Regi 'nunciatum esset, ipseque dictis assensum haud præberet, computistas accersi jussit. 'Qui, ab illo interrogati, responderunt; si comportaretur totum quod in mundo 'esset frumentum, id summam istam haudquaquam æquaturum. Ipsoque sibi rem 'demonstrari petente; cum considentes computum fecissent, apparuit id fuisse verum. Rex ergo dixit, Magis ego te miror, ob eam quam fecisti optionem, quam 'ob Scacchorum quem invenisti ludum.

'Ratio autem duplicationis istius est, ut in domo prima, ponatur granum unum; 'in secunda, duo; in tertia, quatuor; in quarta, octo; atque ita deinceps usque 'ad ultimam; & quotiescunque ad aliam domum transeatur, duplum ejus quod in 'priori positum fuerat statuatur.

'Eram autem animo solicitus de hac summa, donec computistam quendam Alexandriæ convenissem; qui duos mihi modos ostendit quibus dicti veritas pateret: chartamque mihi exhibuit, qua illud delineatum fuit. Hac scil. ratione, 'ut, cum numeros duplicasset usque ad domum decimam sextam, statueret ibi grana 32768: quam, inquit, summam, mensuram *Kadah* statuas; quod mihi perpendenti ita se habere visum est. ——— Dein, *Al Kadah* domo decima 'septima duplicans, eo modo perrexit donec areola vicesima *Waibah* haberet. 'Dein *Waibas* duplicare pergens, ad *Ardobas* pervenit: Quas duplicare non desiit, donec domo quadragesima *Ardobas* haberet 174762 cum duabus tertiis. 'Tum dixit, Hanc summam statuamus *Granarium*; neque enim plus ea continebit Granarium. Dein Granaria ista, usque ad domum quinquagesimam duplicata, erant 1024. Atque hæc inquit, *Urbem* conficiant. Neque enim urbs plura 'Granaria continebit; & quæ tandem Urbs tot in se continebit granaria? Dein, '*Urbes* duplicatæ usque ad domum sexagesimam quartam, quæ in Scacchorum 'Abaco ultima est, ad numerum 16384 pertigerunt. Sciasque, inquit, non esse 'in toto mundo plures quam tot urbes: Siquidem Sphæræ terræ circuitus, prout 'ex Geometria constat, est Parasangarum 8000; adeo ut si quocunque terræ 'loco poneretur funis extremitas, quo totam terræ sphæram cingeremus, donec

'alteram funis extremitatem ad eundem locum perduceremus, ita ut occurrerent 'utraque extremitas, funis istius mensura esset longitudinis milliarium 24000, 'quæ Parasangas 8000, æquant. Atque hoc demonstrative verum est sine du- 'bio. ——— Notum autem est, partem terræ habitabilem circiter quartam 'ejus sphæræ partem esse. Atque hæc sunt quæ de hoc negotio habet *Ebn Chalecan*, loco citato.

Hæc autem fusius recitare operæ pretium duxi, Quoniam, præter elegans præsentis negotii exemplum, idque admodum vetustum, & forte omnium primum; Habemus etiam originem tum ludi Calculorum (Alvei aleatorii,) tum Latrunculorum (Schacchii,) tum etiam Figurarum Numeralium. Nomina vero, quibus Latrunculorum ludus vulgo appellatur, *Chesse*, *Esches* &c. ab ipso Authoris nomine *Sessa*, videntur deducta. *Schacchii* vero nomen, à *Shah*, quod Regem significat. Unde & *Check* seu *Shach*; quo, inter ludendum, *Regi cavendum* indicamus: & *Shach mât*, (hoc est *Shah mât*, rex moritur,) quo, adverso Rege plane victo, victoriam profitemur.

Quod autem ad Calculum, in citatis Authoribus recensitum, attinet: est quidem ille per se satis clarus, ut multa explicatione non indigeat. Id interim observetur, quod ex calculo patet, poni nempe, quoad mensuram capacitatis,

32768	Grana tritici	= Kadah.
16	Kadah	= Waibah.
6	Waibah	= Ardob.
$174762\frac{2}{3}$	Ardob	= Granario.
1024	Granaria	= Urbi.
32767	Urbes	= Summæ.

Vel 32768, saltem uno grano minus.

Item, quoad pondus,

Ardob	= 204 Rotal.
Rotal	= 144 Drachmis
Drachma	= 64 Granis.

Denique, quoad mensuram longitudinis,

Parasanga	= 3 Milliaribus.
Milliare	= 4000 Cubitis.
Cubitus	= 3 Spithamis.
Ardob	= Cubito cubico.

Ut autem mensuræ istæ cum nostris Anglicanis melius comparentur: libet statutum de mensuris Anglicanis recensere, Anno 31° Edwardi primi sancitum, hoc est, Anno Domini 1302.

Consensu totius Regni Angliæ, mensura regia sic constituta est: ut [1] *Denarius Anglicus, qui vocatur Sterlingus, rotundus sine abrasione, pendeat triginta duo Grana tritici bene exsiccata, & ex medio spicæ collecta: & viginti Denarii, constituant Unciam: & duodecim Unciæ, constituant Libram: & octo Libræ constituant* [2] *Congium vini: & octo Congii vini, constituant* [3] *Modium Londinensem: qui est octava pars Quarterii.*

1 Valet, in argento, fere tres denarios monetæ Anglicanæ hodiernæ.
2 A Gallon.
3 A Bushel.

Juxta hanc itaque constitutionem, 32 Grana tritici pendent Denarium: 640 Grana, pendent Unciam: 7680 grana, pendent Libram, (adeoque constituunt mensuram Pintæ, $= \frac{1}{8}$ Congii:) 61440 grana, constituunt vini Congium: & 491520 grana, constituunt Modium.

Videtur itaque Modius noster, cui assignantur grana 491520, præter propter æqualis esse illorum Waibæ, cui nempe implendæ satis superque sufficiant grana loci vicesimi, hoc est, grana 524288. Item eorum Kadah (nempe $\frac{1}{16}$ Waibæ) cui implendæ satis superque sufficiant grana loci decimi sexti, hoc est, grana 32768; perinde fere videtur atque Semicongius noster, cui nempe conveniunt grana 30720, quippe toti congio conveniunt grana 61440. Similiter eorum Ardob = 6 Waibis, continebit propterea 6 modios Anglicanos circiter.

Similiter; cum eorum Ardob pendere dicitur 204 Rotalas; adeoque Waibah, Rotalas 34, hoc est, Drachmas 4896, sive Grana ponderis 313344. Patet vel eorum Grana ponderis, graviora fuisse tritici granis; vel saltem grana tritici quæ habentur

habentur loco vicesimo, nempe 524288, multo plura esse quam contineat Waibah, quæ autem loco decimo nono habentur, pauciora, nempe 262144.

Si autem ponantur illorum grana ponderis, nostris æqualia, illorum Rotala, (hoc est grana 9216) superabit libram nostram (eam nempe quam *Trojanam* vocant, granorum 7680) duabus unciis & semisse fere, adeoque prope accedit ad libram quam vocamus *Averdupois*, quæ æquatur unciis Trojanis $14\frac{3}{5}$, (nempe libræ Trojanæ, & duabus unciis cum semisse, & insuper duobus denariis; sive unciis 14 & denariis 12.) Si vero eorum grana majora sint; ut nempe eorum Waibah vel æquet vel superet Modium nostrum; tum Rotala illorum fere duas libras, quas vocamus, Trojanas æquabit; saltem 34 Rotalæ (pondus Waibæ) æquabunt 60 libras Trojanas, nempe modii nostri pondus. Accuratam vero mensurarum vel ponderum illorum cum nostris comparationem hinc instituere minime valemus; propterea quod (ubi omnium fundamentum ponitur) grana loci decimi sexti non statuuntur mensuram Kadah præcise implere, sed saltem implere, & potius superare quam deficere.

Si autem libeat etiam totam quæ emergit granorum molem, ad mensuram milliaris Anglicani redigere; illud haud magno labore fiet. Cum enim constat, ex superius dictis, grana loci vicesimi, 524288, saltem æquare vel potius superare modium Anglicanum: erit modiorum in tota mole numerus (ut divisione patebit) 35184372088832 (saltem uno grano minus) nempe quantus est numerus granorum in loco 46.

Continet autem quilibet modius Congios octo, quilibet autem congius pollices cubicos 231, (de Vini Congio intelligo, nam Congius cervisiæ continet pollices cubicos $272\frac{1}{4}$ nempe tot cubicos pollices; quot sunt, in quadrata Pertica, Pedes quadrati; nam $16\frac{1}{2} \times 16\frac{1}{2} = 272\frac{1}{4}$) quod accurate se observasse testatur D. *Oughtredus* in libro quem *De Circulis Proportionum* inscripsit, *Cap.* 9. Et propterea in Modio Anglicano continentur pollices cubici 1848; atque in sex Modiis Anglicanis pollices 11088; cui cum præterpropter æqualis fuisse colligitur Ardoba Ægyptia, quæ illorum cubito cubico æqualis ponitur, erit illorum cubitus cubicus pollicibus Anglicanis 11088 æqualis; adeoque cubiti longitudo, erit pollicum Anglicanorum 22|3 circiter.

Milliare autem Anglicanum continet 8 stadia, quorum quodlibet continet 40 perticas, harumque quælibet pedes $16\frac{1}{2}$: adeoque stadii longitudo, est pedum 660; milliaris autem, pedum 5280. Et propterea, milliare cubicum continebit pedes cubicos 147197952000; hoc est, pollices cubicos 254358061056000, (quippe pes continet 12 pollices, adeoque pes cubicus pollices cubicos $1728 = 12 \times 12 \times 12$.)

Cum itaque, ut dictum est, modius contineat pollices cubicos 1848, diviso per hunc numerum numero pollicum cubicorum, unius milliaris cubici, prodibit $137639643428\frac{4}{7}$ numerus modiorum in milliari cubico. Per quem itaque numerum si dividamus 35184372088832 numerum modiorum in tota mole, prodibit 255|62673 numerus milliarium cubicorum. Cum autem Pyramis sit $\frac{1}{3}$ Parallelepipedi, (super eadem base, æque alti;) si triplicetur numerus milliarium in exposita pyramide, habebitur Parallelepipedum super eadem base æque altum, nempe 766|88019, cujus numeri latus cubicum est 9|15226. Adeoque summæ triplum, superat corpus cubicum cujus latus 9 milliaria. Et propterea ipsa summa (nempe cubi triens) superabit Pyramidem cujus tum longitudo, tum latitudo, tum altitudo, est milliarium Anglicanorum 9.

Dum vero in commentario *Alsephadi*, dicitur æquare Pyramidem longam latam & altam milliaria 60; manifestum mendum videtur: vel enim meus me fallit calculus, vel reponendum est 6. Cum enim statuitur eorum Ardoba cubito cubico æqualis: Tot erunt in tota mole cubiti cubici, quot Ardobæ; nempe $5864062014805\frac{1}{3}$, (nimirum $\frac{1}{6}$ numeri modiorum, sive Waibarum; ponitur enim Ardoba æqualis sex Waibis.) Cum itaque statuitur eorum milliare æquale cubitis 4000; adeoque milliare cubicum, cubitis cubicis 64000000000; Si per hunc numerum dividatur numerus cubitorum cubicorum, sive Ardobarum, in tota mole pyramidali, prodibit numerus milliarium cubicorum in pyramide $91|62596898\frac{1}{3}$; ejusque triplum 274|87790695 numerus milliarium in Cubo super eadem basi: cujus latus cubicum est 6|502 proxime. Adeoque Pyramis (quippe Cubi triens) cujus tum longitudo, tum latitudo, tum altitudo, sit istorum milliarium $6\frac{1}{2}$ proxime æquabit totam

granorum summam. Illorum itaque milliaria 6½, videntur æquare circiter 9 ex nostris. Unumque ex eorum milliaribus, æquabit fere unum cum semisse ex nostris.

Atque hæc sunt quæ de Mensuris comparandis, hic loci, dicenda videbantur.

Quo quis autem, de incredibili hoc augmento, minus dubitet; placuit totius operationis processum, ad locum usque sexagesimum quartum continue duplando apponere; termini autem ultimi duplum, unitate minutum, est omnium aggregatum: quod, siquis dubitet, continue addendo constare poterit.

1	1	4294967296	33
2	2	8589934592	34
4	3	17179869184	35
8	4	34359738368	36
16	5	68719476736	37
32	6	137438953472	38
64	7	274877906944	39
128	8	549755813888	40
256	9	1099511627776	41
512	10	2199023255552	42
1024	11	4398046511104	43
2048	12	8796093022208	44
4096	13	17592186044416	45
8192	14	35184372088832	46
16384	15	70368744177664	47
32768	16	140737488355328	48
65536	17	281474976710656	49
131072	18	562949953421312	50
262144	19	1125899906842624	51
524288	20	2251799813685248	52
1048576	21	4503599627370496	53
2097152	22	9007199254740992	54
4194304	23	18014398509481984	55
8388608	24	36028797018963968	56
16777216	25	72057594037927936	57
33554432	26	144115188075855872	58
67108864	27	288230376151711744	59
134217728	28	576460752303423488	60
268435456	29	1152921504606846976	61
536870912	30	2305843009213693952	62
1073741824	31	4611686018427387904	63
2147483648	32	9223372036854775808	64
		18446744073709551615	Summa.

Nota autem, Indices in postremo hoc exemplo appositos verum locorum ordinem designare, nempe ab 1 inchoatos; non autem, distantiam à primo, quod faciunt Indices Exemplorum aliquot præcedentium, inchoati ab 0: quod quidem illic factum est ob eam quam tradidimus Regulam, de Termino ultimo, vel alio qui aliquanto à Primo distet, omissis intermediis, inveniendo.

Atque hactenus de Progressione Geometrica hic dictum esto. Fusior autem hujusce rei tractatio habetur deinceps capite XXXIII. Unde & jam dictorum demonstrationes sunt petendæ.

CAP.

CAP. XXXII.

De Logarithmorum Origine & Usu.

EST autem ea, quam superiori capite tradidimus, Regula, (de terminis remotioribus intermediis, quasi per saltum, inveniendis,) maximi quidem momenti Regula: non tam ob eum, quem jam ostendimus, illius usum; quam ob insigniora quæ inde defluxerunt commoda. Ex hoc enim fundamento, dependet, Mirificum illud *Logarithmorum* inventum: Quod inchoavit quidem Nobilissimus *Johannes Nepperus*, *Merchistonii* apud Scotos Baro: perfecit autem & consummavit, Egregius ille Geometra *Henricus Briggius*, Præcessor olim meus meritissimus, Professorum Geometriæ *Savilianorum* primus; nec hujus tantum subsellii, sed & totius Academiæ decus & ornamentum.

Totum, inquam, illud Logarithmorum negotium hoc fundamento nititur. Sunt enim *Logarithmi*, numeri Arithmetice proportionales, totidem Geometrice proportionalium, Indices. Horum autem Indicum, sive Logarithmorum, ope, per Additionem & Subductionem magna facilitate id perficitur, quod in veris Numeris non nisi per Multiplicationem & Divisionem faciendum erat. Item, per Bipartitionem, Tripartitionem, Quadripartitionem, &c. id perficitur, quod naturali methodo per Extractionem Radicis Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c. perficiendum est. *Logarithmorum Origo.*

Statuerunt quippe illi, Logarithmorum Magistri, (communicatis consiliis,) numerorum Geometrice proportionalium 1, 10, 100, 1000, &c. Indices, sive Logarithmos, Arithmetice proportionales, 0, 1, 2, 3. &c. Ad numeros autem istis intermedios, his item intermedios Logarithmos, debita ratione interjectos, aptarunt. Indicibus nempe, sive Logarithmis, integris, partium decimalium adjectione ita auctis, ut singulorum interjectorum numerorum sedes postularunt, singulis interjectis numeris suos Logarithmos, laborioso calculo, & indefessis vigiliis, investigarunt ad hanc fere formam.

1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4
100000	5
1000000	6
&c.	&c.

Numeri	Logarithmi	Numeri	Logarithmi.
1	0.00000	500	2.69897
2½	0.39794	750	2.87506
5	0.69897	1000	3.00000
7½	0.87506	2500	3.39794
10	1.00000	5000	3.69897
25	1.39794	7500	3.87506
50	1.69897	10000	4.00000
75	1.87506	25000	4.39794
100	2.00000	50000	4.69897
250	2.39794	75000	4.87506
		100000	5.00000

Atque eadem methodo omnibus etiam hisce intermediis numeris, nempe ab 1 ad 100000, aptatos habemus Logarithmos jamjam investigatos, in D. *Briggii Arithmetica Logarithmica* conspiciendos; nempe ad usque centena millia: qui etiam, non magno labore, (sumptis nempe proportionalibus intermediis) ad usque centies millena millia, sine notabili errore, accommodari poterunt. Sed & ibidem Canones Sinuum, Tangentium, & Secantium, Logarithmice computatos habemus. Quorum omnium fusiorem traditionem qui postulat, tum ibidem quærat, tum in ejusdem *Trigonometria Britannica*; ab *Henrico Gellibrand*, (Astronomiæ in Collegio Greshamensi apud Londinenses tum Professore) edita & aucta.

Loga-

Logarithmorum usus; in Multiplicatione.

Logarithmorum autem usum quod attinet. *Duorum quorumvis, (aut etiam plurium,) Numerorum Logarithmi, simul additi, constituunt Logarithmum, qui numero ex assumptorum numerorum continua multiplicatione facto convenit.* Adeoque invento facti Logarithmo, habetur ipse numerus factus, ex Canone. Puta si numeri 25, Logarithmo 1,39794, adjiciatur numeri 100, Logarithmus 2; horum aggregatum 2 + 1,39749 = 3,39794, est Logarithmus numeri 25 × 100 = 2500. Pariter, si numeri 25, Logarithmo 1,39794, adjiciatur numeri 75, Logarithmus 1,87506; horum aggregatum 3,27300 est Logarithmus cui in canone convenit numerus 1875. Eodem modo; in continue proportionalibus, 1, 2, 4, &c. cum ad inveniendum locum sexagesimum quartum, numerus 1, continue multiplicandus est in 2 sexagies & ter; si numeri 1 Logarithmo 0,00000, adjiciatur numeri 2, Logarithmus 0,30103, sexagies & ter, (hoc est, 63 × 0,30103) prodibit 18,96489; cui juxta Canonem Logarithmicum conveniet numerus 9223300000000000000, circiter; vel saltem 9223400000000000000; vel potius inter utrumque: neque enim in tam vastis numeris expectandum est ut Canon Logarithmicus majori ἀκριβείᾳ rem prodat.

Logar.	Num.
1,39794	25
+ 2,00000	× 100
3,39794	2500

Logar.	Num.
1,39794	25
+ 1,87506	× 75
3,27300	1875

In Divisione.

Similiter; *Si ex numeri Dividendi Logarithmo, auferatur Logarithmus Divisoris, prodibit Logarithmus Quotientis.* Si autem plures continue faciendæ sint divisiones; ex propositi numeri dividendi Logarithmo, auferendi sunt Logarithmi omnium continue dividentium. Puta, si ex numeri 100, Logarithmo 2,00000, auferatur numeri 50 Logarithmus, 1,69897; manebit 0,30103 Logarithmus Quotientis 2. Si ex numeri 50 Logarithmo 1,69897 auferatur 0,69867 Logarithmus numeri 5, manebit 1. Logarithmus numeri 10. Item si ex numeri 61875 Logarithmo 4,79151 auferantur tum 1,39794 Logarithmus numeri 25; tum 1,87506 Logarithmus numeri 75, (ex canone depromendi;) manebit 1,51851 Logarithmus numeri 33, duabus divisionibus per 25 & 75 continue factis provenientis. Et similiter alibi.

Logar.	Num.
2,00000	100 (2
− 1,69897	50
0,30103	

1,69897	50 (10
− 0,69897	5
1,00000	

Logar.	Num.
4,79151	
− 1,39794	75) $^{61875}_{25}$ (33
− 1,87506	
1,51851	

In Potestatum Genesi.

Atque hinc similiter sequitur; *Si numeri cujusvis Logarithmus dupletur, tripletur, quadrupletur, &c. proveniet Logarithmus Quadrati, Cubi, Biquadrati, &c. expositæ radicis.* Puta numeri 5 Logarithmus 0,69897, triplatus, nempe 2,09691 = 3 × 0,69897 = 0,69897 + 0,69897 + 0,69897, est Logarithmus numeri 125 = 5 × 5 × 5.

Logar.	Num.
0,69897	5
+ 0,69897	× 5
+ 0,69897	× 5
2,09691	125

In Radicum extractione. Et, vice versa; *Si numeri cujusvis Logarithmus fuerit bifariam, trifariam, quadrifariam, &c. divisus; prodibit Logarithmus radicis quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ, &c.* Puta 3) 2,09691 (0,69897, erit logarithmus numeri $5 = \sqrt{^3}\,125$.

Fractionum Logarithmi. Quoties autem occurrit numerus minor per majorem dividendus unde oritur numerus fractus, qui unitate minor est; prodibit Logarithmus Negativus sive Ablatitius, quippe minor quam 0,00000 Logarithmus unitatis. Puta 3) 2 ($\frac{2}{3}$ numerus, logarithmum postulabit − 0,17609. qui nempe provenit subducto logarithmo numeri 3, ex logarithmo numeri 2.

Logar.	Num.
0,30103	2 ($\frac{2}{3}$
− 0,47712	3
− 0,17609	

Qui plura petit de Logarithmici Canonis sive Constructione sive Usu, authores adeat supra laudatos, Nepperum, Briggium, Gellibrandum, aliosque qui de hoc negotio ex professo scripserunt. Sufficiat nobis, operationum Logarithmicarum originem & fontem indicasse.

CAP.

CAP. XXXIII.

Progressio Geometrica fusius traditur.

SIcut superius Cap. XXVII & XXVIII, Progressionis Arithmeticæ doctrinam fusius prosecuti sumus, libet eadem Methodo & Progressionem Geometricam aggredi, sequentibus propositionibus explicandam. Quod quo rectius fiat, hæc sunto quibus sum usurus Symbola.

Terminus minimus, quem primum appello, sit A; maximus V; extremorum rectangulum VA $=$ V $\times$ A; maximi ad minimum ratio $\frac{V}{A}$; Rectangulorum (ipsi VA æqualium) terminis reciproce sumptis comprehensorum aggregatum, Z; numerus terminorum, T; communis ratio R (intellige, Rationis communis *Exponentem*) distantia termini cujusvis à dato, D; summa progressionis, S. Termini ipsi, à minimo inchoando, dicantur. *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, &c. à maximo vero inchoando, dicantur α, β, γ, δ, ε, &c. Numeros qui cujusque termini à primo distantiam indicant, *Indices* appello; puta 0, 1, 2, 3, &c. His præmissis, sequuntur propositiones.

κ	$R^9) V$	2	A	*a*	0
ι	$R^8) V$	6	AR	*b*	1
θ	$R^7) V$	18	AR^2	*c*	2
η	$R^6) V$	54	AR^3	*d*	3
ζ	$R^5) V$	162	AR^4	*e*	4
ε	$R^4) V$	486	AR^5	*f*	5
δ	$R^3) V$	1458	AR^6	*g*	6
γ	$R^2) V$	4374	AR^7	*h*	7
β	$R) V$	13122	AR^8	*i*	8
α	V	39366	AR^9	*k*	9

1. Si sit $a = A$, erit $b = AR$, $c = AR^2$, $d = AR^3$, &c. Quilibet enim terminus in communem rationem ductus, producit terminum proxime sequentem, per def. Progressionis Geometricæ.

2. Quilibet ergo terminus producitur ex multiplicatione termini primi in Rationis communis potestatem Indici cognominem; vel (quod idem est) cognominem distantiæ ipsius à termino primo, ipsum primum non computando. Nempe AR^d. Sequitur ex præced.

3. Datis igitur Termino primo seu minimo, Ratione communi, & termini quæsiti distantia à primo; A, R, D; habetur terminus quæsitus, nempe AR^d. per præced. Puta terminus sextus *f*, cujus index sive distantia à primo 5, fit ex ductu primi in rationis communis potestatem 5^{am} distantiæ $D = 5$ cognominem. $f = AR^5$.

4. Si terminus maximus sive ultimus sit V, erit penultimus $\frac{V}{R}$ vel $R) V$; antepenultimus $\frac{V}{R^2}$ vel $R^2) V$; hinc proxime minor $R^3) V$; & sic deinceps; $V = \alpha$, $R) V = \beta$, $R^2) V = \gamma$, $R^3) V = \delta$. &c. Quilibet enim terminus per rationem communem divisus, dat terminum proxime minorem. per def. progr. Geom.

5. Quilibet igitur terminus æqualis est, termino maximo per rationis communis potestatem distantiæ ab ultimo cognominem diviso. Nempe $R^d) V$. per præced.

6. Dato ergo termino Maximo, cum Ratione communi, & Distantia termini quæsiti à maximo; V, R, D; habetur terminus quæsitus. Puta sextus à fine, sive ante ultimum quintus, $\zeta = R^5) V$. per præced.

7. Dato termino quovis, (ut *f*) cum ratione communi, & cujusvis assignati majoris distantia à dato; *f*, R, D; invenitur terminus assignatus (puta *i*.) nempe, multiplicando terminum datum in Rationis communis potestatem distantiæ cognominem. Hoc est $i = fR^d = fR^3$. Nam per def. vel prop. 1. pro singulis distantiæ

ſtantiæ gradibus, Exponens poteſtatis Rationis communis unitate augetur; ergo, pro omnibus gradibus, tot unitatibus quot ſunt ipſi diſtantiæ gradus.

8. Dato termino quovis, cum Ratione communi, & cujuſvis aſſignati minoris diſtantia à dato; (puta f, R, D;) invenitur aſſignatus. (ut c.) Nempe dividendo datum per Rationis poteſtatem diſtantiæ cognominem. Puta $R^{d}) f = c$, hoc eſt $R^{3}) f = c$. Vel $R^{d}) \zeta = \iota = R^{3}) \zeta$. Sequitur ex def. vel prop. 4.

9. Data igitur duorum quorumvis terminorum ab invicem diſtantia, cum Ratione communi; D, R; datur eorundem ad invicem ratio. (Puta i ad f; vel ζ ad ι) nempe per 7 & 8; majoris ad minorem ratio eſt R^{d}, & hujus reciproca, eſt minoris ad Majorem. Puta $\frac{i}{f} = R^{d} = R^{3}$; & ſimiliter $\frac{f}{c} = R^{d} = R^{3}$; vel $\frac{\zeta}{\iota} = R^{d} = R^{3}$.

10. Data vero terminorum quorumvis ad invicem Ratione, cum eorundem ab invicem diſtantia; (puta i ad f, D) datur communis Ratio. R. Eſt enim (per præced.) datorum terminorum ratio ad invicem, R^{d}, rationis communis poteſtas diſtantiæ cognominis: extracta igitur analoga radice, habetur communis ratio. Nempe $R = \sqrt[d]{R^{d}}$.

11. Item Data terminorum quorumvis ad invicem ratione, (R^{d} per prop. 9.) cum ratione communi (R,) datur eorum ab invicem diſtantia. D. Quærendo nempe quota poteſtas R^{d} ſit ipſius R.

12. Porro; Termini duo quilibet, cum duobus aliis ejuſdem progreſſionis quibuſlibet, in eadem ab invicem diſtantia poſiti; ſunt & in eadem ad invicem ratione conſtituti. Cum enim (per prop. 9.) termini majoris ad minorem ratio ſit R^{d}; ſi utrobique æqualis ſit tum R, tum D; erit & utrobique æqualis R^{d}. puta (propter æqualem utrobique diſtantiam) $i . f :: \zeta . \iota$.

13. Et contra; Si eadem ſit utrobique eorundem majoris ad minorem ratio, eadem eſt & utrobique diſtantia. Nam ſi ſit utrobique æqualis tum R, tum R^{d}; erit & utrobique æqualis D. Puta ſi $i . f :: \zeta . \iota$. erit & utrobique æqualis diſtantia.

14. Ergo etiam: Si ex terminis quotvis continue proportionalibus, ſeligantur quotlibet in eadem continue ab invicem diſtantia; erunt & illi in continua progreſſione Geometrica conſtituti. Puta, ſi $a . b . c . d . e . f . g . h . i . k$. ∺: erunt item tum $a . c . e . g . i$. ∺, tum $b . d . f . h . k$. ∺, tum $a . d . g . k$: ∺, tum $a . e . i$. ∺ continue proportionales. Nam æqualibus continue rationibus progrediuntur per prop. 12.

$a . b . c . d . e . f . g . h . i . k$. ∺
$a . \quad c . \quad e . \quad g . \quad i$. ∺
$b . \quad d . \quad f . \quad h . \quad k$. ∺
$a . \quad d . \quad g . \quad k$. ∺
$a . \quad e . \quad i$. ∺

15. Et contra: ſi ex terminis ita continue proportionalibus ſelecti quotlibet ſint item continue proportionales; æqualibus ab invicem diſtantiis ſumpti ſunt. Per prop. 13.

16. Data ratione communi, cum numero terminorum; R, T; invenitur extremorum ad invicem ratio. $\frac{V}{A}$. Eſt enim $T - 1 = D$, (extremorum diſtantia, unitate minor quam eſt numerus terminorum.) Ideoque $\frac{V}{A} = R^{d} = R^{t-1}$.

17. Et, Data extremorum ratione, cum terminorum numero; $\frac{V}{A}$, T; habetur communis ratio. R. Eſt enim $T - 1 = D$; & $\frac{V}{A} = R^{d}$: Ergo (extracta radice analoga) $\sqrt[d]{\frac{V}{A}} = \sqrt[d]{R^{d}} = R$.

18. Et, Data extremorum ratione, cum ratione communi $\frac{V}{A}$, R; habetur numerus terminorum. T. Cum enim $\frac{V}{A} = R^{d}$; quærendo quota poteſtas eſt $\frac{V}{A}$ vel R^{d}, ipſius R, habetur extremorum diſtantia D; adeoque & $T = D + 1$.

19. Dato termino primo, cum ratione communi, & numero terminorum; A, R, T; habetur ultimus. V. Cum enim, per prop. 16. $\frac{V}{A} = R^{d}$. Erit $A R^{d} = A \times \frac{V}{A} = V$.

Nota interim, ob commodiorem notationem, tum hic tum poſtea, pro $T - 1$, poni D, vel d.

20. Dato termino ultimo, cum ratione communi, & numero terminorum; V, R, T; habetur primus A. Nam (propter $R^{d} = \frac{V}{A}$) erit $R^{d}) V = \frac{V}{A}) V = A$.

21. Continue proportionalium; ſi duorum quorumvis rectangulum per terminum primum dividatur, prodibit terminus cujus index (ſive diſtantia à primo)

primo) æquatur illorum indicibus simul sumptus. Sit enim, verbi gratiâ, terminorum invicem multiplicatorum unius index m, alterius n: erunt ergo termini illi AR^m & AR^n; per prop. 2. horum ergo rectangulum $AR^m \times AR^n = A^2 R^{m+n}$, quod, per A divisum, exhibet AR^{m+n}, hoc est (per prop. 2.) terminum illum cujus index est $m+n$, indicum illorum aggregato æqualis.

$$A)\begin{array}{l} ARRR = AR^3 \\ \times ARR = AR^2 \\ \hline AARRRRR = A^2R^5 \end{array} \qquad \frac{A^2R^5}{A} = AR^5$$

22. Eodem modo; Si termini tres, quatuor, quinque, aut plures, continue multiplicentur, productum tot vicibus una minus divisum per terminum primum (sive ea primi potestate divisum quæ uno gradu minor est quam numerus terminorum sic continue multiplicatorum,) exhibet terminum cujus index illorum indicum aggregato æquatur. Puta, si continue multiplicatorum indices sint l, m, n, termini erunt AR^l, AR^m, AR^n, qui invicem ducti facient $AAAR^{l+m+n}$; quodsi dividantur per AA, vel A^2, prodibit AR^{l+m+n}, terminus nempe cujus index $l+m+n$. per prop. 2.

23. Si itaque continue proportionalium primus terminus sit 1; (quod in tabulis Logarithmicis ponitur;) duobus, pluribusve, continue multiplicatis, proveniet terminus cujus index illorum indicum aggregato æquatur. Sequitur ex prop. 21, & 22. Quia nempe quæ illic imperatur divisio per terminum primum (sive semel sive sæpius facienda) hoc casu (cum primus terminus ponitur 1,) nihil immutabit. Nam $1 \times 1 \times 1 \times R = 1 \times 1 \times R = 1 \times R = R$.

24. Item; numerorum ab 1 continue proportionalium; erit quilibet terminus, ipsa potestas rationis communis, quæ termini illius indici est cognominis. per prop. 2. Nam si $A = 1$, erit $AR^d = 1R^d = R^d$.

Atque hinc pendet Regula de Multiplicatione Logarithmica. Nempe *Datorum numerorum Logarithmi simul additi, æquantur Logarithmo numeri ex datorum invicem multiplicatione producti.* per pr. 23. Sunt enim Logarithmi, numerorum ab 1 continue proportionalium Indices.

25. Continue proportionalium; si duorum alter per alterum dividatur, & quotiens in terminum primum ducatur; prodibit terminus cujus index æquatur differentiæ indicum terminorum expositorum. Sit majoris index $m+n$, minoris m, adeoque eorum differentia n; erunt per pr. 2. ipsi termini AR^{m+n}, & AR^m; facta itaque divisione, AR^m) AR^{m+n} (R^n, si quotiens ducatur in A, habetur AR^n, terminus cujus index n per pr. 2.

26. Si itaque continue proportionalium primus terminus sit 1; quotiens cujusvis termini per quemvis alium divisi, est ipse terminus cujus index æquatur illorum indicum differentiæ. (Intellige, excessui indicis divisi supra indicem dividentis; & propterea si hic major fuerit, quotientis index erit negativus.) Sequitur ex præced. quia si $A = 1$ erit $R^n = AR^n$.

27. Item; numerorum ab 1 continue proportionalium; si alter per alterum dividatur, erit quotiens, ipsa potestas rationis communis, differentiæ indicum datorum numerorum cognominis. nempe R^n. per præced.

Atque hinc pendet Regula Divisionis Logarithmicæ. Nempe *Si ex Logarithmo Dividendi auferatur Logarithmus Divisoris, quod reliquum est, est Logarithmus Quotientis.* Quippe Logarithmi sunt numerorum ab 1 continue proportionalium indices.

Aliæ propositiones de operationibus Logarithmicis; puta, de extractione Radicis Quadraticæ, per bipartitionem Logarithmi; & Cubicæ, per ejusdem tripartitionem, &c. aliæque consimiles; ex propositionibus jam traditis dependent. Nec opus erit illis fusius explicandis jam immorari, ne nimis digressi videamur. Sufficit digito fontem indicasse.

28. In quantitatum continue proportionalium quotcunque progressione; Quod fit ex ductu termini primi in ultimum, æquatur facto ex mutuo ductu duorum quorumvis terminorum ab extremis æqualiter utrinque remotorum. Vel, Rectangulum sub extremis, æquatur rectangulo sub duobus quibuslibet intermediis ab extremis utrinque æqualiter distantibus. (Intellige; quorum unus tot præcise gradibus ab uno extremo, quot reliquus à reliquo, distat.) Cum enim sit terminorum alter AR^d, per prop. 2. alter R^d) V, per prop. 5. sitque distantia D utrobique

 eadem;

eadem; erit rectangulum $R^d)\, V \times A\, R^d = V A = VA = a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta$ &c. Atque hæc sunt illa rectangula quorum omnium aggregatum Symbolo Z designatum volumus; Et quæ simpliciter *Rectangulorum aggregatum* deinceps appellabimus.

29. Sin terminus omnium medius ab utroque extremo æqualiter distet, (quod tum continget quum terminorum numerus est impar;) Quadratum medii æquatur extremorum rectangulo. Nam propter $R^d)\, V = M = A\, R^d$, (& distantiam D utrobique æqualem,) erit $R^d)\, V \times A\, R^d = M \times M = Mq$.

30. Similiter, In quatuor terminis utut discontinue proportionalibus, Rectangulum extremorum æquatur rectangulo mediorum. Puta $A . M :: N . V$. Cum enim (propter æqualem utrobique rationem) sit $A R = M$, & $N R = V$, adeoque $R)\, V = N$; erit $N \times M = R)\, V \times A R = V A$. Atque hinc sequitur Regula quæ dicitur *Aurea*, sive *Regula Trium*. Nempe

Datis.	Datur.
$A)\, M \times N\, ($	V
$V)\, M \times N\, ($	A
$M)\, A \times V\, ($	N
$N)\, A \times V\, ($	M

31. Quatuor proportionalium, datis tribus quibuslibet, datur & reliquus. Cum enim sit, per præced. $A \times V = M \times N$, erit (æqualiter utrinque dividendo) $V = \frac{MN}{A}$, $A = \frac{MN}{V}$. $M = \frac{AV}{N}$. $N = \frac{AV}{M}$. Estque hæc Regula infiniti pene usus per totam Mathesin, ideoque merito *Aurea* dicta.

32. Ex tribus autem continue proportionalibus, Rectangulum extremorum æquatur quadrato medii. Puta $A . M . V$ $\div\div$. Nam, propter æqualem utrobique rationem, est $A R = M$, & $M R = V$; ergo $R)\, V = M$. Ideoque $R)\, V \times A R = VA = M \times M = Mq$.

Datis	Datur.
$A)\, Mq\, ($	V
$V)\, Mq\, ($	A
$\sqrt{AV} = M$	

33. Trium ergo continue proportionalium, datis duobus quibusvis, datur & reliquus. Cum enim, per præced. $A V = Mq$. Erit $A)\, Mq\, (V$, & $V)\, Mq\, (A$, & $\sqrt{AV} = \sqrt{Mq} = M$.

34. Atque idem valet de tribus quatuorve terminis progressionis continuæ, utut non immediate proximis, modo æqualibus intervallis distantibus. Puta si $a . b . c . d . e . f . g$. $\div\div$ erit $ae = c^2$; nam & $a . c . e$ $\div\div$ per 14. Item $af = cd$; & $de = bg$; & sic alibi. Nam $a . c :: d . f$. vel $a . d :: c . f$. & $b . d :: e . g$. vel $b . e :: d . g$. &c. per 12.

35. Sed & præcedentium aliquot conversæ pariter demonstrantur. Puta conversa prop. 28. In continue proportionalibus, (excepta tantum æqualium progressione, ut 1. 1. 1. 1. &c. $\div\div$, quæ & deinceps aliquoties excepta intelligatur;) si duorum terminorum intermediorum rectangulum rectangulo extremorum æquetur; sunt illi ab extremis æqualiter utrinque remoti, (hoc est, quot gradibus eorum alteruter ab alterutro extremorum distat, tot & reliquus a reliquo.) Puta, si sint $a . b . c . d . e . f . g$. $\div\div$, sitque $ce = ag$; totidem gradibus distant a, c, atque e, g; item a, e, atque c, g. Cum enim duorum c, e, alter sit $a R^d$, alter $R^d)\, g$; adeoque $R^d)\, g \times a R^d = (ce =)\, ag$; æqualis erit utrobique R^d (ut divisio & multiplicatio se mutuo destruant,) adeoque & distantia D utrobique æqualis per prop. 13.

36. Et conversa prop. 29. Si continue proportionalium, intermedii alicujus quadratum æquetur rectangulo extremorum; æqualiter ille ab utroque extremo distat. Probatur ut præcedens.

37. Item conversa Prop. 32. Si unius termini quadratum æquetur duorum rectangulo, erit ille medius inter hos Geometricus. Si enim $A V = Mq = MM$, Erit (æqualiter utrinque dividendo) $A = \frac{MM}{V}$ & $\frac{A}{M} = \frac{M}{V}$. Ergo $A . M . V$ $\div\div$

38. Similiter & conversa Prop. 30. Si ex terminis quatuor, duorum rectangulum, rectangulo reliquorum æquetur; sunt illi quatuor proportionales. Puta, Si $A V = MN$, erit (æqualiter utrinque dividendo) $A = \frac{MN}{V}$, & $\frac{A}{M} = \frac{N}{V}$ vel etiam $\frac{A}{N} = \frac{M}{V}$; hoc est $A . M :: N . V$. & $A . N :: M . V$. Item, quia, ut prius,

$AV = MN$, erit $\frac{MN}{A} = V$, & $\frac{M}{A} = \frac{V}{N}$, vel etiam $\frac{N}{A} = \frac{V}{M}$: hoc est $M.A :: V.N.$ & $N.A :: V.M.$ Nam singulis his modis proportio concluditur.

39. Hinc sequitur; Si quatuor termini sint proportionales, sunt & inverse (ἀνάπαλιν) proportionales. Puta si $A.M :: N.V.$ Erit (per. pr. 30.) $AV = MN$; ideoque, (ut ostensum est, Prop. praeced.) $M.A :: V.N.$

40. Item; si quatuor termini sint proportionales, sunt & alterne (permutatim, vicissim, ἐναλλάξ,) proportionales. Puta si $A.M :: N.V.$ adeoque $AV = MN$, erit $A.N :: M.V.$ ut est ostensum pr. 38. Item, $N.A :: V.M.$ ut ibid. & Pr. 39.

41. Porro, si quatuor proportionalium vel primus & tertius, vel secundus & quartus, aequaliter vel multiplicentur vel dividantur, manent adhuc proportionales. Puta si $A.M :: N.V$, hoc est $A.AR :: N.NR$; (ubi communis ratio est R;) erit & $A.MB :: N.VB$, hoc est $A.ARB :: N.NRB$. (ubi communis ratio est RB) Item, $A.B)M :: N.B)V.$ hoc est $A.B)RA :: N.B)RN.$ ubi communis ratio est $B)R$. Similiter si $A.M :: N.V.$ hoc est $R)M.M :: R)V.V.$ erit $B)A.M :: B)N.V.$ hoc est $BR)M.M :: BR)V.V$ &c. Vel sic. Si $\frac{A}{M} = \frac{N}{V}$ tum $\frac{A}{M}B = \frac{N}{V}B$. & $B)\frac{A}{M} = B)\frac{N}{V}$. Sive (quod tantundem est) $\frac{AB}{M} = \frac{NB}{V}$, & $\frac{A}{BM} = \frac{N}{BV}$. Vel etiam $C)\frac{AB}{M} = C)\frac{NB}{V}$, sive $\frac{AB}{CM} = \frac{NB}{CV}$, sive $AB.CM :: NB.CV.$ &c.

42. Item, si proportionales fuerint tum $A.M :: N.V.$ tum $\alpha.\mu :: \nu.\upsilon.$ tum $a.m :: n.u.$ (tum, si placet quaterni, plures quotlibet;) erunt item tum facti, tum dividendo orti, (terminis respective sumptis) termini proportionales. Esto enim in primis ratio R, in secundis ϱ, in tertiis r. Adeoque $A.M = AR :: N.V = NR$. Item $\alpha.\mu = \alpha\varrho :: \nu.\upsilon = \nu\varrho$. Et $a.m = ar :: n.u = nr$. Ergo (per Prop. 41.) $A\alpha a.M\mu m = AR\alpha\varrho ar :: N\nu n.V\upsilon u = NR\nu\varrho nr.$ hoc est $A\alpha a.A\alpha aR\varrho r :: N\nu n.N\nu nR\varrho r.$ ubi communis ratio est $R\varrho r$. Pariter & $\frac{A\alpha}{a}.\frac{M\mu}{m} = \frac{A\alpha R\varrho}{ar} :: \frac{N\nu}{n}.\frac{V\upsilon}{u} = \frac{N\nu R\varrho}{nr}$. sive $a)A\alpha.ar)A\alpha R\varrho :: n)N\nu.nr)N\nu R\varrho.$ ubi communis utrobique ratio est $\frac{R\varrho}{r}$ vel $r)R\varrho$. Vel sic

$$\begin{array}{llll} A. & M = AR :: & N. & V = NR. \\ \alpha. & \mu = \alpha\varrho :: & \nu. & \upsilon = \nu\varrho. \\ a. & m = ar :: & n. & u = nr. \\ \hline A\alpha a. & M\mu m = A\alpha aR\varrho r :: & N\nu n. & V\upsilon u = N\nu nR\varrho r. \end{array}$$

$$\frac{A\alpha}{a}.\frac{M\mu}{m} = \frac{A\alpha R\varrho}{ar} :: \frac{N\nu}{n}.\frac{V\upsilon}{u} = \frac{N\nu R\varrho}{nr}.$$

43. Sed & idem obtinet in continue proportionalibus. Quod similiter probandum erit. Puta,

Si	$A.B.C.D.E \div\div$	vel $A.AR.AR^2.AR^3.AR^4 \div\div$
Et	$\alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon \div\div$	vel $\alpha.\alpha\varrho.\alpha\varrho^2.\alpha\varrho^3.\alpha\varrho^4 \div\div$
Erunt	$A\alpha.B\beta.C\gamma.D\delta.E\varepsilon \div\div$	vel $A\alpha.A\alpha R\varrho.A\alpha R^2\varrho^2.A\alpha R^3\varrho^3.A\alpha R^4\varrho^4 \div\div$
Et	$\frac{A}{\alpha}.\frac{B}{\beta}.\frac{C}{\gamma}.\frac{D}{\delta}.\frac{E}{\varepsilon} \div\div$	vel $\frac{A}{\alpha}.\frac{AR}{\alpha\varrho}.\frac{AR^2}{\alpha\varrho^2}.\frac{AR^3}{\alpha\varrho^3}.\frac{AR^4}{\alpha\varrho^4} \div\div$

44. Et quidem, licet altera progressio crescens fuerit, altera decrescens. Ut si tum $A.AR.AR^2.AR^3.AR^4.\div\div$ tum $\alpha.\varrho)\alpha.\varrho^2)\alpha.\varrho^3)\alpha.\varrho^4)\alpha.\div\div$ erit etiam $A\alpha.\varrho)\alpha AR.\varrho^2)\alpha AR^2.\varrho^3)\alpha AR^3.\varrho^4)\alpha AR^4.\div\div$ ut patet; quippe communis ratio est $\varrho)R$.

Atque hujusmodi complures proportionalium immutationes & comparationes facile

facile eſſet tum comminiſci tum demonſtrare. Verum illud haud eſt neceſſe, ſed cujuſlibet potius arbitrio permittendum, ut id, prout opus fuerit, pro re nata curet, ſuiſque uſibus accommodet. Quæ autem huc ſpectant non pauca infra, ubi Euclidis Elementum quintum explicaturus ſum, tradentur.

45. In continue proportionalibus, extremorum Rectangulum ductum in numerum terminorum, æquatur aggregato Rectangulorum omnium æqualium (ſenſu quo pr. 28.) cum enim per pr. 28. ſit $VA = a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta = e\epsilon$ &c. ſintque hæc totidem quot termini; (nam ſinguli termini ordine directo ſumpti in reſpectivos terminos ordinis retrogradi duci ſupponuntur; adeoque tot erunt rectangula quot termini;) erit $T\,VA = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\epsilon$ &c.

Notandum autem eſt rectangulum $a\alpha$, & $k\kappa$, (ſi nempe k ponatur terminus ultimus) & in reliquis ſimiliter, revera idem eſſe rectangulum (nam a & κ, item α & k, ſunt idem terminus,) ſed cum id non ſtatim appareat, atque aliis item de cauſis, commodius putavimus tanquam ſi eſſent diſtincta bis numerare; (adeoque tot reputare rectangula quot ſunt termini:) cum tamen ſi $a\alpha$ & $k\kappa$ (& ſimiliter de reliquis) pro eodem habeamus rectangulo, erit numerus rectangulorum diverſorum $\frac{1}{2}$ T, ubi termini ſunt numero pares; at $\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}$, ubi numero impares; nam hoc caſu, ne noſtro quidem computo quadratum medii bis ponitur. Quod monuiſſe ſufficiat. Nos itaque priorem loquendi formulam potius ſelegimus: quo ſenſu & deinceps loqui intelligamur.

46. Idem valet in quatuor diſcontinue proportionalibus. Puta A . M :: N . V. Nam $AV + MN + NM + VA = 4\,VA$. Per Pr. 30.

47. Dato itaque in continue proportionalibus quotlibet, extremorum rectangulo, & numero terminorum VA, T; datur Rectangulorum aggregatum. Z. Nempe $Z = T\,VA$. per prop. 45.

48. Item dato extremorum rectangulo, & rectangulorum Aggregato; VA, Z; datur numerus terminorum. T. Nam, quia $Z = T\,VA$, erit $VA)\,Z = T$.

49. Et Dato numero terminorum, cum rectangulorum aggregato; T, Z; datur rectangulum extremorum. VA. Cum enim ſit $Z = T\,VA$. erit $T)\,Z = VA$.

50. Datis numero terminorum, rectangulorum aggregato, & termino minimo; T, Z, A; datur maximus. V. Nam per præced. $T)\,Z = VA$. Ergo $AT)\,Z = V$.

51. Datis iiſdem; datur extremorum ad invicem ratio. $\frac{V}{A}$. Nam per præced. $AT)\,Z = V$. Ergo $A^2T)\,Z = \frac{V}{A}$.

52. Datis numero terminorum, rectangulorum aggregato, & termino maximo; T, Z, V; datur minimus. A. Nam per prop. 49. $T)\,Z = VA$. Ergo $VT)\,Z = A$.

53. Datis iiſdem; datur extremorum ratio. $\frac{V}{A}$. Nam, per præced. $VT)\,Z = A$, Ergo $\frac{V}{A} = \frac{V}{VT)\,Z} = \frac{V^2T}{Z}$. Vel etiam $Z)\,V^2T$ ($\frac{V}{A}$. vel $V^2T . Z :: V . A$.

54. Datis extremorum tum ratione, tum rectangulo $\frac{V}{A}$, VA; datur terminus minimus A. Nam $\frac{V}{A})\,VA$ (A^2. Cujus radix, A.

55. Datis iiſdem; datur terminus maximus. V. Nam $VA \times \frac{V}{A} = V^2$. Ergo $\sqrt{:}\,VA \times \frac{V}{A}: = V$.

56. Datis extremis (vel eorundem ratione, & rectangulo) cum communi ratione; $\frac{V}{A}$, VA, R; habetur rectangulorum aggregatum. Z. Nam per prop. 18. habetur T. ergo & (per prop. 47.) $Z = T\,VA$.

57. Datis extremis (vel eorundem ratione & rectangulo,) cum rectangulorum aggregato; $\frac{V}{A}$, VA, Z; habetur communis ratio. R. Nam per prop. 48. habetur T; ergo & R. per prop. 17.

58. Datis termino minimo, numero terminorum, & ratione communi; A, T, R; datur rectangulorum aggregatum. Z. Nam per pr. 19. $V = AR^d$. Ergo per pr. 47. $TVA = Z = TA^2R^d$. (per d intellige $T - 1$.)

59. Datis termino minimo, numero terminorum, & rectangulorum aggregato; A, T, Z; datur ratio communis. R. Nam per prop. 51. habetur $\frac{V}{A} = \frac{Z}{A^2T}$. Ergo per pr. 17. $R = \sqrt[d]{\frac{Z}{A^2T}}$.

60. Datis

60. Datis termino maximo, numero terminorum, & communi ratione; V, T, R; datur rectangulorum aggregatum. Z. Nam per prop. 20. $A = R^d)\,V$. Ergo per prop. 47. $TVA = Z = R^d)\,TV^2$.

61. Datis termino maximo, numero terminorum, & rectangulorum aggregato; V, T, Z; datur communis ratio R. Nam, per prop. 53. $\frac{V}{A} = Z)\,V^2 T$. Ergo per prop. 17. $R = \sqrt{d}\,\frac{V^2 T}{Z}$.

62. Datis numero terminorum, ratione communi, & rectangulorum aggregato; T, R, Z; datur terminus minimus. A. Nam per pr. 16. $\frac{V}{A} = R^d$. Et per pr. 49. $T)\,Z = VA$. Ergo per pr. 54. $TR^d)\,Z = \frac{V}{A})\,VA = A^2$. Ideoque $A = \sqrt{\frac{Z}{TR^d}}$.

63. Datis iisdem; datur terminus maximus. V. Nam per pr. 16 & 49. habentur $\frac{V}{A}$ & VA, ut prius. Ergo per pr. 55. $V = \sqrt{:}\,VA \times \frac{V}{A}: = \sqrt{\frac{ZR^d}{T}}$.

64. Datis termino minimo, ratione communi, & rectangulorum aggregato; A, R, Z; invenitur terminorum numerus T. Nam per pr. 45, vel 47. $Z = TVA$. adeoque $A)\,Z = TV$. Item per pr. 19. $V = AR^d$. adeoque (cum sit $D + 1 = T$) erit $RV = ARR^d = AR^t$. Et $RVT = TAR^t = A)\,ZR$. (quia nempe $A)\,Z = TV$.) Ideoque $TR^t = A^2)\,ZR$. Quærendum igitur, quota potestas datæ rationis communis R, ducta in suum indicem sive exponentem potestatis, æquabitur quantitati datæ $A^2)\,ZR$. quippe potestatis istius index sive exponens est T, numerus terminorum.

65. Iisdem datis; reperitur terminus maximus. V. nam per præced. habetur T. adeoque V per pr. 19.

66. Datis termino maximo, ratione communi, & rectangulorum aggregato; V, R, Z; invenitur numerus terminorum, T. Est enim per pr. 45 vel 47. $Z = TVA$. adeoque $V)\,Z = TA$. Item per pr. 20. $A = R^d)\,V$. adeoque $R)\,A = R^t)\,V$. Et $R)\,AT = R^t)\,VT = RV)\,Z$, nempe, quia $V)\,Z = TA$. Et $R^t)\,T = RV^2)\,Z$. Quærendum igitur quota potestas ipsius R, exponentem suum dividens, exhibebit quantitatem datam $RV^2)\,Z$. quippe potestatis istius exponens sive index est T, numerus terminorum quæsitus. Vel etiam (nam eodem recidit) mutatis sedibus, $T)\,R^t = Z)\,RV^2$. Ut quærendum sit, quota potestas ipsius R per suum indicem sive exponentem divisa, exhibebit quantitatem cognitam $Z)\,RV^2$. quippe potestatis istius exponens est T, quæsitus numerus terminorum.

67. Datis iisdem, reperitur terminus minimus, A. nam per præced. habetur T. adeoque A, per pr. 20.

Atque hæ quidem propositiones omnes hactenus traditæ, respondent totidem propositionibus Cap. XXVII. de Progressione Arithmetica; singuli singulis eodem ordine.

Sequitur Theorema, quo, in Geometricæ progressionis summa investiganda, utuntur fere omnes Arithmetici. Nempe,

68. Si terminus maximus in communem multiplicatorem ducatur, & ex producto auferatur terminus minimus, residuumque per multiplicatorem communem unitate minutum dividatur; quotiens exhibet progressionis totius summam. Hoc est, $\frac{VR - A}{R - 1} = S$.

Quis hanc primus invenerit regulam, aut quibus mediis, ego plane ignoro; & quidem, utut ea plerique utantur, non memini tamen me illam uspiam demonstratam vidisse; cum tamen vel maxime demonstratione indigeat. Nobis itaque hanc libuit demonstrationem comminisci.

Cum sit, per pr. 19. $V = AR^d$, adeoque (propter $T = D + 1$,) $VR = AR^t$, & propterea $\frac{VR - A}{R - 1} = \frac{AR^t - A}{R - 1}$. Facta divisione quantitatis $AR^t - A$, per quantitatem $R - 1$, (eo modo quo supra ostendimus dum divisionem Symbolicam docuimus,) quotientis loco prodibit series exposita $A + AR + AR^2$ &c. hoc est, quantitas S, sive terminorum omnium summa.

Exempli

Exempli gratia. Ponamus numerum terminorum $T = 4$. adeoque $AR^t = AR^4$. Et dividenda proponatur $AR^4 - A$, per $R - 1$. Cum igitur ſit $R) AR^4 (AR^3$; Erit quotientis membrum primum AR^3, quod in diviſorem ductum dat $AR^4 - AR^3$. hoc ex dividendo ſubductum relinquit $AR^3 - A$. Deinde cum ſit $R) AR^3 (AR^2$: erit quotientis membrum ſecundum $+ AR^2$ quod ductum in diviſorem dat $AR^3 - AR^2$. hoc ex dividendo ſubductum relinquit $AR^2 - A$. Eodem modo, quotientis membrum tertium erit $+ AR$. adeoque facta tum multiplicatione tum ſubductione, manebit $AR - A$. Denique quotientis membrum quartum, eodem modo repertum, eſt $+ A$. Et peracta tum multiplicatione tum ſubductione ut prius, nihil reſtabit.

$$R - 1) AR^4 - A (AR^3 + AR^2 + AR + A$$
$$\begin{array}{c} \underline{AR^4 - AR^3} \\ AR^3 - A \\ \underline{AR^3 - AR^2} \\ AR^2 - A \\ \underline{AR^2 - AR} \\ AR - A \\ \underline{AR - A} \\ 00 \quad 0 \end{array}$$

Totaque operatione ſic peracta, habetur quotiens $\frac{AR^4 - A}{R - 1} = AR^3 + AR^2 + AR + A = S$. Et ſimiliter continget quantuſcunque ponatur numerus terminorum; nempe quotiens ſingulos exhibebit. Adeoq; univerſaliter $\frac{VR - A}{R - 1} = \frac{AR^t - A}{R - 1} = A + AR + AR^2$ &c. $= S$. quod erat demonſtrandum.

Id ipſum pariter oſtendetur, ſi juxta prop. 20. exponamus $A = R^d) V$. Adeoque $\frac{VR - A}{R - 1} = \frac{VR - R^d) V}{R - 1} = \frac{VR^t - V}{R^t - R^d} = V + \frac{V}{R} + \frac{V}{R^2} + \frac{V}{R^3}$ &c. $= S$. ut ex adjuncta diviſionis operatione manifeſtum eſt.

$$R^4 - R^3) VR^4 - V (V + \frac{V}{R} + \frac{V}{R^2} + \frac{V}{R^3}$$
$$\begin{array}{c} \underline{VR^4 - VR^3} \\ VR^3 - V \\ \underline{VR^3 - VR^2} \\ VR^2 - V \\ \underline{VR^2 - VR} \\ VR - V \\ \underline{VR - V} \\ 00 \quad 0 \end{array}$$

Libet autem aliam methodum, ſummam progreſſionis Geometricæ colligendi, ex D. *Oughtredo* adjungere, poſtquam hoc lemma oſtendero. Nempe

69. Si ſint quotlibet termini proportionales; erit ut unus antecedentium ad ſuum conſequentem, ſic antecedentium omnium aggregatum, ad aggregatum omnium conſequentium. (Quæ eſt 12 e 5.) Puta ſi $A . \alpha :: B . \beta :: C . \gamma :: D . \delta$. &c. hoc eſt $A . RA :: B . RB :: C . RC :: D . RD$. &c. Erit $A . \alpha :: A + B + C + D +$ &c. $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ &c. hoc eſt $A . RA :: A + B + C + D$ &c. $RA + RB + RC + RD$ &c. propter communem utrobique rationem R.

70. Ideoque; In continue proportionalibus, ut terminus primus, ad ſecundum, (hoc eſt, ut 1 ad rationis communis exponentem R;) ſic ſumma terminorum omnium præter ultimum, ad ſummam omnium præter primum. Puta ſi $A . B . C . D . V$ ∺ hoc eſt $A . B :: B . C :: C . D :: D . V$. Erunt $A + B + C + D = S - V$, omnes antecedentes; & $B + C + D + V = S - A$, omnes conſequentes. Ergo per præced. $A . B (:: 1 . R) :: S - V . S - A$.

71. Et conſequenter; Si ex rectangulo ſecundi & ultimi, auferatur quadratum primi; reſiduumque dividatur per terminum ſecundum dempto primo; prodibit ſumma terminorum omnium. Cum enim per præced. ſit $A . B :: S - V . S - A$. adeoque per pr. 30. $SB - VB = SA - Aq$, & tranſponendo, $SB - SA = VB - Aq$. Erit (utrinque dividendo) $S = \frac{VB - Aq}{B - A}$.

Sed & ex eodem lemmate demonſtratur Prop. 68. cum enim ſit per Prop. 70. $S - V . S - A :: (A . B :: A . AR ::) 1 . R$. adeoque per prop. 30. $SR - VR = S - A$.

Et

Et, transponendo, $SR - S = VR - A$: erit (utrinque dividendo) $S = \frac{VR - A}{R - 1}$.

Vel sic, per præsentem, $S = \frac{VB - Aq}{B - A} = \frac{VAR - Aq}{AR - A} = \frac{VR - A}{R - 1}$.

72. Datis igitur extremis & ratione communi; A, V, R, habetur terminorum omnium summa S. Nempe $S = \frac{VR - A}{R - 1}$. per prop. 68. vel 71.

73. Idem habetur, si, pro extremis A, V, darentur A, VA. Nempe $S = \frac{A)VAR - A}{R - 1}$. Nam $A)VA = V$.

74. Vel A, $\frac{V}{A}$. Nempe $S = \frac{\frac{V}{A}AR - A}{R - 1}$. Nam $\frac{V}{A}A = V$.

75. Vel V, VA. Nempe $S = \frac{VR - V)VA}{R - 1}$. Nam $V)VA = A$.

76. Vel V, $\frac{V}{A}$. Nempe $S = \frac{VR - \frac{V}{A})V}{R - 1}$. Nam $\frac{V}{A})V = A$.

77. Vel denique VA, $\frac{V}{A}$. Nempe $S = \frac{R\sqrt{\frac{V}{A}VA} - \sqrt{:\frac{V}{A})VA}}{R - 1}$. Nam $\frac{V}{A}VA = V^2$. Et $\frac{V}{A})VA = A^2$.

78. Et, datis extremis, cum terminorum omnium summa; A, V, S; habetur communis ratio. R. Nam per prop. 68, vel 72. $S = \frac{VR - A}{R - 1}$. hoc est, $SR - S = VR - A$; adeoque $SR - VR = S - A$, & $\frac{S - A}{S - V} = R$. Vel brevius; per prop. 70. $\frac{S - A}{S - V} = \frac{B}{A} = \frac{R}{1} = R$.

79. Idem habetur, si, pro A, V, darentur A, VA. Nempe $R = \frac{S - A}{S - A)VA}$.

80. Vel, A, $\frac{V}{A}$. Nempe $R = \frac{S - A}{S - \frac{V}{A}A}$.

81. Vel, V, VA. Nempe $R = \frac{S - V)VA}{S - V}$.

82. Vel, V, $\frac{V}{A}$. Nempe $R = \frac{S - \frac{V}{A})V}{S - V}$.

83. Vel denique, VA, $\frac{V}{A}$. Nempe $R = \frac{S - \sqrt{:\frac{V}{A})VA}}{S - \sqrt{:\frac{V}{A}VA}}$.

84. Item, datis termino minimo, ratione communi, & terminorum omnium summa; A, R, S; datur maximus. V. Nam (ut in Prop. 78.) $SR - S = VR - A$. Ergo $SR - S + A = VR$, & $\frac{SR - S + A}{R} = V$.

85. Et, datis termino maximo, ratione communi, & terminorum omnium summa; V, R, S; datur minimus. A. Cum enim (ut in præced.) $SR - S + A = VR$; erit (transponendo) $VR - SR + S = A$.

86. Item, datis termino minimo, ratione communi, & terminorum numero; A, R, T; datur terminorum omnium summa. S. Nam, per Pr. 19. $V = AR^d$, & $VR = AR^t$; Ergo per Prop. 68. $S = \frac{VR - A}{R - 1} = \frac{AR^t - A}{R - 1}$.

87. Et, datis termino minimo, ratione communi, & progressionis summa; A, R, S; datur numerus terminorum. T. Est enim (ut in Prop. 84.) $SR - S + A = VR = AR^t$ (per Pr. 19.) Adeoque $\frac{SR - S + A}{A} = R^t$. Quærendum igitur quota potestas Exponentis rationis communis R, æquatur quantitati cognitæ $\frac{SR - S + A}{A}$.

 88. Et,

88. Et, Datis termino minimo, progressionis summa, & numero terminorum; A, S, T; datur communis ratio. R. Nam (ut in præced.) $SR - S + A = AR^t$. adeoque $SR - AR^t = S - A$. Et $\frac{S-A}{A} = \frac{S}{A}R - R^t$. Cujus æquationis radix est R, quæsita.

89. Et datis ratione communi, numero terminorum, & summa progressionis; R, T, S; datur terminus minimus. A. Cum enim (ut in præced.) $SR - S + A = AR^t$. adeoque $SR - S = AR^t - A$. Erit $A = \frac{SR - S}{R^t - 1} = \frac{R - 1}{R^t - 1}S$.

90. Pari modo; Dato termino maximo, cum ratione communi, & numero terminorum; V, R, T; datur summa progressionis. S. Nam per pr. 20. $A = R^d)\,V$. Ergo per pr. 68. $S = \frac{VR - A}{R - 1} = \frac{VR - R^d)\,V}{R - 1} = \frac{VR^t - V}{R^t - R^d}$.

91. Et; Dato termino maximo, cum ratione communi, & progressionis summa; V, R, S; datur numerus terminorum. T. Nam per pr. 85. $A = VR + S - SR$; adeoque per pr. 16. $\frac{V}{VR + S - SR} = \frac{V}{A} = R^d$. Quærendum itaque quota potestas exponentis datæ rationis R, æquatur datæ quantitati. Quippe istius potestatis index unitate auctus, est quæsitus numerus terminorum $T = D + 1$.

92. Et; Datis termino maximo, progressionis summa, & numero terminorum; V, S, T; datur communis ratio. R. Est enim, per pr. 90. $S = \frac{VR^t - V}{R^t - R^d}$, adeoque $SR^t - SR^d = VR^t - V$, & $V = SR^d - SR^t + VR^t$, & $\frac{V}{S-V} = \frac{S}{S-V}R^d - R^t$. Cujus Æquationis radix R, est exponens communis rationis quæsitæ.

93. Et; Datis ratione communi, numero terminorum, & progressionis summa; R, T, S; datur terminus maximus. V. Est enim, (ut in præced.) $SR^t - SR^d = VR^t - V$. Ergo $\frac{SR^t - SR^d}{R^t - 1} = V$.

94. Porro; (ut compendio utar,) Datis A, V, S; datur T. Nam, per pr. 78. $\frac{S-A}{S-V} = R$. Et, per pr. 16 $\frac{V}{A} = R^d$. Quærendum itaque, quota potestas R cognitæ, æquatur cognitæ R^d. ut habeatur $D = T - 1$, adeoque $D + 1 = T$.

95. Idem habetur, si pro A, V, darentur A, VA. Nam habetur R, per pr. 79. Et T ut prius.

96. Vel A, $\frac{V}{A}$. Nam habetur R, per pr. 80. & T, ut prius.

97. Vel V, VA. Nam habetur R, per pr. 81. & T, ut prius.

98. Vel V, $\frac{V}{A}$. Nempe R, per pr. 82. & T, ut prius.

99. Vel denique VA, $\frac{V}{A}$. Nempe R, per pr. 83. Et T, ut prius.

100. Datis A, V, T, datur S. Nam per pr. 17. habetur $R = \sqrt{d}\,\frac{V}{A}$. Ergo per pr. 68. $\frac{V\sqrt{d}\frac{V}{A} - A}{\sqrt{d}\frac{V}{A} - 1} = S$.

101. Idem habetur, si, pro A, V, darentur A, VA. Nempe $\frac{A)\,VA\,\sqrt{d}:A^2)\,VA: - A}{\sqrt{d}:A^2)\,VA: - 1} = S$. Nam $A)\,VA\,(V$. Et $A^2)\,VA\,(\frac{V}{A}$.

102. Vel A, $\frac{V}{A}$. Nempe $\frac{\frac{V}{A}A\sqrt{d}\frac{V}{A}: - A}{\sqrt{d}\frac{V}{A}: - 1} = S$. Nam $\frac{V}{A}A = V$.

103. Vel V, VA. Nempe $\frac{V\sqrt{d}:VA)\,V^2: - V)\,VA}{\sqrt{d}:VA)\,V^2: - 1} = S$. Nam $VA)\,V^2\,(\frac{V}{A}$. Et $V)\,VA\,(A$.

104. Vel V, $\frac{V}{A}$. Nempe $\frac{V\sqrt{d}\frac{V}{A} - \frac{V}{A})\,V}{\sqrt{d}\frac{V}{A} - 1} = S$. Nam $\frac{V}{A})\,V\,(A$.

105. Vel

105. Vel denique VA, $\frac{V}{A}$. Nempe $\frac{\sqrt{}^{d}\frac{V}{A}\sqrt{:}\frac{V}{A}VA: - \sqrt{:}\frac{V}{A})VA:}{\sqrt{}^{d}\frac{V}{A} - 1} = S$. Nam $\sqrt{:}\frac{V}{A}VA: = V$. Et $\sqrt{:}\frac{V}{A})VA: = A$.

106. Datis A, T, S; datur V. Nam habetur R, per pr. 88. adeoque V, per prop. 19.

107. Datis V, T, S; datur A. Nam habetur R, per pr. 92. Et A, per pr. 20.

108. Datis A, V, Z: datur S. Nam per pr. 48. habetur $T = VA)Z$. Et deinde S per pr. 100.

109. Idem habetur, si pro A, V, dentur A, VA. per prop. 48, 101.

110. vel A, $\frac{V}{A}$. per pr. 48, 102.

111. vel V, VA. per pr. 48, 103.

112. vel V, $\frac{V}{A}$. per pr. 48, 104.

113. vel VA, $\frac{V}{A}$. per pr. 48, 105.

114. Datis A, V, S; datur Z. Nam per pr. 78. habetur $R = \frac{S - A}{S - V}$. adeoque Z per pr. 56.

115. Idem habetur, si, pro A, V, dentur. A, VA, per pr. 79, 56.

116. vel A, $\frac{V}{A}$. per pr. 80, 56.

117. vel V, VA, per pr. 81, 56.

118. vel V, $\frac{V}{A}$, per pr. 82, 56.

119. vel denique VA, $\frac{V}{A}$. per pr. 83, 56.

120. Datis A, R, Z; datur S. Quippe habetur T, per pr. 64. & deinde S, per prop. 86.

121. Datis A, R, S; datur Z. Nam per prop. 84. habetur V. adeoque Z per prop. 56.

122. Datis A, T, Z; datur S. Nam per prop. 59. habetur R. adeoque S per prop. 86.

123. Datis A, T, S; datur Z. Nempe R per pr. 88. adeoque Z per pr. 58.

124. Datis V, R, Z; datur S. Nempe T per pr. 66. adeoque S per pr. 90.

125. Datis V, R, S; datur Z. Nempe A per pr. 85. & Z per pr. 56.

126. Datis V, T, Z; datur S. Nempe R per pr. 61. & S per pr. 90.

127. Datis V, T, S; datur Z. Nempe R per pr. 92. & Z per pr. 60.

128. Datis R, T, VA; datur A. Nempe $\frac{V}{A}$ per pr. 16. & A per pr. 54.

129. Datis iisdem; datur V. Nempe $\frac{V}{A}$ per pr. 16. & V per pr. 55.

130. Datis iisdem; datur S. Nempe A per pr. 128. & S per pr. 86.

131. Datis VA, R, Z; datur A. Nempe T per pr. 48, & A per pr. 128.

132. Datis iisdem; datur V. Nempe T ut prius. & V per pr. 129.

133. Datis iisdem; datur S. Nempe T, ut prius, & S per pr. 130.

134. Datis VA, R, S; datur A. Est enim per pr. 68. $R - 1) VR - A (S$. ideoque $SR - S = VR - A$. Et $SRA - SA = VAR - A^2$. adeoque $A^2 + SRA - SA = VAR$. Cujus æquationis radix est $A = \frac{\sqrt{:}S^2R^2 - 2S^2R + S^2 + 4VAR: - SR + S}{2}$.

135. Datis iisdem; datur V. Nam (ut in præced.) $SR - S = VR - A$. adeoque $SRV - SV = V^2R - VA$. Et $VA = RV^2 - SRV + SV$. Et $R)VA = V^2 - SV + R)SV$. Cujus æquationis radix est $V = \frac{\sqrt{:}S^2R^2 - 2S^2R + S^2 + 4VAR: + SR - S}{2R}$.

136. Datis iisdem; datur T. Nempe per pr. 134, habetur A; adeoque T per prop. 87.

137. Datis iisdem, datur Z. Nempe per præced. habetur T; adeoque Z per prop. 47.

138. Datis $\frac{V}{A}$, R, Z; datur A. Nam per pr. 18. habetur T; adeoque A per prop. 62.

139. Datis iisdem; datur V. Nempe T ut in præced. & V per prop. 63.

140. Datis iisdem; datur S. Nempe A & V per duas præcedentes. adeoque S per pr. 72.

141. Datis $\frac{V}{A}$, R, S; datur A. Nam per pr. 18. habetur T. adeoque A per prop. 89.

142. Datis iisdem; datur V. Nempe T ut in præced. & V per prop. 93.

143. Datis iisdem; datur Z. Nempe T ut prius, & A, V, per duas præcedentes; & tandem Z per pr. 47.

144. Datis $\frac{V}{A}$, T, Z; datur A. Nam habetur R per pr. 17. & VA per pr. 49. adeoque A per pr. 54.

145. Datis iisdem; datur V. Nempe VA ut in præced. adeoque V per prop. 55.

146. Datis iisdem; datur S. Nempe inventis R per pr. 17. & A, V, per duas præcedentes; habetur S per pr. 72.

147. Datis $\frac{V}{A}$, T, S; datur A. Nempe habetur R per pr. 17; adeoque A per pr. 89.

148. Datis iisdem; datur V. Nempe R ut prius; & V per pr. 93.

149. Datis iisdem; datur Z. Nempe inventis A, V, per duas præcedentes, habetur Z per pr. 47.

150. Datis R, T, Z; datur S. Nempe A per pr. 62. adeoque S per pr. 86.

151. Datis R, T, S; datur Z. Nempe A & V per pr. 89, & 93. adeoque Z per pr. 47.

Atque hactenus Progressionem Geometricam fusius explicavimus; & Problemata, pleraque saltem, eo spectantia expedivimus. Libet autem sequente capite (quod de Progressione Arithmetica supra factum est Cap. XXVIII.) in breviorem synopsin, quæ jam tradidimus, præcipua problemata compingere.

CAP. XXXIV.

Progressionis Geometricæ brevior Synopsis.

QUæ in præcedente Capite fusius tradidimus, de Progressione Geometrica, Problemata; libet hic in breviorem formam, sed & alio ordine, redigere: Retentis tamen iisdem quibus ibidem usi sumus Symbolis.

	Theoremata.
1	$D = T - 1.$
2	$V = AR^d.$
3	$A = \frac{V}{R^d}.$
4	$Z = T\,VA = TA^2R^d = \frac{TV^2}{R^d}.$
5	$S = \frac{VR - A}{R - 1} = \frac{AR^t - A}{R - 1} = \frac{R^t - 1}{R - 1}A = \frac{VR - :R^d)\,V}{R - 1} = \frac{VR^t - V}{R^t - R^d} = \frac{R^t - 1}{R^t - R^d}V.$
6	$A = \frac{R - 1}{R^t - 1}S.$
7	$V = \frac{R^t - R^d}{R^t - 1}S.$
8	$SR - S = VR - A.$
9	$R = \frac{S - A}{S - V}.$
10	$A = VR + S - SR.$
11	$VR = AR^t = A + SR - S.$
12	$V = \frac{A + SR - S}{R}.$
13	$SR^t - SR^d = VR^t - V.$
14	$V = SR^d - SR^t + VR^t.$
15	$\frac{V}{S - V} = \frac{S}{S - V}R^d - R^t.$

Proble-

Problemata.

	Data.		Quæsita.
1	A, V:		VA = V A.
2			$\frac{V}{A}$ = A) V.
3	A, VA:		V = A) VA.
			$\frac{V}{A}$ per 2.
4	A, $\frac{V}{A}$:		V = $\frac{V}{A}$ A.
			VA per 1.
5	V, VA:		A = V) VA.
			$\frac{V}{A}$ per 2.
6	V, $\frac{V}{A}$:		A = $\frac{V}{A}$) V.
			VA per 1.
7	VA, $\frac{V}{A}$:		A^2 = $\frac{V}{A}$) VA.
8			V^2 = $\frac{V}{A}$ VA.
9	T, R:		$\frac{V}{A}$. } Nam $\frac{V}{A}$ = R^d
10	T, $\frac{V}{A}$:		R. }
11	$\frac{V}{A}$, R:		T. }
12	VA, T:		Z = T VA.
13	VA, Z:		T = VA) Z.
14	T, Z:		VA = T) Z.
15	A, V, R:		$S = \frac{V R - A}{R - 1}$.
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
16	A, V, T:	VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		R.	per 10.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
17	A, V, Z:	VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		T.	per 13.
		R.	per 10.
		S.	per 15.
18	A, V, S:	VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
			$R = \frac{S-A}{S-V}$.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
19	A, VA, R:	V.	per 3.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
20	A, VA, T:	V.	per 3.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		R.	per 10.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
21	A, VA, Z:	V.	per 3.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		T.	per 13.
		R.	per 10.
		S.	per 15.

	Data.		Quæsita.
22	A, VA, S:	V.	per 3.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		R.	per 18.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
23	A, $\frac{V}{A}$, R:	V.	per 4.
		VA.	per 1.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
24	A, $\frac{V}{A}$, T:	V	per 4.
		VA.	per 1.
		R.	per 1[illegible].
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
25	A, $\frac{V}{A}$, Z:	V.	per 4.
		VA.	per 1.
		T.	per 13.
		R.	per 10.
		S.	per 15.
26	A, $\frac{V}{A}$, S:	V.	per 4.
		VA.	per 1.
		R.	per 18.
		T	per 11.
		Z.	per 12.
27	V, VA, R:	A.	per 5.
		$\frac{V}{A}$	per 2.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
28	V, VA, T:	A.	per 5.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		R.	per 10.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
29	V, VA, Z:	A.	per 5.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		T.	per 13.
		R.	per 10.
		S.	per 15.
30	V, VA, S:	A.	per 5.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		R.	per 18.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
31	V, $\frac{V}{A}$, R:	A.	per 6.
		VA.	per 1.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
32	V, $\frac{V}{A}$, T:	A.	per 6.
		VA.	per 1.
		R.	per 10.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.

	Data.	Quæsita.	
33	V, $\frac{V}{A}$, Z : A.		per 6.
		VA.	per 1.
		T.	per 13.
		R.	per 10.
		S.	per 15.
34	V, $\frac{V}{A}$, S : A,		per 6.
		VA.	per 1.
		R.	per 18.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
35	VA, $\frac{V}{A}$, R : A,		per 7.
		V.	per 8.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
36	VA, $\frac{V}{A}$, T : A.		per 7.
		V.	per 8.
		R.	per 10.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
37	VA, $\frac{V}{A}$, Z : A.		per 7.
		V.	per 8.
		T.	per 13.
		R.	per 10.
		S.	per 15.
38	VA, $\frac{V}{A}$, S : A.		per. 7.
		V.	per 8.
		R.	per 18.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
39	A, R, T : V $=$ AR^d.		
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
40	A, R, Z : T. Nam A^2) ZR $=$ TR^t.		
		V.	per 39.
		VA.	per 14.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		S.	per 15.
41	A, R, S : $V = \frac{A + SR - S}{R}$		
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
42	A, T, Z : V $=$ AT) Z.		
		VA.	per 14.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		R.	per 10.
		S.	per 15.
43	A, T, S : R. Nam $R^t = \frac{RS - S + A}{A}$.		
		V.	per 39.
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		Z.	per 12.
44	V, R, T : A $=$ R^d) V.		
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
45	V, R, Z : T. Nam $\frac{T}{R^d} = \frac{Z}{V^2}$.		
		A.	per 44.
		VA.	per 14.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		S.	per 15.
46	V, R, S : A $=$ VR $+$ S $-$ SR.		
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
47	V, T, Z : VA.		per 14.
		A.	per 5.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		R.	per 10.
		S.	per 15.
48	V, T, S : R. Nam $\frac{V}{S-V} = \frac{S}{S-V} R^d - R^t$.		
		A.	per 44.
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		Z.	per 12.
49	R, T, Z : $\frac{V}{A}$.		per 9.
		VA.	per 14.
		A.	per 7.
		V.	per 8.
		S.	per 15.
50	R, T, S : $\frac{V}{A}$.		per 9.
	$A = \frac{R - 1}{R^t - 1} S$.		
		V.	per 4.
		VA.	per 1.
		Z.	per 12.
51	VA, R, T : $\frac{V}{A}$.		per 9.
		A.	per 7.
		V.	per 8.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
52	VA, R, Z : T.		per 13.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		A.	per 7.
		V.	per 8.
		S.	per 15.
53	VA, R, S : A. Nam $A^2 + SRA - SA = VAR$.		
		V.	per 3.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.

54

	Data.	Quæsita.	
54	$\frac{V}{A}$, R, Z : T.		per 11.
		VA.	per 14.
		A.	per 7.
		V.	per 8.
		S.	per 15.
55	$\frac{V}{A}$, R, S : T.		per 11.
		A.	per 50.
		V.	per 4.
		VA.	per 1.
		Z.	per 12.
56	$\frac{V}{A}$, T, Z : R.		per 10.
		VA.	per 14.
		A.	per 7.
		V.	per 8.
		S.	per 15.

	Data.	Quæsita.	
57	$\frac{V}{A}$, T, S : R.		per 10.
		A.	per 50.
		V.	per 4.
		VA.	per 1.
		Z.	per 12.

Reliqui fere casus, parum aut nihil pandunt, ultra quod datum est.

CAP. XXXV.

Euclidis Elementum quintum Arithmetice demonstratur.

PRiusquam Rationum doctrinam dimittam, libet & Euclidis Elementum quintum, quod de Rationibus & Proportionibus agit breviter explicare. Cujus quidem utilitas in tota passim Mathesi, nemini vel leviter exercitato non innotescit.

Est autem illud Elementum quintum, ut & tota rationum Doctrina, Arithmetica potius quam Geometrica, (saltem prout Arithmetices fines nunc dierum ampliari solent, ut non solos numeros integros, sed & fractos, & surdos recipiant, totamque Algebræ, & Arithmeticæ (ut loquuntur) Speciosæ vel Symbolicæ praxin.) Quid quod & ipsa Arithmetica tota, si strictius spectetur, vix aliud videatur quam Rationum doctrina. Ipsique Numeri rationum totidem indicia quarum communis consequens est 1, Unitas. Ubi enim 1, sive Unitas, habetur pro *quantitate exposita*; reliqui omnes numeri (sive integri, sive fracti, sive etiam surdi) sunt rationum totidem aliarum ad expositam quantitatem indices sive exponentes.

Cur autem Lineis quam Numeris rationum doctrinam tradere maluerint veteres; causa fuit non una. Partim scilicet, quod illi, vix alios numeros quam Integros admiserint; (nec enim materiam Arithmeticam sicut Geometricam, in infinitum divisibilem admiserunt, sed in unitate sistendum voluere;) adeoque non pariter Numeris atque Lineis rationes omnes denotari posse perspexerint; Et propterea doctrinæ alioqui universalis, specimen saltem in lineis tradere maluerunt, eamque prout opus fuerit, inde in aliam quamvis materiam rationum capacem pro re nata transferre. Maxime autem uti mihi saltem videtur, quia non modo methodus Symbolica nondum obtinuerat, sed ne quidem figuræ numerariæ, quæ jam passim usitatæ sunt, ab Indis inventæ, fuerunt introductæ; ut non nisi difficulter admodum numerorum praxin exercere valuerint. Licet revera, ipsa sive linearum, sive figurarum planarum, vel etiam solidarum, aliarumve quantitatum, per literas alphabeticas designatio, (puta A, B, &c. quibus designantur in textu anguli lineæve &c. in schemate conspecta,) symbolica designatio non minus dici poterit, quam ubi similibus symbolis quantitates (non tam in charta conspectæ, quam) mente conceptæ indicantur.

Utut fuerit; nihil impedit quin nos, ut reliquam Rationum doctrinam, ita speciatim totum illud quod Elemento quinto de rationibus traditur, Arithmetice (adeoque simpliciter & Universaliter) tradamus, quod ut opus fuerit (sicut & Arithmetica universa) cuivis subjecto poterit accommodari.

Defi-

Definitiones autem quas illic præmissas habemus, hic libet intactas transire; quoniam illæ, partim superius, Cap. XXV, XXIX, XXX, explicantur, partim etiam cum ipsa propositionum traditione, ubi opus fuerit, obiter exponentur.

Id saltem monendum erit de definitione 5ª, sive juxta Clavium 6ª, quæ est *magnitudinum*, sive quantitatum, *in eadem ratione* constitutarum: quam Euclides his verbis effert, Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμόν, ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ληφθέντα κατάλληλα. *In eadem ratione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æque multiplices, secundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque vel una superant, vel una æquales sunt, vel una deficiunt, inter se comparatæ.* Nos hanc definitionem, quamvis veram quidem & Euclidis suscepto satis accommodam, in nostris demonstrationibus omittendam duximus; neque ad hoc κριτήριον proportionalia examinamus. Quippe quod perplexius videtur, nec adeo forsan, tironibus præsertim, perspicuum. Nec quidem tam proportionalium naturam immediate respicit, quam eorundem affectionem aliquam satis remotam. Nobis autem, qui Rationes superius docuimus *Quoto* æstimandas, ad rationum sive æqualitatem sive identitatem probandam sufficere videtur, si fuerit æqualitas sive identitas quotorum. Puta si sit $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$, est & $a.\alpha::b.\beta$. Et contra. Quod nobis erit, definitionis loco, ejusdem æqualisve rationis. Ubi autem quotus major est, ibi & major ratio; ubi minor, minor. Puta, si $\frac{a}{\alpha}>\frac{b}{\beta}$, erit illa ratio major; si $\frac{a}{\alpha}<\frac{b}{\beta}$, hæc major erit, illa minor. Siquis tamen mallet affectionis alicujus opem in auxilium advocare, quo demonstrationes commodius procedant; ego nullam potiorem novi quam quæ à nobis prop. 30. Cap. XXXIII. demonstrata est; Et quidem (speciatim de lineis) ab ipso Euclide 16 = 6. Nempe *Si quatuor quantitates fuerint proportionales, factum ab extremis æquatur facto a mediis; & contra.* Puta si $A.\alpha::B.\beta$; erit $A\beta=\alpha B$, & contra, Quod sic ostenditur. Cum sit $A.\alpha::B.\beta$. hoc est $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}$, erit (æqualiter utrinque multiplicando) $A=\frac{\alpha B}{\beta}$ & $A\beta=\alpha B$. Contra vero; si $A\beta=\alpha B$, erit (æqualiter utrinque dividendo) $A=\frac{\alpha B}{\beta}$, & $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}$, hoc est, $A.\alpha::B.\beta$. Atque ex hoc *Lemmate*, facilius quam ex illa Euclidis definitione memorata, demonstrari possent omnes illæ propositiones ubi illam adhibet Euclides: quod itaque non incommode pro illa Euclidis definitione substitui poterit.

His præmonitis, Propositiones aggredior: postquam monuero, quod, pro *Magnitudinibus* (de quibus speciatim agit Euclides) nos simpliciter *Quantitates* ubique substituimus. Quippe de quantitatibus aliis non minus procedunt tum propositiones tum demonstrationes quam de magnitudinibus. Imo & Euclides ipse, per *Magnitudinis* nomen, non tam magnitudines proprie dictas, seu stricte sumptas, (qualia sunt Linea, Superficies, & Corpus,) voluisse videtur intelligendas; quam omnia cujuscunque fuerint generis, quæ vel *Magna* dici possunt, aut etiam aliud alio *Majus Minusve*: Quo sensu nos *Quantitatis* vocem intelligimus; nempe de omni eo, de quo quæri solet, *Quantum* sit.

1. *Si fuerint quotcunque quantitates, quotcunque quantitatum sigillatim æque multiplices; quotupla est una unius, totuplæ erunt & omnes omnium.* Puta si $A=M\alpha$, $B=M\beta$, $C=M\gamma$, &c. Erunt $A+B+C$ &c. $(=M\alpha+M\beta+M\gamma$ &c.$)=M$ in $\alpha+\beta+\gamma$ &c. ut multiplicando patebit. Idem igitur est communis multiplicator M, quod erat probandum. Hoc idem demonstratur universaliter pr. 12. de ratione qualibet, non minus quam multiplici.

$$\begin{array}{c}\alpha+\beta+\gamma\\ M\\ \hline M\alpha+M\beta+M\gamma\end{array}$$

2. *Si prima secundæ æque multipla fuerit, & tertia quartæ,* $(A=M\alpha, B=M\beta,)$ *sitque*

sitque quinta secundæ æquemultipla ac sexta quartæ; $(C = N\alpha,\ D = N\beta:)$ *erunt item prima & quinta simul, secundæ; atque tertia & sexta simul, quartæ, æque multiplices.* Nempe $A + C = M\alpha + N\alpha, = M + N:$ in α. & $B + D = M\beta + N\beta = M + N:$ in β. Communis itaque utrobique multiplicator, $M + N$. Idem ostenditur in quacunque ratione, utut non multiplici. prop. 24.

3. *Si fuerit prima secundæ æque multipla atque tertia quartæ*, $(A = M\alpha,\ B = M\beta,)$ *& sumantur æque multiplices primæ & tertiæ* (NA, NB; hoc est $NM\alpha$, $NM\beta$,) *erunt & æque multiplices, illa secundæ, atque hæc quartæ.* Quippe utrobique est NM communis multiplicator. Estque hæc una species argumentationis *ex æquo*, sive *ex æquali*, *δι' ἴσου*.

4. *Si prima ad secundam, eandem habeat rationem, atque tertia ad quartam*, $(A . \alpha :: B . \beta.)$ *Eandem item rationem habebunt æque multiplices primæ & tertiæ ad æquemultiplices secundæ & quartæ, juxta quamlibet multiplicationem, respective sumptæ.* Puta $AM . \alpha\mu :: BM . \beta\mu$. Si enim $A . \alpha :: B . \beta$. hoc est $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$; erit, æqualiter utrinque multiplicando ($\frac{A}{\alpha} \times M$, vel) $\frac{AM}{\alpha} = (\frac{B}{\beta} \times M$, vel) $\frac{BM}{\beta}$; &, æqualiter utrinque dividendo μ) $\frac{AM}{\alpha}$ vel $\frac{AM}{\alpha\mu} = \mu)$ $\frac{BM}{\beta}$ vel $\frac{BM}{\beta\mu}$. adeoque $AM . \alpha\mu :: BM . \beta\mu$. Quod erat demonstrandum. Vel brevius, per Lemma nostrum, Si $A . \alpha :: B . \beta$, erit ($A\beta = \alpha B$, adeoque $A\beta M\mu = \alpha BM\mu$ vel $AM\beta\mu = \alpha\mu BM$, & propterea) $AM . \alpha\mu :: BM . \beta\mu$.

Euclides Corollarium hoc (ut in demonstrationis suæ curriculo demonstratum) adjungit; *Si quatuor quantitates proportionales sint, sunt & inverse* (*ἀνάπαλιν*) *proportionales.* Hoc est, si $A . \alpha :: B . \beta$. erit $\alpha . A :: \beta . B$. (Præterquam quod ex se videtur manifestum, puta si utrobique eadem sit Relatorum ad correlata, eadem erit & Correlatorum ad illa, respective sumpta, relatio: vel, verbi gratia, si quoties A continet α, toties & B contineat β; vice versa, quoties α continetur in A, toties & β in B.) Sequitur directe ex lemmate nostro. Sive enim $A\ \beta$ sint extremæ, & $\alpha\ B$ mediæ; sive hæ extremæ, & illæ mediæ; erit utroque modo, si utrovis, $A\beta = \alpha B$; adeoque utrobique proportionalitas.

Hæc argumentatio ab Euclide definitur 13 d 5 (juxta Clavium;) *Inversa ratio est sumptio consequentis, seu antecedentis, ad antecedentem velut ad consequentem.*

5. *Si quantitas quantitatis æque multipla sit, atque ablata ablatæ; erit & reliqua reliquæ æque multipla atque tota totius.* Puta si $A + B = M$ in $: \alpha + \beta : = M\alpha + M\beta$, sitque $A = M\alpha$; erit & $B = M\beta$. Nam, propter æqualia æqualibus ablata, erunt & reliqua æqualia. Idem universaliter ostenditur pr. 19. de quacunque ratione, utut non multiplici.

$$\begin{array}{rl} & A + B = M\alpha + M\beta \\ \text{mi:} & A = M\alpha \\ \hline & B = M\beta \end{array}$$

6. *Si duæ quantitates* ($A + B$, & $C + D$,) *sint duarum quantitatum* (α, & γ,) *æque multiplæ*, (puta per $M + \mu$,) *sintque ablatæ quædam* (A, C,) *earundem* (α, γ,) *æque multiplæ*, (puta per M:) *erunt & reliquæ* (B, D,) *vel eisdem æquales* (si nempe $\mu = 1$) *vel ipsarum æque multiplæ*; (nempe per μ) Propter æqualia æqualibus ablata; ut patet.

$$\begin{array}{c} A + B = M\alpha + \mu\alpha \\ \text{mi}: A = M\alpha \\ \hline B = \mu\alpha \end{array} \qquad \begin{array}{c} C + D = M\gamma + \mu\gamma \\ \text{mi}: C = M\gamma \\ \hline D = \mu\gamma \end{array}$$

7. *Æquales ad eandem, eandem habent rationem, & eadem ad æquales.* Puta si $A = B$, erit (æqualiter dividendo) $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\alpha}$, adeoque $A . \alpha :: B . \alpha$. Item $\frac{\alpha}{A} = \frac{\alpha}{B}$, adeoque $\alpha . A :: \alpha . B$. Vel sic (si opus) per lemma nostrum; Quia si $A = B$ erit & $A\alpha = \alpha B$.

 8. *Inæ-*

8. *Inæqualium major ad eandem, majorem habet rationem quam minor. Et eadem ad minorem, majorem habet rationem quam ad majorem.* Nam $\frac{A+E}{\alpha}$ $\left(=\frac{A}{\alpha}+\frac{E}{\alpha}\right)>\frac{A}{\alpha}$. Item $\frac{\alpha}{A+E}<\frac{\alpha}{A}$. Quippe creſcente Dividendo creſcit quotus, ſed creſcente Diviſore, minuitur.

9. *Quæ ad eandem eandem habent rationem, ſunt inter ſe æquales: & ad quas eadem eandem habet rationem, ipſæ item æquales ſunt.* Nam ſi $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\alpha}$, erunt (multiplicando per α) $B=A$. Item, ſi $\frac{\alpha}{A}=\frac{\alpha}{B}$ adeoque (per coroll. pr. 4.) $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\alpha}$, erunt & $A=B$, ut prius. Vel, per lemma noſtrum, ſi $A.\alpha::B.\alpha$. vel $\alpha.A::\alpha.B$. erit $A\alpha=\alpha B$, adeoque $A=B$.

10. *Quantitatum rationem ad eandem habentium, quæ majorem habet rationem eſt major; ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa minor eſt,* Nam ſi $\frac{A}{B}$ major quam $\frac{\alpha}{B}$, puta æqualis $\frac{\alpha+\iota}{B}$; erit, æqualiter multiplicando, $A\ (=\alpha+\iota)>\alpha$. Item ſi $\frac{B}{A}$ minor ſit quam $\frac{B}{\alpha}$, puta æqualis $\frac{B}{\alpha+\iota}$ (per pr. 8.) erit per cor. pr. 4. $\frac{A}{B}=\frac{\alpha+\iota}{B}$, adeoque $A>\alpha$.

11. *Quæ eidem eædem ſunt rationes, inter ſe ſunt eædem.* Nam ſi $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma}$ erit $\frac{A}{\alpha}=\frac{C}{\gamma}$.

12. *Si ſint quotcunque quantitates proportionales, ut eſt una antecedentium ad ſuam conſequentem, ita & omnes antecedentes ad omnes conſequentes.* Eſto $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma}$ &c. $=R$. Erit igitur $A=R\alpha$, $B=R\beta$, $C=R\gamma$ &c. adeoque $A+B+C$ &c. $=R\alpha+R\beta+R\gamma$ &c. $=R$ in $\alpha+\beta+\gamma$ &c. Ideoque (æqualiter dividendo) $\frac{A+B+C\ \&c.}{\alpha+\beta+\gamma\ \&c.}=R=\frac{A}{\alpha}$. Vel ſic $A.RA::A+B+C$ &c. (R in $A+B+C$ &c. $=$) $RA+RB+RC$. ut patet. Aut per lemma noſtrum, quia A in $RA+RB+RC$ &c. $=(ARA+ARB+ARC$ &c. $=)$ RA in $A+B+C$ &c. Eſt autem hæc univerſalis propoſitio ad prop. 1. Quod enim illic oſtenditur ſpeciatim de Ratione Multipla; hic oſtenditur univerſaliter de qualibet ratione.

13. *Si prima* A, *ad ſecundam* α, *eandem habeat rationem quam tertia* B, *ad quartam* β; *tertia autem ad quartam majorem habeat rationem quam quinta* C *ad ſextam* γ: *habebit & prima ad ſecundam majorem rationem quam quinta ad ſextam.* Nam $\frac{A}{\alpha}\left(=\frac{B}{\beta}\right)>\frac{C}{\gamma}$. Vel ſic, $\frac{B}{\beta}\left(>\frac{C}{\gamma}\right)=\frac{C+E}{\gamma}=\frac{A}{\alpha}>\frac{C}{\gamma}$.

14. *Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam, ſitque prima major quam tertia; & ſecunda quam quarta major erit: ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor.* Eſto $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}$. Si autem $A>B$, erit & $\frac{A}{\alpha}>\frac{B}{\alpha}$, ergo & $\frac{B}{\beta}$ $\left(=\frac{A}{\alpha}\right)>\frac{B}{\alpha}$, adeoque $\alpha>\beta$ per pr. 10. Vel ſic, quia $A.B::\alpha.\beta$. ut infra oſtenditur prop. 16.

15. *Partes* (aliquotæ) *inter ſe comparatæ, eandem habent rationem quam habent earum æque multiplices inter ſe.* Hoc eſt $\frac{A}{\alpha}=\frac{A+A+A\ \&c.}{\alpha+\alpha+\alpha\ \&c.}=\frac{MA}{M\alpha}$. per pr. 12. Vel, per lemma noſtrum, $A.\alpha::MA.M\alpha$: quia $A\times M\alpha=\alpha\times MA$.

16. *Si*

16. *Si quatuor quantitates proportionales sint, sunt & alterne* (permutatim, vicissim, ἐναλλάξ,) *proportionales.* Hoc est, si $A . \alpha :: B . \beta$, erit & $A . B :: \alpha . \beta$. Per lemma nostrum, nam utroque modo, si utrovis, erit $A\beta = \alpha B$.

Estque hæc ea argumentatio quam definit Euclides 12 *d* 5. *Alterna ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.*

Notandum autem est, hanc propositionem solummodo illic obtinere, ubi quatuor quantitates sunt invicem homogeneæ; non autem ubi bina binis heterogenea. Puta, si sit, ut pondus A, ad pondus α; sic linea B ad lineam β, non tamen dicendum erit, ut pondus A, ad lineam B; sic pondus α, ad lineam β. Quia ponderis ad lineam, quippe quantitatem illi heterogeneam, nulla est Ratio; ut quæ inter homogeneas solas consistit. Atque eadem de causa, prop. 14. de solis homogeneis procedit; ut & prop. 1. 5. 7. 8. 9. 10. 12. 15. 19. 25. 27. 33. 34. proprie loquendo.

Verum siquando alternatione opus fuerit, ubi de quantitatibus invicem heterogeneis agitur: poterit utraque ratio aliis exponi terminis invicem homogeneis; in quibus alternatione instituta, aliisque ut opus fuerit operationibus peractis, nova alternatione restituendi sunt in pristinum ordinem termini mutuati, & deinde deponendi, resumptis à principio positis. Ut ad prop. 19. mox ostendetur.

17. *Si quantitates compositæ* (μεγέθη συγκείμενα) *proportionales sint, erunt & divisæ* (διαιρεθέντα) *proportionales.* Puta si sit $A + \alpha . \alpha :: B + \beta . \beta$. erit & $A . \alpha :: B . \beta$. Manifestum enim est tum quantitatem $A + \alpha$ una vice pluries continere quantitatem α, quam eandem continet A: & similiter $B + \beta$, una vice pluries quam B, continere β: Et propterea ab æqualibus quotientibus detracta utrobique unitate, manet adhuc æqualitas. Vel sic. Quia $\frac{A+\alpha}{\alpha} = \frac{A}{\alpha} + 1$, & $\frac{B+\beta}{\beta} = \frac{B}{\beta} + 1$. Si sit $\frac{A+\alpha}{\alpha}$ sive $\frac{A}{\alpha} + 1 = \frac{B+\beta}{\beta}$ sive $\frac{B}{\beta} + 1$; erit (detracta utrinque unitate) $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$: hoc est $A : \alpha :: B : \beta$. Vel sic, si $\frac{T}{A} = \frac{\tau}{\alpha}$, erit ($\frac{T}{A} - 1 = \frac{\tau}{\alpha} - 1$, hoc est) $\frac{T-A}{A} = \frac{\tau - \alpha}{\alpha}$. Vel etiam per lemma nostrum, Si $A + \alpha . \alpha :: B + \beta . \beta$. erit ($A\beta + \alpha\beta = \alpha B + \alpha\beta$, adeoque $A\beta = \alpha B$, &) $A . \alpha :: B . \beta$.

Definitur autem hæc argumentatio 15 *d* 5: *Divisio rationis* (διαίρεσις λόγου) *est sumptio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsum consequentem.*

Adjungit hic Clavius duas alias *Divisionis Rationis* formas; Primam vocat *Divisionem rationis conversam; quando consequens ad excessum quo consequentem superat antecedens refertur.* Si $A . \alpha :: B . \beta$. Erit $\alpha . A - \alpha :: \beta . B - \beta$. Quæ non alia est, quam prop. 17. Euclidis inversio. Nam per illam erit $A - \alpha . \alpha :: B - \beta . \beta$. adeoque inverse (per cor. prop. 4.) $\alpha . A - \alpha :: \beta . B - \beta$. Vel sic; si $A . \alpha :: B . \beta$. Erit ($A\beta = \alpha B$, & $\alpha B - \alpha\beta = A\beta - \alpha\beta$, hoc est, α in $B - \beta := A - \alpha :$ in β. & propterea) $\alpha . A - \alpha :: \beta . B - \beta$.

Alteram vocat *Divisionem Rationis contrariam; quando confertur antecedens cum excessu quo consequens antecedentem superat.* Si $A . \alpha :: B . \beta$. Erit $A . \alpha - A :: B . \beta - B$. Quæ continet Euclidis, divisionem rationis, duasque inversiones. Nam primo invertendo erit $\alpha . A :: \beta . B$. tum dividendo, sive per divisionem rationis, $\alpha - A . A :: \beta - B . B$. Et tandem iterum invertendo $A . \alpha - A :: B . \beta - B$. Vel sic, per lemma nostrum, Si $A . \alpha : : B . \beta$. erit ($A\beta = \alpha B$, & $A\beta - AB = \alpha B - AB$, hoc est, A in $\beta - B := \alpha - A :$ in B. adeoque) $A . \alpha - A :: B . \beta - B$.

18. *Si quantitates divisæ* (μεγέθη διῃρημένα) *proportionales sint, erunt & compositæ* (συντεθέντα) *proportionales.* Si $A . \alpha :: B . \beta$, erit item $A + \alpha . \alpha :: B + \beta . \beta$. Nam cum sit $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$, erit item (addendo utrobique 1,) $\frac{A}{\alpha} + 1 = \frac{B}{\beta} + 1$. hoc est $\frac{A+\alpha}{\alpha} = \frac{B+\beta}{\beta}$; ideoque $A + \alpha . \alpha :: B + \beta . \beta$. vel sic; Si $\frac{T}{A} = \frac{\tau}{\alpha}$ erit ($\frac{T}{A} + 1 = \frac{\tau}{\alpha} + 1$, hoc est) $\frac{T+A}{A} = \frac{\tau+\alpha}{\alpha}$. Imo vero, & $\frac{T}{A} + 2 = \frac{\tau}{\alpha} + 2$, sive $\frac{T+2A}{A} = \frac{\tau+2\alpha}{\alpha}$. Et quidem universim. Si sit $\frac{T}{A} = \frac{\tau}{\alpha}$, erit etiam $\frac{T}{A} \pm M =$

$\frac{\tau}{\alpha} \pm M$, sive $\frac{T \pm MA}{A} = \frac{\tau \pm M\alpha}{\alpha}$. Quomodo tum hæc tum præcedens junctim & universaliter demonstrantur. Sed & per Lemma nostrum, hæc junctim cum præcedente, sic demonstratur; Si $A \pm \alpha . \alpha :: B \pm \beta . \beta$; erit ($A\beta \pm \alpha\beta = \alpha B \pm \alpha\beta$, & $A\beta = \alpha B$, ideoque) $A . \alpha :: B . \beta$.

Definitur hic argumentandi modus, præsente propositione demonstratus, ab Euclide 14 d 5. *Compositio rationis* (σύνθεσις λόγου) *est sumptio antecedentis cum consequente tanquam unius, ad ipsam consequentem.*

Atque hic etiam Clavius duas alias Rationis compositiones adjungit. Primam appellat *Compositionem rationis conversam*; *quando sumitur antecedens & consequens veluti una, quæ cum antecedente conferatur.* Puta si $A . \alpha :: B . \beta$. erit $A + \alpha . A :: B + \beta . B$. Quæ duas involvit Euclidis operationes. Nam invertendo, erit $\alpha . A :: \beta . B$. & componendo $\alpha + A . A :: \beta + B . B$. vel $A + \alpha . \alpha :: B + \beta . \beta$. Vel sic; si $A . \alpha :: B . \beta$. erit ($A\beta = \alpha B$, &, $AB + A\beta = AB + \alpha B$, hoc est, $A + \alpha$ in $B = A$ in $B + \beta$, adeoque) $A + \alpha . A :: B + \beta . B$.

Alteram vocat *Compositionem rationis contrariam*; *quando refertur eadem antecedens ad antecedentem & consequentem ceu ad unam.* Puta si $A . \alpha :: B . \beta$. erit $A . A + \alpha :: B . B + \beta$. Estque hæc præcedentis inversio; & tres Euclidis operationes conjungit. Nam invertendo erit $\alpha . A :: \beta . B$. & componendo $A + \alpha . A :: B + \beta . B$. iterumque invertendo $A . A + \alpha :: B . B + \beta$. Vel etiam per Lemma nostrum; Si $A . \alpha :: B . \beta$. erit ($A\beta = \alpha B$, adeoque $AB + A\beta = AB + \alpha B$, hoc est A in $B + \beta = A + \alpha$ in B, ideoque) $A . A + \alpha :: B . B + \beta$.

19. *Si sit ut tota ad totam, sic ablata ad ablatam; erit & reliqua ad reliquam ut tota ad totam.* Esto enim $\frac{A+B}{\alpha+\beta} = \frac{A}{\alpha} = R$. Erit itaque tum $A + B = R$ in $\alpha + \beta = R\alpha + R\beta$, tum $A = R\alpha$. adeoque & residuum $B = R\beta$. Et (utrinque æqualiter dividendo) $\frac{B}{\beta} = R = \frac{A+B}{\alpha+\beta}$. Estque hæc propositio universalis ad prop. 5. Euclides illam sic demonstrat.

$$\begin{array}{r} A+B = R\alpha + R\beta \\ -A = -R\alpha \\ \hline B = R\beta \end{array}$$

Quoniam ut $A + B . \alpha + \beta :: A . \alpha$. erit alterne (seu permutando) $A + B . A :: \alpha + \beta . \alpha$. Et dividendo (sive per divisionem rationis) $B . A :: \beta . \alpha$. iterumque permutando, $B . \beta :: A . \alpha :: A + B . \alpha + \beta$.

Atque colligit hoc πόρισμα seu corollarium, *Si compositæ magnitudines sint proportionales; & per conversionem rationis proportionales erunt.* Cum enim ostenderit $A + B . \alpha + \beta :: B . \beta$. Erit permutando $A + B . B :: \alpha + \beta . \beta$. quæ sunt quantitates compositæ proportionales: sed & ostensum est $A + B . \alpha + \beta :: A . \alpha$. adeoque permutando $A + B . A :: \alpha + \beta . \alpha$. quæ est conversio rationis. Quippe 16 d 5, definitur *Conversio rationis* (ἀναστροφὴ λόγου) *sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat.*

Clavius hanc demonstrationem improbat, propter adhibitam alternationem, quæ in solis homogeneis obtinet, cum tamen conversio rationis etiam ubi bina binis sunt heterogenea locum habet; adeoque hanc substituit. Si $A + B . B :: \alpha + \beta . \beta$. erit (dividendo) $A . B :: \alpha . \beta$. & (invertendo) $B . A :: \beta . \alpha$. & tandem (componendo) $A + B . A :: \alpha + \beta . \alpha$. quæ est conversio rationis. Nempe si ut tota prima ad sui partem ablatam, sic tota secunda ad sui ablatam; erit ut tota prima ad sui reliquam, sic tota secunda ad sui reliquam. Vel brevius, si ut tota ad ablatam, sic tota ad ablatam; erit & tota ad reliquam, ut tota ad reliquam.

More nostro sic demonstrabitur; Si $\frac{A+B}{B} \left(= \frac{A}{B} + 1\right) = \frac{\alpha+\beta}{\beta} \left(= \frac{\alpha}{\beta} + 1;\right)$ erit ($\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$, adeoque $\frac{B}{A} = \frac{\beta}{\alpha}$, & $\frac{B}{A} + 1 = \frac{\beta}{\alpha} + 1$, hoc est) $\frac{B+A}{A} = \frac{\beta+\alpha}{\alpha}$.

Vel, si libet, sic; Si $\frac{T}{A} = \frac{\tau}{\alpha}$, erit ($\frac{T}{A} - 1 = \frac{\tau}{\alpha} - 1$, hoc est $\frac{T-A}{A} = \frac{\tau-\alpha}{\alpha}$ adeoque $\frac{A}{T-A} = \frac{\alpha}{\tau-\alpha}$, & $\frac{A}{T-A} + 1 = \frac{\alpha}{\tau-\alpha} + 1$, hoc est $\frac{A+T-A}{T-A}$

$= \alpha + \tau$

$= \frac{\alpha + \tau - \alpha}{\tau - \alpha}$, vel) $\frac{T}{T - A} = \frac{\tau}{\tau - \alpha}$. Et similiter institui poterunt demonstrationes non modo prop. 17, & 18. ut supra, sed & earum quas illis subjungit Clavius. Quod obiter dictum esto.

Vel etiam per lemma nostrum; Si $A + B . B :: \alpha + \beta . \beta$, erit ($A\beta + B\beta = B\alpha + B\beta$, adeoque $A\beta = B\alpha$, & $A\alpha + B\alpha = A\alpha + A\beta$, ideoque) $A + B . A :: \alpha + \beta . \alpha$.

Sed & restitui poterit eadem hujusce propositionis demonstratio quam modo repudiavit Clavius, eo adhibito remedio quod ad prop. 16. innuimus. Puta, si sit, verbi gratia, ut $A + B$ numerus pedum in linea tota, ad B numerum pedum in ablata; sic $\alpha + \beta$ numerus unciarum in toto pondere, ad β numerum unciarum in ablato; (ut Symbola jam non lineas & pondera, quantitates heterogeneas, immediate significent, sed utrobique numeros, adeoque homogeneas:) erit permutando $A + B . \alpha + \beta :: B . \beta$. ut numerus totus ad totum, sic ablatus ad ablatum; ideoque &, per pr. 19. sic reliquus ad reliquum, nempe $A + B . \alpha + \beta$ ($:: B . \beta$) $:: A . \alpha$. iterumque permutando $A + B . A :: \alpha + \beta . \alpha$. ut pedum numerus totus ad reliquum, sic unciarum numerus totus ad reliquum; & propterea etiam, ut linea tota ad reliquam, sic pondus totum ad reliquum. Quod erat probandum. Vel sic; si sit linea tota ad ablatam, ut numerus T ad A, & pondus totum ad ablatum, ut numerus τ ad α; sitque eadem utrobique ratio; hoc est $T . A :: \tau . \alpha$; adeoque permutando (quippe jam de numeris agitur) $T . \tau :: A . \alpha$; ideoque per pr. 19. $T . \tau :: T - A . \tau - \alpha$. iterumque permutando $T . T - A :: \tau . \tau - \alpha$. Ergo & (quia ponuntur numeri illic lineis, hic ponderibus proportionales) ut linea tota ad residuam, sic & pondus totum ad residuum. Quod erat probandum. Atque hoc pacto licebit alternationem adhibere etiam in proportionalibus non homogeneis. Ubi nempe secunda permutatione restituitur quod prima deturbatum erat: aut etiam, si plures, modo item quarta restituatur quod tertia deturbatur; & sic toties quoties. Hoc enim si caveatur, nihil absurdi sequitur in quantitatibus, utut heterogeneis, alternandis.

20. *Si sint tres quantitates*, A, B, C; *aliæque ipsis numero æquales*, α, β, γ; *quæ binatim sumptæ sunt in eadem ratione*, (puta $A . B :: \alpha . \beta$. & $B . C :: \beta . \gamma$.) *ex æquali* (δίισυ) *autem prima major sit quam tertia*; *& quarta quam sexta major erit*: *Et si æqualis*, *æqualis*: *sin minor*, *minor*. Nam $A . C :: \alpha . \gamma$. ut ostendemus ad prop. 22.

21. *Si sint tres quantitates*, A, B, C; *aliæque ipsis numero æquales*, α, β, γ; *quæ binatim sumptæ sint in eadem ratione*; *sit autem perturbata earum proportio* (puta $A . B :: \beta . \gamma$. & $B . C :: \alpha . \beta$.) *sitque ex æquali prima major quam tertia*; *erit & quarta quam sexta major*: *&*, *si æqualis*, *æqualis*; *sin minor*, *minor*. Nam & hic $A . C :: \alpha . \gamma$. ut ostendemus prop. 23.

Sunt enim hæ duæ propositiones, Lemmata ad duas sequentes; quas cum nos sine harum ope demonstraturi simus, erunt eadem opera & hæ à fortiori demonstratæ. Quid autem significent illæ voces *ex æquali*, sive *ex æquo*, & *proportio perturbata*; ostenditur 17, 18, 19, def. 5.

Ex æqualitate ratio, (sive ex æquali, vel ex æquo, δίισυ) est, *ubi plures sunt quantitates*, *sumptio extremorum per subtractionem mediorum*; sive, omissis mediis. 17 d 5.

Ordinata proportio (τεταγμένη ἀναλογία) *est*, *quando est ut antecedens ad consequentem*, *sic antecedens ad consequentem*; *ut autem consequens ad aliam quampiam*, *sic consequens ad aliam quampiam*. 18 d 5. Cujus exemplum habemus pr. 20, & 22.

Perturbata vero proportio (τεταραγμένη ἀναλογία) *est*, *quando*, *cum tres sint quantitates aliæque illis numero æquales*, *est*, *ut in primis quantitatibus antecedens ad consequentem*, *ita in secundis quantitatibus antecedens ad consequentem*; *ut autem in primis quantitatibus consequens ad aliam quampiam*, *ita in secundis alia quæpiam ad antecedentem*. 19 d 5. Cujus exemplum habetur prop. 21, & 23. Vel sic; si ut in primoribus prima ad secundam, sic in alteris secunda ad tertiam; ut autem in primoribus secunda ad tertiam, sic in alteris prima ad secundam.

22. *Si sint quotcunque quantitates* A, B, C, &c. *aliæque ipsis numero æquales*, α, β, γ, &c. *quæ binatim sumptæ sint in eadem ratione*, (puta $A . B :: \alpha . \beta$, & $B . C ::$

 $\beta . \gamma$.

Exempli gratia. Ponamus numerum terminorum $T=4$. adeoque $AR^t = AR^4$. Et dividenda proponatur $AR^4 - A$, per $R - 1$. Cum igitur sit $R)AR^4(AR^3$; Erit quotientis membrum primum AR^3, quod in divisorem ductum dat $AR^4 - AR^3$. hoc ex dividendo subductum relinquit $AR^3 - A$. Deinde cum sit $R)AR^3(AR^2$: erit quotientis membrum secundum $+AR^2$ quod ductum in divisorem dat $AR^3 - AR^2$. hoc ex dividendo subductum relinquit $AR^2 - A$. Eodem modo, quotientis membrum tertium erit $+AR$. adeoque facta tum multiplicatione tum subductione, manebit $AR - A$. Denique quotientis membrum quartum, eodem modo repertum, est $+A$. Et peracta tum multiplicatione tum subductione ut prius, nihil restabit.

$$
\begin{array}{l}
R-1)AR^4 - A(AR^3 + AR^2 + AR + A \\
\quad AR^4 - AR^3 \\
\hline
\quad AR^3 - A \\
\quad AR^3 - AR^2 \\
\hline
\quad AR^2 - A \\
\quad AR^2 - AR \\
\hline
\quad AR - A \\
\quad AR - A \\
\hline
\quad 00 \quad 0
\end{array}
$$

Totaque operatione sic peracta, habetur quotiens $\frac{AR^4 - A}{R - 1} = AR^3 + AR^2 + AR + A = S$. Et similiter continget quantuscunque ponatur numerus terminorum; nempe quotiens singulos exhibebit. Adeoq; universaliter $\frac{VR - A}{R - 1} = \frac{AR^t - A}{R - 1} = A + AR + AR^2$ &c. $= S$. quod erat demonstrandum.

Id ipsum pariter ostendetur, si juxta prop. 20. exponamus $A = R^d)V$. Adeoque $\frac{VR - A}{R - 1} = \frac{VR - R^d)V}{R - 1} = \frac{VR^t - V}{R^t - R^d} = V + \frac{V}{R} + \frac{V}{R^2} + \frac{V}{R^3}$ &c. $= S$. ut ex adjuncta divisionis operatione manifestum est.

$$
\begin{array}{l}
R^4 - R^3)VR^4 - V(V + \frac{V}{R} + \frac{V}{R^2} + \frac{V}{R^3} \\
\quad VR^4 - VR^3 \\
\hline
\quad VR^3 - V \\
\quad VR^3 - VR^2 \\
\hline
\quad VR^2 - V \\
\quad VR^2 - VR \\
\hline
\quad VR - V \\
\quad VR - V \\
\hline
\quad 00 \quad 0
\end{array}
$$

Libet autem aliam methodum, summam progressionis Geometricæ colligendi, ex D. *Oughtredo* adjungere, postquam hoc lemma ostendero. Nempe

69. Si sint quotlibet termini proportionales; erit ut unus antecedentium ad suum consequentem, sic antecedentium omnium aggregatum, ad aggregatum omnium consequentium. (Quæ est 12 e 5.) Puta si $A.\alpha :: B.\beta :: C.\gamma :: D.\delta$. &c. hoc est $A.RA :: B.RB :: C.RC :: D.RD$. &c. Erit $A.\alpha :: A+B+C+D+$ &c. $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ &c. hoc est $A.RA :: A+B+C+D$ &c. $RA+RB+RC+RD$ &c. propter communem utrobique rationem R.

70. Ideoque; In continue proportionalibus, ut terminus primus, ad secundum, (hoc est, ut 1 ad rationis communis exponentem R;) sic summa terminorum omnium præter ultimum, ad summam omnium præter primum. Puta si $A.B.C.D.V \dot{=}$ hoc est $A.B :: B.C :: C.D :: D.V$. Erunt $A+B+C+D = S - V$, omnes antecedentes; & $B+C+D+V = S - A$, omnes consequentes. Ergo per præced. $A.B(::1.R)::S-V.S-A$.

71. Et consequenter; Si ex rectangulo secundi & ultimi, auferatur quadratum primi; residuumque dividatur per terminum secundum dempto primo; prodibit summa terminorum omnium. Cum enim per præced. sit $A.B :: S-V.S-A$. adeoque per pr. 30. $SB - VB = SA - Aq$, & transponendo, $SB - SA = VB - Aq$. Erit (utrinque dividendo) $S = \frac{VB - Aq}{B - A}$.

Sed & ex eodem lemmate demonstratur Prop. 68. cum enim sit per Prop. 70. $S-V.S-A :: (A.B :: A.AR ::) 1.R$. adeoque per prop. 30. $SR - VR = S - A$.

Et

Et, transponendo, $SR - S = VR - A$: erit (utrinque dividendo) $S = \frac{VR - A}{R - 1}$.

Vel sic, per præsentem, $S = \frac{VB - Aq}{B - A} = \frac{VAR - Aq}{AR - A} = \frac{VR - A}{R - 1}$.

72. Datis igitur extremis & ratione communi; A, V, R, habetur terminorum omnium summa S. Nempe $S = \frac{VR - A}{R - 1}$. per prop. 68. vel 71.

73. Idem habetur, si, pro extremis A, V, darentur A, VA. Nempe $S = \frac{A)VAR - A}{R - 1}$. Nam $A)VA = V$.

74. Vel A, $\frac{V}{A}$. Nempe $S = \frac{\frac{V}{A}AR - A}{R - 1}$. Nam $\frac{V}{A}A = V$.

75. Vel V, VA. Nempe $S = \frac{VR - V)VA}{R - 1}$. Nam $V)VA = A$.

76. Vel V, $\frac{V}{A}$. Nempe $S = \frac{VR - \frac{V}{A})V}{R - 1}$. Nam $\frac{V}{A})V = A$.

77. Vel denique VA, $\frac{V}{A}$. Nempe $S = \frac{R\sqrt{\frac{V}{A}VA} - \sqrt{:\frac{V}{A})VA}}{R - 1}$. Nam $\frac{V}{A}VA = V^2$. Et $\frac{V}{A})VA = A^2$.

78. Et, datis extremis, cum terminorum omnium summa; A, V, S; habetur communis ratio. R. Nam per prop. 68, vel 72. $S = \frac{VR - A}{R - 1}$. hoc est, $SR - S = VR - A$; adeoque $SR - VR = S - A$, & $\frac{S - A}{S - V} = R$. Vel brevius; per prop. 70. $\frac{S - A}{S - V} = \frac{B}{A} = \frac{R}{1} = R$.

79. Idem habetur, si, pro A, V, darentur A, VA. Nempe $R = \frac{S - A}{S - A)VA}$.

80. Vel, A, $\frac{V}{A}$. Nempe $R = \frac{S - A}{S - \frac{V}{A}A}$.

81. Vel, V, VA. Nempe $R = \frac{S - V)VA}{S - V}$.

82. Vel, V, $\frac{V}{A}$. Nempe $R = \frac{S - \frac{V}{A})V}{S - V}$.

83. Vel denique, VA, $\frac{V}{A}$. Nempe $R = \frac{S - \sqrt{:\frac{V}{A})VA}}{S - \sqrt{:\frac{V}{A}VA}}$.

84. Item, datis termino minimo, ratione communi, & terminorum omnium summa; A, R, S; datur maximus. V. Nam (ut in Prop. 78.) $SR - S = VR - A$. Ergo $SR - S + A = VR$, & $\frac{SR - S + A}{R} = V$.

85. Et, datis termino maximo, ratione communi, & terminorum omnium summa; V, R, S; datur minimus. A. Cum enim (ut in præced.) $SR - S + A = VR$; erit (transponendo) $VR - SR + S = A$.

86. Item, datis termino minimo, ratione communi, & terminorum numero; A, R, T; datur terminorum omnium summa. S. Nam, per Pr. 19. $V = AR^d$, & $VR = AR^t$; Ergo per Prop. 68. $S = \frac{VR - A}{R - 1} = \frac{AR^t - A}{R - 1}$.

87. Et, datis termino minimo, ratione communi, & progressionis summa; A, R, S; datur numerus terminorum. T. Est enim (ut in Prop. 84.) $SR - S + A = VR = AR^t$ (per Pr. 19.) Adeoque $\frac{SR - S + A}{A} = R^t$. Quærendum igitur quota potestas Exponentis rationis communis R, æquatur quantitati cognitæ $\frac{SR - S + A}{A}$.

88. Et, Datis termino minimo, progressionis summa, & numero terminorum; A, S, T; datur communis ratio. R. Nam (ut in praeced.) $SR - S + A = AR^t$. adeoque $SR - AR^t = S - A$. Et $\frac{S-A}{A} = \frac{S}{A}R - R^t$. Cujus aequationis radix est R, quaesita.

89. Et datis ratione communi, numero terminorum, & summa progressionis; R, T, S; datur terminus minimus. A. Cum enim (ut in praeced.) $SR - S + A = AR^t$. adeoque $SR - S = AR^t - A$. Erit $A = \frac{SR-S}{R^t - 1} = \frac{R-1}{R^t-1}S$.

90. Pari modo; Dato termino maximo, cum ratione communi, & numero terminorum; V, R, T; datur summa progressionis. S. Nam per pr. 20. $A = R^d)V$. Ergo per pr. 68. $S = \frac{VR - A}{R-1} = \frac{VR - R^d)V}{R-1} = \frac{VR^t - V}{R^t - R^d}$.

91. Et; Dato termino maximo, cum ratione communi, & progressionis summa; V, R, S; datur numerus terminorum. T. Nam per pr. 85. $A = VR + S - SR$; adeoque per pr. 16. $\frac{V}{VR+S-SR} = \frac{V}{A} = R^d$. Quaerendum itaque quota potestas exponentis datae rationis R, aequatur datae quantitati. Quippe istius potestatis index unitate auctus, est quaesitus numerus terminorum $T = D + 1$.

92. Et; Datis termino maximo, progressionis summa, & numero terminorum; V, S, T; datur communis ratio. R. Est enim, per pr. 90. $S = \frac{VR^t - V}{R^t - R^d}$, adeoque $SR^t - SR^d = VR^t - V$, & $V = SR^d - SR^t + VR^t$, & $\frac{V}{S-V} = \frac{S}{S-V}R^d - R^t$. Cujus Aequationis radix R, est exponens communis rationis quaesitae.

93. Et; Datis ratione communi, numero terminorum, & progressionis summa; R, T, S; datur terminus maximus. V. Est enim, (ut in praeced.) $SR^t - SR^d = VR^t - V$. Ergo $\frac{SR^t - SR^d}{R^t - 1} = V$.

94. Porro; (ut compendio utar,) Datis A, V, S; datur T. Nam, per pr. 78. $\frac{S-A}{S-V} = R$. Et, per pr. 16 $\frac{V}{A} = R^d$. Quaerendum itaque, quota potestas R cognitae, aequatur cognitae R^d. ut habeatur $D = T - 1$, adeoque $D + 1 = T$.

95. Idem habetur, si pro A, V, darentur A, VA. Nam habetur R, per pr. 79. Et T ut prius.

96. Vel A, $\frac{V}{A}$. Nam habetur R, per pr. 80. & T, ut prius.

97. Vel V, VA. Nam habetur R, per pr. 81. & T, ut prius.

98. Vel V, $\frac{V}{A}$. Nempe R, per pr. 82. & T, ut prius.

99. Vel denique VA, $\frac{V}{A}$. Nempe R, per pr. 83. Et T, ut prius.

100. Datis A, V, T, datur S. Nam per pr. 17. habetur $R = \sqrt{d}\,\frac{V}{A}$. Ergo per pr. 68. $\frac{V\sqrt{d}\,\frac{V}{A} - A}{\sqrt{d}\,\frac{V}{A} - 1} = S$.

101. Idem habetur, si, pro A, V, darentur A, VA. Nempe $\frac{A)VA\sqrt{d}:A^2)VA: - A}{\sqrt{d}:A^2)VA: - 1} = S$. Nam $A)VA(V$. Et $A^2)VA(\frac{V}{A}$.

102. Vel A, $\frac{V}{A}$. Nempe $\frac{\frac{V}{A}A\sqrt{d}\,\frac{V}{A}: - A}{\sqrt{d}\,\frac{V}{A}: - 1} = S$. Nam $\frac{V}{A}A = V$.

103. Vel V, VA. Nempe $\frac{V\sqrt{d}:VA)V^2: - V)VA}{\sqrt{d}:VA)V^2: - 1} = S$. Nam $VA)V^2(\frac{V}{A}$. Et $V)VA(A$.

104. Vel V, $\frac{V}{A}$. Nempe $\frac{V\sqrt{d}\,\frac{V}{A} - \frac{V}{A})V}{\sqrt{d}\,\frac{V}{A} - 1} = S$. Nam $\frac{V}{A})V(A$.

105. Vel

105. Vel denique VA, $\frac{V}{A}$. Nempe $\frac{\sqrt{}^{d}\,\frac{V}{A}\,\sqrt{:}\,\frac{V}{A}\,VA: - \sqrt{:}\,\frac{V}{A})\,VA:}{\sqrt{}^{d}\,\frac{V}{A} - 1} = S$. Nam $\sqrt{:}\,\frac{V}{A}\,VA: = V$. Et $\sqrt{:}\,\frac{V}{A})\,VA: = A$.

106. Datis A, T, S; datur V. Nam habetur R, per pr. 88. adeoque V, per prop. 19.

107. Datis V, T, S; datur A. Nam habetur R, per pr. 92. Et A, per pr. 20.

108. Datis A, V, Z: datur S. Nam per pr. 48. habetur T = VA) Z. Et deinde S per pr. 100.

109. Idem habetur, si pro A, V, dentur A, VA. per prop. 48, 101.

110. vel A, $\frac{V}{A}$. per pr. 48, 102.

111. vel V, VA. per pr. 48, 103.

112. vel V, $\frac{V}{A}$. per pr. 48, 104.

113. vel VA, $\frac{V}{A}$. per pr. 48, 105.

114. Datis A, V, S; datur Z. Nam per pr. 78. habetur $R = \frac{S - A}{S - V}$. adeoque Z per pr. 56.

115. Idem habetur, si, pro A, V, dentur. A, VA, per pr. 79, 56.

116. vel A, $\frac{V}{A}$. per pr. 80, 56.

117. vel V, VA, per pr. 81, 56.

118. vel V, $\frac{V}{A}$, per pr. 82, 56.

119. vel denique VA, $\frac{V}{A}$. per pr. 83, 56.

120. Datis A, R, Z; datur S. Quippe habetur T, per pr. 64. & deinde S, per prop. 86.

121. Datis A, R, S; datur Z. Nam per prop. 84. habetur V. adeoque Z per prop. 56.

122. Datis A, T, Z; datur S. Nam per prop. 59. habetur R. adeoque S per prop. 86.

123. Datis A, T, S; datur Z. Nempe R per pr. 88. adeoque Z per pr. 58.

124. Datis V, R, Z; datur S. Nempe T per pr. 66. adeoque S per pr. 90.

125. Datis V, R, S; datur Z. Nempe A per pr. 85. & Z per pr. 56.

126. Datis V, T, Z; datur S. Nempe R per pr. 61. & S per pr. 90.

127. Datis V, T, S; datur Z. Nempe R per pr. 92. & Z per pr. 60.

128. Datis R, T, VA; datur A. Nempe $\frac{V}{A}$ per pr. 16. & A per pr. 54.

129. Datis iisdem; datur V. Nempe $\frac{V}{A}$ per pr. 16. & V per pr. 55.

130. Datis iisdem; datur S. Nempe A per pr. 128. & S per pr. 86.

131. Datis VA, R, Z; datur A. Nempe T per pr. 48, & A per pr. 128.

132. Datis iisdem; datur V. Nempe T ut prius. & V per pr. 129.

133. Datis iisdem; datur S. Nempe T, ut prius, & S per pr. 130.

134. Datis VA, R, S; datur A. Est enim per pr. 68. R−1) VR−A (S. ideoque SR−S = VR−A. Et SRA − SA = VAR − A^2. adeoque A^2 + SRA − SA = VAR. Cujus æquationis radix est $A = \frac{\sqrt{:}\,S^2R^2 - 2S^2R + S^2 + 4VAR: - SR + S}{2}$.

135. Datis iisdem; datur V. Nam (ut in præced.) SR − S = VR − A. adeoque SRV − SV = V^2R − VA. Et VA = RV^2 − SRV + SV. Et R) VA = V^2 − SV + R) SV. Cujus æquationis radix est $V = \frac{\sqrt{:}\,S^2R^2 - 2S^2R + S^2 + 4VAR: + SR - S}{2R}$.

136. Datis iisdem; datur T. Nempe per pr. 134, habetur A; adeoque T per prop. 87.

137. Datis iisdem, datur Z. Nempe per præced. habetur T; adeoque Z per prop. 47.

138. Datis $\frac{V}{A}$, R, Z; datur A. Nam per pr. 18. habetur T; adeoque A per prop. 62.

139. Datis iisdem; datur V. Nempe T ut in præced. & V per prop. 63.

140. Datis iisdem; datur S. Nempe A & V per duas præcedentes. adeoque S per pr. 72.

141. Datis $\frac{V}{A}$, R, S; datur A. Nam per pr. 18. habetur T. adeoque A per prop. 89.

142. Datis iisdem; datur V. Nempe T ut in præced. & V per prop. 93.

143. Datis iisdem; datur Z. Nempe T ut prius, & A, V, per duas præcedentes; & tandem Z per pr. 47.

144. Datis $\frac{V}{A}$, T, Z; datur A. Nam habetur R per pr. 17. & VA per pr. 49. adeoque A per pr. 54.

145. Datis iisdem; datur V. Nempe VA ut in præced. adeoque V per prop. 55.

146. Datis iisdem; datur S. Nempe inventis R per pr. 17. & A, V, per duas præcedentes; habetur S per pr. 72.

147. Datis $\frac{V}{A}$, T, S; datur A. Nempe habetur R per pr. 17; adeoque A per pr. 89.

148. Datis iisdem; datur V. Nempe R ut prius; & V per pr. 93.

149. Datis iisdem; datur Z. Nempe inventis A, V, per duas præcedentes, habetur Z per pr. 47.

150. Datis R, T, Z; datur S. Nempe A per pr. 62. adeoque S per pr. 86.

151. Datis R, T, S; datur Z. Nempe A & V per pr. 89, & 93. adeoque Z per pr. 47.

Atque hactenus Progressionem Geometricam fusius explicavimus; & Problemata, pleraque saltem, eo spectantia expedivimus. Libet autem sequente capite (quod de Progressione Arithmetica supra factum est Cap. XXVIII.) in breviorem synopsin, quæ jam tradidimus, præcipua problemata compingere.

CAP. XXXIV.

Progressionis Geometricæ brevior Synopsis.

Quæ in præcedente Capite fusius tradidimus, de Progressione Geometrica, Problemata; libet hic in breviorem formam, sed & alio ordine, redigere: Retentis tamen iisdem quibus ibidem usi sumus Symbolis.

	Theoremata.
1	$D = T - 1.$
2	$V = AR^d.$
3	$A = \frac{V}{R^d}.$
4	$Z = T\,VA = TA^2R^d = \frac{TV^2}{R^d}.$
5	$S = \frac{VR - A}{R - 1} = \frac{AR^t - A}{R - 1} = \frac{R^t - 1}{R - 1}A = \frac{VR - :R^d)\,V}{R - 1} = \frac{VR^t - V}{R^t - R^d} = \frac{R^t - 1}{R^t - R^d}V.$
6	$A = \frac{R - 1}{R^t - 1}S.$
7	$V = \frac{R^t - R^d}{R^t - 1}S.$
8	$SR - S = VR - A.$
9	$R = \frac{S - A}{S - V}.$
10	$A = VR + S - SR.$
11	$VR = AR^t = A + SR - S.$
12	$V = \frac{A + SR - S}{R}.$
13	$SR^t - SR^d = VR^t - V.$
14	$V = SR^d - SR^t + VR^t.$
15	$\frac{V}{S - V} = \frac{S}{S - V}R^d - R^t.$

Problemata.

	Data.	Quæsita.	
1	A, V :	$VA = V\,A$.	
2		$\frac{V}{A} = A)\,V$.	
3	A, VA :	$V = A)\,VA$.	
		$\frac{V}{A}$	per 2.
4	A, $\frac{V}{A}$:	$V = \frac{V}{A}\,A$.	
		VA	per 1.
5	V, VA :	$A = V)\,VA$.	
		$\frac{V}{A}$	per 2.
6	V, $\frac{V}{A}$:	$A = \frac{V}{A})\,V$.	
		VA	per 1.
7	VA, $\frac{V}{A}$:	$A^2 = \frac{V}{A})\,VA$.	
8		$V^2 = \frac{V}{A}\,VA$.	
9	T, R :	$\frac{V}{A}$.	Nam $\frac{V}{A} = R^d$
10	T, $\frac{V}{A}$:	R.	
11	$\frac{V}{A}$, R :	T.	
12	VA, T :	$Z = T\,VA$.	
13	VA, Z :	$T = VA)\,Z$.	
14	T, Z :	$VA = T)\,Z$.	
15	A, V, R :	$S = \frac{VR - A}{R - 1}$.	
		VA	per 1.
		$\frac{V}{A}$	per 2.
		T	per 11.
		Z	per 12.
16	A, V, T :	VA	per 1.
		$\frac{V}{A}$	per 2.
		R	per 10.
		Z	per 12.
		S	per 15.
17	A, V, Z :	VA	per 1.
		$\frac{V}{A}$	per 2.
		T	per 13.
		R	per 10.
		S	per 15.
18	A, V, S :	VA	per 1.
		$\frac{V}{A}$	per 2.
		$R = \frac{S - A}{S - V}$	
		T	per 11.
		Z	per 12.
19	A, VA, R :	V	per 3.
		$\frac{V}{A}$	per 2.
		T	per 11.
		Z	per 12.
		S	per 15.
20	A, VA, T :	V	per 3.
		$\frac{V}{A}$	per 2.
		R	per 10.
		Z	per 12.
		S	per 15.
21	A, VA, Z :	V	per 3.
		$\frac{V}{A}$	per 2.
		T	per 13.
		R	per 10.
		S	per 15.

	Data.	Quæsita.	
22	A, VA, S :	V	per 3.
		$\frac{V}{A}$	per 2.
		R	per 18.
		T	per 11.
		Z	per 12.
23	A, $\frac{V}{A}$, R :	V	per 4.
		VA	per 1.
		T	per 11.
		Z	per 12.
		S	per 15.
24	A, $\frac{V}{A}$, T :	V	per 4.
		VA	per 1.
		R	per 10.
		Z	per 12.
		S	per 15.
25	A, $\frac{V}{A}$, Z :	V	per 4.
		VA	per 1.
		T	per 13.
		R	per 10.
		S	per 15.
26	A, $\frac{V}{A}$, S :	V	per 4.
		VA	per 1.
		R	per 18.
		T	per 11.
		Z	per 12.
27	V, VA, R :	A	per 5.
		$\frac{V}{A}$	per 2.
		T	per 11.
		Z	per 12.
		S	per 15.
28	V, VA, T :	A	per 5.
		$\frac{V}{A}$	per 2.
		R	per 10.
		Z	per 12.
		S	per 15.
29	V, VA, Z :	A	per 5.
		$\frac{V}{A}$	per 2.
		T	per 13.
		R	per 10.
		S	per 15.
30	V, VA, S :	A	per 5.
		$\frac{V}{A}$	per 2.
		R	per 18.
		T	per 11.
		Z	per 12.
31	V, $\frac{V}{A}$, R :	A	per 6.
		VA	per 1.
		T	per 11.
		Z	per 12.
		S	per 15.
32	V, $\frac{V}{A}$, T :	A	per 6.
		VA	per 1.
		R	per 10.
		Z	per 12.
		S	per 15.

	Data.	Quæsita.	
33	$V, \frac{V}{A}, Z$: A.		per 6.
		VA.	per 1.
		T.	per 13.
		R.	per 10.
		S.	per 15.
34	$V, \frac{V}{A}, S$: A,		per 6.
		VA.	per 1.
		R.	per 18.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
35	$VA, \frac{V}{A}, R$: A,		per 7.
		V.	per 8.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
36	$VA, \frac{V}{A}, T$: A.		per 7.
		V.	per 8.
		R.	per 10.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
37	$VA, \frac{V}{A}, Z$: A.		per 7.
		V.	per 8.
		T.	per 13.
		R.	per 10.
		S.	per 15.
38	$VA, \frac{V}{A}, S$: A.		per. 7.
		V.	per 8.
		R.	per 18.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
39	A, R, T : $V = A R^d$.		
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
40	A, R, Z : T.		
	Nam $A^3) ZR = T R^t$.		
		V.	per 39.
		VA.	per 14
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		S.	per 15.
41	A, R, S : $V = \frac{A + SR - S}{R}$.		
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		T.	per 11.
		Z.	per 12
42	A, T, Z : $V = A T) Z$.		
		VA.	per 14.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		R.	per 10.
		S.	per 15.
43	A, T, S : R.		
	Nam $R^t = \frac{RS - S + A}{A}$.		
		V.	per 39.
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		Z.	per 12.

	Data.	Quæsita.	
44	V, R, T : $A = R^d) V$.		
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
45	V, R, Z : T.		
	Nam $\frac{T}{R^d} = \frac{Z}{V^2}$.		
		A.	per 44.
		VA.	per 14.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		S.	per 15.
46	V, R, S : $A = VR + S - SR$.		
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.
47	V, T, Z : VA.		per 14
		A.	per 5.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		R.	per 10.
		S.	per 15.
48	V, T, S : R.		
	Nam $\frac{V}{S-V} = \frac{S}{S-V} R^d - R^t$.		
		A.	per 44.
		VA.	per 1.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		Z.	per 12.
49	R, T, Z : $\frac{V}{A}$.		per 9.
		VA.	per 14.
		A.	per 7.
		V.	per 8.
		S.	per 15.
50	R, T, S : $\frac{V}{A}$.		per 9.
		$A = \frac{R - 1}{R^t - 1} S$.	
		V.	per 4.
		VA.	per 1.
		Z.	per 12.
51	VA, R, T : $\frac{V}{A}$.		per 9.
		A.	per 7.
		V.	per 8.
		Z.	per 12.
		S.	per 15.
52	VA, R, Z : T.		per 13.
		$\frac{V}{A}$.	per 9.
		A.	per 7.
		V.	per 8.
		S.	per 15.
53	VA, R, S : A.		
	Nam $A^2 + SRA - SA = VA R$.		
		V.	per 3.
		$\frac{V}{A}$.	per 2.
		T.	per 11.
		Z.	per 12.

54

	Data.	Quæsita.	
54	$\frac{X}{A}$, R, Z : T.		per 11.
		VA.	per 14.
		A.	per 7.
		V.	per 8.
		S.	per 15.
55	$\frac{X}{A}$, R, S : T.		per 11.
		A.	per 50.
		V.	per 4.
		VA.	per 1.
		Z.	per 12.
56	$\frac{X}{A}$, T, Z : R.		per 10.
		VA.	per 14.
		A.	per 7.
		V.	per 8.
		S.	per 15.
57	$\frac{X}{A}$, T, S : R.		per 10.
		A.	per 50.
		V.	per 4.
		VA.	per 1.
		Z.	per 12.

Reliqui fere casus, parum aut nihil pandunt, ultra quod datum est.

CAP. XXXV.

Euclidis Elementum quintum Arithmetice demonstratur.

PRiusquam Rationum doctrinam dimittam, libet & Euclidis Elementum quintum, quod de Rationibus & Proportionibus agit breviter explicare. Cujus quidem utilitas in tota passim Mathesi, nemini vel leviter exercitato non innotescit.

Est autem illud Elementum quintum, ut & tota rationum Doctrina, Arithmetica potius quam Geometrica, (saltem prout Arithmetices fines nunc dierum ampliari solent, ut non solos numeros integros, sed & fractos, & surdos recipiant, totamque Algebræ, & Arithmeticæ (ut loquuntur) Speciosæ vel Symbolicæ praxin.) Quid quod & ipsa Arithmetica tota, si strictius spectetur, vix aliud videatur quam Rationum doctrina. Ipsique Numeri rationum totidem indicia quarum communis consequens est 1, Unitas. Ubi enim 1, sive Unitas, habetur pro *quantitate exposita*; reliqui omnes numeri (sive integri, sive fracti, sive etiam surdi) sunt rationum totidem aliarum ad expositam quantitatem indices sive exponentes.

Cur autem Lineis quam Numeris rationum doctrinam tradere maluerint veteres; causa fuit non una. Partim scilicet, quod illi, vix alios numeros quam Integros admiserint; (nec enim materiam Arithmeticam sicut Geometricam, in infinitum divisibilem admiserunt, sed in unitate sistendum voluere;) adeoque non pariter Numeris atque Lineis rationes omnes denotari posse perspexerint; Et propterea doctrinæ alioqui universalis, specimen saltem in lineis tradere maluerunt, eamque prout opus fuerit, inde in aliam quamvis materiam rationum capacem pro re nata transferre. Maxime autem uti mihi saltem videtur, quia non modo methodus Symbolica nondum obtinuerat, sed ne quidem figuræ numerariæ, quæ jam passim usitatæ sunt, ab Indis inventæ, fuerunt introductæ; ut non nisi difficulter admodum numerorum praxin exercere valuerint. Licet revera, ipsa sive linearum, sive figurarum planarum, vel etiam solidarum, aliarumve quantitatum, per literas alphabeticas designatio, (puta A, B, &c. quibus designantur in textu anguli lineæve &c. in schemate conspecta,) symbolica designatio non minus dici poterit, quam ubi similibus symbolis quantitates (non tam in charta conspectæ, quam) mente conceptæ indicantur.

Utut fuerit; nihil impedit quin nos, ut reliquam Rationum doctrinam, ita speciatim totum illud quod Elemento quinto de rationibus traditur, Arithmetice (adeoque simpliciter & Universaliter) tradamus, quod ut opus fuerit (sicut & Arithmetica universa) cuivis subjecto poterit accommodari.

Defi-

Definitiones autem quas illic præmissas habemus, hic libet intactas transire; quoniam illæ, partim superius, Cap. XXV, XXIX, XXX, explicantur, partim etiam cum ipsa propositionum traditione, ubi opus fuerit, obiter exponentur.

Id saltem monendum erit de definitione 5ª, sive juxta Clavium 6ª, quæ est *magnitudinum*, sive quantitatum, *in eadem ratione* constitutarum: quam Euclides his verbis effert, Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ληφθέντα κατάλληλα. *In eadem ratione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æque multiplices, secundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque vel una superant, vel una æquales sunt, vel una deficiunt, inter se comparatæ.* Nos hanc definitionem, quamvis veram quidem & Euclidis suscepto satis accommodam, in nostris demonstrationibus omittendam duximus; neque ad hoc κριτήριον proportionalia examinamus. Quippe quod perplexius videtur, nec adeo forsan, tironibus præsertim, perspicuum. Nec quidem tam proportionalium naturam immediate respicit, quam eorundem affectionem aliquam satis remotam. Nobis autem, qui Rationes superius docuimus *Quoto* æstimandas, ad rationum sive æqualitatem sive identitatem probandam sufficere videtur, si fuerit æqualitas sive identitas quotorum. Puta si sit $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$, est & $a.\alpha :: b.\beta$. Et contra. Quod nobis erit, definitionis loco, ejusdem æqualisve rationis. Ubi autem quotus major est, ibi & major ratio; ubi minor, minor. Puta, si $\frac{a}{\alpha} > \frac{b}{\beta}$, erit illa ratio major; si $\frac{a}{\alpha} < \frac{b}{\beta}$, hæc major erit, illa minor. Siquis tamen mallet affectionis alicujus opem in auxilium advocare, quo demonstrationes commodius procedant; ego nullam potiorem novi quam quæ à nobis prop. 30. Cap. XXXIII. demonstrata est; Et quidem (speciatim de lineis) ab ipso Euclide 16 e 6. Nempe *Si quatuor quantitates fuerint proportionales, factum ab extremis æquatur facto a mediis; & contra.* Puta si $A.\alpha :: B.\beta$; erit $A\beta = \alpha B$, & contra, Quod sic ostenditur. Cum sit $A.\alpha :: B.\beta$. hoc est $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$, erit (æqualiter utrinque multiplicando) $A = \frac{\alpha B}{\beta}$ & $A\beta = \alpha B$. Contra vero; si $A\beta = \alpha B$, erit (æqualiter utrinque dividendo) $A = \frac{\alpha B}{\beta}$, & $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$, hoc est, $A.\alpha :: B.\beta$. Atque ex hoc *Lemmate*, facilius quam ex illa Euclidis definitione memorata, demonstrari possent omnes illæ propositiones ubi illam adhibet Euclides: quod itaque non incommode pro illa Euclidis definitione substitui poterit.

His præmonitis, Propositiones aggredior: postquam monuero, quod, pro *Magnitudinibus* (de quibus speciatim agit Euclides) nos simpliciter *Quantitates* ubique substituimus. Quippe de quantitatibus aliis non minus procedunt tum propositiones tum demonstrationes quam de magnitudinibus. Imo & Euclides ipse, per *Magnitudinis* nomen, non tam magnitudines proprie dictas, seu stricte sumptas, (qualia sunt Linea, Superficies, & Corpus,) voluisse videtur intelligendas; quam omnia cujuscunque fuerint generis, quæ vel *Magna* dici possunt, aut etiam aliud alio *Majus Minus*ve: Quo sensu nos *Quantitatis* vocem intelligimus; nempe de omni eo de quo quæri solet, *Quantum* sit.

1. *Si fuerint quotcunque quantitates, quotcunque quantitatum sigillatim æque multiplæ; quotupla est una unius, totuplæ erunt & omnes omnium.* Puta si $A = M\alpha$, $B = M\beta$, $C = M\gamma$, &c. Erunt $A + B + C$ &c. $(= M\alpha + M\beta + M\gamma$ &c.$) = M$ in $\alpha + \beta + \gamma$ &c. ut multiplicando patebit. Idem igitur est communis multiplicator M, quod erat probandum. Hoc idem demonstratur universaliter pr. 12. de ratione qualibet, non minus quam multiplici.

$$\begin{array}{c} \alpha + \beta + \gamma \\ M \\ \hline M\alpha + M\beta + M\gamma \end{array}$$

2. *Si prima secundæ æque multipla fuerit, & tertia quartæ,* $(A = M\alpha,\ B = M\beta,)$ *sitque*

sitque quinta secundæ α, *aemultipla ac sexta quartæ*; ($C = N\alpha$, $D = N\beta$:) *erunt item prima & quinta simul, secundæ; atque tertia & sexta simul, quartæ, æque multiplices.* Nempe $A + C = M\alpha + N\alpha, = M + N$: in α. & $B + D = M\beta + N\beta = M + N$: in β. Communis itaque utrobique multiplicator, $M + N$. Idem ostenditur in quacunque ratione, utut non multiplici. prop. 24.

3. *Si fuerit prima secundæ æque multipla atque tertia quartæ*, ($A = M\alpha$, $B = M\beta$,) *& sumantur æque multiplices primæ & tertiæ* (NA, NB; hoc est $NM\alpha$, $NM\beta$,) *erunt & æque multiplices, illa secundæ, atque hæc quartæ.* Quippe utrobique est NM communis multiplicator. Estque hæc una species argumentationis *ex æquo*, sive *ex æquali*, δι' ἴσου.

4. *Si prima ad secundam, eandem habeat rationem, atque tertia ad quartam*, ($A . \alpha :: B . \beta$.) *Eandem item rationem habebunt æque multiplices primæ & tertiæ ad æquemultiplices secundæ & quartæ, juxta quamlibet multiplicationem, respective sumptæ.* Puta $AM . \alpha\mu :: BM . \beta\mu$. Si enim $A . \alpha :: B . \beta$. hoc est $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$; erit, æqualiter utrinque multiplicando ($\frac{A}{\alpha} \times M$, vel) $\frac{AM}{\alpha} = (\frac{B}{\beta} \times M$, vel) $\frac{BM}{\beta}$; &, æqualiter utrinque dividendo μ) $\frac{AM}{\alpha}$ vel $\frac{AM}{\alpha\mu} = \mu)$ $\frac{BM}{\beta}$ vel $\frac{BM}{\beta\mu}$. adeoque $AM . \alpha\mu :: BM . \beta\mu$. Quod erat demonstrandum. Vel brevius, per Lemma nostrum, Si $A . \alpha :: B . \beta$, erit ($A\beta = \alpha B$, adeoque $A\beta M\mu = \alpha BM\mu$ vel $AM\beta\mu = \alpha\mu BM$, & propterea) $AM . \alpha\mu :: BM . \beta\mu$.

Euclides Corollarium hoc (ut in demonstrationis suæ curriculo demonstratum) adjungit; *Si quatuor quantitates proportionales sint, sunt & inverse* (ἀνάπαλιν) *proportionales.* Hoc est, si $A . \alpha :: B . \beta$. erit $\alpha . A :: \beta . B$. (Præterquam quod ex se videtur manifestum, puta si utrobique eadem sit Relatorum ad correlata, eadem erit & Correlatorum ad illa, respective sumpta, relatio: vel, verbi gratia, si quoties A continet α, toties & B contineat β; vice versa, quoties α continetur in A, toties & β in B.) Sequitur directe ex lemmate nostro. Sive enim $A\ \beta$ sint extremæ, & $\alpha\ B$ mediæ; sive hæ extremæ, & illæ mediæ; erit utroque modo, si utrovis, $A\beta = \alpha B$; adeoque utrobique proportionalitas.

Hæc argumentatio ab Euclide definitur 13 d 5 (juxta Clavium;) *Inversa ratio est sumptio consequentis, seu antecedentis, ad antecedentem velut ad consequentem.*

5. *Si quantitas quantitatis æque multipla sit, atque ablata ablatæ; erit & reliqua reliquæ æque multipla atque tota totius.* Puta si $A + B = M$ in : $\alpha + \beta$: $= M\alpha + M\beta$, sitque $A = M\alpha$; erit & $B = M\beta$. Nam, propter æqualia æqualibus ablata, erunt & reliqua æqualia. Idem universaliter ostenditur pr. 19. de quacunque ratione, utut non multiplici.

$$\begin{array}{rl} & A + B = M\alpha + M\beta \\ \text{mi:} & A = M\alpha \\ \hline & B = M\beta \end{array}$$

6. *Si duæ quantitates* ($A + B$, & $C + D$,) *sint duarum quantitatum* (α, & γ,) *æque multiplæ*, (puta per $M + \mu$,) *sintque ablatæ quædam* (A, C,) *earundem* (α, γ,) *æque multiplæ*, (puta per M:) *erunt & reliquæ* (B, D,) *vel eisdem æquales* (si nempe $\mu = 1$) *vel ipsarum æque multiplæ*; (nempe per μ) Propter æqualia æqualibus ablata; ut patet.

$$\begin{array}{c} A + B = M\alpha + \mu\alpha \\ \text{mi: } A = M\alpha \\ \hline B = \mu\alpha \end{array} \qquad \begin{array}{c} C + D = M\gamma + \mu\gamma \\ \text{mi: } C = M\gamma \\ \hline D = \mu\gamma \end{array}$$

7. *Æquales ad eandem, eandem habent rationem, & eadem ad æquales.* Puta si $A = B$, erit (æqualiter dividendo) $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\alpha}$, adeoque $A . \alpha :: B . \alpha$. Item $\frac{\alpha}{A} = \frac{\alpha}{B}$, adeoque $\alpha . A :: \alpha . B$. Vel sic (si opus) per lemma nostrum; Quia si $A = B$ erit & $A\alpha = \alpha B$.

8. *Inæqualium major ad eandem, majorem habet rationem quam minor. Et eadem ad minorem, majorem habet rationem quam ad majorem.* Nam $\frac{A+E}{\alpha}$ $(=\frac{A}{\alpha}+\frac{E}{\alpha})>\frac{A}{\alpha}$. Item $\frac{\alpha}{A+E}<\frac{\alpha}{A}$. Quippe crescente Dividendo crescit quotus, sed crescente Divisore, minuitur.

9. *Quæ ad eandem eandem habent rationem, sunt inter se æquales: & ad quas eadem eandem habet rationem, ipsæ item æquales sunt.* Nam si $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\alpha}$, erunt (multiplicando per α) $B=A$. Item, si $\frac{\alpha}{A}=\frac{\alpha}{B}$ adeoque (per coroll. pr. 4.) $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\alpha}$, erunt & $A=B$, ut prius. Vel, per lemma nostrum, si $A.\alpha::B.\alpha$: vel $\alpha.A::\alpha.B$. erit $A\alpha=\alpha B$, adeoque $A=B$.

10. *Quantitatum rationem ad eandem habentium, quæ majorem habet rationem est major; ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa minor est,* Nam si $\frac{A}{B}$ major quam $\frac{\alpha}{B}$, puta æqualis $\frac{\alpha+\iota}{B}$; erit, æqualiter multiplicando, $A\ (=\alpha+\iota)>\alpha$. Item si $\frac{B}{A}$ minor sit quam $\frac{B}{\alpha}$, puta æqualis $\frac{B}{\alpha+\iota}$ (per pr. 8.) erit per cor. pr. 4. $\frac{A}{B}=\frac{\alpha+\iota}{B}$, adeoque $A>\alpha$.

11. *Quæ eidem eædem sunt rationes, inter se sunt eædem.* Nam si $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma}$ erit $\frac{A}{\alpha}=\frac{C}{\gamma}$.

12. *Si sint quotcunque quantitates proportionales, ut est una antecedentium ad suam consequentem, ita & omnes antecedentes ad omnes consequentes.* Esto $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma}$ &c. $=R$. Erit igitur $A=R\alpha$, $B=R\beta$, $C=R\gamma$ &c. adeoque $A+B+C$ &c. $=R\alpha+R\beta+R\gamma$ &c. $=R$ in $\alpha+\beta+\gamma$ &c. Ideoque (æqualiter dividendo) $\frac{A+B+C\ \&c.}{\alpha+\beta+\gamma\ \&c.}=R=\frac{A}{\alpha}$. Vel sic $A.RA::A+B+C$ &c. (R in $A+B+C$ &c. $=$) $RA+RB+RC$. ut patet. Aut per lemma nostrum, quia A in $RA+RB+RC$ &c. $=(ARA+ARB+ARC$ &c. $=)$ RA in $A+B+C$ &c. Est autem hæc universalis propositio ad prop. 1. Quod enim illic ostenditur speciatim de Ratione Multipla; hic ostenditur universaliter de qualibet ratione.

13. *Si prima A, ad secundam α, eandem habeat rationem quam tertia B, ad quartam β; tertia autem ad quartam majorem habeat rationem quam quinta C ad sextam γ: habebit & prima ad secundam majorem rationem quam quinta ad sextam.* Nam $\frac{A}{\alpha}(=\frac{B}{\beta})>\frac{C}{\gamma}$. Vel sic, $\frac{B}{\beta}(>\frac{C}{\gamma})=\frac{C+E}{\gamma}=\frac{A}{\alpha}>\frac{C}{\gamma}$.

14. *Si prima ad secundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam, sitque prima major quam tertia; & secunda quam quarta major erit: si æqualis, æqualis; si minor, minor.* Esto $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}$. Si autem $A>B$, erit & $\frac{A}{\alpha}>\frac{B}{\alpha}$, ergo & $\frac{B}{\beta}$ $(=\frac{A}{\alpha})>\frac{B}{\alpha}$, adeoque $\alpha>\beta$ per pr. 10. Vel sic, quia $A.B::\alpha.\beta$. ut infra ostenditur prop. 16.

15. *Partes* (aliquotæ) *inter se comparatæ, eandem habent rationem quam habent earum æque multiplices inter se.* Hoc est $\frac{A}{\alpha}=\frac{A+A+A\ \&c.}{\alpha+\alpha+\alpha\ \&c.}=\frac{MA}{M\alpha}$. per pr. 12. Vel, per lemma nostrum, $A.\alpha::MA.M\alpha$: quia $A\times M\alpha=\alpha\times MA$.

16. *Si*

16. *Si quatuor quantitates proportionales sint, sunt & alterne* (permutatim, vicissim, ἐναλλάξ,) *proportionales.* Hoc est, si $A.\alpha::B.\beta$, erit & $A.B::\alpha.\beta$. Per lemma nostrum, nam utroque modo, si utrovis, erit $A\beta=\alpha B$.

Estque hæc ea argumentatio quam definit Euclides 12 *d* 5. *Alterna ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.*

Notandum autem est, hanc propositionem solummodo illic obtinere, ubi quatuor quantitates sunt invicem homogeneæ; non autem ubi bina binis heterogenea. Puta, si sit, ut pondus A, ad pondus α; sic linea B ad lineam β, non tamen dicendum erit, ut pondus A, ad lineam B; sic pondus α, ad lineam β. Quia ponderis ad lineam, quippe quantitatem illi heterogeneam, nulla est Ratio; ut quæ inter homogeneas solas consistit. Atque eadem de causa, prop. 14. de solis homogeneis procedit; ut & prop. 1. 5. 7. 8. 9. 10. 12. 15. 19. 25. 27. 33. 34. proprie loquendo.

Verum siquando alternatione opus fuerit, ubi de quantitatibus invicem heterogeneis agitur: poterit utraque ratio aliis exponi terminis invicem homogeneis; in quibus alternatione instituta, aliisque ut opus fuerit operationibus peractis, nova alternatione restituendi sunt in pristinum ordinem termini mutuati, & deinde deponendi, resumptis à principio positis. Ut ad prop. 19. mox ostendetur.

17. *Si quantitates compositæ* (μεγέθη συγκείμενα) *proportionales sint, erunt & divisæ* (διαιρεθέντα) *proportionales.* Puta si sit $A+\alpha.\alpha::B+\beta.\beta$. erit & $A.\alpha::B.\beta$. Manifestum enim est tum quantitatem $A+\alpha$ una vice pluries continere quantitatem α, quam eandem continet A: & similiter $B+\beta$, una vice pluries quam B, continere β: Et propterea ab æqualibus quotientibus detracta utrobique unitate, manet adhuc æqualitas. Vel sic. Quia $\frac{A+\alpha}{\alpha}=\frac{A}{\alpha}+1$, & $\frac{B+\beta}{\beta}=\frac{B}{\beta}+1$. Si sit $\frac{A+\alpha}{\alpha}$ sive $\frac{A}{\alpha}+1=\frac{B+\beta}{\beta}$ sive $\frac{B}{\beta}+1$; erit (detracta utrinque unitate) $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}$: hoc est $A.\alpha::B:\beta$. Vel sic, si $\frac{T}{A}=\frac{\tau}{\alpha}$, erit ($\frac{T}{A}-1=\frac{\tau}{\alpha}-1$, hoc est) $\frac{T-A}{A}=\frac{\tau-\alpha}{\alpha}$. Vel etiam per lemma nostrum, Si $A+\alpha.\alpha::B+\beta.\beta$. erit ($A\beta+\alpha\beta=\alpha B+\alpha\beta$, adeoque $A\beta=\alpha B$, &) $A.\alpha::B.\beta$.

Definitur autem hæc argumentatio 15 *d* 5: *Divisio rationis* (διαίρεσις λόγου) *est sumptio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsum consequentem.*

Adjungit hic Clavius duas alias *Divisionis Rationis* formas; Primam vocat *Divisionem rationis conversam*; *quando consequens ad excessum quo consequentem superat antecedens refertur.* Si $A.\alpha::B.\beta$. Erit $\alpha.A-\alpha::\beta.B-\beta$. Quæ non alia est, quam prop. 17. Euclidis inversio. Nam per illam erit $A-\alpha.\alpha::B-\beta.\beta$. adeoque inverse (per cor. prop. 4.) $\alpha.A-\alpha::\beta.B-\beta$. Vel sic; si $A.\alpha::B.\beta$. Erit ($A\beta=\alpha B$, & $\alpha B-\alpha\beta=A\beta-\alpha\beta$, hoc est, α in $B-\beta:=A-\alpha$: in β. & propterea) $\alpha.A-\alpha::\beta.B-\beta$.

Alteram vocat *Divisionem Rationis contrariam*; *quando confertur antecedens cum excessu quo consequens antecedentem superat.* Si $A.\alpha::B.\beta$. Erit $A.\alpha-A::B.\beta-B$. Quæ continet Euclidis, divisionem rationis, duasque inversiones. Nam primo invertendo erit $\alpha.A::\beta.B$. tum dividendo, sive per divisionem rationis, $\alpha-A.A::\beta-B.B$. Et tandem iterum invertendo $A.\alpha-A::B.\beta-B$. Vel sic, per lemma nostrum, Si $A.\alpha::B.\beta$. erit ($A\beta=\alpha B$, & $A\beta-AB=\alpha B-AB$, hoc est, A in $\beta-B:=\alpha-A$: in B. adeoque) $A.\alpha-A::B.\beta-B$.

18. *Si quantitates divisæ* (μεγέθη διῃρημένα) *proportionales sint, erunt & compositæ* (συντεθέντα) *proportionales.* Si $A.\alpha::B.\beta$, erit item $A+\alpha.\alpha::B+\beta.\beta$. Nam cum sit $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}$, erit item (addendo utrobique 1,) $\frac{A}{\alpha}+1=\frac{B}{\beta}+1$. hoc est $\frac{A+\alpha}{\alpha}=\frac{B+\beta}{\beta}$; ideoque $A+\alpha.\alpha::B+\beta.\beta$. vel sic; Si $\frac{T}{A}=\frac{\tau}{\alpha}$ erit ($\frac{T}{A}+1=\frac{\tau}{\alpha}+1$, hoc est) $\frac{T+A}{A}=\frac{\tau+\alpha}{\alpha}$. Imo vero, & $\frac{T}{A}+2=\frac{\tau}{\alpha}+2$, sive $\frac{T+2A}{A}=\frac{\tau+2\alpha}{\alpha}$. Et quidem universim. Si sit $\frac{T}{A}=\frac{\tau}{\alpha}$, erit etiam $\frac{T}{A}\pm M=$

$\frac{\tau}{\alpha} \pm M$, sive $\frac{T \pm MA}{A} = \frac{\tau \pm M\alpha}{\alpha}$. Quomodo tum hæc tum præcedens junctim & universaliter demonstrantur. Sed & per Lemma nostrum, hæc junctim cum præcedente, sic demonstratur; Si $A \pm \alpha . \alpha :: B \pm \beta . \beta$; erit ($A\beta \pm \alpha\beta = \alpha B \pm \alpha\beta$, & $A\beta = \alpha B$, ideoque) $A . \alpha :: B . \beta$.

Definitur hic argumentandi modus, præsente propositione demonstratus, ab Euclide 14 d 5. *Compositio rationis* (σύνθεσις λόγου) *est sumptio antecedentis cum consequente tanquam unius, ad ipsam consequentem.*

Atque hic etiam Clavius duas alias Rationis compositiones adjungit. Primam appellat *Compositionem rationis conversam*; *quando sumitur antecedens & consequens veluti una, quæ cum antecedente conferatur.* Puta si $A . \alpha :: B . \beta$. erit $A + \alpha . A :: B + \beta . B$. Quæ duas involvit Euclidis operationes. Nam invertendo, erit $\alpha . A :: \beta . B$. & componendo $\alpha + A . A :: \beta + B . B$. vel $A + \alpha . \alpha :: B + \beta . \beta$. Vel sic; si $A . \alpha :: B . \beta$. erit ($A\beta = \alpha B$, &, $AB + A\beta = AB + \alpha B$, hoc est, $A + \alpha$ in $B = A$ in $B + \beta$, adeoque) $A + \alpha . A :: B + \beta . B$.

Alteram vocat *Compositionem rationis contrariam*; *quando refertur eadem antecedens ad antecedentem & consequentem ceu ad unam.* Puta si $A . \alpha :: B . \beta$. erit $A . A + \alpha :: B . B + \beta$. Estque hæc præcedentis inversio; & tres Euclidis operationes conjungit. Nam invertendo erit $\alpha . A :: \beta . B$. & componendo $A + \alpha . A :: B + \beta . B$. iterumque invertendo $A . A + \alpha :: B . B + \beta$. Vel etiam per Lemma nostrum; Si $A . \alpha :: B . \beta$. erit ($A\beta = \alpha B$, adeoque $AB + A\beta = AB + \alpha B$, hoc est A in $B + \beta = A + \alpha$ in B, ideoque) $A . A + \alpha :: B . B + \beta$.

19. *Si sit ut tota ad totam, sic ablata ad ablatam; erit & reliqua ad reliquam ut tota ad totam.* Esto enim $\frac{A + B}{\alpha + \beta} = \frac{A}{\alpha} = R$. Erit itaque tum $A + B = R$ in $\alpha + \beta = R\alpha + R\beta$, tum $A = R\alpha$. adeoque & residuum $B = R\beta$. Et (utrinque æqualiter dividendo) $\frac{B}{\beta} = R = \frac{A + B}{\alpha + \beta}$. Estque hæc propositio universalis ad prop. 5. Euclides illam sic demonstrat.

$$\begin{array}{r} A + B = R\alpha + R\beta \\ - A = - R\alpha \\ \hline B = R\beta \end{array}$$

Quoniam ut $A + B . \alpha + \beta :: A . \alpha$. erit alterne (seu permutando) $A + B . A :: \alpha + \beta . \alpha$. Et dividendo (sive per divisionem rationis) $B . A :: \beta . \alpha$. iterumque permutando, $B . \beta :: A . \alpha :: A + B . \alpha + \beta$.

Atque colligit hoc πόρισμα seu corollarium, *Si compositæ magnitudines sint proportionales; & per conversionem rationis proportionales erunt.* Cum enim ostenderit $A + B . \alpha + \beta :: B . \beta$. Erit permutando $A + B . B :: \alpha + \beta . \beta$. quæ sunt quantitates compositæ proportionales: sed & ostensum est $A + B . \alpha + \beta :: A . \alpha$. adeoque permutando $A + B . A :: \alpha + \beta . \alpha$. quæ est conversio rationis. Quippe 16 d 5, definitur *Conversio rationis* (ἀναστροφὴ λόγου) *sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat.*

Clavius hanc demonstrationem improbat, propter adhibitam alternationem, quæ in solis homogeneis obtinet, cum tamen conversio rationis etiam ubi bina binis sunt heterogenea locum habet; adeoque hanc substituit. Si $A + B . B :: \alpha + \beta . \beta$. erit (dividendo) $A . B :: \alpha . \beta$. & (invertendo) $B . A :: \beta . \alpha$. & tandem (componendo) $A + B . A :: \alpha + \beta . \alpha$. quæ est conversio rationis. Nempe si ut tota prima ad sui partem ablatam, sic tota secunda ad sui ablatam; erit ut tota prima ad sui reliquam, sic tota secunda ad sui reliquam. Vel brevius, si ut tota ad ablatam, sic tota ad ablatam; erit & tota ad reliquam, ut tota ad reliquam.

More nostro sic demonstrabitur; Si $\frac{A + B}{B}$ $(= \frac{A}{B} + 1) = \frac{\alpha + \beta}{\beta}$ $(= \frac{\alpha}{\beta} + 1;)$ erit ($\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$, adeoque $\frac{B}{A} = \frac{\beta}{\alpha}$, & $\frac{B}{A} + 1 = \frac{\beta}{\alpha} + 1$, hoc est) $\frac{B + A}{A} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha}$.

Vel, si libet, sic; Si $\frac{T}{A} = \frac{\tau}{\alpha}$, erit ($\frac{T}{A} - 1 = \frac{\tau}{\alpha} - 1$, hoc est $\frac{T - A}{A} = \frac{\tau - \alpha}{\alpha}$ adeoque $\frac{A}{T - A} = \frac{\alpha}{\tau - \alpha}$, & $\frac{A}{T - A} + 1 = \frac{\alpha}{\tau - \alpha} + 1$, hoc est $\frac{A + T - A}{T - A}$

$= \alpha + \tau$

$= \frac{\alpha + \tau - \alpha}{\tau - \alpha}$, vel) $\frac{T}{T - A} = \frac{\tau}{\tau - \alpha}$. Et similiter institui poterunt demonstrationes non modo prop. 17, & 18. ut supra, sed & earum quas illis subjungit Clavius. Quod obiter dictum esto.

Vel etiam per lemma nostrum; Si $A + B . B :: \alpha + \beta . \beta$, erit ($A\beta + B\beta = B\alpha + B\beta$, adeoque $A\beta = B\alpha$, & $A\alpha + B\alpha = A\alpha + A\beta$, ideoque) $A + B . A :: \alpha + \beta . \alpha$.

Sed & restitui poterit eadem hujusce propositionis demonstratio quam modo repudiavit Clavius, eo adhibito remedio quod ad prop. 16. innuimus. Puta, si sit, verbi gratia, ut $A + B$ numerus pedum in linea tota, ad B numerum pedum in ablata; sic $\alpha + \beta$ numerus unciarum in toto pondere, ad β numerum unciarum in ablato; (ut Symbola jam non lineas & pondera, quantitates heterogeneas, immediate significent, sed utrobique numeros, adeoque homogeneas:) erit permutando $A + B . \alpha + \beta :: B . \beta$. ut numerus totus ad totum, sic ablatus ad ablatum; ideoque &, per pr. 19. sic reliquus ad reliquum, nempe $A + B . \alpha + \beta$ ($:: B . \beta$) $:: A . \alpha$. iterumque permutando $A + B . A :: \alpha + \beta . \alpha$. ut pedum numerus totus ad reliquum, sic unciarum numerus totus ad reliquum; & propterea etiam, ut linea tota ad reliquam, sic pondus totum ad reliquum. Quod erat probandum. Vel sic; si sit linea tota ad ablatam, ut numerus T ad A, & pondus totum ad ablatum, ut numerus τ ad α; sitque eadem utrobique ratio; hoc est $T . A :: \tau . \alpha$; adeoque permutando (quippe jam de numeris agitur) $T . \tau :: A . \alpha$; ideoque per pr. 19. $T . \tau :: T - A . \tau - \alpha$. iterumque permutando $T . T - A :: \tau . \tau - \alpha$. Ergo & (quia ponuntur numeri illic lineis, hic ponderibus proportionales) ut linea tota ad residuam, sic & pondus totum ad residuum. Quod erat probandum. Atque hoc pacto licebit alternationem adhibere etiam in proportionalibus non homogeneis. Ubi nempe secunda permutatione restituitur quod prima deturbatum erat: aut etiam, si plures, modo item quarta restituatur quod tertia deturbatur; & sic toties quoties. Hoc enim si caveatur, nihil absurdi sequitur in quantitatibus, utut heterogeneis, alternandis.

20. *Si sint tres quantitates*, A, B, C; *aliæque ipsis numero æquales*, α, β, γ; *quæ binatim sumptæ sint in eadem ratione*, (puta $A . B :: \alpha . \beta$. & $B . C :: \beta . \gamma$.) *ex æquali* (δίισυ) *autem prima major sit quam tertia*; *& quarta quam sexta major erit*: *Et si æqualis*, *æqualis*: *sin minor*, *minor*. Nam $A . C :: \alpha . \gamma$. ut ostendemus ad prop. 22.

21. *Si sint tres quantitates*, A, B, C; *aliæque ipsis numero æquales*, α, β, γ; *quæ binatim sumptæ sint in eadem ratione*; *sit autem perturbata earum proportio* (puta $A . B :: \beta . \gamma$. & $B . C :: \alpha . \beta$.) *sitque ex æquali prima major quam tertia*; *erit & quarta quam sexta major*: *&*, *si æqualis*, *æqualis*; *sin minor*, *minor*. Nam & hic $A . C :: \alpha . \gamma$. ut ostendemus prop. 23.

Sunt enim hæ duæ propositiones, Lemmata ad duas sequentes; quas cum nos sine harum ope demonstraturi simus, erunt eadem opera & hæ à fortiori demonstratæ. Quid autem significent illæ voces *ex æquali*, sive *ex æquo*, & *proportio perturbata*; ostenditur 17, 18, 19, def. 5.

Ex æqualitate ratio, (sive ex æquali, vel ex æquo, δίισυ) est, *ubi plures sunt quantitates*, *sumptio extremorum per subtractionem mediorum*; sive, omissis mediis. 17 d 5.

Ordinata proportio (τεταγμένη ἀναλογία) *est*, *quando est ut antecedens ad consequentem*, *sic antecedens ad consequentem*; *ut autem consequens ad aliam quampiam*, *sic consequens ad aliam quampiam*. 18 d 5. Cujus exemplum habemus pr. 20, & 22.

Perturbata vero proportio (τεταραγμένη ἀναλογία) *est*, *quando*, *cum tres sint quantitates aliæque illis numero æquales*, *est*, *ut in primis quantitatibus antecedens ad consequentem*, *ita in secundis quantitatibus antecedens ad consequentem*; *ut autem in primis quantitatibus consequens ad aliam quampiam*, *ita in secundis alia quæpiam ad antecedentem*. 19 d 5. Cujus exemplum habetur prop. 21, & 23. Vel sic; si ut in primoribus prima ad secundam, sic in alteris secunda ad tertiam; ut autem in primoribus secunda ad tertiam, sic in alteris prima ad secundam.

22. *Si sint quotcunque quantitates* A, B, C, &c. *aliæque ipsis numero æquales*, α, β, γ, &c. *quæ binatim sumptæ sint in eadem ratione*, (puta $A . B :: \alpha . \beta$, & $B . C ::$

 $\beta . \gamma$.

$\beta.\gamma.$ &c.) *& ex æquali in eadem ratione erunt*; Nempe $A.C::\alpha.\gamma$. Nam quia $\frac{A}{B}=\frac{\alpha}{\beta}$ & $\frac{B}{C}=\frac{\beta}{\gamma}$ erit $\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}\left(=\frac{AB}{BC}=\frac{A}{C}\right)=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\gamma}\left(=\frac{\alpha\beta}{\beta\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}.\right)$ adeoque, $A.C::\alpha.\gamma$. Et similiter quotcunque fuerint utrobique quantitates. Habetur autem hic exemplum rationis compositæ; ut & prop. sequente.

23. *Si sint tres quantitates* A, B, C, *aliæque ipsis numero æquales* α,β,γ; *quæ binatim sumptæ sint in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio*; (nempe $A.B::\beta.\gamma$. & $B.C::\alpha.\beta$.) *& ex æquali in eadem ratione erunt*. Nempe $A.C::\alpha.\gamma$. Nam quia $\frac{A}{B}=\frac{\beta}{\gamma}$, & $\frac{B}{C}=\frac{\alpha}{\beta}$; erit $\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}\left(=\frac{AB}{BC}=\frac{A}{C}\right)=\frac{\beta}{\gamma}\times\frac{\alpha}{\beta}\left(=\frac{\beta\alpha}{\gamma\beta}=\frac{\alpha}{\gamma}.\right)$ adeoque $A.C::\alpha.\gamma$.

24. *Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam*; $A.\alpha::B.\beta$. *quinta item ad secundam eandem habuerit rationem quam sexta ad quartam*: $C.\alpha::D.\beta$. *habebit etiam composita ex prima & quinta ad secundam, eandem rationem quam tertia cum sexta ad quartam.* $A+C.\alpha::B+D.\beta$. Nam si $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}$, & $\frac{C}{\alpha}=\frac{D}{\beta}$: erit $\frac{A}{\alpha}+\frac{C}{\alpha}\left(=\frac{A+C}{\alpha}\right)=\frac{B}{\beta}+\frac{D}{\beta}\left(=\frac{B+D}{\beta}.\right)$ adeoque $A+C.\alpha::B+D.\beta$. Vel sic, si opus, per lemma nostrum; Si $A.\alpha::B.\varsigma$. & & $C.\alpha::D.\beta$. erit (tum $A\varsigma=\alpha B$, tum $C\varsigma=\alpha D$, ergo $A\varsigma+C\varsigma=\alpha B+\alpha D$, ideoque) $A+C.\alpha::B+D.\varsigma$. Estque hæc propositio universalis ad prop. 2.

25. *Si quatuor magnitudines proportionales fuerint* $A+B.\alpha+\varsigma::A.\alpha$. (sitque $A+B$ omnium maxima, adeoque & α minima;) *maxima & minima reliquis duabus majores erunt.* ($A+B+\alpha>\alpha+\varsigma+A$.) Nam per prop. 19. $A+B.\alpha+\varsigma(::A.\alpha)::B.\varsigma$. adeoque, ex hypothesi, $B>\varsigma$. Ideoque $A+\alpha+B>A+\alpha+\varsigma$.

Atque hactenus propositiones Euclidis tradidimus. Sequuntur aliæ quæ à Clavio aliisque, his subjungi solent; eadem facilitate demonstrandæ: quæ & Euclidæis virtualiter contentæ videantur.

26. *Si prima* A *ad secundam* B, *majorem habuerit rationem, quam tertia* α *ad quartam* ς; *habebit, invertendo, secunda ad primam minorem rationem quam quarta ad tertiam.* Nam quo major est ratio quævis, eo minor ipsius conversa. Vel sic. Quoniam $\frac{A}{B}>\frac{\alpha}{\varsigma}$, esto per prop. 8. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{A}{B+E}$; ideoque invertendo $\frac{\varsigma}{\alpha}=\frac{B+E}{A}>\frac{B}{A}$. vel $\frac{B}{A}<\frac{\varsigma}{\alpha}$. Vel sic; Si $\frac{A+E}{B}>\left(\frac{A}{B}=\right)\frac{\alpha}{\varsigma}$; erit inverse $\frac{B}{A+E}<\left(\frac{B}{A}=\right)\frac{\beta}{\alpha}$. per Cor. pr. 4.

27. *Si prima ad secundam, majorem habeat rationem, quam tertia ad quartam; habebit vicissim prima ad tertiam, majorem rationem quam secunda ad quartam.* Nam si $\frac{A}{B}>\frac{\alpha}{\beta}$, esto $\frac{A}{B+E}=\frac{\alpha}{\beta}$, ideoque, vicissim, $\frac{A}{\alpha}=\frac{B+E}{\beta}>\frac{B}{\beta}$. Vel sic; Si $\frac{A+E}{B}>\left(\frac{A}{B}=\right)\frac{\alpha}{\beta}$; erit alterne $\frac{A+E}{\alpha}>\left(\frac{A}{\alpha}=\right)\frac{B}{\beta}$. per pr. 16.

28. *Si prima ad secundam, majorem habeat rationem, quam tertia ad quartam; habebit quoque composita prima cum secunda ad secundam, majorem rationem, quam composita tertia cum quarta ad quartam.* Nam si $\frac{A}{B}>\frac{\alpha}{\beta}$, erit quoque ($\frac{A}{B}+1>\frac{\alpha}{\beta}+1$, hoc est) $\frac{A+B}{B}>\frac{\alpha+\beta}{\beta}$. Vel sic; Si $\frac{A+E}{B}>\left(\frac{A}{B}=\right)\frac{\alpha}{\beta}$; erit componendo $\frac{A+E+B}{B}>\left(\frac{A+B}{B}=\right)\frac{\alpha+\beta}{\beta}$. per pr. 18.

29. *Si composita prima cum secunda, ad secundam, majorem habeat rationem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam; habebit quoque dividendo prima ad*

ad secundam, majorem rationem, quam tertia ad quartam. Nam si $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\beta}{\beta}$, (hoc est $\frac{A}{B}+1, > \frac{\alpha}{\beta}+1,$) erit quoque $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\beta}$. Vel sic; Si $\frac{A+E+B}{B} > (\frac{A+B}{B} =) \frac{\alpha+\beta}{\beta}$; erit dividendo $\frac{A+E}{B} > (\frac{A}{B} =) \frac{\alpha}{\beta}$. per pr. 17.

30. *Si composita prima cum secunda, ad secundam, majorem rationem habeat, quam composita tertia cum quarta, ad quartam; habebit, per conversionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem rationem quam tertia cum quarta, ad tertiam.* Nam si $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\beta}{\beta}$, adeoque dividendo (ut prop. præced.) $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\beta}$; erit inverse (per pr. 26.) $\frac{B}{A} < \frac{\beta}{\alpha}$, & componendo (ut prop. 28.) $\frac{A+B}{A} < \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$.

31. *Si sint tres quantitates* A, B, C; *aliæque ipsis numero æquales* α, β, γ; *sitque major ratio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; item secundæ priorum ad tertiam* (sive æqualis, sive) *major quam secundæ posteriorum ad tertiam; erit quoque ex æqualitate major ratio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.* Nam si $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\beta}$, & $\frac{B}{C} \geqq \frac{\beta}{\gamma}$; erit $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} (= \frac{AB}{BC} = \frac{A}{C}) > (\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{B}{C} \geqq) \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\gamma} (= \frac{\alpha\beta}{\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}.)$ Hoc est $\frac{A}{C} > \frac{\alpha}{\gamma}$. Vel sic; Si $\frac{A+E}{B} > (\frac{A}{B} =) \frac{\alpha}{\beta}$, & $\frac{B}{C} = \frac{\beta}{\gamma}$; erit ex æquali, $\frac{A+E}{C} > (\frac{A}{C} =) \frac{\alpha}{\gamma}$. per pr. 22.

32. *Si sint tres quantitates* A, B, C; *aliæque ipsis numero æquales* α, β, γ. *Sitque major ratio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; item secundæ priorum ad tertiam* (sive æqualis, sive) *major quam primæ posteriorum ad secundam: erit quoque ex æqualitate major ratio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.* Nam, si $\frac{A}{B} > \frac{\beta}{\gamma}$, & $\frac{B}{C} \geqq \frac{\alpha}{\beta}$; erit $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} (= \frac{AB}{BC} = \frac{A}{C}) > (\frac{\beta}{\gamma} \times \frac{B}{C} \geqq) \frac{\beta}{\gamma} \times \frac{\alpha}{\beta} (= \frac{\beta\alpha}{\gamma\beta} = \frac{\alpha}{\gamma}.)$ Vel sic; Si $\frac{A+E}{B} > (\frac{A}{B} =) \frac{\beta}{\gamma}$, & $\frac{B}{C} = \frac{\alpha}{\beta}$, erit ex æquali, $\frac{A+E}{C} > (\frac{A}{C} =) \frac{\alpha}{\gamma}$, per prop. 23.

33. *Si sit major ratio totius ad totam, quam ablatæ ad ablatam; erit & reliquæ ad reliquam major ratio quam totius ad totam.* Nam si $\frac{A+B}{\alpha+\beta} > \frac{B}{\beta}$, erit permutando (per pr. 27.) $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\beta}{\beta}$, & per conversionem rationis, (per pr. 30.) $\frac{A+B}{A} < \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ iterumque permutando, $\frac{A+B}{\alpha+\beta} < \frac{A}{\alpha}$, vel $\frac{A}{\alpha} > \frac{A+B}{\alpha+\beta}$. Vel sic; Quoniam $\frac{A+B}{\alpha+\beta} > \frac{B}{\beta}$, adeoque $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\beta}{\beta}$, & $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\beta}$, adeoque $\frac{B}{A} < \frac{\beta}{\alpha}$, erit quoque $\frac{A+B}{A} < \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$, & $\frac{A+B}{\alpha+\beta} < \frac{A}{\alpha}$. Vel sic; Si $\frac{A+E+B}{\alpha+\beta} (= \frac{A+B}{\alpha+\beta} + \frac{E}{\alpha+\beta}) > (\frac{A+B}{\alpha+\beta} =) \frac{B}{\beta} (= \frac{A}{\alpha}$, per pr. 19.)

Erit

Erit $\frac{A+E}{\alpha}$ $(= \frac{A}{\alpha} + \frac{E}{\alpha} = \frac{A+B}{\alpha+\beta} + \frac{E}{\alpha}) > (\frac{A+B}{\alpha+\beta} + \frac{E}{\alpha+\beta}$ per pr. 8. $=)$ $\frac{A+E+B}{\alpha+\beta}$.

Supereſt adhuc apud Clavium, alia propoſitio, quæ quorſum hic loci inſeratur, ego plane non video; Cum tamen illic reperiam, etiam & hic apponam.

34. *Si ſint quotcunque quantitates*, A, B, C, &c. *aliæque ipſis numero æquales*, α, β, γ, &c. *ſitque major ratio primæ priorum ad primam poſteriorum, quam ſecundæ ad ſecundam, & hæc major quam tertiæ ad tertiam, & ſic deinceps*: $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\beta} > \frac{C}{\gamma}$ &c. *Habebunt omnes priores ſimul, ad omnes poſteriores ſimul, majorem rationem quam omnes priores relicta prima, ad omnes poſteriores relicta prima; Minorem autem quam prima priorum ad primam poſteriorum; Majorem denique etiam, quam ultima priorum ad ultimam poſteriorum.*

Sunto primum utrinque duæ, A, B, & α, β. Quoniam igitur $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\beta}$, adeoque permutando $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\beta}$, & componendo $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\beta}{\beta}$; Erit, permutando, & per prop. 33. $\frac{A+B}{\alpha+\beta} (> \frac{B}{\beta}) < \frac{A}{\alpha}$. Quæ erant probanda. Et ſimiliter probandum erit $\frac{B+C}{\beta+\gamma} (> \frac{C}{\gamma}) < \frac{B}{\beta} < \frac{A}{\alpha}$. Item $\frac{C+D}{\gamma+\delta} (> \frac{D}{\delta}) < \frac{C}{\gamma} < \frac{B}{\beta} < \frac{A}{\alpha}$. Et ſic ubivis.

Secundo, ponantur utrinque tres, $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\beta} > \frac{C}{\gamma}$. Quoniam per membrum primum $\frac{A}{\alpha} (> \frac{B}{\beta}) > \frac{B+C}{\beta+\gamma}$, erit permutando $\frac{A}{B+C} > \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, & componendo $\frac{A+B+C}{B+C} > \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma}$, iterumque permutando, & per membrum primum, & per pr. 33. Erit $\frac{A+B+C}{\alpha+\beta+\gamma} (> \frac{B+C}{\beta+\gamma} > \frac{C}{\gamma}) < \frac{A}{\alpha}$. quæ erant demonſtranda. Et ſimiliter probabitur $\frac{B+C+D}{\beta+\gamma+\delta} (> \frac{C+D}{\gamma+\delta} > \frac{D}{\delta}) < \frac{B}{\beta} < \frac{A}{\alpha}$.

Eodem modo, poſitis utrobique quatuor, $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\beta} > \frac{C}{\gamma} > \frac{D}{\delta}$. Erit per membrum præcedens, $\frac{A}{\alpha} (> \frac{B}{\beta}) > \frac{B+C+D}{\beta+\gamma+\delta}$. ideoque (permutando, & componendo, iterumque permutando, &c. ut prius,) $\frac{A+B+C+D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} (> \frac{B+C+D}{\beta+\gamma+\delta} > \frac{C+D}{\gamma+\delta} > \frac{D}{\delta}) < \frac{A}{\alpha}$. Quæ erant probanda. Et ſimiliter $\frac{B+C+D+E}{\beta+\gamma+\delta+\epsilon}$ $(> \frac{C+D+E}{\gamma+\delta+\epsilon} > \frac{D+E}{\delta+\epsilon} > \frac{E}{\epsilon}) < \frac{B}{\beta} < \frac{A}{\alpha}$.

Et pari modo, poſitis utrobique, quinque, ſex, ſeptem, &c. demonſtratio gradatim procedet. Conſtat itaque propoſitum.

Atque hactenus Euclidis Elementum quintum, cum propoſitionibus adjunctis, expoſuimus: ſuccincte quidem, ſed nec propterea minus dilucide.

Si quem interim male habeat, quod in demonſtrationibus non raro, ea quæ ad Fractionum Diviſionem, Multiplicationem &c. attinent, adhibuerim; quarum doctrinam nondum ex profeſſo tradiderim: Poterit ille totum hoc caput, cum ſequente, Fractionum tractationi poſtponere, vel ſaltem quaſi eſſent poſtpoſita reputare.

putare. Quanquam revera vix quicquam eorum hic assumitur, quod non & in superioribus exponitur; præsertim ubi de Fractionum notatione dictum est, & de Multiplicatione Divisioneque Algebrica sive Speciosa.

CAP. XXXVI.

Elementi Quinti Synopsis.

QUod præcedente Capite fusius traditum est, in brevem Synopsin redigemus.

Ubi $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$, ibi $A . B :: \alpha . \beta$. Definitio.

Ergo:

$A . B :: \alpha (= A) . B$.		prop. 7. 9.
$A . B :: A . \beta (= B)$.		prop. 7. 9.
$A . B$ :: $\alpha . \beta$	$>$ :: $<$ $C . D$	prop. 11. 13.
$A . B :: RA . RB$		prop. 15.

Item $\frac{A+E}{B} > \frac{A}{B}$. Et $\frac{A}{B+E} < \frac{A}{B}$. prop. 8. 10.

Suntque hæ propositiones Intellectui satis obviæ. Sequuntur aliæ.

Si $A . B :: \alpha . \beta$.

Erit:

$A \times \beta = B \times \alpha$.	Lemma.
$B . A :: \beta . \alpha$.	Cor. pr. 4.
$A . \alpha :: B . \beta$.	pr. 14. 16.
$RA . B :: R\alpha . \beta$.	prop. 3. 4.
$A . \varrho B :: \alpha . \varrho\beta$.	prop. 3. 4.
$RA . \varrho B :: R\alpha . \varrho\beta$.	prop. 3. 4.
$A . B :: \left\{ \begin{matrix} A \pm \alpha . B \pm \beta \\ RA \pm \varrho\alpha . RB \pm \varrho\beta \end{matrix} \right.$	prop. 1. 5. 12. 19.
$A \pm B . \left\{ \begin{matrix} B \\ A \end{matrix} \right\} :: \alpha \pm \beta . \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha \end{matrix} \right.$	pr. 17. 18. cor. pr. 19.
$\left. \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} . A \pm B :: \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} . \alpha \pm \beta$.	pr. 17. 18. cor. pr. 19.
$MA \pm RB . \left\{ \begin{matrix} \varrho A \\ \varrho B \end{matrix} \right\} :: M\alpha \pm R\beta . \left\{ \begin{matrix} \varrho\alpha \\ \varrho\beta \end{matrix} \right.$	pr. 17. 18. cor. pr. 19.
$\left. \begin{matrix} \varrho A \\ \varrho B \end{matrix} \right\} . MA \pm RB :: \left\{ \begin{matrix} \varrho\alpha \\ \varrho\beta \end{matrix} \right\} . M\alpha \pm R\beta$.	pr. 17. 18. cor. pr. 19.

Suntque & hæ propositiones, earumque conversæ, vel per se satis obviæ, vel per Lemma nostrum facile demonstrantur; adeoque si de harum analogiarum una quavis constiterit, constabit & de omnibus. Sequuntur aliæ.

Si $\left\{\begin{matrix} A \\ C \end{matrix}\right\}$. B :: $\left\{\begin{matrix} \alpha \\ \gamma \end{matrix}\right\}$. β
Erit $A \pm C$. B :: $\alpha \pm \gamma$. β } prop. 2. 24.

Si $\left\{\begin{matrix} A \pm C \\ A \end{matrix}\right\}$. B :: $\left\{\begin{matrix} \alpha \pm \gamma \\ \alpha \end{matrix}\right\}$. β
Erit C . B :: γ . β } prop. 6.

Si $A \pm \alpha$. $B \pm \beta$ :: A . B
Erit $A \pm \alpha$. $B \pm \beta$ (:: A . B) :: α . β } prop. 5. 19.

Si A . B . C : α . β . γ .

Vel A . B . C : α . β . γ .

Erit A . C :: α . γ . pr. 20. 21. 22. 23.

Si maxima A . B :: α . β . minim.
Erit $A + \beta > B + \alpha$. prop. 25.

Harum item propositionum demonstrationes, vel ex superiore Lemmate, vel aliunde, sunt satis obviæ, vel saltem ex supra traditis illarum expositionibus peti possunt. Adeoque Euclidis Elementum quintum, compendio traditum est; locis interim aliquammultis locupletatum.

Quæ sequuntur, apud interpretes, propositiones de non-proportionalibus; ad alias ab Euclide traditas facile reducuntur, in quibus quasi virtualiter continentur. Puta prop. 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33. In Cor. pr. 4. pr. 16. 17, 18, 19, 22, 23. Cor. pr. 19. Ut cap. præced. ostensum est.

De Marci Meibomii Dialogo, Monitio.

De Meibomii Dialogo. Ubi hactenus perveneram, incidi in *Marci Meibomii, De Proportionibus Dialogum*; anno superiori 1655 editum. Quo, novam de Proportionibus doctrinam spondet: Atque tum *Pythagoram, Eudoxum, Euclidem, & quotquot unquam Pythagorici floruere*; tum *Archimedem, Apollonium, Pappum*; *Theonem* item, atque *Eutocium*; *Commandinum* denique & *Clavium, omniumque juniorum Mathematicorum filios*; sive, summatim, tum *totam antiquitatem*, tum *recentiores omnes*; sive, *totam Mathematicorum cohortem ad nostra usque tempora*; *hallucinatos esse*, contendit: *Nec tantum ignorasse authores illos, quid sit Rationum Compositio; sed &, quid sit Ratio*: Quodque *ipse primus, omnem eruditam vetustatem, ingenti molimine, superaverit*; *Pluraque* tradiderit, *quam ab ullo Geometra expectari posse, putandum erat.* Quippe *is præcipuus*, inquit, *narrationis scopus est, ut totam antiquitatem ignorantiæ in quibusdam Elementis Geometriæ convincat*; *deinde autem juniorum pravas explicationes, & monstrosas hallucinationes demonstret.* Cum enim, tum veteres, *Pythagoras, Eudoxus, &c. ad rei veritatem non omnino penetrarint*; tum, *quæ veteres recte docuerant, sinistra recentiorum interpretatione sint depravata*: *Itaque*, inquit, *& recentiores omnes reprehendam*; *qui antiquos non intellexerunt*: *& antiquos corrigam*; *qui male quædam prodiderunt*: *utrosque insuper nova docturus.*

Totius

Totius autem novæ doctrinæ suæ, hoc est, erratorum suorum, originem, qui *Ejusdem summa.* examinat, hanc esse deprehendet; quod inter λόγον διπλάσιον, & λόγον διπλασίονα; sive, (ut loquuntur interpretes) inter *rationem duplam*, & *duplicatam*; vel nesciat, vel nolit, distinguere. Quæ cum ille pro eodem habere velit; tum separanda perperam commiscet; tum, quæ ab authoribus de utrisque vere tradita sunt, quasi inter se pugnantia committit. Adeoque Theonem, aliosque, graviter culpat, quod putaverint *tripli duplum esse sextuplum*: Dum ille, *tripli duplum, noncuplum esse*, contendit; quia nempe, rationis triplæ, ratio duplicata, est noncupla.

Deinde; cum ratio $\frac{1}{4}$, rationis $\frac{1}{2}$, sit *ratio duplicata*; quam ille pro eodem habet atque *rationem duplam*; nec interim dubitaverit, quin dupla sit major, quam simpla: statuit, *rationem* 1 *ad* 4, *majorem esse quam* 1 *ad* 2.

Adeoque rationem illam *majorem* esse vult, non quam definit Euclides, 8 *d* 5. sed, quæ ab æqualitate magis recedit; sive, ut loquitur ille, *cujus termini longius inter se distant.* (Quasi quidem, idem esset *Ratio*, atque *Inæqualitas.*) Ipsamque *Æqualitatis* rationem, *Rationem Nihili* appellat; utpote ubi nulla est Inæqualitas.

Et propterea *Prop.* 8. & 10. e 5. (& quæ inde dependent omnes) falsas esse contendit; quod per eas, dicenda esset ratio $\frac{1}{2}$, major quam ratio $\frac{1}{4}$. Adeoque & 8 def. 5. (cui innituntur) falsam esse.

Rationes autem $\frac{2}{1}$ & $\frac{1}{2}$, item $\frac{3}{1}$ & $\frac{1}{3}$, (atque de aliis pariter,) æquales invicem dicendas vult. Tum; quod idem sit intervallum inter 1 & 2, atque inter 2 & 1; adeoque, secundum illum, eadem ratio: Tum quod utraque, ab æqualitatis ratione æque recedat. Sicuti enim $+1$ & -1 (si ipsi credamus) sunt inter se æquales; quia uterque ab 0, seu nihilo, (numeri omnis initio,) æqualiter distat: ita & ratio $\frac{2}{1}$ & $\frac{1}{2}$ æquales erunt dicendæ; cum utraque ab æqualitatis (sive nihili) ratione $\frac{1}{1}$, æque recedat.

Estque hæc totius novæ suæ doctrinæ summa; breviter quidem, sed fideliter recensita; & magis forsan perspicue quam ipse vellet. Cujus quidem ego refutationem, putassem, primo, hic loci inseruisse; tum quod hanc novam suam doctrinam non antea viderim, quam præcedentia descripta fuerant, & prope omnia jam impressa; tum, quod locus hic sit satis opportunus. Cum vero refutationem, quam, currente prelo, paravi, prolixiorem videam, quam quæ uno capiti commode inferatur; totumque hoc de proportionibus negotium jam supra satis dilucide traditum sit, ut, qui à nobis tradita intelligat, non admodum solicitus sit futurus de nova ipsius traditione: Lectorem hic nimia digressione detinendum non censui. Adeoque Refutationem illam seorsim potius, vel, si opus sit, huic tractatui subjungendam reliqui. Ut sicui videatur illius nova doctrina quicquam in se habere ponderis; videre possit, & quid nobis illi reponendum esse duximus.

Interim vero dicimus 1°. λόγον διπλάσιον, aliud plane esse quam λόγον διπλασίονα, *Refutatio brevis.* ut supra ostensum est; &, quid inter se distent. 2°. λόγον διπλάσιον, rationem duplam, simpla majorem esse, agnoscimus: sed non ita semper λόγον διπλασίονα· (quippe quoties exposita ratio, seu radix, supponitur minor quam 1, vel $\frac{1}{1}$; ratio duplicata, triplicata, &c. hoc est, Quadratum, Cubus, &c. perpetuo decrescunt.) 3°. Adeoque non inde sequi dicimus, rationem $\frac{1}{4}$ majorem esse quam $\frac{1}{2}$, utut illa sit hujus duplicata, adeoque tum 8 *d* 5, tum 8 & 10 *e* 5, (tum quæ hinc dependent,) satis constare. 4°. Æqualitatis rationem $\frac{1}{1}$, non rationem *nihili* dicendam esse, sed simplam: quippe, ut, ubi terminus antecedens consequentem bis continet, duplus dicitur; ubi ter, triplus, &c. ita, ubi semel, simplus dicendus est: adeoque $\frac{1}{1}$ ratio simpla. 5°. Negamus item, tum $+1$ & -1, esse æquales numeros; tum $\frac{2}{1}$ & $\frac{1}{2}$ æquales esse rationes: quippe $+1$, binario major est quam -1, (nam $+1 = -1 + 2$) & ratio $\frac{2}{1}$ est rationis $\frac{1}{2}$ (non inquam, quadruplicata, sed) quadrupla: nempe $\frac{2}{1} = 4 \times \frac{1}{2}$. 6°. Negamus item, *Rationem* tantundem esse atque *Inæqualitatem*, (quippe & æqualium ad invicem est ratio, non minus quam inæqualium:) Aut etiam idem atque *Intervallum*. Uti enim, in ratione, ut loquuntur, Arithmetica; eadem est Differentia (quæ subductionem spectat) inter 5 & 3, atque inter 3 & 5; non autem eadem ratio Arithmetica, 5 ad 3, & 3 ad 5; quippe illic, Excessus binarii; hic, binarii Defectus: Ita, in ratione Geometrica; idem est intervallum (divisione æstimandum) inter 2 & 1, atque inter 1 & 2: non autem eadem ratio; sed illic, dupla; hic, subdupla: sive,

illic innuitur duplo majus; hic, duplo minus. Et quidem, ut illic, licet eadem Differentia, non tamen idem Residuum; sed $5 - 3 = + 2$, $3 - 5 = - 2$: ita & hic, licet idem Intervallum, non tamen idem Quotiens; sed 1) 2 (2, 2) 1 ($\frac{1}{2}$. Neque magis sequitur, quoniam inter 2 & 1, atque 1 & 2, est idem intervallum, ergo & eadem Ratio, sive Relatio: quam, quoniam inter Patrem & Filium, atque Filium & Patrem, eadem est distantia, Ergo & eadem Relatio. Et quidem, ut, Generatio, commune Fundamentum est tum Paternitatis, tum Filiationis, relationum sibi mutuo oppositarum: Ita & Intervallum idem, est commune Fundamentum Rationis (quæ ipsa est Relatio) tum Duplæ tum Subduplæ; quæ interim ipsæ sunt Rationes oppositæ, sive Inversæ. Sed de his hactenus.

CAP. XXXVII.

De Aurea Regula. Ejusdem Praxis & Demonstratio. Exempla varia. Altitudinum per umbras mensuratio. Horæ diei, sub diversis meridianis, comparatio. Terminorum proportionalium præparatoria Reductio. Cautela, de non-proportionalibus. Gravium descensus acceleratus. Effluentis aquæ vis languescens. Terminorum proportionalium ordinatio. Terminorum præparatio; per Divisionem: per Multiplicationem. Dubii, de quantitatibus Heterogeneis, solutio. Operationis probatio.

Aurea Regula. AD Proportionum doctrinam, (quam in superioribus fusius tradidimus;) spectat, quæ dicitur, *Aurea Regula*; sive *Regula Trium* (Quæ ob insignem suum, quem, in tota Mathesi, usum habet, *Aurea* dici solet.) Qua nempe, *Terminorum quatuor proportionalium, datis Tribus, Quartus investigatur.*

Praxis. Si enim, *Tertius per secundum multiplicetur* (vel hic per illum,) *& productum dividatur per primum; Quotiens exhibebit Quartum quæsitum.*

Demonstratio. Sunto enim quatuor termini proportionales $A . B :: \alpha . \beta$. Datis A, B, α, prodibit $\beta = \frac{B\alpha}{A}$. Cum enim sit, ex hypothesi, $A . B :: \alpha . \beta$. adeoque (invertendo) $B . A :: \beta . \alpha$. hoc est. $\frac{B}{A} = \frac{\beta}{\alpha}$. Utrinque multiplicando in α, prodibit $\frac{B\alpha}{A} = \beta$. vel A) $B\alpha$ (β.

Vel item (ab origine) sic. Quoniam est, ex hypothesi, $A . B :: \alpha . \beta$. hoc est $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$; multiplicando utrinque in $B\beta$, erit $A\beta = B\alpha$. Adeoque, dividendo utrinque per A, erit $\beta = \frac{B\alpha}{A}$.

Vel, ut tironibus sit magis adhuc perspicuum, cum sit $A . B :: \alpha . \beta$. hoc est (per def. proportionalium, sive, ejusdem rationis) $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$. Si æqualia æqualiter multiplicentur, prodibunt æqualia. Adeoque si tum $\frac{A}{B}$, tum $\frac{\alpha}{\beta}$, ducantur in B; fiet, illic $\frac{A}{B} \times B = A$; hic, $\frac{\alpha}{\beta} \times B = \frac{B\alpha}{\beta}$; adeoque $A = \frac{B\alpha}{\beta}$. Iterumque, ductis utrisque in β; fiet, illic $A \times \beta = A\beta$; hic, $\frac{B\alpha}{\beta} \times \beta = B\alpha$: adeoque $A\beta = B\alpha$. (Hoc est;

eft; Ex quatuor proportionalibus, factum ab extremis æquatur facto à mediis: quod & superius aliquoties demonstravimus.) Denique, si æqualia æqualiter dividantur, orta erunt æqualia. Adeoque, si tum Aβ, tum Bα, dividatur per A; erit, illic A) Aβ(β; hic, A) Bα ($\frac{B\alpha}{A}$. adeoque $\beta = \frac{B\alpha}{A}$. quod erat demonstrandum.

Per hanc Regulam solvi solent hujusmodi Problemata.

Si 3 pondo mercium constant 5 solidis, quot solidis constabunt earundem mercium pondo 15. Quoniam in quæstione supponitur, merces esse æque charas; erit, ut merx ad mercem, sic precium ad precium; Adeoque ut 3, numerus mercium emptarum; ad 15, numerum emendarum: ita 5 numerus pretii dati; ad numerum pretii quæsiti. Nempe *Exempla.*

pondo. pondo. sol. sol.
3 . 15 :: 5 . Q.

Vel, quia jam de numeris ubique agitur, erit, alternando, ut merx, ad pretium; sic merx, ad pretium. Nempe.

pondo. sol. pondo sol.
3 . 5 :: 15 . Q.

Solvitur autem, juxta præsentem regulam, ducendo terminum secundum in tertium, (sive, quod perinde est, tertium in secundum,) unde fit $5 \times 15 = 75$: & dividendo per primum, 3) 75 (25 = Q. sive $\frac{75}{3} = 25 = $ Q. Adeoque pretium quæsitum est, 25 solidorum.

15
5
3) 75 (25 = Q.

Item, *Si 3 dierum stipendium, sint 2 solidi, dierum 12 stipendium quantum erit.* Hoc est $3^d. 2^s :: 12^d.$ Q. Multiplicentur invicem 2 in 12, fiet $2 \times 12 = 24$. tum dividendo per 3, prodibit 3) 24 (8 = Q. Dierum itaque 12, stipendium est 8 solidorum.

12
2
3) 24 (8 = Q.

Pariter, *Si Argenti unciæ duæ valeant (in moneta Anglicana) decem solidos; quæritur; quanti valebunt unciæ duodecim, sive una libra Argenti?* Solvitur, ut prius; invento termino quarto Q = 60. Adeoque una libra argenti valere deprehenditur 60 solidos Anglicanos, sive tres libras monetæ.

2 . 10 :: 12 . Q.
10
2) 120 (60

Pariter, Sicui libeat *altitudinem Turris, in plano erectæ, per umbram æstimare*; id ita fiat. Erigatur in eodem plano (vel saltem parallelo) palus seu baculum, notæ longitudinis A (puta pedum 6;) umbram splendente Sole projiciens, cujus mensura sit B, (puta pedum 2.) Eodem tempore, mensuretur umbra Turris, quæ sit β, (puta pedum 20.) & quæratur, Quanta sit Turris altitudo α? Quoniam itaque in simili situ, umbræ sint Altitudinibus proportionales; erit B . A :: β . α. hoc est 2 . 6 :: 20 . α. Et, facta operatione, invenitur = 60 ped. Altitudo Turris. *Altitudinum per umbras mensuratio.*

B . A :: β . α. 2 . 6 :: 20 . α.
A 6
B) Aβ ($\frac{A\beta}{B} = \alpha$. 2) 120 (60 = α.

Similiter, Si quæratur. *Quota sit hora Athenis, quando est, Oxoniæ, octava.* Præsciendum autem hic est, ex Geographia, Athenas magis ad Orientem positas, quam est Oxonia, gradibus (plus minus) triginta. Ideoque citius ad Athenarum Meridianum perventurus est Sol, quam ad nostrum Oxoniæ. Quæritur autem, quanto citius? Hoc autem ut expediatur, sciendum est insuper, Solem horis (circiter) 24, integrum diurnum circulum transigere, & ad eundem unde abierat Meridianum redire. Ponuntur autem, in circulo integro, gradus 360. His positis, sic instituitur Analogismus. *Si Sol, in horis 24, peragat gradus 360; quot horis peragit gradus 30?* Adeoque, cum eadem æquabili celeritate motum, transigat spatia temporibus proportionalia; erit, ut gradus 360. ad gradus 30 :: ita tempus horarum 24 ad tempus quæsitum, nempe horarum 2, ut ex adjuncta operatione constabit. *Horæ dici, sub variis meridianis, comparatio.*

gr. gr. h. h.
360 . 30 :: 24 . Q = 2.
30
360) 720 (2 = Q.

gr. h. gr. h.
360 . 24 :: 30. Q = 2.
30
360) 720 (2 = Q.

Horis itaque duabus (circiter) ad meridianum Atheniensem Sol citius pervenit, quam ad *Oxoniensem*; adeoque illorum meridies est, nostro, duabus horis prior. Nempe illic, meridies est, sive hora duodecima; dum hic, est decima. Adeoque illic hora decima, dum hic octava est.

Terminorum per Reductionem præparatio.

Si vero contingat, Homologos terminos, in quæstione propositos, non ejusdem (ut loquuntur) denominationis esse; reducendi prius erunt termini ad eandem denominationem, quam procedat peculiaris hujusce regulæ praxis. Puta, Si proponatur hujusmodi quæstio; *Posito, quod tres unciæ argenti valeant quindecim solidos Anglicanos, quanti valebunt argenti pondo quatuor?* Cum hic quatuor supponantur termini proportionales, quorum duo, pondus respiciunt; reliqui duo, valorem; qui autem pondus respiciunt, non eandem sortiantur denominationem; sed de unciis, ille; hic, de libris seu pondo, pronunciat; Reducendi sunt hi duo termini ad eandem denominationem; priusquam instituatur praxis hac regula imperata. Adeoque; vel, pro 3 unciis, substituendum $\frac{1}{4}$ libræ; (quippe, cum libra contineat duodecim uncias; erunt tres unciæ, libræ quadrans;) ut quæstio sic instituatur; *Ut $\frac{1}{4}$ libræ, ad 4 libras; sic 15 solidi, ad valorem quæsitum.* Vel, pro 4 libris, substituendum, 48 uncias; (quippe, cum libra contineat 12 uncias, 4 libræ continebunt $4 \times 12 = 48$ uncias,) ut quæstio sic instituatur; *Ut 3 unciæ, ad 48 uncias; sic 15 solidi, ad valorem quæsitum.* Utrovis modo, prodibit valor quæsitus, 240 solidorum; hoc est, 12 librarum monetæ Anglicanæ, ut ex operatione patet.

$\frac{1}{4}$. 4 :: 15 . Q.
4
$\frac{1}{4}$) 60 (240 = Q

3 . 48 :: 15 . Q.
15
3) 720 (240 = Q.

Quomodo autem hujusmodi instituendæ sint reductiones, superius ostensum est, ubi de Multiplicatione & Divisione verba fecimus: nec opus est hic repetere.

Cautela de non proportionalibus.

Verum hic cavendum est, nequando fraudi sit, indeque error suboriatur; quod ea tanquam proportionalia habeantur, quæ proportionalia non sunt.

Gravium descensus acceleratus.

Exempli gratia; Si, *posito, quod pondus gravitate sua motum, duobus temporis momentis 20 pedes descendat; quæratur, quot pedes descensurum sit momentis* 10. Si fiat hic multiplicatio numeri tertii per secundum, atque producti divisio per primum, prodibit quartus 100. At ille numerus quæsito non satisfacit. Quamvis enim verum sit, pondus illud eadem velocitate motum, 100 pedes, 10 momentis, peracturum, qua, 20 pedes, 2 momentis peragebat; quia tribus datis 2 . 10 :: 20. quartus proportionalis est 100 : attamen haud recte sic responsum iri dicimus; quia grave descendens, non æquabili procedit motu, sed motu accelerato; atque eo quidem celerius quo diutius fuerit in motu. Dico, *quo diutius fuerit in motu*, non autem, (quod vulgo aiunt Physici,) *quo sit centro propius*. Non enim propinquatio ad centrum, sed ab initio motus elongatio, seu potius continuatio motus, est causa auctæ celeritatis.

t t p p
2 . 10 :: 20 . Q = 100
10
2) 200 (100 = Q.

A
B
C
D

Nam si grave demissum à puncto C, cadat ad punctum D; atque idem grave à puncto A demissum cadat item ad punctum D, (per lineam A B C D.) utroque casu transibit spatium C D, sed non eadem celeritate; segnius enim per illud spatium movebitur, si moveri incipiat à puncto C, quam si motus, per spatium A C inchoatus, per reliquum C D continuetur. At vero spatium illud C D, eadem distantia abest à centro, sive ab A, sive à C, motus inchoetur. Porro, si ponantur æqualia spatia, A B, B C, C D: Pondus per spatium A B jam delapsum, continuabit motum per spatium B C, majori velocitate, quam per spatium C D moveretur, si motum à puncto C inchoaverit. Propius tamen à centro

centro abest spatium CD, quam BC: verum illud (BC) ab initio motus (à puncto A inchoati,) magis distat, quam ab initio motus (inchoati à C) distat spatium CD. Quæ omnia tum experienti erunt comprobata, tum ab iis tradita qui de motuum acceleratione acutissime scripserunt. Omnes itaque rationes illæ, quæ apud Physicos passim occurrunt, de motus naturalis celeritate aucta, à propinquitate ad centrum ducta, penitus evanescunt. Quippe non tam terminus ad quem, quam terminus à quo, in motuum acceleratione spectandus erit.

Idem peccabitur, si hujusmodi proponatur problema quasi hac regula solvendum; *Si vas 12 congiorum capax, aqua impleatur; atque, aperto in fundo foramine, exeant in duobus horæ minutis tres congii; quæratur autem, quanto tempore tota exibit aqua?* Proposita quippe quæstione, si 3 congii effluant in 2 minutis, 12 congii in quot minutis exibunt. Respondendum esset, juxta hujusce regulæ tenorem, totam exituram aquam minutis octo; quia 3 . 2 :: 12 . 8. Atque hoc quidem verum esset; modo aqua eadem pergeret velocitate exire qua cœperat. At secus omnino se res habet. Siquidem continue decrescit exeuntis aquæ celeritas, & quo minus superest exhauriendum aquæ, eo segnius exit. Majore nempe & violentia & velocitate effluet aqua vase pleno, quam semipleno; quoniam aqua inferius exitura majore mole superioris aquæ premitur. (Non obstante, quod vulgo admitti solet, principio, *De gravi in loco suo*, hoc est, in rem vel æque vel magis gravem, *minime gravitante*.) Cui fidem facient ipsi oculi, si attendatur quanto majore vi & velocitate, ex dolio cervisiæ pleno, per eundem canalem exeat cervisia, quam cum propemodum evacuatur. *Effluentis aquæ vis languescens.*

3 . 2 :: 12 . Q
2
3) 24 (8 = Q

Quibus autem gradibus vel crescit velocitas cadentis ponderis, vel decrescit velocitas per canalem exeuntis aquæ non hujus loci est inquirere. Sufficit impræsentiarum monuisse, hanc, quam præ manibus habemus, regulam, non nisi de quantitatibus vere proportionalibus procedere. Docet enim, *Datæ quantitati aliam in data ratione ponere.* Nempe quæritur quantitas quarta, quæ, ad tertiam datam, eandem habeat rationem, quam habet secunda ad primam; vel, ad quam tertia data, eandem habeat rationem, quam habet prima ad secundam.

Cavendum porro, ut datarum trium quantitatum, quælibet suo loco ponatur. Non enim promiscue quælibet in quolibet loco ponenda est, sed in suo singulæ. Neque etiam illi semper primus debetur, quæ in quæstione proposita, primo occurrit. Sæpe enim quæstio proposita variis ambagibus & involucris involvitur; quæ prius tollenda sunt, quam proportio rite constituta appareat: Ut in ea quam modo exposuimus de differentia meridianorum Atheniensis & Oxoniensis. Sæpe etiam quæstio minus directe proponitur. Ut si exposita de Argenti valore quæstio, ita proponeretur, *Si 10 solidi Anglicani tantundem valeant atque 2 unciæ argenti; quanti valebunt unciæ 12?* Non enim hic 10, sed 2, est proportionis terminus primus; utut ille in quæstione primum audiatur. *De Porportionis terminis rite ordinandis.*

Ut igitur suo ponantur loco singuli termini; curandum est, ut quatuor quantitates (nempe tres datæ & quarta quæsita) ita disponantur ut prima supponatur eam habere rationem ad reliquarum alteram, quam habet reliqua ad quartam. Secus enim non erunt quatuor proportionales. Adeoque, in quæstione proxime exposita, primus terminus nec erit 10, nec 12. sed 2. Secundus autem, pro libitu, erit vel 10, vel 12. Nempe, Ut 2 unciæ, ad 10 solidos; sic 12 unciæ, ad solidos quot? Nam ut numerus ponderis prioris, ad numerum valoris sui dati; sic supponitur numerus ponderis posterioris, ad valorem suum quæsitum? Vel etiam, ut 2 unciæ, ad 12 uncias; Sic 10 solidi, ad solidos quot? Nam quæ ratio est ponderis ad pondus, ea supponitur & valoris ad valorem. Atque hæc de terminis ordinandis sufficiant.

$2^{unc} . 10^{sol} :: 12^{unc} . Q^{sol}.$
$2^{unc} . 12^{unc} :: 10^{sol} . Q^{sol}.$

Terminis ita rite ordinatis; perinde omnino est (quod & jam diximus) sive terminum tertium in secundum, sive hunc in illum ducamus. Non modo, quia (quod modo dictum est) perinde est utrum duorum secundo tertiove loco ponamus: sed maxime, quia duorum invicem ducendorum, perinde est utrum duorum multiplicatorem esse faciamus, aut multiplicandum: quod de multiplicatione superius universim dictum est. *De praxios varietate.*

Sed

Sed & perinde eſt, ſive Multiplicationem, ſive Diviſionem, prius inſtituamus. Sive enim terminorum ſecundi tertiique invicem ductorum productum per primum dividamus; ſive mediorum (ſecundi & tertii) utrovis per primum diviſo, quotientem in reliquum ducamus; perinde omnino eſt: Idem enim utcunque prodibit terminus quartus. (Quod & ſuperius de multiplicatione & Diviſione tradidimus univerſim: Nempe, quoties plures continue faciendæ ſunt Multiplicationes & Diviſiones, perinde eſt quo ordine inſtituantur.) Nam ſi A . B :: α . β, erit omnino $\frac{B\alpha}{A} = \frac{\alpha B}{A} = \frac{B}{A}\alpha = \frac{\alpha}{A}B = \beta$. Vel, ſpeciatim in numeris, ſi ſit verbi gratia, 3 . 9 :: 6 . 18. erit $\frac{9 \times 6}{3} = \frac{6 \times 9}{3} (= \frac{54}{3}) = \frac{9}{3} \times 6 (= 3 \times 6) = \frac{6}{3} \times 9 (= 2 \times 9) = 18$. Adeoque cujuſvis arbitrio permittitur, ut, pro re nata, eo ordine inſtituat operationes, quo magis pro hic & nunc (ut loquuntur) videbitur accommodum.

Interim vero, in tradenda regula, nos (cum aliis) multiplicationem potius præpoſuimus, qua fractionum incommodum melius evitetur. Si enim verbi gratia, inſtituatur proportio 2 . 5 :: 8 . Q. velim autem ſecundum per primum dividere, prodibit 2) 5 ($2\frac{1}{2}$, adeoque terminus tertius 8 per $2\frac{1}{2}$, (numerum fractionis adjectione impeditum) multiplicandus: Si vero mediorum productum $5 \times 8 = 40$, dividam per primum, 2) 40 (20, prodibit utrobique numerus integer; eodem autem ſucceſſu, (utut minori labore,) nam tum $8 \times 2\frac{1}{2} = 20$, tum $\frac{40}{2} = 20 = Q$. Item ſi inſtituatur proportio 2 . 5 :: 7 . Q. Et velim ſecundum per primum dividere, 2) 5 ($2\frac{1}{2}$, adeoque multiplicare $7 \times 2\frac{1}{2}$; vel etiam tertium per primum dividere, 2) 7 ($3\frac{1}{2}$, adeoque multiplicare $5 \times 3\frac{1}{2}$: operatio utrovis modo impeditior erit, quam ſi prius multiplicatis mediis, $5 \times 7 = 35$, fiat tandem diviſio per primum 2) 35 ($17\frac{1}{2}$ Quamvis enim & hic tandem prodeat fractio, tamen quæ ulteriorem difficultatem non procreabit; quippe illic ſiſtendum eſt, nec alia ſecutura operatio quæ per fractionis adjectionem reddatur perplexior.

Si quando autem, jam ante peractas operationes, proſpiciat quis mediorum alterum poſſe per primum ita dividi ut nulla ſuperſit fractio; commodum erit diviſionem illam præmittere; ita enim operationes minoribus numeris exercebuntur. Puta in analogia jam dicta 2 . 5 :: 8 . Q. commodum eſſe poterit, (non quidem ſecundum, ſed) tertium, per primum dividere, 2) 8 (4; & quotientem in reliquum ducere, $4 \times 5 = 20 = Q$.

Terminorum præparatio, per Diviſionem.

Nonnunquam item commodum erit, præcedanea terminorum expoſitorum diminutione, operationem expeditiorem reddere. Fit autem illud vel terminum primum & ſecundum, vel primum & tertium, ubi id fieri poſſe perſpicitur, per communem diviſorem dividendo: vel etiam eorum utrumque nonnunquam faciendo. Puta in proportione 6 . 9 :: 8 . Q. Si primum & ſecundum, per 3 dividamus; (eorumque loco quotientes ſubſtituamus;) habebitur proportio 2 . 3 :: 8 . Q. Sin primum & tertium dividamus per 2; prodibit 3 . 9 . 4 . Q. Si denique utrumque fiat; puta tum primo primum & ſecundum dividamus per 3, tum primum (jam abbreviatum) & tertium per 2; prodibit 1 . 3 :: 4 . Q. Eodem ubique ſucceſſu: Erit enim ubique terminus quartus quæſitus Q = 12.

```
2   3
6 . 9 :: 8 . Q = 12.

3       4
6 . 9 :: 8 . Q = 12.

1
2   3   4
6 . 9 :  8 . Q = 12.
```

Similiter in ſpeciebus, ſive ſymbolis: Si exponatur

Analogiſmus	ABC . ADE :: BEF . Q.
ſubſtituatur	BC . DE :: BEF . Q.
vel etiam	AC . ADE :: EF . Q.
vel denique	C . DE :: EF . Q.

Idem enim utcunque prodibit terminus quartus, vel qui tantundem valent; puta $\frac{ADE \times BEF}{ABC} = \frac{DE \times BEF}{BC} = \frac{ADE \times EF}{AC} = \frac{DE \times EF}{C} = DEqF = Q$. Et ſimiliter alibi.

Aliquando

Aliquando item, multiplicatione, fiet accommoda terminorum præparatio. Si nempe vel primus & secundus, vel primus & tertius, eodem communi multiplicatore multiplicentur; (vel etiam utrumque fiat:) quo pacto fractionum molestia facile evitatur. Puta si exponatur analogismus, $\frac{5}{2}.4::3.Q.$ commode substituamus vel primi & secundi, vel primi & tertii duplum; puta $5:8::3.Q.$ vel $5.4::6.Q$ Item pro $3)\frac{5}{3}.\frac{2}{3}::\frac{1}{2}.Q.$ substituamus vel $\frac{5}{2}.2::\frac{1}{2}.Q.$ vel $\frac{5}{3}.\frac{2}{3}::1.Q.$ vel etiam $5.2::1.Q.$ Similiter in symbolis pro *Per Multiplicationem.*

Analogismo $\frac{Aq}{BC}.\frac{DE}{BF}::\frac{GH}{CF}.Q.$

Substituamus (ductis primo & tertio in C) $\frac{Aq}{B}.\frac{DE}{BF}::\frac{GH}{F}.Q.$

vel (ductis primo & secundo in B) $\frac{Aq}{C}.\frac{DE}{F}::\frac{GH}{CF}.Q.$

vel potius (utroque facto) $Aq.\frac{DE}{F}::\frac{GH}{F}.Q.$

vel (ductis item primo & secundo in F) $AqF.DE::\frac{GH}{F}.Q.$

vel denique (ductis adhuc primo & 3°. in F) $AqFq.DE::GH.Q=\frac{DEGH}{AqFq}$

Commune harum præparationum fundamentum est, quod Multiplorum ad æquimultipla, eadem est ratio atque simplorum ad simpla. Puta $3\times2.4\times2::3.4.$ Item $\frac{3}{5}.\frac{4}{5}::3.4.$ Item $3A.4A::3.4.$ Et $BA.CA::B.C.$ Et $\frac{B}{A}.\frac{C}{A}::B.C.$ Et similiter alibi.

Unus adhuc superest, qui nonnullum morari possit, scrupulus. Nempe cum certum sit analogias non raro institui inter quantitates heterogeneas, (puta ut linea A, ad lineam B; sic pondus α, ad pondus β;) quî possit una in alteram multiplicari, aut per eam dividi? item, quid sit, verbi gratia, pondus α in lineam B multiplicare, aut per lineam A dividere? Quale enim factum illud erit cujus longitudo est Linea; latitudo Pondus? aut qualis quotiens, ubi quæritur quoties pondus α contineat lineam A? *Dubium, de Quantitatibus Heterogeneis.*

Dicimus itaque, non hic tam comparari lineam ad pondus; quæ quidem plane heterogenea sunt, nec invicem comparanda: sed rationem duarum inter se linearum, ad rationem duorum invicem ponderum: Quæ quidem rationes invicem homogeneæ sunt, puta dupla, tripla, sesquialtera; sumpta nempe denominatione à quotiente antecedentis per consequentem divisæ. Est autem quotiens ille, ut superius traditum est, vel numerus, vel saltem in genere numeroso aliquid, ipsisque numeris homogeneum; puta numerus fractus, aut surdus, aut tale quid. Adeoque quum dicitur $A.B::\alpha.\beta.$ hoc tantum innuitur, rationem A ad B sive $\frac{A}{B}$, æqualem esse rationi α ad β, sive $\frac{\alpha}{\beta}$. Vel quod tantundem valet, quotientem quantitatis A per homogeneam B divisæ, æqualem esse quotienti quantitatis α per sibi homogeneam (utut prioribus heterogeneam) divisæ. Puta, si A sit linea bipedalis; B, pedalis; erit illa hujus dupla, sive ut 2 ad 1. Item, si α sit quadripondium; β, bipondium, erit illud hujus duplum, sive ut 2 ad 1. Quippe erit, tum B) A (2, tum β) α (2. Adeoque $\frac{A}{B}=\frac{\alpha}{\beta}=2=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}$ &c. Cum itaque nihil hic aliud spectetur, quam ratio, sive etiam quotiens: licebit, pro expositis quantitatibus, alias cujuscunque generis substituere, quæ in eadem sint ratione constitutæ, sive eundem quotientem exhibeant; utut expositis sint heterogeneæ. Arithmeticus itaque, quo operationes suæ rectius constent, pro expositis quantitatibus cujuscunque generis, quarum tantum ratio consideratur, numeros substituit (sive quod numeri instar est) in eadem ratione constitutos. Puta, pro lineis A, B, bipedali & pedali, binos quosvis in eadem ratione numeros, puta *Ejusd. solutio*

2, 1; vel 4, 2; vel 6, 3; &c. quia utcunque $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{A}{B}$: Et, pro expositis, æqualia substituendo, quantitas non immutatur; sed utrobique tantundem est. Proinde itaque est sive dicat, ut linea bipedalis A, ad pedalem B; sive, ut numerus 2 ad 1; sive ut 4 ad 2; &c. propter Quotientem, adeoque & Rationem, (quæ hic solum spectatur,) utrobique æqualem. Et quamvis, pro numeris his, nonnunquam & symbola iterum substituat, vel etiam quæ linearum erant retineat; ea tamen quasi pro numeris habet, eaque numerorum instar tractat versatque. Nec tam lineas & pondera, quam numeros, in iisdem, cum lineis & ponderibus, rationibus, constitutos, se versare cogitat. Itaque in exemplo exposito, si A, B, supponatur significare 4, 2: (quia nempe $\frac{A}{B}=\frac{4}{2}$) manentibus interim si placet α, β, ut ponderum symbolis: tantundem erit dicere $A.B::\alpha.\beta$; atque $4.2::\alpha.\beta$. Adeoque secundi & tertii rectangulum $B\times\alpha$, est $2\times\alpha$, sive ponderis α duplum: Et $\frac{B\times\alpha}{A}$, est $\frac{2\times\alpha}{4}$, sive istius dupli quadrans. At vero, pondus duplare, iterumque quadrifariam partiri, nihil absurdi sonat.

Vel etiam simplicius rem ita explicemus. Quoniam ponuntur tum A, B, tum α, β, quantitates utrobique homogeneæ, (utut hæ ad illas heterogeneæ;) divisa quantitate B per A, quotiens erit numerus (sive quod numeri instar est) rationem denominans; puta $N=\frac{B}{A}$. Adeoque $\frac{B\times\alpha}{A}$ hoc est $\frac{B}{A}\times\alpha$, tantundem est atque $N\times\alpha$. Et propterea $\frac{B}{A}\times\alpha=\beta$ vel $N\times\alpha=\beta$: significat quantitatem α (cujuscunque fuerit generis) ducta in N numerum qui denominat rationem B ad A, (quantitatem autem quamlibet, per numerum multiplicari, nihil est absurdi,) quod æquabitur quantitati β: vel quod tantundem est, quantitatis α totuplum, quotuplum B est τῆ A, (vel etiam tantuplum quantuplum &c.) æquatur quantitati β.

Examen. Solent hic nonnulli Arithmetices practicæ Magistri, operationis hujus examen adjicere; ut nempe melius constet, si quod oriatur dubium, num probe peracta sit operatio. Potest autem id variis modis fieri.

Nonnulli sic instituunt. Ductis tum termino primo in quartum, tum secundo in tertium, si utrobique idem productum emergat, indicio est rem probe peractam esse. (Puta si propositis $3.5::9.Q$. prodeat quartus $Q=15$. Facto examine, reperietur $3\times15\ (=45)=5\times9$. adeoque $3.5::9.15$. proportionales esse, atque operationem recte institutam.) Nam si, quatuor terminorum, factum ex mediis æquetur facto ab extremis, sunt illi quatuor termini proportionales. Cujus Demonstratio superius aliquoties adducta est.

Vel sic. Si terminus quartus, modo inventus, jam fiat primus, atque operatio inverse instituatur: Nempe ut qui quartus erat ad tertium, ita qui secundus erat, ad quæsitum; factaque operatione prodeat qui fuerat primus, recte processit operatio; sin minus, alicubi erratum est. Puta, si, ut prius, expositis $3.5::9.Q$, & prodeat quartus $Q=15$. adeoque $3.5::9.15$. Examen instituo invertendo proportionem $15.9::5.Q$ (Nam si quantitates sint proportionales, erunt & inverse proportionales; ut supra ostensum est.) Et quoniam, sic facta operatione, prodit quæsitus $Q=3$, (qui prius fuerat terminus primus, jam autem quartus,) patet operationem recte peractam esse.

Vel sic potius $5.3::15.Q=9$. aut sic, $9.3::15.Q=5$. Ut 5 vel 3, qui prius fuerat Multiplicator, jam fiat Divisor. Sed aliis hujusmodi multis modis institui potest hoc examen: Nec tamen tanti est ut plures recenseam.

Atque hactenus de *Aurea Regula* quæ dicitur *Directa*, dictum esto. De *Regula inversa* dicetur Capite sequente.

CAP.

CAP. XXXVIII.

De Aurea Regula reciproca. Ejusdem à Directa, discrimen. Praxis, & Demonstratio. Quæstiones per hanc regulam solvendæ. De operationum compendiis & probationibus. Reductio hujus ad regulam Directam.

AUrea quæ dicitur *Regula inversa*, sive *Reciproca*, est ubi *expositis tribus quantitatibus quæritur quarta reciproce proportionalis*. Dicimus autem *Reciproce Proportionalia, quando Rationum Comparatarum* (nempe primi ad tertium, & secundi ad quartum) *altera, est alterius Inversa*. Ut $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}$; vel $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$. Adeoque, verbi gratia, 4. 18 ⁝ 6. 12. erunt Reciproce proportionalia; propter $\frac{4}{6} = \frac{12}{18}$ & $\frac{18}{12} = \frac{6}{4}$. Atque in aliis similiter. *Regula aurea Inversa.*

Differt autem à *Regula Directa*, quam præcedente capite exposuimus, quod ut illic spectatur æqualitas Rationum, vel Quotorum; ita hic, æqualitas Rectangulorum sive Factorum. Nempe illic, ut terminus primus ad secundum, sic tertius ad quartum quæsitum: adeoque idem emergit Quotiens tum ubi primus per secundum, tum tertius per quartum dividitur, (quod est æqualium sive earundem rationum genuinum & simplicissimum criterion.) Hic autem, rectangulum sive factum à primo in secundum ducto, æquatur Rectangulo sive Facto à tertio in quartum quæsitum ducto. *Quomodo à directa differt.*

Exempli gratia. *Si ager longus perticas 40, latus 4, contineat jugerum terræ*, (Acram, vulgo dicimus:) *quæritur, quam latus sit oportet, qui nonnisi 20 perticas longus est, ut eadem terræ quantitas habeatur?* Manifestum hic est, cum utrobique æqualis terræ quantitas spectetur, quæ ex latitudine & longitudine comparatis emergit; quo in altero longitudo major sit, eo minor sit latitudo necesse est, & contra; ut alterius defectum alterius excessus compleat. Adeoque, ut prioris longitudo ad latitudinem suam, sic posterioris longitudo (non directe, nam sic prodiret figura similis, non æqualis, sed) reciproce ad suam latitudinem. Sive, ut longitudo secundi ad longitudinem primi, sic primi latitudo ad latitudinem secundi. Nam hoc est, *reciproce proportionales esse*, per. 2 *def*. 6. Adeoque si prioris longitudo ponatur A, latitudo B; secundi longitudo α, latitudo β: erit A . α :: β . B. sive β . B :: A . α. ut sit $A \times B = \alpha \times \beta$.

Hujusce Regulæ praxis hæc est. *Si, trium terminorum, quod fit ex primo in secundum ducto, dividatur per tertium, prodibit quartus reciproce proportionalis.* *Ejus praxis.*

Adeoque, cum in exposito exemplo, prioris agri longitudo A, ducta in suam latitudinem B, faciat rectangulum A B; facta divisione per α secundi longitudinem, prodibit hujus latitudo quæsita $\beta = \frac{AB}{\alpha}$. Vel, in numeris, cum prioris longitudo 40, ducta in latitudinem suam 4, fit $160 = 40 \times 4$. facta divisione per datam secundi longitudinem 20, prodibit hujus latitudo $8 = \frac{160}{20}$. In hoc itaque differt praxis hæc, à praxi præcedentis regulæ, directæ; quod illic, terminus primus est divisor; hic, tertius.

```
     A
   × B
α ) A B ( β

    40
  ×  4
20 ) 160 ( 8
```


Demon-

Demonstratio. Demonstratio praxeos hæc erit. Quoniam, ex hypothesi, ponitur rectangulum primi in secundum, æquale rectangulo tertii in quartum; hoc est $A \times B = \alpha \times \beta$, sive $AB = \alpha\beta$; erit utrinque dividendo per α, $\frac{AB}{\alpha} = \beta$.

Quæstiones per hanc regulam solvendæ. Quæstiones per hanc regulam solvendæ, ab iis quæ solvendæ sunt per præcedentem; sic distinguant Tirones. Si, ex natura quæstionis, quo major sit terminus tertius, eo major requiratur quartus; regulæ directæ opus est. Sin, quo major tertius eo minor requiritur quartus, sive quo minor tertius, eo major quartus; inversæ regulæ opus erit.

12 . 20 : : 6 . Q = 10.
6
12) 120 (10 = Q

Verbi gratia; *Si quis 12 horis conficiat milliaria 20; idem horis 6, quot conficiet.* Quoniam, hic manifestum est, longiori tempore plura conficienda milliaria; quo major est terminus tertius (numerus horarum) eo major erit & quartus, numerus milliarium quæsitus. Et propterea, per auream regulam directam, invenitur terminus quartus quæsitus, 10.

12 . 20 : 6 . Q = 40.
12
6) 240 (40 = Q.

Contra vero; *Opus à viris 12, diebus 20 perficiendum; si aggrediantur viri 6, quot illi diebus hoc perficient?* Quoniam liquet, ex quæstionis natura, pauciores viros nonnisi pluribus diebus idem opus confecturos; adeoque quo minor est terminus tertius, (virorum numerus;) eo major futurus sit terminus quartus, (numerus dierum requisitus;) per regulam itaque inversam, quærendus est terminus quartus, 40.

Eodem modo: *Sit tapeti lato pedes 9, longo 20, obducendus pannus vilior, qui totum tegat, latus pedes 3; quæritur quot pedes longus esse debeat, ut negotio sufficiat?* Quoniam hic manifestum sit, quo minorem habeat latitudinem pannus hic, eo majorem requiri longitudinem, qua latitudinis defectus suppleatur: per regulam inversam, reperietur longitudo quæsita, pedum 60. Atque in aliis pariter.

9 . 20 : 3 . Q = 60.
9
3) 180 (60 = Q.

De operationum compendiis; & probationibus. Quæ autem operationum compendia, de Regula directa, in Capite præcedente ostendimus, (sive quoad ordinem operationum perficiendarum, sive etiam terminorum præcedaneam reductionem,) etiam hic, mutatis mutandis, locum habent. Nec opus est ut ea sigillatim hic repetam; sed potius ut lectoris sagacitati permittatur, quæ illic dicta sunt hic aptare. Quod & de Probationibus illic traditis, intellectum velim; quas, qui tanti esse putet, etiam huc, mutatis mutandis, non difficulter transferat.

Reductio hujus Regulæ ad directam. Notandum denique, *Proportionem Reciprocam, in Directam conversum iri, si qui in reciproca est terminus tertius, statuatur in directa primus.* Nempe si sit

In proportione reciproca 9 . 20 : 3 . Q = 60.
Erit in proportione directa 3 . 20 : : 9 . Q = 60.

Reciproce.	Directe.
9 . 20 : 3 . Q = 60.	3 . 20 : : 9 . Q = 60.
9	9
3) 180 (60 = Q.	3) 180 (60 = Q.

Atque hactenus de Aurea Regulâ simplici; sive Regula Trium; tam directa, quam Reciproca. Sequitur ut de Multiplici verba faciam; ubi nempe plures quam tres occurrunt termini, ipsaque Proportionis Regula sæpius repetenda. Estque ea, vel, quæ vocatur *Aurea Regula composita*; vel quæ *Regula Societatis* dicitur. De quibus in sequentibus Capitibus dicetur.

CAP.

CAP. XXXIX.

De Aurea Regula composita. Tum ubi omnes Analogiæ componentes, sunt directæ: tum ubi altera, vel etiam plures, sunt reciprocæ.

Regula quæ dicitur *Aurea Composita*, ex duabus vel pluribus Analogiis constat. Adeoque Regulæ simplicis operationem aliquoties iterandam esse (saltem virtualiter) postulat. Iisdem autem nititur principiis Regulæ compositæ, atque simplicis processus: ut non sit opus longa præparatione, sed exemplis aliquot operandi methodum exhibere. *Regula Aurea Composita.*

Esto hoc Exemplum. *Si 4 Academici, in 3 Mensibus, expendant 20 libras; quot libras expendent Academici 6, in mensibus 12, sive anno integro?*

4 . 20 :: 6 .
3 .   12 . Q.

Manifestum est, in hac quæstione, duplicem Analogiam reperiri. Comparantur enim tum personæ personis, tum tempus tempori, ut ex utrisque collatis reperiatur ratio expensarum.

Resoluta itaque hac Analogia composita in duas simplices; Dicimus Primo. *Si 4 Academici, expendant 20 libras; quot libras expendent 6 Academici eodem tempore?* (Adeoque seponimus paulisper diversorum in quæstione temporum considerationem.) Et, operatione peracta, patebit, 30 libras, à 6 Academicis, expendendas eodem tempore quo Academici 4 expendunt libras 20: hoc est, ex hypothesi, in 3 mensibus.

4 . 20 :: 6 . Q.
6
4) 120 (30 = Q.

Deinde, (resumpta jam temporis consideratione) *Si sex illi Academici expendant* (uti jam inventum est) *in 3 mensibus, 30 libras; quot libras expendent in mensibus 12?* (Ubi terminus quartus, priori analogia inventus, fit, in secunda analogia, secundus: ut tandem habeatur terminus ultimo quærendus.) Facta itaque operatione, prodibit Q = 120, numerus quæsitus principalis.

3 . 30 :: 12 . Q.
30
3) 360 (120 = Q.

Exposita itaque analogia composita resolvitur in has binas simplices.

Composita.	Simplices.
4 . 20 :: 6 .	4 . 20 :: 6 . q .
3 12 . Q.	3 . q :: 12 . Q.

¶ Idem autem omnino tandem prodiret, si prius temporis, deinde autem personarum collatio institueretur. Puta primo, si (quatuor expositi Academici) *expendant, mensibus 3 libras 20; iidem mensibus 12 expendent quot libras?* Respondendum, 80. Deinde, *si* (in 12 mensibus) *4 Academici expendunt* (ut jam ex priori quæsito liquet) *80 libras; quot libras* (eodem tempore) *expendent 6?* Respondendum (ut ex operatione peracta liquet) libras 120.

3 . 20 :: 12 . q = 80.
12
3) 240 (80 = Q.

4 . q = 80 :: 6 . Q = 120.
6
4) 480 (120 = Q.

Resoluta nempe analogia composita; [Si 3 mensibus, 4 viri expendant libras 20; mensibus 12, viri 6, quot expendent?] in binas simplices; alteram de temporum, alteram de personarum, collatione.

Composita.	Simplices.
$3 . 20 :: 12$ $4 \quad\quad 6 . Q.$	$3 . 20 :: 12 . q = 80.$ $4 . q = 80 :: 6 . Q = 120.$

Totius processus ratio, ex se satis patet; cum non aliud sit quam operatio simplex bis peracta; nec nova indigebit demonstratione.

Praxis altera. Quod autem binis Aureæ Regulæ operationibus jam peractum est, *Potest id ipsum una operatione composita peragi: Si nempe utriusque analogiæ simplicis primi termini invicem ducti, habeantur pro termino primo analogiæ compositæ: & similiter simplicium termini tertii, invicem ducti, pro tertio compositæ; terminus autem alter, quæsito homologus, pro secundo.*

Verbi gratia; in exemplo prius exposito: *Si 4 viri, 3 mensibus, expendant libras 20; 6 viri, 12 mensibus, expendent quot libras?*

Pro termino primo analogiæ compositæ, sumatur $12 = 4 \times 3$, (nempe qui fit ex numero virorum primorum in numerum primorum mensium ducto;) pro tertio, $72 = 6 \times 12$, (qui fit ex numero secundorum virorum, in numerum suorum mensium ducto;) pro secundo autem, 20, numerus nempe librarum, hoc est, terminus quæsito homologus. Adeoque totus processus sic constabit

$$\begin{array}{l} \quad 4 . 20 :: 6 \\ \underline{\times 3} \quad\quad \underline{\times 12} . Q. \\ 12 . 20 :: 72 . Q = 120. \\ \quad\quad\quad\quad \underline{20} \\ 12)\, 1440\, (120 = Q. \end{array}$$

Similiter in Symbolis: *Si personæ P, tempore T, expendant libras L, personæ* π, *tempore* τ, *expendent quot?* puta λ, numerum quæsitum. Dico, erit ut PT ($= P \times T$) ad L; sic $\pi\tau$ ($= \pi \times \tau$) ad λ, numerum quæsitum. Nempe PT) $\pi\tau \times L$ (λ. Processus hic erit.

$$\begin{array}{l} \quad P . L :: \pi \\ \underline{\times T} \quad\quad \underline{\times \tau . \lambda.} \\ PT : L :: \pi\tau . \lambda = \frac{\pi\tau \times L}{PT}. \\ \quad\quad\quad \underline{\times L} \\ PT)\, \pi\tau \times L\, (\frac{\pi\tau}{PT} L = \lambda. \end{array}$$

Ejusdem demonstratio. Operationis hujus compositæ Ratio, sive Demonstratio, dependet ab ejusdem cum præcedente convenientia. Cum enim ut supra ostensum est, Analogia composita, resolvitur in binas simplices

$$\begin{array}{lcl} P . L :: \pi & \quad\quad & P . L :: \pi . q. \\ T \quad\quad \tau . \lambda & & T . q :: \tau . \lambda. \end{array}$$

Erit primo $q = \frac{\pi \times L}{P}$. Adeoque 2°, $\lambda = \frac{\tau \times q}{T} = \frac{\tau \times \pi L}{T \times P} = \frac{\pi\tau L}{PT}$ quod erat demonstrandum.

Eodem plane modo statuendum est, si exponatur Analogia etiam adhuc magis composita: Puta *Si trabis ligneæ, cujus longitudo, pedum* $4 = A$; *latitudo, pedum* $3 = B$; *altitudo, pedum* $2 = C$; *pondus sit librarum* $240 = D$; *trabs alia longa pedes* $10 = \alpha$; *lata, pedes* $4 = \beta$; *alta, pedem* $1 = \gamma$; *quanti erit ponderis?* (puta, librarum δ.) Dico, ut $A \times B \times C$, ad D; sic $\alpha \times \beta \times \gamma$, ad δ; $= \frac{\alpha\beta\gamma}{ABC} D$. Hoc est $\frac{10 \times 4 \times 1 = 40}{4 \times 3 \times 2 = 24} \times 240 = 400$. Quod patet, resoluta analogia composita, in tres simplices.

A.

A . D : : α .	A . D : : α . q.	4 . 240 : : 10 . 600.
B . β .	B . q : : β . Q.	3 . 600 . : 4 . 800.
C . γ . δ.	C . Q : : γ . δ.	2 . 800 : : 1 . 400.

Nam primo $q = \frac{\alpha}{A} D$. adeoque ſecundo $Q = \frac{\beta}{B} q = \frac{\alpha\beta}{AB} D$. Et tertio $\delta = \frac{\gamma}{C} Q = \frac{\alpha\beta\gamma}{ABC} D$. Quod erat demonſtrandum.

Notandum autem, quod quem nos in præcedentibus ſecundum appellavimus terminum, fieri poteſt tertius; adeoque quem tertium appellavimus, ſecundus: hos enim duos terminos, in Proportione directa, pro arbitrio ſedes mutare poſſe, jam ſupra univerſaliter diximus. Adeoque perinde omnino eſt ſive dicamus PT. L : : πτ . λ. ſive PT . πτ : : L . λ. Item perinde eſt ſive dicamus ABC . D : : αβγ . δ. ſive ABC . αβγ : : D . δ. Quod monuiſſe ſufficiat.

Atque hæc quidem dixiſſe ſufficiat de Proportionum Regula compoſita, dummodo ſingulæ Analogiæ componentes ſint directæ.

Fieri autem poteſt ut Analogiarum componentium altera directa ſit, altera Reciproca.

Exempli gratia. *Si* 36 = A *libræ panis, ſufficiant militibus* 3 = B, *in dies* 6 = C; *libræ* 180 = α, *militibus* 9 = β, *in quot dies ſufficient*? puta in dies γ.

Eſt quidem hic analogiarum altera directa, nempe *Si libræ* 36 = A, *ſufficiant in dies* 6 = C; *libræ* 180 = α, *ſufficient in dies quot*? puta q = 30. At altera eſt Reciproca, nempe *Si militibus* 6 = B *ſufficiant in dies* 30 = q; *militibus* 9 = C, *ſufficient in dies quot*? certe non niſi in dies pauciores, propter plures milites, nempe, in dies 10. Adeoque illic, regula directa eſt adhibenda; hic reciproca.

Nempe 36 . 6 : : 180   36 . 6 : : 180 . q $= \frac{6}{36} \times 180 = 30$.
3 . : 9 . Q   3 . q : 9 . Q $= \frac{3}{9} \times q = \frac{3}{9} \times 30 = 10$.

Item A . C : : α   A . C : : α . q.
B : β . γ.   B . q : β . γ.

Adeoque $q = \frac{\alpha}{A} C$. Et $\gamma = \frac{B}{\beta} \times q = \frac{B\alpha}{\beta A} C$.

Si autem libeat pro duabus his operationibus, unam compoſitam ſubſtituere: *Factus ex duobus diviſoribus* (puta termino primo analogiæ directæ, & tertio reciprocæ) *erit compoſitus diviſor*; (*adeoque in analogia directa, terminus primus*:) *factuſque ex multiplicatoribus, compoſitus multiplicator*: (*adeoque, in eadem analogia terminus tertius, in ſecundum ducendus.*) Hoc eſt, (in expoſita quæſtione,) Aβ . C : : αB . $\gamma = \frac{\alpha B}{A\beta} C$. ut prius.

$$A\beta \ . \ C : : B\alpha \ . \ \gamma = \frac{B\alpha}{A\beta} C.$$

A . C : : α
B — β . γ.

Et quidem, quotcunque fuerint analogiæ componentes, ſive directæ item ſive reciprocæ, id univerſaliter dicendum: *Ex omnibus Diviſoribus* (nempe terminis primis analogiarum directarum & tertiis reciprocarum,) *continue ductis, fiat Diviſor*; *ex reliquis omnibus continue ductis, Dividendus*; *adeoque Quotiens exhibebit terminum quæſitum.* *Regula generalis.*

Atque hactenus de Regula Aurea Compoſita, ſequitur *Regula Societatis*, dicta.

CAP.

CAP. XL.

De Regula Societatis: Tum sine Tempore; tum cum Tempore.

Regula quæ dicitur *Societatis*; cum nihil aliud sit quam regula Aurea plures repetita: non opus erit ut longa disquisitione illam exponam aut etiam novas exquiram operationum demonstrationes.

Regula societatis. Est autem ea hujusmodi; *Ubi data in duobus terminis ratione, tertio loco quotlibet, ut res ferat, positis, totidem quæruntur quarti proportionales*, dici hæc solet *Regula societatis*: Nomen suum inde forsan sortita, quod in Mercatorum consortiis, sive societatibus maximi usus esse soleat.

Sine tempore. Exemplum est. *Si tres mercatores societatem ineuntes sortem ita componant, ut primus* A *conferat libras* 60; *secundus* B, *libras* 50; *tertius* C, *libras* 40; (Adeoque omnium aggregatum, lib. $150. = 60 + 50 + 40$.) *Lucrum vero negotiando conquisitum sit lib.* 30. *Quæritur, quantum inde cuique debeatur?*

Quo autem huic quæsito satisfiat, nihil aliud requiritur quam ut Aureæ regulæ praxis toties repetatur quoties res ipsa postulat. Nempe si totius sortis summæ lib. 150, lucrum sit lib. 30. quantum erit lucrum partis A, seu 60? quantum partis B seu 50? quantum C seu 40? Et facta toties aureæ regulæ operatione, parti A convenire comperientur lib. 12. parti B lib. 10. parti C lib. 8. Nam ut 150, ad 30; sic 60, ad 12; & 50, ad 10; & 40, ad 8. Vel, in symbolis, ut conjunctim $A + B + C = Z$, ad L; sic, sigillatim, A, B, C, ad $\frac{LA}{Z}, \frac{LB}{Z}, \frac{LC}{Z}$.

$$\left.\begin{matrix}60\\50\\40\end{matrix}\right\} = 150 . 30 :: \left\{\begin{matrix}60 . & 12 .\\50 . & 10 .\\40 . & 8 .\end{matrix}\right. \quad \left.\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}\right\} = Z . L :: \left\{\begin{matrix}A . \frac{LA}{Z}\\B . \frac{LB}{Z}\\C . \frac{LC}{Z}\end{matrix}\right.$$

Atque hæc est quam vocant *Regulam Societatis sine tempore.*

Cum tempore. Si autem, præter diversitatem sortis congestæ, accedat etiam diversitas temporis, vocari solet *Regula societatis cum Tempore.* Et sicuti, prius, repetenda erat *Aurea Regula simplex*: Ita hic, *Aurea Regula Composita* erit repetenda.

Puta si collata sors prima $60 = A$, per menses $4 = \alpha$; secunda $50 = B$, per menses $3 = \beta$; tertia, $30 = C$, per menses $2 = \gamma$: sitque totius negotiationis lucrum $30 = L$: quæritur quantum cuique debetur?

Cum itaque hic composita ratio sit, nempe ex ratione sortis ad sortem, & temporis ad tempus: Multiplicandæ sortes singulæ in suum tempus, puta $A \times \alpha = 60 \times 4 = 240$. $B \times \beta = 50 \times 3 = 150$. $C \times \gamma = 30 \times 2 = 60$. Et numeri sic facti, conjunctim sumpti, constituent terminum primum, $A\alpha + B\beta + C\gamma = 240 + 150 + 60 = 450 = Z$. Iidemque sigillatim, totidem terminos tertios: Ipsumque lucrum, terminum secundum, adeoque convenient primo, 16; secundo, 10; tertio 4. Et in symbolis pariter.

$$\left.\begin{matrix}60 \times 4 = 240\\50 \times 3 = 150\\30 \times 2 = 60\end{matrix}\right\} = 450 . 30 :: \left\{\begin{matrix}240 . & 16 .\\150 . & 10 .\\60 . & 4 .\end{matrix}\right.$$

A α

$$\left.\begin{matrix} A\alpha \\ B\beta \\ C\gamma \end{matrix}\right\} = Z . L :: \left\{\begin{matrix} A\alpha . \frac{A\alpha L}{Z} . \\ B\beta . \frac{B\beta L}{Z} . \\ C\gamma . \frac{C\gamma L}{Z} . \end{matrix}\right.$$

Atque ad eandem formam de aliis hujusmodi quæstionibus statuendum erit. Quæ cum cuivis satis obvia sint, non est cur illis diutius inmoremur.

Regulas quas vocant *Alligationis*, & *Falsæ positionis*, intactas prætereo: tum aliis de caussis; tum quod illa non adeo frequentis usus sit; hæc autem sine magno dispendio, post introductam Arithmeticam speciosam, careri possit; quæ enim per eam solvi solebant quæstiones, illæ quidem omnes, aliæque plures tum facilius, tum magis perspicue, solvuntur per Arithmeticam speciosam. Eas autem siquis scire expetat, ex vulgaribus Arithmeticæ Practicæ Magistris, petat licet.

Sed & aliæ etiam apud eosdem practicos Arithmeticos passim exstant *Regulæ* quas *Praxeos* vocant. Quæ compendio inserviunt in Monetis, Ponderibus, Mensuris, &c. reducendis; & Mercatorum negotiationibus maxime inserviunt. Cum vero illas pro variis variarum gentium Monetis, Ponderibus, Mensurisque, eorumque sigillatim rationibus, omnino varias esse necesse sit: Non exspectandum est, ut eas ego, dum quæ in Arithmetica sunt communia trado, omnino attingam; sed quæ cuique genti sunt peculiaria, suis cujusque scriptoribus tradenda permittam. Nec quidem etiam est necesse, cum earum omnium Regularum fundamenta, non aliunde quam ex iis quæ jam tradidimus petenda sint; & unicuique interim, ut, pro ingenii sui sagacitate, & pro re nata, permittendum sit, quæ suis negotiis maxime sint accommoda, Regularum hujusmodi compendia tum exquirere, tum etiam exercere.

His itaque omissis, ad Fractionum sive Minutiarum doctrinam festinabo. Sed hoc prius monito; Quæ superius de Rationibus sive Proportionibus dicta sunt, quæque inde ortæ Regulæ jam fuerunt traditæ; non minus in numeris fractis, sive etiam surdis, (de quibus alibi dicetur,) locum habent, quam in Numeris Integris. Sicut enim numeri integri, invicem Addi, Subduci, Multiplicari, Dividique solent, variisque modis Rationes sive Analogias subire: ita & Fracti, Surdique, consimiles subeunt operationes, & easdem leges. Quo pacto autem operationes illæ Arithmeticæ, puta Additio, Subductio, Multiplicatio, & Divisio, in Fractis & Surdis sint administrandæ; jam dicendum erit.

CAP. XLI.

De Fractionibus sive Minutiis. Fractionum origo. Numeri fracti, an veri numeri: Fractionum Explicatio: Notatio. Denominator. Numerator. Fractiones Propriæ; Impropriæ. Fractionum explicatio altera. Divisionum Quotientes indicant. Explicatio tertia; quæ & Irrationalibus conveniat. Fractionum æquipollentia. Earumque cum Rationibus comparatio.

FRactionum, sive *Minutiarum* doctrina, qui & *Numeri fracti* dici solent, post absolutam Rationum traditionem, facile absolvitur. *Fractionum origo.*

Fractionum Originem, in superioribus jam ante tradidimus. Nimirum, cum supponat Arithmetica *Unitatem*, sive *Unum*, numerorum primum esse, minimumque; (quod Uno Paucius, dici non possit:) reliquosque omnes Unitatum col-

lectione componi: Siquando supponendum sit (quod non raro fit) aliquid Uno minus, sive Unum aliquod in partes dirimendum; quoniam illud vero aliquo numero designari non potest, *Numeris* (ut loquuntur) *Fractis*, illud utcunque designare satagunt. (Puta, si supponatur Unum aliquod bisecandum, totius Semissem sic designant, $\frac{1}{2}$.) Quod ipsum etiam faciunt, siquando duobus quibusvis numeris invicem proximis intermedium aliquod designandum est. Puta, si numerus Ternarius 3, supponatur bisecari; quoniam hujus Semissis, Unitate major est, & Binario minor, nec tamen inter hos numeros (Unitatem & Binarium) alius intercedat intermedius verus numerus; semissem illum utcunque sic designant $\frac{3}{2}$, vel etiam $1\frac{1}{2}$. Et similiter alias.

Numeri Fracti, non veri Numeri.

Adeoque numeri *Fracti* dicti, pro veris Numeris haberi non solent, neque sub *Numeri* appellatione apud Euclidem aliosque censentur; (apud quos numerorum appellatione non nisi Integri insigniuntur.) Quippe revera qui verbi gratia, *Horæ Semissem* sive $\frac{1}{2}$, dicit; non tam ille *Quot horas* dicit, quam *Quantum horæ*: adeoque ex campo Arithmetico, in Geometricum transit. Quamvis enim, in Arithmetica, non reperiatur *Paucius Uno*; reperitur tamen, in Geometria, *Minus Integro*: Et quidem quemadmodum supponit Arithmetica, Unitatem in infinitum Multiplicabilem; ita Geometria, Integrum in infinitum Divisibile: sive, ut Unum Arithmeticum est multiplicabile, sic Unum Geometricum, divisibile, in infinitum.

Fractionum explicatio.

Hanc autem infinitam Geometriæ divisibilitatem, cum quodammodo imitari velit Arithmetica; supponit Unitatem sive Unum, quasi jam quid integrum, in quotvis Partes divisibile; easque demum Partes numerabiles, adeoque suæ considerationi subjectas. Quamvis enim illa Integri in partes Divisio, Geometricum quiddam rite censeatur, Partium tamen illarum, in quas dividitur, Numeratio, est plane Arithmetica.

Fractionum notatio.

Cum itaque in fractionibus, sive numeris Fractis, omnino duo designanda veniant; Puta, Unius sive integri, in partes diremptio; (nunc plures, nunc pauciores;) Earumque partium, unius pluriumve assumptionem: Quo utrumque indicetur, Duobus propterea numeris Fractio signari solet, altero superne, altero inferius, positis; ad hanc formam: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. Quorum Inferior indicat, in quot æquales partes Integrum aliquod sive Unum, dirimi supponimus; & *Denominator* dici consuevit: Superior, quot earum assumi volumus; dicique solet *Numerator*. Adeoque Fractio $\frac{2}{3}$, unius alicujus Integri, in tres æquales partes dirempti, duas assumendas innuit.

Denominator. Numerator.

Denominator autem ille dicitur, quia partes in quas dirimitur integrum Denominat, seu quales dicit; puta Semissem, Trientem, Quadrantem, Sextantem, &c. sive partem Dimidiam, Tertiam, Quartam, Sextam, &c. prout fractionis denominator est 2, 3, 4, 6, &c.

Numerator vero dicitur hic alter, quia partium (sic denominatarum) assumendarum numerum indicat; puta, $\frac{2}{3}$, duos trientes; $\frac{3}{4}$, tres quadrantes; $\frac{5}{6}$, quinque sextantes, sive partes sextas; $\frac{3}{5}$, tres quintas, &c.

Fractiones propriæ.

Estque hæc simplicissima Fractionum expositio, earumve naturæ explicatio; quæ *Fractionibus propriis*, uti dici solent, sive proprie dictis, apprime quadrat: Quæ nempe quid Unitate minus innuunt.

Integro minores.

In his itaque Fractionibus propriis, Numerator semper Denominatore minor erit. Cum enim Denominator ostendat quot omnino sint vel supponantur istiusmodi, in Integro, partes æquales; si Numerator Denominatori æqualis fuerit, indicabit ille tot ejusmodi assumendas partes, quot omnino in integro continentur; adeoque totum integrum, non ipsius aliquam portionem, assumptum iri: (quippe partes simul omnes; tantundem sunt atque ipsum integrum:) Sin Denominatore major esset Numerator, innueret illud jam plures istius Integri partes ejusmodi assumendas, quam inibi omnino contineantur; quod esset impossibile: Superest itaque ut Numerator, sive partium assumendarum numerus, minor sit quam Denominator, sive numerus partium omnium in integro contentarum.

Fractiones impropriæ.

Si quando itaque conspiciatur (quod tamen usu non raro obvenire solet) Numerator vel Denominatori æqualis, vel ipso major; Hujusmodi Fractio *Impropria* dici solet; ut quæ quid Unitati æquale vel etiam ipsa majus indicet. Sunt enim hujusmodi Fractiones $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}$, &c. tantundem atque ipsa Unitas 1. Nempe tum duo semisses, tum tres trientes, tum quatuor quadrantes, &c. ipsum præcise Integrum

Integrum absolvunt. At $\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}$, &c. etiam duo integra; quippe bis tot partes numerat fractio, quot denominator indicat integro contineri. Item $\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}$, &c. tantundem valent atque 3, sive tria integra. Et in reliquis pariter. Similiter de $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$, &c. judicandum. Cum enim $\frac{2}{2}$, duo semisses, tantundem sint atque 1; erunt $\frac{3}{2}$, tres semisses, tantundem atque $1\frac{1}{2}$, unitas cum semisse. Item cum $\frac{6}{3}$, sex trientes, tantundem valeant atque 2; erunt $\frac{8}{3}$, octo trientes, tantundem atque $2\frac{2}{3}$, duo cum duobus trientibus. Et similiter in aliis, ubi Numerator Denominatore major, nec tamen hic illius aliquota pars. Si enim Denominator sit Numeratoris pars aliquota, fractio hæc impropria æquivalet numero integro: Sin minor, nec tamen pars aliquota; æquivalet impropria fractio numero integro cum adjuncta particula seu fractione propria.

Fractionum explicatio altera. Cum vero prior illa Fractionum expositio, per Unius Integri in æquales aliquot partes diremptionem, ut ut fractionibus propriis explicandis satis accommoda, impropriis tamen haud usque adeo conveniat, (quippe Unius Integri plures assumi partes non possunt, quam in ipso omnino continentur; quod exigere videatur Impropriæ Fractionis numerator denominatore major:) Poterit secundo modo fractionum natura, commodius huic negotio, explicari, per diremptionem, non unius tantum, sed plurium simul Integrorum (quot nempe indicat Numerator) in partes aliquot æquales, (tot nempe quot Denominator postulat,) quarum unam aliquam assumendam fractio indicat. Perinde enim est sive dicamus fractionem $\frac{2}{3}$, Unius integri Duos trientes, sive Duorum integrorum Unum trientem significare: Tantundem enim utrovis modo indicatur. Exempli gratia. Cum Solidus Anglicanus contineat 12 Denarios; Unius solidi triens sunt denarii 4; adeoque ejusdem duo trientes, bis Quatuor, sive 8 denarii. Sed &, cum solidus unus contineat denarios 12; continebunt solidi Duo, denarios bis duodecim, hoc est 24: at denariorum 24 pars tertia, sunt item 8 denarii, ut prius. Perinde itaque est sive dicamus $\frac{2}{3}$ sol. indicare duos trientes unius Solidi, sive duorum solidorum trientem unum.

Fractiones indicant divisionum Quotientes. Atque hæc quidem expositio perinde quadrat propriis atque impropriis fractionibus: Nempe $\frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}$, &c. nil aliud indicant, quam numerorum 2, 3, 4, &c. trientes; Nec aliud sunt quam totidem Quotientes numerorum 2, 3, 4, &c. per numerum 3 divisorum; quod & superius, dum Divisionem tradidimus, dictum est. Et quidem, sicut ex imperfecta sive etiam impossibili subductione, oriuntur numeri negativi, (1—2, 2—3, &c.) ita ex imperfecta sive etiam impossibili Divisione, oriuntur numeri fracti, ($\frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}$, &c.) sicut etiam ex imperfecta impossibilique radicum extractione, oriuntur numeri surdi, ($\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$, &c.) ut post dicetur.

Fractionum explicatio tertia quæ irrationalibus etiam conveniat. Verum adhuc notandum est; cum Arithmeticæ Fractiones, Geometricas (ut dictum est) Continui Divisiones æmulentur, quæ non semper sunt in partes rationales, sed satis nonnunquam irrationales; Quo huic incommodo subveniatur, tertius adhuc Fractiones explicandi modus, prioribus universalior, tradi potest. Cum enim, verbi gratia, fractio $\frac{2}{3}$ indicet (ut prius dictum est) Unius integri in tres partes æquales secti partes duas; manifestum est, hac fractione indicari eam integri partem, quæ ad integrum illud eandem habeat rationem quam 2 ad 3. Quippe cum totum contineat partes 3, quales assumpta illius portio habet partes 2; erit portionis ad integrum ea ratio quæ est partium duarum, ad partes tres; hoc est, numeri 2, ad numerum 3. Dicimus itaque, *Fractione (propria) eam indicari unius alicujus integri (vel expositæ quantitatis) partem, quæ, ad totum, illam rationem habeat, quam habet fractionis Numerator ad Denominatorem.* Vel etiam universaliter *Fractione* (sive propria sive impropria) *tantundem quantitatis Homogeneæ designari, quantum ad unum Integrum, sive expositam quantitatem, eam rationem habeat quam habet fractionis Numerator ad Denominatorem.* Puta, si dicamus circuli Radium esse $\frac{1}{2}$ Diametri; tantundem est acsi diceremus, circuli Radium eam esse Diametri partem, quæ ad totam habeat rationem 1 ad 2: vel, Radium tantum esse, ut ad diametrum habeat rationem 1 ad 2. Et pariter, cum Latus quadrati esse dicimus $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Diagonii; tantundem est acsi diceremus, Latus quadrati tantum esse ut ad illius Diagonium rationem habeat 1 ad $\sqrt{2}$. Item, Quadrati ambitum, esse $\frac{4}{\sqrt{2}}$ Diagonii; tantundem est atque, Ambitum

bitum quadrati tantum esse ut ad ipsius diagonium rationem habeat 4 ad $\sqrt{2}$. (Quo pacto satis commode exponuntur fractiones illæ irrationales, licet neque juxta methodum primam, neque etiam secundam, commode dici possit, vel 1 vel 4 diagonia, in $\sqrt{2}$ partes æquales dividi, quo earum una assumatur.) Atque eodem modo, sumptis duobus vel numeris, vel lineis, vel aliis quibusvis quantitatibus invicem homogeneis, a, b, fractio $\frac{a}{b}$, vel $\frac{a}{b}$ D, id innuit quod ad Unum Integrum, vel assignatam aliquam quantitatem D, eam rationem habeat quam habet a ad b; sive sit ea ratio rationalis sive irrationalis.

Fractionum Æquipollentia.

Atque hinc quidem sequitur, Tum *Eandem quoad valorem Fractionem, pluribus posse, & quidem infinitis modis, designari*: Tum *fractiones eas omnes, quarum Numeratores ad suos respective Denominatores eandem habent rationem, invicem æquales sive æquipollentes esse.* Quippe cum nihil aliud innuat Fractio, quam *Rationem* designandæ quantitatis ad expositam Homogeneam, sive unum Integrum: dummodo eadem ratio, quibuscunque id fiat quantitatibus, designatur, eandem & (quoad valorem) Fractionem designari, intelligendum erit. Adeoque, verbi gratia, $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{10}{20}, \frac{100}{200}$, &c. eandem, quoad valorem, Fractionem designant, (puta semissem,) quia eadem est in singulis Numeratoris ad Denominatorem Ratio; (quippe, ea quæ est 1 ad 2;) Quod quidem non de numeris tantum, sed quibusvis etiam quantitatibus invicem homogeneis, intellectum velim. Puta

A ——————
B ————————

$\frac{A}{A+A}, \frac{A}{2A}, \frac{A}{B}$ (posito quod B sit duplum quantitatis A:) sive numeri sint, sive Lineæ, sive etiam Superficies, Corpora, Pondera, Tempora, &c. quæ Symbolis A, B, designantur. Aut etiam $\frac{\textit{Pondo}}{\textit{Bipond.}}, \frac{\textit{Bipedal.}}{\textit{Quadriped.}}$, &c. Sic $\frac{1}{2}$D, $\frac{2}{4}$D, $\frac{A}{A+A}$ D, $\frac{A}{B}$ D, $\frac{\textit{Pondo}}{\textit{Bipond.}}$ D, &c. tantundem designant; Nempe id quod ad expositam quantitatem D (quæ pro uno Integro habetur) eam rationem habeat, quam habet 1 ad 2, vel 2 ad 4, vel A ad A + A, vel A ad B, vel Pondo ad Bipondium, &c. quæ quidem rationes omnes eædem sunt, sive æquales.

Fractionum & Rationum affinitas.

Sed & hinc etiam patet, Rationum & Fractionum, sive identitas, sive affinitas maxima. Cum enim omnino perinde sit, sive dicamus, verbi gratia $\frac{3}{4}$, indicare unius integri tres quadrantes, (juxta primam fractionis explicationem;) sive trium integrorum quadrantem unum, aut numeri 3 per 4 divisi quotientem, (quæ est explicatio secunda;) sive denique rationem 3 ad 4, aut eam integri portionem quæ ad totum eam rationem habeat, (qui est tertius explicandi modus:) manifestum est eadem opera tum Fractionem, tum divisionis Quotientem, tum Rationem, vel saltem Rationis Denominatorem, designari.

Adeoque, quæ de Fractionum Additione, Subductione, Multiplicatione, Divisione, aut etiam Proportione, &c. dicenda erunt: Eadem etiam de Rationibus, sive Rationum potius Denominatoribus, intelligenda velim. Quippe nil aliud sunt Fractiones (sive propriæ, sive impropriæ, sive etiam irrationales,) quam Rationum Denominatores.

Quod quidem si satis attenderat *Gregorius de Sancto Vincentio*, non erat cur ille totum ipsius *de Rationibus Proportionibus*, aut etiam *Proportionalitatibus*, doctrinam, ut plane novam venditaret: nec *Rationum inæqualium* comparationem, quasi rem incognitam & inauditam plane exhibere videretur. Ecquis enim nescit, *Regulam Auream, in Fractionibus* exercere, nil aliud esse, quam *Rationum Rationes* invicem comparare? Et sicut idem est omnino opus Arithmeticum, partium summam (addendo) colligere, atque summarum summam; ita & ad eandem Rationum doctrinam spectat, sive Numerorum, Linearum, &c. rationes; sive ipsarum Rationum rationes, contemplemur. Quod autem ille quantitatum absolutarum rationes, *Rationes* simpliciter appellet; rationum autem rationes, *Proportiones*; & *Proportionum* rationes, *Proportionalitates*, (aut etiam, si rationibus proportionalitatum, novum indidisset nomen, & sic deinceps quousque libet:) licitum omnino est, si ita videbitur, ad pleniorem accuratioremque, ubi res postulat, distinctionem, ita loqui, & vitandæ confusionis ergo. At interim non inde nova magis dicenda est in Arithmeticam (vel, si libet, Geometriam,) introducta speculatio; quam si in Additione (ob continuas sæpe repetendas operationes) libeat

expositis

expositas aliquot minutas quantitates (distinctionis gratia) *Particulas* appellare; particularum autem collectiones, *Partes*; & collectiones partium, *Integra*; integrorum autem collectiones, *Summas*; & summarum denique, *Summam totalem*. Sicut enim eadem arte tum particularum in Partes, tum partium in Integra, & integrorum in Summas, &c. collectio instituitur: & collectiones omnes intermediæ, quanquam præcedentium respectu, sint Aggregata; sequentium tamen, pro Membris habeantur. Eodem modo per omnia, iisdem plane principiis eadémque arte procedendum est, tum in simplicium sive absolutarum quantitatum rationibus contemplandis, tum in rationum rationibus, sive proportionibus, harumque proportionalitatibus, & sic deinceps: & quidem sicut intermediæ rationes sive comparationes, respectu quantitatum absolutarum primo expositarum, Relationes sive Respectivæ quantitates merito habeantur; illæ ipsæ tamen, cum invicem comparandæ sint, in sequentibus illis comparationibus, pro terminis quasi simplicibus sive absolutis sunt habendæ; ipsæque relationes, cum invicem comparantur, jam fiunt, ea comparatione, novæ relationis termini, ad instar aliorum Entium plane absolutorum. Neque aliud, credo, est, quod in tota illa tractatione satagit V. Cl. Sed de his hactenus.

Atque hactenus de Fractionum tum Natura, tum Æquipollentia, dictum esto; tum de illarum cum Rationibus affinitate.

CAP. XLII.

De Additione & Subductione Fractionum; tum Cognominum, tum non-Cognominum. Fractionum ad communem Denominatorem Reductio. Minimus communis Denominator. Maximus communis Divisor.

Expositis, in præcedente Capite, quæ ad veram Fractionum naturam intelligendam necessaria videbantur: Ad operationes Arithmeticas in numeris fractis exercendas accedendum est. Quæ quidem eædem ipsæ sunt quæ in numeris veris, hoc est, Integris, superius exponuntur. Puta Additio, Subductio, Multiplicatio, Divisio, &c.

Ab Additione & Subductione, ordiemur.

Additio & Subductio.

Si *Fractiones* invicem Addendæ, aut Subducendæ, sint *Cognomines*, (hoc est, eundem habeant Denominatorem,) nulla difficultate res absolvitur: *Substituta nempe, pro Numeratoribus expositis, Numeratorum illorum Summa vel Differentia, retento communi qui prius erat Denominatore, habetur Summa vel Differentia fractionum expositarum.*

Fractionum cognominum.

Sic, si Addendæ sint fractiones $\frac{2}{6}$ & $\frac{3}{6}$, prodibit summa $\frac{5}{6}$. Quippe numeri 2 & 3 simul additi constituunt 5, quæcunque res illæ sint quæ numerantur: puta, sive integræ, sive partes. Et qua ratione 2 & 3 homines, sunt 5 homines; aut 2 & 3 equi, 5 equi; vel 2 & 3 integra, 5 integra, &c. Eadem plane ratione 2 & 3 partes, sunt 5 partes; 2 & 3 semisses, 5 semisses: 2 & 3 sextantes, 5 sextantes; hoc est $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}=\frac{2+3}{6}$.

Ita, si ex $\frac{5}{6}$, auferantur $\frac{3}{6}$, manebunt $\frac{2}{6}$. Quippe universaliter verum est, $5-3=2$; sive res numeratæ integræ sint, sive partes. Sicut enim $5-3$ homines, sunt 2 homines; & $5-3$ decades, 2 decades; & $5-3$ centuriæ, 2 centuriæ: ita $5-3$ sextantes, sunt 2 sextantes; hoc est $\frac{5}{6}-\frac{3}{6}=\frac{2}{6}=\frac{5-3}{6}$.

Et similiter faciendum est ubi plures adhuc Fractiones cognomines, continue addendæ sunt, aut subducendæ. Puta $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$, quia $2+3+4=9$. Sic $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ quia $2+3-4=1$. Et similiter alibi.

Atque eodem plane modo in fractionum Additione & Subductione Speciosa, sive Symbolica. $\frac{A}{D}+\frac{B}{D}+\frac{C}{D}=\frac{A+B+C}{D}$. Et $\frac{A}{D}+\frac{B}{D}-\frac{C}{D}=\frac{A+B-C}{D}$, &c.

Fractionum non cognominum. Si vero Fractiones invicem Addendæ aut Subducendæ, non sint cognomines, adhibenda prius est præparatio, qua ad idem nomen reducantur, quam Additio illa vel Subductio instituatur. Et tum demum, facta hac ad idem Nomen sive Denominatorem reductione, Additio Subductiove instituenda est, ut prius. Puta si addendæ sint fractiones $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$; aut etiam hæc ab illa subducenda: pro $\frac{1}{2}$, substituatur ipsi æquipollens $\frac{2}{4}$, (cum enim eadem sit ratio 1 ad 2, atque 2 ad 4, ostensum est cap. præced. fractiones $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{4}$ æquipollentes esse:) adeoque $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Et $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$. Sic $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$. Et $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4}{12}-\frac{3}{12}=\frac{1}{12}$.

Eodem modo, si numero 3, sive $\frac{3}{1}$, (quæ æquipollent; nam divisio per 1, neutiquam immutat divisi quantitatem;) addatur fractio $\frac{2}{5}$, potest quidem id fieri non mutatis terminis, sic $3+\frac{2}{5}$, vel etiam $3\frac{2}{5}$: sed etiam (quod nonnunquam fieri convenit) in fractionem impropriam coalescunt, puta $3+\frac{2}{5}=\frac{3}{1}+\frac{2}{5}=\frac{15}{5}+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$: substituto scilicet, pro 3 vel $\frac{3}{1}$, (tribus integris;) $\frac{15}{5}$, hoc est, quindecim quintis, quippe tantundem valent; cum enim 5 quintæ constituant unum integrum, 15 quintæ, hoc est ter 5 quintæ, constituent integra tria.

Item si ex 3 auferre oporteat $\frac{2}{5}$: pro 3 integris substituatur $\frac{15}{5}$, vel etiam $2\frac{5}{5}$, aut $2+\frac{5}{5}$; & facta demum subductione, erit $3-\frac{2}{5}=\frac{15}{5}-\frac{2}{5}=\frac{13}{5}$. Vel etiam $3-\frac{2}{5}=2+\frac{5}{5}-\frac{2}{5}=2+\frac{3}{5}$: (nam $\frac{5}{5}-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$, quibus si præponamus 2, fiet $2+\frac{3}{5}$ vel $2\frac{3}{5}$.)

Reductio ad communem Denominatorem. Reducuntur autem fractiones quælibet duæ datæ, ad alias invicem cognomines, & datis æquales, si prioris tum Numerator tum Denominator, ducatur in posterioris Denominatorem: & contra, posterioris tum Numerator tum Denominator, in Denominatorem prioris. Cum enim utrobique fractionis uterque terminus per communem multiplicatorem multiplicetur, terminorum ad invicem ratio non immutatur, (quippe duplorum ad dupla, triplorum ad tripla, &c. eadem est ratio quæ simplorum ad simpla;) dum novus interim emergens Denominator, fit utrique communis, (quippe qui fit ex datarum Denominatoribus invicem ductis.) Sic in modo exhibitis, $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$: si prioris uterque terminus ducatur in 4, fiet $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$; item, si posterioris terminus uterque ducatur in 3, fiet $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$; adeoque junctim $\frac{4}{12}\pm\frac{3}{12}=\frac{1}{3}\pm\frac{1}{4}$. Sic, pro 3 & $\frac{2}{5}$, vel $\frac{3}{1}$ & $\frac{2}{5}$; substituendum est $\frac{15}{5}=\frac{3}{1}=3$, & $\frac{2}{5}$: adeoque $\frac{15}{5}\pm\frac{2}{5}=3\pm\frac{2}{5}$. Et sic ubique.

Et pariter in Symbolis: pro expositis $\frac{A}{B}$, $\frac{\alpha}{\beta}$; substituantur $\frac{A\beta}{B\beta}$, $\frac{B\alpha}{B\beta}$: Eritque tum $\frac{A\beta}{B\beta}=\frac{A}{B}$, tum $\frac{B\alpha}{B\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$, tum denique $\frac{A\beta}{B\beta}\pm\frac{B\alpha}{B\beta}=\frac{A}{B}\pm\frac{\alpha}{\beta}$.

Atque eadem plane methodo utendum est, si plures quotcunque fractiones occurrant ad communem Denominatorem reducendæ. Nempe singularum tum Numeratorem tum Denominatorem in reliquarum omnium Denominatores continue multiplicando. Sic $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, reducuntur ad $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{12}{30}$. Nam $1\times3\times5=15$, & $2\times3\times5=30$, adeoque $\frac{1}{2}=\frac{15}{30}$: Item $2\times2\times5=20$, & $3\times2\times5=30$, adeoque $\frac{2}{3}=\frac{20}{30}$: Denique $2\times2\times3=12$, & $5\times2\times3=30$, adeoque $\frac{2}{5}=\frac{12}{30}$. Et propterea junctim $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\pm\frac{2}{5}=\frac{15}{30}+\frac{20}{30}\pm\frac{12}{30}$. Et pariter in Symbolis pro $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{b}{\beta}$, $\frac{c}{\gamma}$, $\frac{d}{\delta}$, substituantur $\frac{a\beta\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\frac{b\alpha\gamma\delta}{\beta\alpha\gamma\delta}$, $\frac{c\alpha\beta\delta}{\gamma\alpha\beta\delta}$, $\frac{d\alpha\beta\gamma}{\delta\alpha\beta\gamma}$: quæ tum expositis sunt sigillatim æquales, tum invicem cognomines; (nam denominatores $\alpha\beta\gamma\delta$, $\beta\alpha\gamma\delta$, $\gamma\alpha\beta\delta$, $\delta\alpha\beta\gamma$, sunt invicem æquales, quippe ex iisdem factoribus compositi; alternatio enim situs æqualitatem non immutat, cum in continuis multiplicationibus perinde omnino est quo ordine fiant, ut superius suo loco traditum est.) Et pariter alibi.

Communis denominatoris diminutio. At interim verum est (neque id vel dissimulandum vel ignorandum) minorem nonnunquam Denominatorem communem assumi posse, quam qui hoc pacto ex datorum Denominatorum omnium continuo ductu emergit. Nempe quoties Denominatores dati non sunt *inter se primi*, hoc est, in eadem ratione minimi, sed communem aliquem Divisorem admittunt. Sic in pridem expositis, $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$; quæ reduci possunt, non modo ad communem denominatorem $8=2\times4$ (ex datis denominatoribus factum,) puta $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$; sed etiam ad minorem, nempe 4, puta $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$, ut supra ostensum est: Cujus rei causa est, quod denominatores, dati, 2, 4, non sunt numeri inter se primi, sive in eadem ratione minimi, sed uterque per communem divisorem

divisorem 2, præcise dividi poterit; Est enim 2)2(1. & 2)4(2. Sic fractiones duæ $\frac{7}{12}$, $\frac{1}{3}$; reduci possunt, non modo ad $\frac{21}{36}$, $\frac{12}{36}$; sed etiam ad $\frac{7}{12}$, $\frac{4}{12}$: quia tum 12, tum 3, communem admittunt divisorem 3. nam 3)12(4. & 3)3(1. Et pariter in Symbolis; $\frac{A}{BC}$, $\frac{E}{C}$, reducuntur non modo ad $\frac{AC}{BCC}$, $\frac{EBC}{BCC}$; sed & ad $\frac{A}{BC}$, $\frac{BE}{BC}$; quia nempe tum BC, tum C, communem admittunt divisorem C; nam C)BC(B, & C)C(1.

Sed neque hoc semper fit; (sunt enim non raro denominatores dati, inter se primi:) neque etiam tanti est, ut minimum semper denominatorem communem studiosius prima vice investigemus; sed potius, si opus sit, fractionum tandem summa vel differentia ad minimos terminos reducatur. (Nam revera etiamsi illud prius præstitum fuerit, hoc alterum nihilominus deinceps aliquando præstandum erit. Puta, si ex fractione $\frac{7}{12}$ auferenda sit $\frac{1}{3}$; nec acquiescamus in æquipollentibus $\frac{21}{36}$, $\frac{12}{36}$; sed ad minores adhuc deprimere cupiamus: minimi ad quos reduci possunt termini, communem denominatorem habentes, sunt $\frac{7}{12}$ & $\frac{4}{12}$. Residuum itaque $\frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12} - \frac{4}{12} = \frac{3}{12}$. At vero residuum hoc nondum est in minimis terminis, sed ad minores adhuc reduci poterit, nempe $\frac{1}{4}$. Si autem, omissa depressione prima, sumptis, pro $\frac{7}{12} - \frac{1}{3}$, æquipollentibus $\frac{21}{36} - \frac{12}{36}$, ut habeatur residuum $\frac{9}{36}$; deprimi tandem, sive abbreviari, semel poterit hoc residuum ad terminos $\frac{1}{4}$, in eadem ratione minimos.) Si tamen se sponte offerat ejusmodi communis denominator, qui minor sit quam qui ex datorum continua multiplicatione emergit; poterit quidem ille non incommode assumi; Ea tamen lege, ut quotupluscunque sit vel quamcunque habeat rationem, denominator ille communis, ad cujusque fractionis datæ denominatorem, totuplus omnino sit, sive eandem rationem obtineat, assumendus Numerator ad numeratorem datum: ne fractionum scilicet valor immutetur. Puta si fractiones $\frac{7}{12}$, $\frac{1}{3}$, ad eundem denominatorem 12, reducendæ sint; sicut pro 3, posterioris fractionis denominatore, substituitur 12, ipsius quadruplus; ita pro numeratore 1, ponendus erit numerator 4, dati quadruplus; ut $\frac{4}{12}$ & $\frac{1}{3}$ eandem retineant terminorum ad invicem rationem.

Si vero, antequam instituatur Additio vel Subductio, libeat fractiones expositas non modo ad communem aliquem denominatorem, sed ad communem denominatorem minimum reducere: id fiet hac regula. *Expositarum duarum Fractionum Denominatores, per maximum communem divisorem dividantur; & per alternos quotientes, multiplicentur utriusque uterque terminus: & prodibunt termini Fractionum cognominum, datis æqualium.* Exemplum esto in Symbolis, id ipsum quod antea exposuimus; $\frac{A}{BC}$, $\frac{E}{C}$: Denominatorum BC, & C, maximus communis Divisor, (saltem quantum ex Symbolis liquet,) est C: per hoc si dividatur Denominator prior, quotiens est B; nam C)BC(B; per quem si multiplicentur posterioris fractionis uterque terminus, prodibit $\frac{BE}{BC} = \frac{E}{C}$: Si per eundem C, divisorem communem, dividatur denominator posterior, C; quotiens est 1; nam C)C(1: per quem quotientem si præcedentis fractionis uterque terminus multiplicetur, prodibit eadem quæ prius fractio, $\frac{A}{BC}$, (quippe 1, multiplicando nihil immutat:) adeoque fractiones inventæ cognomines $\frac{A}{BC}$, $\frac{BE}{BC}$, datis sunt æquales; & quidem in minimis terminis. Pariter in numeris; Si fractionum $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}$, denominatores 6, 4, per communem maximum divisorem 2 dividantur, prodibunt quotientes 3, 2; Si autem per posteriorem 2, multiplicentur fractionis prioris uterque terminus, prodibit, $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$; & per quotientem priorem 3, si multiplicentur posterioris fractionis terminus uterque, prodibit fractio $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$: adeoque pro expositis $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}$, habentur æquales minimæ cognomines $\frac{2}{12}$, $\frac{9}{12}$. Eodem modo, pro $\frac{7}{12}$, $\frac{1}{3}$, habentur minimæ cognomines, istis æquales $\frac{7}{12}$, $\frac{4}{12}$. Et similiter alibi.

Minimus communis Denominator.

Duorum autem numerorum *maximus communis Divisor*, hac methodo invenietur. *Si major per minorem dividatur, & deinde divisor hic per divisionis si quod sit residuum; & sic deinceps, donec eo tandem perveniatur ut residuum nullum*

Maximus communis Divisor.

lum sit; divisor ille ultimus, est datorum numerorum maximus communis divisor. (Uti ab Euclide ostensum est, 2 e 7.) Si autem non prius sistatur quam ad Unitatem deveniatur; argumento est expositos numeros in eadem ratione minimos esse: quippe 1, utrumque dividendo, non minuit. Sic numerorum 12 & 3, maximus communis divisor (intellige, qui dividendos numeros ita dividat, ut nullum supersit residuum,) invenitur 3; quia nempe 3) 12 (4 sine ullo residuo. Sic numerorum 12 & 34, maximus communis divisor est 2: Nam 12 in 34 bis continentur, & supersunt 10; Deinde 10 in 12 continentur semel, & supersunt 2; Tandem 2 in 10 continentur quinquies præcise: postremus itaque hic divisor 2; est duorum expositorum 12, 34, maximus communis divisor. Numerorum autem 13 & 34, maximus communis divisor est 1; (adeoque ipsi jam inter se primi, sive in eadem ratione minimi;) ut ex adjunctis operationibus patet.

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 2 & 10 \\ 2) & 10) & 12) & 34\ (2\ (1\ (5 \\ & 10 & 10 & 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & \\ 1) & 2) & 3) & 5) & 8) & 13) & 34\ (2\ (1\ (1\ (1\ (1\ (2 \\ & 2 & 2 & 3 & 5 & 8 & 26 \end{array}$$

Atque hæc ipsa methodus nonnunquam etiam in Symbolicis commode adhibetur. Exempli gratia; $a^3 - e^3$, & $a^2 - e^2$: si quantitas illa per hanc dividatur, prodibit quotiens a (cujus tamen in hoc negotio nulla ratio habetur,) & residuum $ae^2 - e^3$. Si per hoc residuum dividatur ille Divisor $a^2 - e^2$, prodibit (quotiens $\frac{a}{e^2}$, &) Residuum $ae - e^2$. Denique si per hoc Residuum $ae - e^2$, dividatur proximus Divisor $ae^2 - e^3$, prodibit quotiens e, & nihil restabit. Ut ex adjuncta operatione patet.

$$\begin{array}{cccc} ae - e^2) & ae^2 - e^3) & a^2 - e^2) & a^3 - e^3\ (a\ (\frac{a}{e^2}\ (e. \\ & \underline{ae^2 - e^3} & \underline{a^2 - ae} & \underline{a^3 - ae^2} \\ & 00. & ae - e^2. & ae^2 - e^3 \end{array}$$

Atque hinc liquet, postremum hunc divisorem $ae - e^2$, expositarum quantitatum $a^3 - e^3$, $a^2 - e^2$, communem esse Divisorem. Quod & experimento facto patebit.

$$\begin{array}{ll} ae - e^2) & a^3 - e^3\ (\frac{a^2}{e} + a + e. \\ & \underline{a^3 - a^2e} \\ & a^2e - e^3 \\ & \underline{a^2e - ae^2} \\ & ae^2 - e^3 \\ & \underline{ae^2 - e^3} \\ & 00 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} ae - e^2) & a^2 - e^2\ (\frac{a}{e} + 1 \\ & \underline{a^2 - ae} \\ & ae - e^2 \\ & \underline{ae - e^2} \\ & 00 \end{array}$$

Adeoque communis hujus divisoris ope, reducuntur expositæ quantitates $a^3 - e^3$, $a^2 - e^2$, ad simpliciores in eadem ratione, $\frac{a^2}{e} + a + e$, $\frac{a}{e} + 1$; vel etiam (tollendo fractionem) $a^2 + ae + e^2$, $a + e$. Et propterea $\frac{a^3 - e^3}{a^2 - e^2} = \frac{a^2 + ae + e^2}{a + e}$. Atque hujusmodi exempla plurima facile annecti possunt.

Verum hoc in Symbolis neque ita prompte, nec universaliter expediri potest atque in numeris. Exempli gratia; quantitatum $a^2 + ac - b^2 - bc$, & $ab + af - b^2 - bf$, haud ita facile, continua hac divisione, communis divisor innotescit: cum interim communem habeant divisorem $a - b$; ut ex adjunctis operationibus patet.

$a - b)$

$$a-b\,(a^2+ac-b^2-bc\,(a+b+c$$
$$a^2-ab$$
$$ab+ac-b^2-bc$$
$$ab \quad - \quad b^2$$
$$ac \quad - \quad bc$$
$$ac \quad - \quad bc$$
$$00$$

$$a-b\,)\,ab+af-b^2-bf\,(b+f$$
$$ab \quad - \quad b^2$$
$$af \quad - \quad bf$$
$$af \quad - \quad bf$$
$$00$$

Adeoque communis illius Divisoris ope reducentur expositæ quantitates a^2+ac-b^2-bc, & $ab+af-b^2-bf$, ad terminos in eadem ratione minores $a+b+c$, & $b+f$. Adeoque $\frac{a^2+ac-b^2-bc}{ab+af-b^2-bf}=\frac{a+b+c}{b+f}$.

In hujusmodi itaque casibus, atque hisce similibus, sagacitate opus erit, & consilium in arena capiendum, ut expositæ quantitates compositæ, ad simplicissimas in eadem ratione reducantur.

Sed de Additione & Subductione hactenus.

CAP. XLIII.

Fractionum Multiplicatio & Divisio: per numerum Integrum; per numerum fractum. Multiplicationis, & Divisionis inversæ, æquipollentia. Producti, & Quotientis, in minimis terminis exhibitio. Operationum præcedentium (Additionis, Subductionis, Multiplicationis, & Divisionis) brevis Synopsis.

Sequitur Fractionum Multiplicatio & Divisio.

Fractionis per numerum integrum Multiplicatio.

Si *Numerus fractus per Integrum multiplicandus* sit, nihil hic difficultatis inest: Quippe id *sola Numeratoris multiplicatione peragitur*. Sic $\frac{2}{5}\times 2=\frac{4}{5}$. Nam bis duo sunt quatuor, quæcunque demum ea sint quæ numerantur: sive integra sint, sive partes. Qua enim ratione, bis duo homines, sunt quatuor homines; bis duo corpora, quatuor corpora; bis duo integra, quatuor integra; bis duo millia, quatuor millia, &c. (nempe, quia bis duo simpliciter, sunt quatuor:) eadem, & bis duæ partes, quatuor partes; bis duo quadrantes, quatuor quadrantes; bis duo quintantes, quatuor quintantes, (sive partes quintæ.) &c. Sic $\frac{2}{3}\times A$, vel $\frac{2}{3}A$, erit $\frac{2A}{3}$. Sic $D\times\frac{A}{B}$, vel, $\frac{A}{B}\times D$, vel $\frac{A}{B}D$, erit $\frac{AD}{B}$. Et sic in aliis.

Vel etiam, quoties id commode fieri potest, pro *Multiplicatione Numeratoris*, substitui poterit *Denominatoris Divisio*. Quippe idem omnino fit, quoad fractionis valorem, sive multiplicemus Numeratorem, sive Denominatorem dividamus: & contra. Si enim verbi gratia, duplandus sit numerus fractus $\frac{3}{4}$: perinde est sive duplicetur numerator, ut fiat $\frac{6}{4}$; sive denominator bisecetur, ut fiat $\frac{3}{2}$: eadem enim utrobique prodibit fractionis quantitas, $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, quoniam eadem est utrobique nu-

meratoris ad denominatorem ratio, quippe 6 . 4 :: 3 . 2. Sic alibi; $\frac{4}{6} \times 3 = \frac{12}{6} = \frac{4}{2} = 2$. Et $\frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{3} = \frac{2}{1} = 2$. $\frac{2}{15} \times 5 = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ &c. Et pariter in Symbolis. Est $\frac{A}{BC} \times B = \frac{BA}{BC} = \frac{A}{C}$.

Fractionis per numerum integrum Divisio. Contra vero: Si *per numerum integrum dividendus sit numerus fractus: diviso numeratore per divisorem datum, dividitur fractio.* Puta si dividenda sit fractio $\frac{4}{5}$, per 2: prodibit quotiens $\frac{2}{5}$. quia nempe 2) 4 (2. Cum enim universaliter semissis numeri 4, sit 2; quæcunque sint quæ numerantur: qua ratione semissis quatuor integrorum, sunt duo integra; & semissis quatuor decadum, duæ decades; &c. eadem & semissis quatuor partium, sunt duæ partes; semissis quatuor quintantum, duo quintantes, &c.

Vel etiam, si ejusmodi divisio commode fieri non possit; (puta, cum divisor datus, non est Numeratoris aliquota pars, adeoque non illum præcise metiatur sine residuo:) pro *Divisione numeratoris*, substituatur, *Denominatoris multiplicatio*; tantundem siquidem valet, ut modo dictum est. Quo enim major est denominator, eo minores supponuntur integri partes; adeoque, manente eodem numeratore, minuitur fractio. Et perinde est sive sumatur partium numerus, verbi gratia, duplo minor, hoc est, semissis; sive idem numerus partium duplo minorum, hoc est, dimidiatarum: utrobique enim assumitur designatæ quantitatis dimidium. Sic 2) $\frac{4}{5}$ ($\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$. Et 2) $\frac{3}{5}$ ($\frac{3}{10}$. Et in Symbolis similiter A) $\frac{AB}{C}$ ($\frac{B}{C} = \frac{AB}{AC}$. Item C) $\frac{A}{B}$ ($\frac{A}{BC}$. Et A) $\frac{A}{B}$ ($\frac{A}{AB} = \frac{1}{B}$. Et potest quidem posterior hæc methodus (per denominatoris multiplicationem) sat commode ubivis adhiberi: prior autem illa (per numeratoris divisionem) haud ita commode nisi cum divisor est numeratoris aliquota pars.

Fractionis per fractionem, Multiplicatio & Divisio. Cum vero *Fractio* proponitur, sive *Multiplicanda sive Dividenda*, non per numerum integrum, sed *per aliam fractionem*: operatio paulo magis intricata est, nec nisi duabus operationibus distinctis absolvitur. Nempe, *postquam per dati Multiplicatoris vel Divisoris Numeratorem, tanquam per numerum integrum* (ut modo ostensum est) *fuerit multiplicata vel divisa; quantitas inde prodiens per dati multiplicatoris aut divisoris Denominatorem, contraria operatione afficienda est.* Quippe hæc posterior operatio quasi corrigit priorem, quæ numeratorem fractionis, tanquam si esset numerus integer, assumpserat.

Sic si multiplicetur $\frac{4}{5}$ in 2, prodibit $\frac{8}{5}$; at si in $\frac{2}{3}$ (nempe prioris multiplicatoris trientem) prodibit 3) $\frac{8}{5}$ ($\frac{8}{15}$, (nempe prioris producti triens,) adeoque $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$. Ratio satis patet. Nam qui multiplicat per 2, petit duplum; at qui multiplicat per $\frac{2}{3}$, petit dupli trientem (sive trientis duplum,) adeoque quod ex duplicatione prodit, est trisecandum, ut habeatur dupli triens. Sic $\frac{A}{B} \times C = \frac{AC}{B}$, & D) $\frac{AC}{B}$ ($\frac{AC}{BD}$; ergo $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$.

Eodem modo, si dividenda sit fractio $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$: Divisa prius $\frac{4}{5}$ per divisoris Numeratorem 2; nempe 2) $\frac{4}{5}$ ($\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$: quæ provenit fractio $\frac{2}{5}$ vel $\frac{4}{10}$: multiplicanda erit in divisoris Denominatorem 3; puta $\frac{4}{10} \times 3 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = \frac{2}{5} \times 3$: adeoque $\frac{2}{3}$) $\frac{4}{5}$ ($\frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$. Ratio patet. Nam qui dividit per 2, petit quasi quoties in numero dividendo contineatur numerus 2: quod ubi ex quotiente resciverit, multiplicando porro per 3, cognoscet quoties contineatur $\frac{2}{3}$, nempe numeri 2 triens: quippe numerus trientum binarii, triplo major sit necesse est quam binariorum numerus, cum quilibet binarius contineat sui tres trientes. Sic in Symbolis, D) $\frac{A}{B}$ ($\frac{A}{BD}$, & $\frac{A}{BD} \times C = \frac{AC}{BD}$, ergo $\frac{D}{C}$) $\frac{A}{B}$ ($\frac{AC}{BD}$.

Multiplicationis & Divisionis inversæ, æquipollentia. Atque hinc statim constat, (quod apprime notandum est,) *Idem omnino fieri sive multiplicemus per* $\frac{C}{D}$, *sive dividamus per* $\frac{D}{C}$: quippe eadem utrobique prodibit quantitas. Item sive multiplicemus per $\frac{1}{2}$, sive dividamus per 2 vel $\frac{2}{1}$; quippe utrobique quæritur expositæ quantitatis semissis. Item, sive per $\frac{2}{4}$ multiplicemus, sive

sive per $\frac{3}{2}$ dividamus. Et sic ubique; sit licet quantitas (sic dividenda aut multiplicanda) vel integrum quid, vel fractum.

$$\frac{D}{C})A(\frac{AC}{D}=A\times\frac{C}{D}. \quad \frac{D}{C})\frac{A}{B}(\frac{AC}{BD}=\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}.$$

$$\frac{D}{C})AD(\frac{ADC}{D}=AC=AD\times\frac{C}{D}.$$

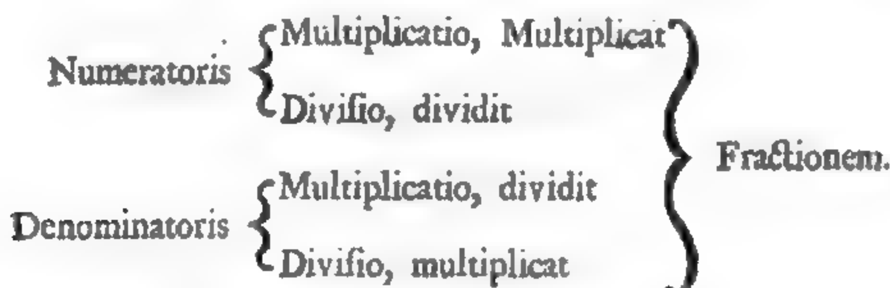
$$\frac{D}{C})\frac{A}{C}(\frac{AC}{CD}=\frac{A}{D}=\frac{A}{C}\times\frac{C}{D}.$$

$$2)\frac{4}{5}(\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}. \quad \frac{3}{2})\frac{4}{5}(\frac{8}{15}=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}:$$

$$\frac{3}{2})4(\frac{8}{3}=4\times\frac{2}{3}. \quad \text{vel} \quad \frac{3}{2})\frac{4}{1}(\frac{8}{3}=\frac{4}{1}\times\frac{2}{3}.$$

$$\frac{3}{2})9(\frac{18}{3}=\frac{6}{1}=6=9\times\frac{2}{3}. \quad \frac{3}{2})\frac{9}{1}(\frac{18}{3}=6=\frac{9}{1}\times\frac{2}{3}.$$

Breviter; Multiplicationis & Divisionis (in Fractionibus) doctrina, hujusmodi est (ut ex prædictis liquet:)



§ Quia vero numerus quilibet per quemlibet multiplicari potest commode, at non ita per quemlibet dividi (ut nempe nullum sit residuum:) utraque igitur operatio, tum Multiplicatio scilicet, tum Divisio Fractionis, per solam Multiplicationem à plerisque institui solet; illic quidem Numeratoris, hic Denominatoris. Adeoque

Si itaque ejusdem alicujus fractionis (vel etiam quantitatis integræ) tum Multiplicatio tum Divisio simul instituenda sit, (quod quidem, ubi expositus multiplicator aut divisor est fractio, contingit,) utrumque faciendum est. Nempe qui multiplicat per $\frac{2}{3}$; ille revera multiplicat per 2, & dividit per 3: qui autem per $\frac{2}{3}$ dividit; ille dividit per 2, & per 3 multiplicat. Et propterea, illic numerator (quantitatis expositæ) hic Denominator est per 2 multiplicandus: atque etiam Denominator illic, hic Numerator, multiplicandus per 3. (Eodem plane modo, atque in Additione & Subductione contingit: Puta qui addit $2-3$; ille revera addit 2, & 3 demit: & qui subducit $2-3$; ille revera 2 tollit, & addit 3.) Atque hæc quidem ad fractionum tum Multiplicationem tum Divisionem rite intelligendam, dicta sufficiant.

Si autem id expetat aliquis, non modo verum ut habeat sive Productum Multiplicationis, sive Divisionis Quotientem; sed in minimis terminis: Potest quidem illud obtineri, vel Productum aut Quotientem jam inventum reducendo; (eo nempe modo quem in præcedente capite indicavimus; puta tum numeratorem, tum denominatorem maxima communi mensura dividendo:) vel etiam, si id potius expetitur, præparatione facta antecedanea: nempe hoc modo. Reducantur primo, expositæ fractiones ad terminos suos minimos; Numeratores scilicet singulos, suosque respective Denominatores communi mensura maxima dividendo. Deinde vero, in Multiplicatione, Numeratores singuli, cum Denominatoribus alternis, sic comparentur & reducantur; at, in Divisione, tum Numeratores invicem, tum etiam Denominatores invicem, sic comparentur & reducantur: Et præparatione sic facta, tum tandem fiat ea quæ præcipitur terminorum Multiplicatio; *Producti & Quotientis exhibitio in minimis terminis.*

 Nempe

Nempe fractionis Multiplicandæ, Numerator in Numeratorem, & Denominator in Denominatorem Multiplicantis ducatur; fractionis autem Dividendæ, Numerator in dividentis Denominatorem, & Denominator in Numeratorem. (Quod sic breviter enunciat Oughtredus, *Multiplicatio comparat heterologos terminos, & multiplicat homologos: Divisio comparat homologos, & multiplicat heterologos.*) Sic si fractio $\frac{4}{18}$ in $\frac{15}{32}$ ducenda sit: Reducta prius $\frac{4}{18}$ ad $\frac{2}{9}$; comparo adhuc 2 numeratorem prioris, & 32 denominatorem posterioris, proque illis substituo 1 & 16: tum etiam pro 9 denominatore prioris, & 15 numeratore posterioris, substituo 3 & 5. Adeoque tandem prodibit $\frac{5}{48}$.

$$\frac{\overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{4}}}{\underset{\underset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{18}}}\times\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{16}{\cancel{32}}}=\frac{5}{48}.\quad \text{Sic}\ \frac{\overset{\overset{1}{\cancel{a}}}{\cancel{a^2}}}{\underset{b}{\cancel{ab}}}\times\frac{d}{\underset{1}{\cancel{a}}}=\frac{1}{b}\times\frac{d}{1}=\frac{d}{b}.$$

Similiter, si dividenda fractio $\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$, per $2\frac{2}{15}=\frac{32}{15}$: operatio sic procedet.

$$2\tfrac{2}{15}=\frac{\overset{16}{\cancel{32}}}{\underset{5}{\cancel{15}}}\Big)\ \frac{\overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{4}}}{\underset{\underset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{18}}}\Big(\frac{5}{48}.\quad \text{Sic}\ \frac{\overset{1}{\cancel{a}}}{d}\Big)\ \frac{\overset{\overset{1}{\cancel{a}}}{\cancel{a^2}}}{\underset{b}{\cancel{ab}}}\Big(\frac{d}{b}.$$

Operationum in numeris fractis, Synopsis. Totum itaque tum Additionis & Subductionis, tum Multiplicationis & Divisionis negotium, in numeris Fractis; duobus his capitibus absolvimus. Quod brevi hac Synopsi conspiciendum subjicimus.

$$\frac{a}{b}\pm\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a\beta\pm\alpha b}{b\beta}\quad \text{Additio \& Subductio.}$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a\alpha}{b\beta}\quad \text{Multiplicatio.}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\Big)\ \frac{a}{b}\ \Big(\frac{a\beta}{\alpha b}\quad \text{Divisio.}$$

CAP. XLIV.

De Fractionum Reductionibus variis. Impropriæ fractionis ad numerum integrum vel mistum reductio: & contra. Reductio ad minimos terminos: Ad communem Denominatorem: Ad Denominatorem datum: Ad communem datumve Numeratorem. De fractionum fractionibus reducendis. De fractionibus Sexagenariis & Decimalibus, tum ad invicem, tum ad fractiones ordinarias reducendis.

CUm eadem quoad valorem fractio, mille modis designari possit, uti superius traditum est: Expedit nonnunquam ex una in aliam formam fractiones transmutare;

mutare; variaſque illarum Reductiones inſtituere: quarum præcipuas hoc ſumus capite traditurí.

Fractionis impropriæ ad numerum integrum vel miſtum Reductio: & contra.

Fractionem Impropriam, ad Numerum Integrum, vel ſaltem Miſtum reduci poſſe; ex ſuperioribus patet. Nempe, Numeratorem per Denominatorem dividendo. Sic $\frac{24}{6} = 4$, quia 6) 24 (4. Et $\frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$, quia 7) 24 ($3\frac{3}{7}$. Item $\frac{4a}{a} = 4$, quia a) $4a$ (4. Et $\frac{4a}{2a} = 2$. quia $2a$) $4a$ (2. Sic $\frac{AB}{A} = B$. $\frac{2a+b}{a} = 2 + \frac{b}{a}$, &c. Cum enim (ut ſuperius dictum eſt) Fractio, (ſive propria ſive impropria,) non ſit niſi Diviſionis imperfectæ indicium: Diviſio illa, actu præſtita, id ipſum efficit, quod Fractio indicabat faciendum.

Et Contra, Numerus quilibet vel Integer vel Miſtus, ad Fractionem impropriam reducitur. Nempe multiplicando numerum integrum, in datum denominatorem. Sic $3 = \frac{12}{4}$. $2 = \frac{6}{3}$. &c. (quia nempe $3 \times 4 = 12$. & $2 \times 3 = 6$.) Cum enim in ſingulis integris, contineantur *quatuor* quadrantes; in tribus integris continebuntur quadrantes *ter quatuor*, hoc eſt duodecim: ſic de cæteris. Item $1\frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. $6\frac{1}{3} = \frac{18}{3} + \frac{1}{3} = \frac{19}{3}$. &c. eadem plane de cauſa. Et in Symbolis pariter $A = \frac{AB}{B}$. Et $3a + \frac{b}{c} = \frac{3ac+b}{c}$. Et $a + \frac{a^2}{c} = \frac{ac+a^2}{c}$ &c. Atque hæc quidem numeri integri miſtive in fractionis formam reductio non raro uſui eſt, præſertim in addendis, ſubducendis, comparandis, hiſce numeris fractionibus immiſtis: Sicut, è contra, fractionis impropriæ ad numerum integrum miſtumve reductio, ad earundem æſtimationem facilius & clarius mente aſſequendam maxime conducit.

Fractionis reductio ad minimos terminos.

Fractionis ad minimos terminos reductio, ex dictis Cap. XLII. ſatis innoteſcit. Diviſo nempe utroque termino per maximam communem menſuram (quæ ex ibidem traditis inveniatur,) prodeunt termini in eadem ratione minimi, ſive inter ſe primi: adeoque minimi qui eundem fractionis valorem exhibere poterunt. Sic $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, diviſo ſcil. tum numeratore tum denominatore per 3. Et $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$, & $\frac{42}{49} = \frac{6}{7}$, (diviſis nempe tum numeratore, tum denominatore, illic per 5, hic per 7.) Sic $\frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ &c. Item $\frac{AB}{BC} = \frac{A}{C}$. $\frac{AB}{B} = \frac{A}{1} = A$. (dividendo utrinque per B.) Sic $\frac{AC+BC}{DC} = \frac{A+B}{D}$ (diviſione facta per C.) Et $\frac{ab+bb-ac-cb}{b-c} = a+b$. Item $\frac{ab+b^2-ac-bc}{b^2-c^2} = \frac{a+b}{b+c}$. (facta utrobique diviſione per $b-c$.) Et ſimiliter in aliis. Eſtque hæc fractionum ad minimos terminos reductio, ad faciliorem valoris æſtimationem apprime utilis. Ecquis enim non facilius intelligit & mente concipit fractionem ſive rationem $\frac{1}{2}$, vel 1 ad 2; quam $\frac{783}{1566}$, vel 783 ad 1566? Adeoque tum fractiones tum Rationes commodius exprimuntur (cæteris paribus) in minoribus quam in majoribus terminis; & propterea, (niſi quid ſpeciatim aliquando altioris momenti impediat,) ad terminos minimos reducendæ.

Fractionum reductio ad communem Denominatorem.

Fractionum duarum pluriumve ad communem denominatorem reductio, (quæ quam ad Additionem & Subductionem neceſſaria ſit, jam ſupra dictum eſt,) oſtenditur Cap. XLII. Nempe denominatoribus omnibus continue ductis, habetur communis Denominator; cui conveniant Numeratores, ex numeratorum expoſitorum ſingulis, in reliquorum omnium denominatores continue ductis, emergentes.

Puta, $\frac{a}{\alpha}$. $\frac{b}{\beta}$. $\frac{c}{\gamma}$. ſic reductæ, fiunt $\frac{a\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}$. $\frac{b\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}$. $\frac{c\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$.

Item $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, reducuntur ad $\frac{20}{40}$, $\frac{30}{40}$, $\frac{16}{40}$.

Si autem non modo ad communem ſaltem aliquem, ſed ad minimum communem denominatorem, reducendæ ſint expoſitæ quotlibet fractiones: Habetur communis ille denominator, ſi datorum denominatorum illi omnes qui communem aliquam menſuram patiuntur, per illam dividantur, &, pro ipſis denominatoribus, quotientes ex ea diviſione emergentes aſſumantur; ut ex horum quotientum, reliquorumque ſiqui ſunt denominatorum, ipſiuſque communis diviſoris maximi

(aut etiam maximorum omnium, si plures fiant comparationes,) continua multiplicatione habeatur communis denominator minimus: (ad quem quærendi Numeratores congrui, modo mox ostendendo.) Sic in modo expositis, $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$; quia 2 & 4 communem patiuntur divisorem 2; uterque per 2 dividatur 2) 2 (1, 2) 4 (2; & quotientes ea divisione emergentes, 1, 2, cum tertio denominatore 5, ipsoque communi divisore 2, continue multiplicati, exhibent minimum communem denominatorem $1 \times 2 \times 5 \times 2 = 20$. Cui denominatores congrui (modo mox ostendendo) assumpti 10, 15, 8, exhibent expositis $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$, æquales cognomines $\frac{10}{20}, \frac{15}{20}, \frac{8}{20}$ & quidem minimum communem denominatorem habentes.

Sic $\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{4}{5}$; divisis tum 2 & 10 per communem mensuram 2, prodibunt quotientes 1, 5; tum iterum 5 (quotientum jam inventorum altero, qui propterea etiam eliminandus erit, ejusque loco novus per sequentem divisionem substituendus,) & 5 (denominatore tertio) per communem divisorem 5, unde prodibunt quotientes 1, 1, & (ex prioribus duobus) resumendus 1, qui in duos communes divisores 2, 5, continue ducti, dant $1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5 = 10$ communem denominatorem minimum; quibus respondent denominatores congrui 5, 3, 8; adeoque fractionibus expositis $\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{4}{5}$, æquales sunt, cognomines $\frac{5}{10}, \frac{3}{10}, \frac{8}{10}$.

Sic $\frac{a}{\alpha\beta}, \frac{b}{\beta\gamma}, \frac{c}{\gamma\delta}$, reducuntur ad cognomines minimos $\frac{a\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}, \frac{b\alpha\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}, \frac{c\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Invento autem communi denominatore minimo, Numeratores congrui inveniantur, hoc est, fractiones expositæ ad datum Denominatorem reducuntur, hoc modo:

Fractionis ad Denominatorem datum reductio.

Ad datum denominatorem reducitur data fractio, si novus assumatur Numerator, qui, ad datum Denominatorem, eam habeat rationem, quam habet fractionis datæ numerator ad denominatorem suum. (Ratio manifesta est; quoniam dum servatur eadem Numeratoris ad Denominatorem ratio, eadem manet fractionis quantitas.) Sic si fractionem $\frac{1}{2}$, reducere velim ad æqualem aliam, quæ denominatorem habeat 10; quærendus est Numerator, qui sit ad 10, ut est 1 ad 2. Sive, ad quem, eam habeat rationem 10, quam 2 ad 1. Quod per auream regulam peragitur: Puta $2 . 1 :: 10 . q = \frac{10}{2} = 5$. Adeoque $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Pariter si ad eundem denominatorem 10, reducere velim fractionem $\frac{4}{5}$; sumendus est Numerator 8: (quia $5 . 4 :: 10 . 8$.) Adeoque $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. Et propterea (quod modo dictum erat) fractiones $\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{4}{5}$, ad communem denominatorem 10 reductæ, erunt $\frac{5}{10}, \frac{3}{10}, \frac{8}{10}$. Eodem modo, fractiones $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$, ad communem denominatorem 20 reductæ, erunt $\frac{10}{20}, \frac{15}{20}, \frac{8}{20}$: (Nam $2 . 1 :: 20 . 10$. Item $4 . 3 : 20 : 15$. Item $5 . 2 :: 20 . 8$.) Sic fractio $\frac{a}{b}$, ad denominatorem bc reducta, erit $\frac{ac}{bc}$. (Quia $b . a :: bc . \frac{abc}{b} = ac$.) & fractio $\frac{ac}{bc}$, ad denominatorem b reducta, erit $\frac{a}{b}$. (quia $bc . ac :: b . \frac{acb}{bc} = a$.) Et sic ubique.

Atque hujus reductionis magna est utilitas, (ut alibi, sic) in partibus expositis alicujus integri, ad partes nobis notiores, vel usitatiores, reducendis. Exempli gratia; si exponatur $\frac{2}{3}$ *Solidi* Anglicani; & scire velim, quot ea fractio valeat nummos *Denarios* dictos, sive partes duodecimas. Reducenda quippe erit exposita fractio $\frac{2}{3}$, ad æqualem aliam quæ denominatorem habeat 12. Adeoque (quia $3 . 2 :: 12 . 8$.) invenio $\frac{2}{3}$, bessem, sive duos trientes, tantundem valere atque $\frac{8}{12}$, octo duodecimas, hoc est, octo denarios.

Verum hic intelligendum est; quod non possit ita semper ad datum denominatorem reduci fractio data, quin pro quæsito numeratore emergat nonnunquam vel fractio vel numerus mistus; adeoque non possit fractione simplici, quæ datum habeat denominatorem, data fractio designari, sed fractione composita opus erit. Puta si fractionem $\frac{2}{5}$, ad partes duodecimas reducere velim, (hoc est, ad fractionem æqualem, cujus denominator sit 12) quoniam est $5 . 2 :: 12 . \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$, quæsita fractio esset $\frac{4\frac{4}{5}}{12}$. Hoc est, 4 duodecimæ, atque insuper $\frac{4}{5}$ unius duodecimæ. Adeoque, verbi gratia, $\frac{2}{5}$ solidi Anglicani, valebit denarios Anglicanos $4\frac{4}{5}$; hoc est quatuor

quatuor denarios, atque insuper $\frac{4}{5}$ unius denarii. Sic, fractio $\frac{a}{b}$, ad aliam reducenda quæ denominatorem habeat c, erit $\frac{b)ac}{c}$.

Quæ autem jam tradita sunt de Fractionis ad datum Denominatorem reductione; vel etiam plurium fractionum reductione ad Denominatorem communem: Eadem non difficulter de reductionibus ad Numeratorem datum, atque ad numeratorem communem, exponi possunt. Vix enim aliud ad hoc factu opus est, quam ut pro *Denominatoris* voce substituatur *Numeratoris*, & contra. Sic fractiones $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, æquipollent hisce $\frac{3}{6}, \frac{3}{4}$. Item fractionibus $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$, æquipollent $\frac{6}{12}, \frac{6}{8}, \frac{6}{15}$. Et fractionibus $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}$, æquipollent $\frac{abc}{\alpha bc}, \frac{abc}{\beta ac}, \frac{abc}{\gamma ab}$. Sic fractio $\frac{a}{b}$, ad aliam reducenda quæ numeratorem habeat, c, erit $\frac{c}{a)bc} = \frac{a}{b}$. Et sic alibi.

Fractionum reductio ad datum Numeratorem, vel Numeratorem communem.

De Fractionum fractionibus, sive minutiarum minutiis, reducendis; nonnihil etiam dicendum est. Quippe nonnunquam fractionem aliquam ulterius frangi contingit; cujus, tanquam Integri, partes, Minutiæ minutiarum, sive fractionum fractiones dici solent. Puta trientis semis, vel bessis dodrans, &c. quos sic notare solent, $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$. $\frac{3}{4}\ \frac{2}{3}$. &c. vel sic, $\frac{1}{2}$ ex $\frac{1}{3}$. $\frac{3}{4}$ ex $\frac{2}{3}$. &c. Mallem ego sic $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$. &c. (quippe nihil aliud est hujusmodi fractionis fractio, quam fractio ex duabus invicem multiplicatis composita.) Uti enim $\frac{1}{2}$ A vel $\frac{1}{2} \times$ A, est semissis quantitatis A; & $\frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{2} \times 1$, semissis unius integri; $\frac{1}{2} \times 2$, semissis duorum; $\frac{1}{2} \times 3$, semissis trium: ita $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, est semissis trientis; $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$, dodrans bessis, sive tres quartæ duarum tertiarum, &c.

De fractionum fractionibus reducendis.

Atque hinc statim patet methodus, ejusmodi fractiones compositas ad simplices reducendi. Nempe multiplicatione sola id peragitur. Puta ductis invicem $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{3}$, erit (per tradita in superiore capite) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Sic $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. &c. Similiter si pluries adhuc componatur; puta semis dodrantis duarum tertiarum, $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$. Et sic alibi.

Eodem plane modo reducenda est, hujusmodi fractio $\frac{4\frac{4}{5}}{12}$, hoc est $4\frac{4}{5} \times \frac{1}{12}$, sive $\frac{24}{5} \times \frac{1}{12} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$. aliæque similes ubi Numerator fractionem adjunctam habet.

Quod etiam sic tradi possit: Ductis tum numeratore $4\frac{4}{5}$, tum Denominatore 12, in communem multiplicatorem 5, prodibit (non mutata quantitate) $\frac{24}{60}$, vel $\frac{2}{5}$.

Nec dissimilis erit reductio fractionis hujusmodi (cujus Denominatori adjungitur fractio) $\frac{3}{12\frac{1}{2}} = \frac{6}{25}$: Ductis nempe tum Numeratore tum Denominatore, in communem multiplicatorem 2, non immutatur quantitas.

Sic $\frac{4\frac{4}{5}}{12\frac{1}{2}} = \frac{48}{125}$; ductis nempe tum numeratore tum denominatore, in $10 = 5 \times 2$.

Eademque plane methodo utendum erit, in fractionibus (si id obtingat) etiam adhuc ulterius fractis, sive in Numeratore, sive Denominatore, sive etiam utroque. Ut non sit opus hisce diutius immorari.

Superest ut de Fractionibus Sexagenariis, & Decimalibus verba faciamus; earumque tum ad invicem, tum ad fractiones ordinarias reductione; atque harum ad illas. Ex omnibus enim fractionum Reductionibus, hæ duæ præ reliquis celebres sunt; nempe reductio ad partes Sexagenarias, & ad partes Decimales: & vice versa. Illa veteribus admodum familiaris erat & frequens; hæc maxime Recentioribus.

De fractionibus Sexagenariis & Decimalibus.

In fractionibus Sexagenariis, supponitur integrum quodvis in partes 60 dividi, quas vocant λεπτὰ, minuta prima, scrupulos primos; Et eorum quodlibet in 60 minuta secunda; & quodvis horum in totidem minuta tertia; & sic deinceps, in continua ratione subsexagecupla. Sic, verbi gratia: *Hora* dividitur in 60 minuta prima, & quodlibet minutum primum in 60 secunda; & quodlibet secundum in totidem tertia, &c. Item circuli, sive quadrantis, aut etiam Signi Gradus quilibet eadem ratione dividitur in Minuta prima, secunda, tertia, &c.

In Recentiorum partibus Decimalibus, supponitur Integrum quodvis dividi in 10 par-

10 partes decimas; & decima quælibet, in 10 Centesimas; quælibet centesima in 10 Millesimas; & sic deinceps; in continua ratione subdecupla infra Unitatis locum descendendo, sicut supra Unitatis locum continua ratione decupla ascenditur, ad decades, centurias, millia, &c. Quæ quidem ratio dividendi integrum, multo accommodatior est, quam veterum Sexagenaria; quia fractiones decimales eodem plane modo tractantur, quo numeri integri, (ut suo loco dictum est,) nullamque calculi difficultatem involvunt; cum Sexagenaria illa progressio perplexa nimium sit, variasque reductiones postulet. De utrisque autem seorsim dicetur.

Reducitur fractio quælibet ordinaria ad partes decimales, si numeratorem (additis post lineam separatricem quot opus est ciphris, quæ gradus infra Unitatem descendentes designent,) per denominatorem dividamus. (Quippe hoc pacto divisio, quam indicat fractionis notatio, actu peragitur: Quomodo autem ea instituenda est per locos descendentes divisio, jam supra suo loco ostensum est, ubi de integrorum divisione verba fecimus.) Sic $\frac{4}{5} = 0|8$. $\frac{3}{8} = 0|375$. ut divisione patebit.

```
                                   6 4
5) 4, 00 (0, 8.           8) 3, 0000 (0, 375.
                                888
```

Si autem (quod non raro contingit) ejusmodi occurrat fractio, quæ vel non omnino, vel non nisi longiori operatione, accurate possit partibus decimalibus exprimi: possumus operationem quousque libet instituere, donec quod supersit tam sit exiguum ut tuto negligi possit. Sic $\frac{1}{3} = 0|3333$ &c. $\frac{2}{3} = 0|6666$ &c. $\frac{1}{6} = 0|1666$ &c. $\frac{5}{6} = 0|8333$ &c. $\frac{10}{11} = 0|909090$ &c. $\frac{5}{11} = 0|454545$ &c. $\frac{3}{7} = 0|428571428$ &c. (In quibus omnibus, aliisque similibus observare licet eorundem numerorum recursum, quousque libet continuandum.) Item $\frac{3}{32} = 0|09375$. $\frac{23}{64} = 0|359375$. (In quibus, aliisque similibus, exhauritur quidem, sed sero, exposita fractio partibus decimalibus.) ut dividendo patebit.

```
 111                          444
 1, 0000 (0, 333 &c.          1, 0000 (0, 166 &c.
 3, 333                       6, 666

                               21
  6565                        1246
 5, 00000 (0, 4545 &c.       3, 00000 (0, 09375.
11, 1111                    32, 2222
  1111                        3333
```

In his, inquam, aliisque ejusmodi casibus, ubi partes decimales vel in longum nimis, vel in infinitum excurrunt; sufficit vero proximum pro vero accipere; adeoque operatione quousque libet continuata, quod superest negligere. Puta, pro $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{3}{32}$, &c. sumatur 0|3333. 0|8333. 0|90909. 0|0937. Vel etiam 0|333. 0|833. 0|909. 0|094. Vel forte 0|33. 0|83. 0|91. 0|09. prout major minorve accuratio requiratur.

Fractiones autem Decimales, ubi opus est, eodem plane modo ad alias reducuntur, quo reliquæ fractiones ab una ad aliam denominationem. Puta 0|5, hoc est $\frac{5}{10}$, ad $\frac{1}{2}$, dividendo tum Numeratorem tum Denominatorem, per maximum communem divisorem 5. Sic $0|09375 = \frac{9375}{100000} = \frac{3}{32}$, nempe dividendo per maximam communem mensuram 3125. Et sic in reliquis. Si autem ea reperiatur mensura quæ non quidem accurate, at saltem quam proxime utrumque terminum mensuret; poterit illius ope assumi fractio ordinaria, quæ, licet non accurate, quam proxime tamen æquabitur expositæ Decimali: adeoque pro hac assumi possit; præsertim si supponatur fractio illa decimalis (quod non raro fit, præsertim in tabulis Astronomicis, Trigonometricis, &c.) non præcise Geometricam veritatem, sed vero proximum, designare. Sic, pro 0|33333, hoc est $\frac{33333}{100000}$ assumi poterit tanquam æqualis $\frac{1}{3}$, cum tamen hæc aliquanto major sit, (quippe æqualis huic $\frac{3333}{9999}$,) sed tantillo ut ea differentia tuto negligi possit, ubi Geometrica ἀκρίβεια non exigitur.

Si

Reductio fractionis ordinariæ ad partes Sexagesimales. Et contra.

Si Fractio ordinaria quævis, ad partes Sexagesimales reducenda sit: Ducto Numeratore in 60, per Denominatorem fiat Divisio; & Quotiens indicabit Minuta: Residuum autem divisionis, si quod sit, in 60 ductum, & per Denominatorem (fractionis datæ) divisum, exhibebit in Quotiente Minuta secunda: Et sic deinceps minuta tertia, quarta, &c. prodibunt, si divisionum residua semper in 60 ducantur, & producta per communem fractionis datæ Denominatorem dividantur: Quod eousque faciendum erit, donec vel nullum supersit residuum, vel quod (ob operationem jam satis continuatam) negligi possit. Quod enim de Decimalibus modo dictum est, idem & in Sexagenariis fractionibus sæpissime fit; nempe nunc in infinitum, nunc saltem in nimis longum procedendum esse, priusquam tota fractio exposita plane exhauriatur: quo casu, pro accurate vero, saltem vero proximum assumendum erit.

Sic $\frac{5}{24}$ = Min: 12'. 30''. præcise. Ut calculo patet. Hoc modo.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 60 \\ \hline 24)\ 300\ (12'\ \tfrac{12}{24}. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \times 60 \\ \hline 24)\ 720\ (30''. \end{array}$$

Vel etiam.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 60 \\ \hline 24)\ 300\ (12'\ \tfrac{12}{24} = 12'\ \tfrac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \times 60 \\ \hline 2)\ 60\ (30''. \end{array}$$

Sic $\frac{7}{11}$ = Min. 38'. 10''. 54'''. 32''''. &c. = Min. 38'. 11''. fere. Nam

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 60 \\ \hline 11)\ 420\ (38'\ \tfrac{2}{11}. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ \times 60 \\ \hline 11)\ 120\ (10''\ \tfrac{10}{11}. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 60 \\ \hline 11)\ 600\ (54'''\ \tfrac{6}{11}. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ \times 60 \\ \hline 11)\ 360\ (32''''\ \tfrac{8}{11}. \end{array}$$

Partes autem Sexagesimales ad fractiones ordinarias, reducuntur: si reductis omnibus ad scrupulorum ultimam denominationem, eorumque numero pro numeratore sumpto, congruus scribatur Denominator; nempe numerus ille qui ostendit quot istius ordinis scrupuli in uno integro continentur. Sic 12'. 30''. reducuntur ad fractionem ordinariam $\frac{5}{24}$. Hoc modo

$$\begin{array}{r} 12' \\ \times 60 \\ \hline 720'' \\ +30'' \\ \hline 750'' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \times 60 \\ \hline 60' \\ \times 60 \\ \hline 3600'' \end{array} \qquad \tfrac{750}{3600} = \tfrac{75}{360} = \tfrac{15}{72} = \tfrac{5}{24}.$$

Cum enim singula minuta prima contineant 60 secunda, 12 prima continebunt 720 secunda, quibus additis aliis secundis 30, erit secundorum numerus 750. At vero in uno Integro continentur Minuta prima 60, adeoque minuta secunda 3600: Sunt ergo illa ad unum integrum; ut 750 ad 3600, hoc est (reductione facta ad minimos terminos) ut 5 ad 24. Adeoque 12'. 30''. = $\frac{750}{3600}$ = $\frac{5}{24}$.

Decimalium usus, quam Sexagesimalium, quanto expeditior.

Est autem usus partium decimalium incredibili fere differentia magis compendiosus, quam partium sexagesimalium. Quod vel unico hoc exemplo satis indicabitur.

Posito quod Solis cursus annuus, per integrum Zodiaci circulum, absolvatur diebus 365, horis 5, minutis 49', 16'', 46''': quæritur quantus sit illius motus diurnus medius. Hoc est, juxta leges Regulæ aureæ; Ut tempus annuum, 365^{d}, 5^{h}, 49', 16'', 46''' ; ad tempus diurnum, 24^{h}: sic motus annuus medius, graduum 360; ad motum diurnum, graduum quot?

Quoniam autem hic terminus primus, qui futurus est divisor, ex pluribus denominationibus constat; quo melius instituatur divisio, reducendus est ille primo ad unam denominationem. In quem finem, numerus dierum 365, per 24 (numerum horarum in singulis diebus) multiplicandus, atque adjiciendæ insuper horæ 5 (in quæstione adjunctæ) ut habeatur numerus horarum in tempore exposito, nempe 8765; Hæ horæ in minuta prima reductæ (multiplicando per 60) adjunctis insuper 49′ expositis; exhibent minuta prima, 525949: His autem minutis primis in secunda reductis, (multiplicando per 60,) & adjunctis insuper 16″ expositis, habentur minuta secunda 31556956: His denique in tertia pariter reductis, & adjunctis item 46‴, habentur minuta tertia 1893417406: quæ expositum tempus æquant.

Reducto autem tempore annuo in horaria minuta tertia; in eadem etiam reducendum erit tempus diurnum; nempe primum in 24, & deinde in 60 ter, continue multiplicando, adeoque dies unus reperietur minutis tertiis 5184000 æqualis.

Atque hac præparatione facta; constituatur quæstio ad hanc formam. Si in anno integro, hoc est in minutis tertiis horariis 1893417406, absolvatur integer circulus, hoc est gradus 360: in uno die, hoc est, minutis tertiis horariis 5184000, absolventur quot gradus? Et, operationibus Aureæ regulæ rite peractis, reperietur, ne unum quidem gradum integrum uno die absolvi; sed $\frac{1866240000}{1893417406}$ unius gradus. Ut ex adjuncto totius processus typo patet.

$365^{d}, 5^{h}, 49', 16'', 46'''$. 1^{d} : : 360^{gr}. quot?

×24	×24
1460	24^{h}
730	×60
+5	1440′
8765^{h}	×60
×60	86400″
525900	×60
+49	5184000
525949′	
×60	
31556940	
+16	
31556956″	
×60	
1893417360	
+46	

1893417406‴. 5184000‴ : : 360^{gr}. quot?

360

31104

15552

1893417406) 1866240000 $\left(0\frac{1866240000}{1893417406}\right.$

Denique, ut inventus motus diurnus medius, ordinaria fractione designatus, nempe grad: $0\frac{1866240000}{1893417406}$, partibus sexagesimalibus exhibeatur; reducenda est fractio modo superius ostenso, multiplicando Numeratorem per 60, & productum per datum denominatorem dividendo: atque hoc continue quousque opus erit. Sive etiam (quod eodem recidet) repetitis Aureæ regulæ operationibus; Nempe, ut Denominator fractionis datæ, ad suum Numeratorem, sic 60 Denominator fractionis quæsitæ, ad Numeratorem quæsitum; hoc est ad numerum partium sexagesimalium loci proxime inferioris. Adeoque tandem multiplici calculo comperietur, motum solis diurnum medium, esse, grad: $0\frac{1866240000}{1893417406}$ = grad: 0, 59′, 8″, 19‴, 37⁗, proxime.

1893417406.

1893417406 . 1866240000 :: 60 . 59′ $\frac{262773046}{1893417406}$
1893417406 . 262773046 :: 60 . 8″ $\frac{619043512}{1893417405}$
1893417406 . 619043512 :: 60 . 19‴ $\frac{1167680006}{1893417406}$
1893417406 . 1167680006 :: 60 . 37⁗ $\frac{4116318}{1893417406}$

Totum autem hoc negotium, per partes decimales, levissimo statim labore peragitur. Posito nempe quod Solis cursus Annuus, per integrum Zodiaci circulum absolvatur, diebus 365|242555; motus diurnus, unica divisionis operatione peracta, reperietur, grad. 0|9856463735 proxime. Quod calculus indicabit.

365|242555 . 360 :: 1 . 0|9856463735.
1
365|242555) 360|000000 (0|9856463735.

Hanc autem quæstionis tum propositionem tum resolutionem in partibus Decimalibus, tantundem plane valere, atque operosam illam in partibus Sexagesimalibus; statim apparebit, ubi ostendero methodum has ad illas, & vice versa, reducendi.

Reductio partium Sexagesimalium ad Decimales & contra.

Reducuntur autem partes Sexagesimales, (& quidem eadem methodo, mutatis mutandis, aliæ item quantitates pluribus denominationibus designatæ,) ad partes Decimales hac methodo. Quoniam, verbi gratia, quodvis Minutum Tertium, est $\frac{1}{60}$ unius secundi, & quodvis secundum, $\frac{1}{60}$ unius primi, & quodvis minutum primum $\frac{1}{60}$ unius horæ; & hora quævis $\frac{1}{24}$ unius diei: Erunt, (in exposita quantitate annua, dierum 365, hor. 5, Min. 49′, 16″, 46‴.) minuta tertia 46‴, æqualia $\frac{46}{60}$ unius secundi; hoc est (dividendo 46 per 60) secund. 0|7666 &c. adeoque 16″, 46‴, = 16|7666″. Cumque hæc Secunda, sint totidem Sexagesimæ unius Primi; dividendo 16|76666″ per 60; reperietur 16|7666″ = 0|2794′ & propterea 49′, 16″, 46‴, = 49′, 16|7666″ = 49|2794′. Et similiter, cum minuta prima sint totidem sexagesimæ unius horæ; dividendo iterum pur 60; erunt Min. prima 49|2794′ = 0|8213 horæ: adeoque 5ʰ, 49′, 16″, 46‴, = 5|8213 horæ. Et, quia hora est $\frac{1}{24}$ diei; dividendo per 24 reperientur horæ 5|8213 = d : 0|2425; adeoque 365ᵈ, 5ʰ, 49′ 16″, 46‴, = diebus 365|2425 proxime. Operationis processum hic subjecimus.

365ᵈ, 5ʰ, 49′, 16″, 46‴.

60) 46, 0000 (0, 76666 &c.	16|76666 secund.
60) 16, 76666 (0, 279444 &c.	49|2794444 prim.
60) 49, 27944 (0, 821324074 &c.	5|821324074 horæ.
24) 5, 82132407 (0, 2425516975. &c.	365|2425516975 dies.

Contra vero; Partes Decimales, ad Sexagesimales (aliasve hisce similes) methodo contraria reducuntur. Nempe residuas ubique fractiones decimales multiplicando per 60, (aut per alium, quicunque fuerit, quæsitæ fractionis denominatorem.) Sic, verbi gratia, Motus Solis diurnus, grad. 0|9856463735, reducitur ad partes sexagesimales 59′, 8″, 19‴, 37⁗. quam proxime. Ut ex adjuncta operatione patet.

0	9856463735	
59′	13878241	× 60
8″	3269446	
19‴	616676	
37⁗	00056	

Atque hoc pacto partes Sexagesimales, aliæque pluribus denominationibus constantes, ad Decimales reduci possunt; & rursus (ubi opus fuerit) hæ ad illas. Et quidem de Fractionum Reductionibus hactenus.

CAP. XLV.

De Fractionum, & Rationum Rationibus. Totius operis Epilogus.

De Fractionum Rationumve Rationibus.

Atque hactenus quidem cum Fractionum, five etiam Rationum, (quippe perinde eſt utra ſub notione conſiderentur,) Additionem, Subductionem, Multiplicationem, & Diviſionem, variaſque etiam Reductiones, quantum opus videtur, tradidimus: Non erit opus, ut quæ de Aurea Regula (ut loquuntur) aliave de Rationum aut Proportionum doctrina ſuperius tradita ſunt univerſaliter, jam iterum de Fractionibus ſpeciatim repetantur. Quippe nihil hic novi occurrit de Fractionum, ſive etiam Rationum, (ſunt enim & illæ quantitates) rationibus dicendum; præter ea quæ univerſaliter de Quantitatum ſimpliciter (cujuſcunque ſint generis) Rationibus jam ſunt tradita. Et quidem ut numeri integri (puta 2, 3, &c.) ſunt Rationum Multiplicium (duplæ, triplæ, &c.) denominatores; ſic fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. ſunt denominatores rationum ſubmultiplicium (ſubduplæ, ſubtriplæ, &c.) reliquæque fractiones, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, &c. aliarum item rationum denominatores. Et quidem, ſicut dupli ad triplum, puta 2 A ad 3 A, eadem eſt ratio quæ denominatorum ſuorum 2, ad 3. Sic, ſeſquialterius ad ſeſquitertium, $\frac{3}{2}$ A ad $\frac{4}{3}$ A, eadem eſt ratio quæ denominatorum ſuorum $\frac{3}{2}$ ad $\frac{4}{3}$. Item ſubduplum ad ſubtriplum; ſubſeſquialterum ad ſubſeſquitertium, &c. eadem omnino ratio atque ſuorum reſpective denominatorum.

Dupl. Tripl :: 2 A . 3 A :: 2 . 3.
Subdupl. Subtripl :: $\frac{1}{2}$ A . $\frac{1}{3}$ A :: $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$ :: 3 . 2.
Seſquialt. Seſquitert :: $\frac{3}{2}$ A . $\frac{4}{3}$ A :: $\frac{3}{2}$. $\frac{4}{3}$ :: 9 . 8.
Subſeſquialt. Subſeſquiter :: $\frac{2}{3}$ A . $\frac{3}{4}$ A :: $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$ :: 8 . 9.

Item;	Dupl.	Tripl	::	Quadrupl.	Sextupl.	
Hoc eſt;	2 .	3	::	4 .	6	
Et,	Subdupla.	Subtripl	::	Subquadri.	Subſext.	
Hoc eſt,	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{3}$	::	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{6}$	:: 3 . 2.

Atque hæc quidem, cum apertiſſima ſint; mirum mihi plane videtur Recentiorum aliquos, doctrinam de Rationum Rationibus, quaſi jam plane novam venditare, atque à ſe jam primum in Matheſin introductam; cum tamen Aureæ Regulæ (ut vocant) praxis in numeris fractis, nil aliud plane ſit quam illa de Rationum rationibus doctrina, eaque omnibus notiſſima; ſaltem ſi ſpecierum ſive Symbolorum uſus etiam adhibeatur; quæ non minus quantitates Irrationales quam rationales reſpiciunt. Quique eaſdem plane leges de rationibus addendis, componendis, dividendis, alternandis, &c. in numeris fractis valere docent, atque in numeris integris; eadem opera docent etiam Rationum rationes eaſdem ſubire leges, atque rationes Abſolutarum quantitatum.

Totius operis Epilogus.

Supereſt adhuc ad perfectam Arithmetici negotii traditionem, *Analytices* doctrina. Quam quidem ſtatueram præſenti operi adjunxiſſe. Verum cum videam jam ultra quam ſperaveram molem creviſſe; nec interim poſſe totum illud negotium ita in compendium redigi, ut huic commode ſubjungi poſſit: Placuit potius rem illam totam hic intactam præterire; adeoque & Poteſtatum Analyſin, ſive (ut loquuntur) Radicum extractionem, quæque huic conjuncta eſt de Radicibus Surdis doctrinam. Quæ omnia aliquando forſan, modo Deus ita voluerit, peculiari ſeorſim volumine abſolvenda ſpero. Adeoque pedem hic figo.

Quæ hic ſecutura erat pars altera, Algebram ſpectans, propter alia quæ interceſſerunt negotia, non niſi ſero poſt plures annos prodiit.

FINIS.

ADVERSUS
MARCI MEIBOMII,
De Proportionibus Dialogum,
Tractatus Elencticus.

Honoratissimo Domino,

D. *Guilielmo Brouncker*

Equiti Aurato, Vicecomiti *Brouncker* de Lions, Baroni *Brouncker* de Newcastle.

JAM quintus agitur Mensis, Honoratissime Domine, Ex quo quam offero tractationem absolverunt operæ. Quam ideo Tibi potius offerendam duxi, quod probe ipse intelligas, tum quanti est ad Mathesin rite intelligendam *Rationes* callere, tum quam nihili est quem refutandum suscepimus, *Dialogus Meibomii*.

Sub id temporis, cum Clarissimum quendam Virum & Mathematicum Oxoniæ convenire contigerit, ex Dania oriundum, (qui Angliam transiens, Oxoniæ nos invisere & salutare dignatus est,) facto de hoc Meibomii tractatu sermone, intellexi, non sibi soli sed & D. *Auzotio* cuidam, Gallo, hanc novam placuisse doctrinam: Et quidem eo usque ut vix inter se convenerit, cujus illud inventum censeatur, aut quo vulgante primo resciscat Orbis. Quippe cum Auzotius scriptum suum editurus in Belgium misisset, idque Meibomio mature satis innotuerit; haud æquo animo tulit hic, ut sub Auzotii nomine nova hæc prodiret doctrina, quam sibi ipse vendicavit, sibique jam ante aliquot annos originem debuisse contendit: Et fieri quidem potest ut non minori zelo erga prolem suam, quam & sibi genuinam fuisse præ se tulit, affectus fuerit Auzotius: quem partum suum non minus deperisse, putandum est.

Utut sit, Meibomii saltem Dialogus prius prodiit, &, credo, adhuc solus.

Ex eo autem tempore prodiit etiam, saltem ad manus meas pervenit, *Xaverii Ainscombe*, Jesuitæ, Tractatus, hoc ipso anno editus: qui *Gregorii a S. Vincentio* tetragonismum stabilire frustra satagens, ejusdem saltem de Rationibus & Proportionibus doctrinam satis, adversus *Meibomium*, defendit; sed & Auzotium etiam ὁμόψηφον (cujus ille opus MS nactus erat) junctim refellit.

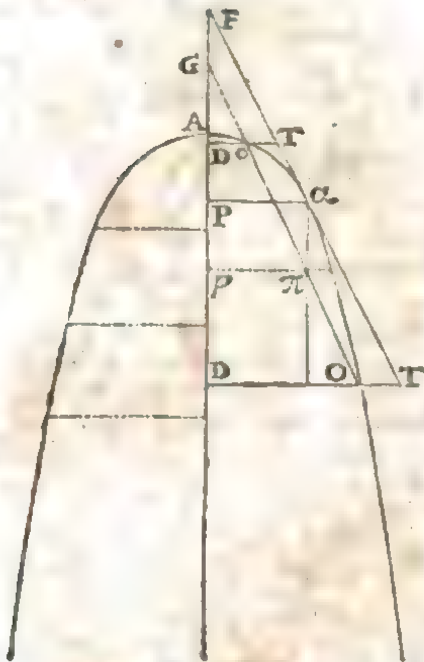
Nos autem, qui tum Auzotii opus non vidimus, tum Ainscomii susceptum ignoravimus, Meibomii saltem Dialogum, quia nescio quid & Novi & Magni præ se ferre videbatur, examinavimus & refutavimus.

Quam autem jam tum absolverant operæ, nunc serius ea prodit in publicum Refutatio; partim quod cui subjungitur opus nondum perfectum erat penitusque ab operis absolutum; partim etiam quod interea temporis occurrebat *Hobbius* secundo castigandus, ob convitia & maledicta quæ scripto Anglicano in me effutivit ob *Elenchum* meum quo ipsius Geometriam refutaveram. Quæ quidem Hobbii castigatio, tum me tum Typographos (qui, cum vel minime impediti, sunt satis tardi) aliquandiu occupatos tenuit; ne hoc cum opere præcedente citius prodiret, in ipso fere partus momento impeditum.

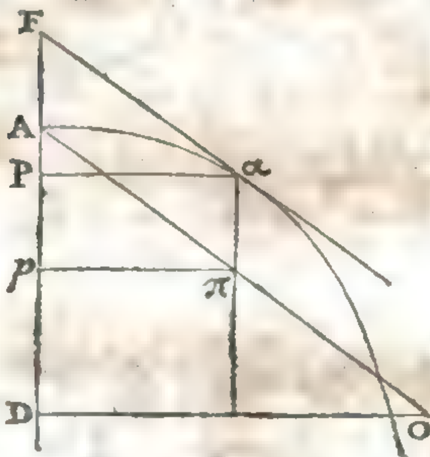
Atque hactenus quidem exposita præsentis operis ratione, tacere possem, neque ulterius Dominationi Vestræ molestus esse; nisi quod alia nonnulla sint, quæ licet à præsenti negotio satis sint aliena, nequaquam tamen aliena D^{ni} Vestræ, quæque hic loci minime reticenda duxi.

Dignata est D. V. pro ea qua polles humanitate atque in me benevolentia, scripta mea non modo supra quam ipsa merentur æstimare, sed & rimari curiosius, atque etiam ultra quam ipse fecerim inventa nostra promovere. Hinc factum est ut quantitatis satis quidem irrationalis, quam ad Tetragonismum meum commode explicandum designandam habui, præter eam quam ipse exhibueram designationem, aliam adhuc invenit D. V. accuratam quidem & subtilissimam; quam ad mentem tuam, quam potui proxime, ad prop. 191. *Arithmet. Infinit.* exposui. Neque hoc contentus, ex principiis nostris, quæ ad Circuli quadraturam designan-

designandam adhibueram, talem etiam quadraturam Hyperbolæ deduxisti, quam non absimili methodo designari posse docuisti: quod ex te tandem, uti spero, aliquando discet Orbis literatus.



Verum aliud est quod impræsentiarum adhuc dicendum habeo. Propositione 47ª (cui affinis & prop. 49.) tractatus mei de *Sectionibus Conicis*, hanc ego Propositionem, *In Paraboloide Cubicali, Diametri sunt invicem parallelæ; & cujuscunque diametri ordinatim-applicatæ, sunt rectæ in ipsius vertice contingenti parallelæ*: analytice examinandam proposueram. Tentata autem Analysis, in hanc desinit Æquationem Cubicam, $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$: quo legitime, sine ullo paralogismo, vel ἀγεωμετρησίᾳ, perventum est. Concludebam itaque, (quod quidem inde omnino concludendum videbatur,) *Istius Æquationis radix* q, *si quo modo reperiri poterit, monstrabit quæsita puncta* D, D; *adeoque propositi veritatem*. Atque hac assertione hypothetica contentus, (adjuncta quæ huic hypothesi conveniat demonstratione Synthetica,) ulteriori disquisitioni (negotiis aliquot tum temporis ex improviso supervenientibus impeditus quo minus huic vacare tum licuerit,) supersedebam; nec eousque examen deducebam, ut inquirerem *Numquo modo possit ejusmodi radix singularis exhiberi*: An potius *impossibilis* plane sit, & casum impossibilem innuat; adeoque & propositi impossibilitatem: Vel saltem *Varia*, nec utrobique eadem; ut non æquales sint pD sursum, & pD deorsum, sumendæ; adeoque propositi falsitatem.



Ex eo tempore (monente quidem, ex Gallia, sed sine ulla in contrarium demonstratione, D. Robervallio) propositionem illam accuratius ad examen revocans, inveni quidem, utut verum sit quod hypothetice affirmaveram, propositionem tamen haud ita veram esse.

Et quidem quod sine Demonstratione innuit D. Robervallius; Tu justa demonstratione evicisti. Retenta siquidem constructione nostra; sumptaque ea parallela quæ per verticem A transit, (ut puncta GA coincidant, adeoque & DO superiora) rem sic absolvis breviter.

Est AP $(=\frac{1}{3}FP) = \frac{1}{3}Ap$.
Et $Ap = \frac{1}{2}AD$. (*adeoque* $p\pi . DO :: 1 . 2$.)
Ergo $AP = \frac{1}{6}AD$. (*adeoque* $P\alpha . DO :: \sqrt{c}\,1 . \sqrt{c}\,6 :: 1 . \sqrt{c}\,6$.)
Sed $p\pi = P\alpha$.
Esset ideo $2 = \sqrt{c}\,6$. *Quod est impossibile.*

Hoc autem cum non aliunde evenire posse videbatur, quam ob radicem æquationis nostræ quærendam *q*, impossibilem, vel saltem variam: Utrum horum esset, inquirendum putabam. Quamvis enim nulla omnino sit æquatio cubica quæ saltem

tem aliquam non habeat radicem possibilem: attamen interea fieri posse putabam, ut radicum illa quam nostrum exigat negotium impossibilis foret. Si autem non impossibilis, saltem ut varia sit, putandum videbatur; & propterea propositionem expositam haud esse veram, utpote quæ supponit lineam D D bisectam in p, (adeoque & interceptam O O bisecari in π:) quod si p D sursum, & p D deorsum, sumendæ (quarum indifferenter utraque radice q designatur) non sint invicem æquales; neque erit D D bisecta in p, nec O O in π; adeoque nec vera erit propositio.

Radicem itaque illam more meo inquirendam suscipiebam; ut viderem num in ἀδύνατον exiret; vel aliud aliquod quod nondum observaveram mysterium panderet. (Quippe non raro contingit, ut ipsa æquationis resolutio, inexspectatum quid ex improviso prodat.) Quod sic aggredior.

Æquatio exposita $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$

sive $q^3 \pm 9dq^2 = \pm 27d^2g$,

substituto $r \mp 3d = q$,

adeoque $q^3 = r^3 \mp 9dr^2 + 27d^2r \mp 27d^3$

& $\pm 9dq^2 = \pm 9dr^2 - 54d^2r \pm 81d^3$

Erit $q^3 \pm 9dq^2 = r^3 - 27d^2r \pm 54d^3 = \pm 27d^2g$

sive $r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g \mp 54d^3$.

Et quidem in casu tuo, (ubi G A coincidunt, adeoque $g = 2d$,)

$$r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g \mp 54d^3 = 00$$

adeoque $r^3 = 27d^2r$.

& $r^2 = 27d^2$.

& $r = \sqrt{27d^2} = 3d\sqrt{3}$.

adeoque $q = r \mp 3d = 3d\sqrt{3} \mp 3d$.

Atque hinc quidem concludendum statim videatur radicem q, non utrobique eandem esse; sed quoad punctum D inferius, p D $= q = 3d\sqrt{3} - 3d$; quoad superius vero, p D $= q = 3d\sqrt{3} + 3d$, adeoque rectam D D non esse bisectam in p. Atque id ipsum concludi etiam posse videatur, ex æquatione primum proposita $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$; cum enim sit tum $9dq^2 - q^3 = 27d^2g$, tum $9dq^2 + q^3 = 27d^2g$, non posse hoc omnino fieri videatur, nisi vel sit $q = 0$, vel non eadem utrobique quantitas.

Verum lubricus adhuc est hic locus, nec ei temere fidendum; quique mihi jam semel imposuit, caute prospiciendum est ne nobis imponat denuo. Et quidem, utut id verum sit quod concluditur, non tamen inde tam facile concludi potest. Utrobique enim consequentia haud satis firma est, nec nisi aliunde sumptis indiciis stabiliri potest.

Non enim ex eo quod sit $r^2 = 27d^2$, statim sequitur ponendum esse $r = 3d\sqrt{3}$; cum non minus esse possit $r = -3d\sqrt{3}$: utrovis enim posito, erit $r^2 = 27d^2$. (Nam radix quadrati affirmativi, potest quidem esse affirmativa; sed & potest esse negativa, cum enim sit ea æquatio quadratica, utut simplex nec omnino affecta, geminam tamen propterea radicem habet, alteram affirmativam, alteram negativam: utra autem sumenda sit, tanquam præsenti negotio accommoda, an etiam indifferenter utravis, non statim ex ipsa æquatione resolvenda, sed ex aliis primarii quæsiti circumstantiis determinandum erit.) Et quidem utraque hic loci radix est genuina, (utut non plane indifferenter & promiscue utravis pro libitu adhibenda sit, sed nunc hæc nunc illa prout res postulat, ut infra rectius patebit, ubi totum quod hic latet mysterium exposuero:) atque hoc quidem eo magis suspicandum erat, quia ex æquatione exposita duplici huc deventum est. Cum sit itaque $r = \pm 3d\sqrt{3}$, quidni & $r \mp 3d = \pm 3d\sqrt{3} \mp 3d$, vel $r \mp 3d = \mp 3d\sqrt{3} \mp 3d$, ut nempe radix sursum & deorsum æstimanda, quod mutata signa indicant, sit utrobique vel eadem summa vel eadem differentia quantitatum $3d\sqrt{3}$, & $3d$. Quid enim hic statuendum sit, non nisi ex collatis aliunde rei circumstantiis, eoque quo huc deventum est processu, æstimandum est.

 Sed

Sed & altera consequentia non minus lubrica est. Non enim ex eo quod sit tum $9dq^2+q^3$, tum $9dq^2-q^3$, eidem quantitati æqualis, concludendum est, quantitatem q vel nihil esse, vel non utrobique eadem; cum ad hoc nil aliud requiratur quam ut alibi affirmetur alibi negetur eadem quantitas, (quod ipsum in præsenti quæstione exspectandum magis quam metuendum videatur;) Nam, verbi gratia, posito $q=\pm 2d$, erit $9dq^2\pm q^3=44d^3$. Cum enim sit utrobique $9d\times 4d^2=36d^3$, perinde erit sive addamus $+8d^3=C:+2d$, sive auferamus $-8d^3=C:-2d$. Non interim ignoro quid huic replicationi solide reponi possit, si rem pressius perpendamus, (nempe, radices utrobique affirmativas invicem esse comparandas, & æquales esse debere ut constet propositum; non æquationis unius affirmativam, negativæ alterius;) Nec enim negamus æquationibus illis id subesse quod rem præsentem determinet; sed accuratius adhuc illas contemplandas esse dicimus, quo illud quicquid sit eliciatur. Quod & nos facturi sumus.

Ut itaque de præsenti negotio rectius statuatur, separabimus, quas hactenus conjunctim tractavimus, duas æquationes; nempe, $9dq^2+q^3=27d^2g$, quæ respicit pD deorsum sumendam; & $9dq^2-q^3=27d^2g$, quæ respicit pD sursum sumendam, (ut ex propositæ quæstionis analysi liquet;) Et quidem in æquatione illa resolvenda ponitur $r-3d=q$, in hac $r+3d=q$. Utrobique autem (posito $g=2d$) provenit $r^2=27d^2$, adeoque $r=\pm 3d\sqrt{3}$. Et propterea illic $r-3d=q=\pm 3d\sqrt{3}-3d$, hic vero $r+3d=q=\pm 3d\sqrt{3}+3d$. Hoc est, si de pD deorsum quæratur, duæ proveniunt radices, altera affirmativa, $+3d\sqrt{3}-3d$, quæ propterea revera deorsum prout supponitur sumenda est; altera negativa, $-3d\sqrt{3}-3d$; quæ propterea in partem suppositioni contrariam tendit, (nam deorsum $-3d\sqrt{3}-3d$, tantundem est atque sursum $+3d\sqrt{3}+3d$.) Contra vero, si (juxta secundam æquationem) quæratur de pD sursum; duæ sunt & hic radices; altera affirmativa $+3d\sqrt{3}+3d$, quæ propterea revera sursum tendit; altera negativa $-3d\sqrt{3}+3d$, quæ, in contrariam partem exponenda, revera deorsum tendit; (quippe sursum $-3d\sqrt{3}+3d$, tantundem est atque, deorsum $+3d\sqrt{3}-3d$.) Adeoque utramvis æquationem resolvamus, perinde omnino est, quippe eædem utrobique proveniunt radices: cum hoc solo discrimine, quod quæ in una æquatione radix est affirmativa, eadem in altera est negativa, & contra. Utrovis modo, id constat, pD sursum sumendam, esse $+3d\sqrt{3}+3d$; deorsum vero, $+3d\sqrt{3}-3d$; adeoque nec DD bisectam esse in p, nec OO in π; & propterea $\alpha\pi$, diametro AP parallelam, non & ipsam esse diametrum.

Atque hactenus videamur æquationis nodum satis solvisse. Ne tamen ea de re nimis securi simus; en nova statim hinc prodit difficultas. Annon enim quam hactenus consideravimus recta DD, eadem plane est, in casu à te posito, atque AD? Omnino, inquies; quippe, cum inscripta OO per verticem transeat, eodem ipso verticis puncto confunduntur, tum punctum G, tum etiam puncta D, O, superius sumenda. Bene est. At, inquam, ergo recta pA, eadem est atque pD sursum sumenda. Quidni, inquies, esset? Ergo, inquam, (utut de pD deorsum sumenda securi simus,) erit saltem sursum $pA=pD=q=+3d\sqrt{3}+3d$: id enim inventa modo docet æquationis radix, satis, uti videbatur, staminata. Omnino, inquies; & quidni? At, inquam, est $Ap=3AP=3d$, (hoc enim assumit tua demonstratio; atque est verissimum:) si itaque sit eadem $pA=+3d\sqrt{3}+3d$, quod jam obtendi videatur; erit $3d=3d\sqrt{3}+3d$, hoc est $1=\sqrt{3}+1$, quod est impossibile. Videntur itaque needum omnia satis inter se cohærere, aut ex votis nostris succedere. Quippe aliud adhuc latet, quod forte ne suspiceris quidem, mysterium adhuc detegendum.

Dum hoc ago; supervenit secunda tua demonstratio, Quæ, rem ulterius prosecuta, non modo ostendit, Rectam $\alpha\pi$ quæ inscriptam AO bisecat, non esse diametro AP parallelam; sed, ipsi aliquando occursuram, ipsumque tandem concursus punctum C: adeoque & veram diametrum polliceri videatur; saltem si ulla omnino recta, ad punctum α pertingens, istius curvæ diameter esse possit.

In

In Paraboloeide Cubicali Aα,

Quoniam est AP.PF :: 1.3.

Ergo & PR.Pα :: 1.3.

Et posito PR.DO :: 1.a.

Erit Pα.DO :: 3.a :: 1.$\frac{1}{3}a$.

Quia vero Pα.DO :: $\sqrt{c}$AP.$\sqrt{c}$AD :: $\sqrt{c}$PR.$\sqrt{c}$DO.

Erit Pα.DO :: $\sqrt{c}\,1$.$\sqrt{c}\,a$ :: 1.$\sqrt{c}\,a$.

Et propterea $\frac{1}{3}a = \sqrt{c}\,a$. & $a = 3\sqrt{c}\,a = \sqrt{c}\,27a$

adeoque $a^3 = 27a$. $a^2 = 27$. & $a = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

Ideoque Pα.DO :: 3.$3\sqrt{3}$ :: 1.$\sqrt{3}$.

Et AP.AD :: PR.DO :: 1.$3\sqrt{3}$.

Porro; Quia AP.AD :: 1.$3\sqrt{3}$.

Ergo AP.Ap :: 1.$\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Et AP.Pp :: 1.$\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1$.

Et quia Pα.DO :: 1.$\sqrt{3}$.

Ergo Pα.$p\pi$ :: 1.$\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Tum quia Sα.$p\pi$ :: Sπ.pC.

hoc est P$\alpha - p\pi$.$p\pi$ :: Pp.pC.

ergo $1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$.$\frac{1}{3}\sqrt{3}$ :: $\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1$.$\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}$ :: Pp.pC.

Ideoque AP.pC :: 1.$\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}$.

Et AP.PC :: 1.$\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1 + \dfrac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}$.

:: 1.$\dfrac{\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1}{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}$.

:: $1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$.$\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1$.

Et propterea AP.AC :: $1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$.$\sqrt{3}$ :: 1.$4\sqrt{3} + 6$.

Et simili demonstratione, in Paraboloeidibus reliquis, adhibita; reperietur.

In Parabol.	*Quadratic.*	*Cubic.*	*Biquadrat.*	*Surdesol.*	
Pα.DO::	1 . 2	1 . √3	1 . √c4	1 . √qq5	&c.
AP.AD::	1 . 2×2	1 . 3√3	1 . 4√c4	1 . 5√qq5	
AP.AC::	1—½×2. ½×2	1—½√3. ½√3	1—½√c4. ½√c4	1—½√qq5. ½√qq5	

Atque hactenus acutissime & subtilissime procedit Dominationis Vestræ demonstratio. Qua quidem hæc duo evincis; Tum rectam απ, quæ inscriptam AO bisecat, diametro occurrere in puncto C; (quod quidem aliud atque aliud est, prout punctum P propius aut remotius à vertice distat; quippe semper AP. AC :: 1 — ½√3 . √3.) Tum, si omnino ulla sit recta quæ ad verticem α diameter esse possit, rectam αC eam esse, ut quæ inscriptam AO bisecat.

At interim, cum ad Diametri rationem spectet, non modo ut unam aliquam ex inscriptis bisecet, sed & omnes eidem parallelas: quærendum insuper restat, an & hoc faciat eadem AC recta. Fieri enim omnino potest, non obstante jam allata demonstratione, ut nulla omnino recta id faciat, sed linea potius aliquomodo incurvata.

Huic itaque ut satisfacias scrupulo, adeoque totum absolvas negotium; adjuncta tertia demonstratione, ostendis; non modo non rectam illam αC, sed nec ullam quidem rectam, imo nec (uti videtur) regularem aliquam curvam, diametri hujusmodi vices supplere posse. Nempe hoc modo.

In Paraboloeide Cubicali (*erecta*) Aα,

Est AP.PR :: 1 . *b*.

Adeoq; PR . AR :: *b* . √: *b*² + 1.

Et quia PR . Pα :: 1 . 3 :: *b* . 3*b*.

Erit AP . Pα :: 1 . 3*b*.

Et quia PR . AR :: BP(= Pα) . BG :: *b* . √: *b*² + 1 :: 3*b* . 3√: *b*² + 1.

Erit AP . BG :: 1 . 3√: *b*² + 1.

Et quia PR . Pα :: 1 . 3.

Erit Pα . Rα :: 3 . 2.

Et Bα . Rα :: 6 . 2 :: 3 . 1.

Ergo quia Bα . Rα :: Tα . πα :: Xα . Sα = Pα — pπ.

Et Pα . pπ :: 1 . ½√3 . (*ut in demonstr. præced.*)

Adeoque

Adeoque $P\alpha . S\alpha :: 1 . 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Erit $B\alpha = 2P\alpha . X\alpha = 3S\alpha :: 2 . 3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Et $B\alpha . BX :: 2 . \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$.

Ergo $P\alpha . PX :: 1 . \frac{3}{2}\sqrt{3} - 2 :: 3b . \frac{9}{2}b\sqrt{3} - 6b$.

Ideoque $PA . PX :: 1 . \frac{9}{2}b\sqrt{3} - 6b$.

Tum quia $PR . AR :: GY = PX . GT :: b . \sqrt{:b^2+1}$.

$:: \frac{9}{2}b\sqrt{3} - 6b . \frac{9}{2}\sqrt{3} - 6 : in \sqrt{:b^2+1}$.

Ideo $AP . GT :: 1 . \frac{9}{2}\sqrt{3} - 6 : in \sqrt{:b^2+1}$.

Ergo $AP . BT (= BG + GT) :: 1 . 3\sqrt{:b^2+1} : pl. \frac{9}{2}\sqrt{3} - 6 : in \sqrt{:b^2+1}$.

$:: 1 . \frac{9}{2}\sqrt{3} - 3 : in \sqrt{:b^2+1}$.

Adeoque $AP . Go (= BT + GT) :: 1 . 9\sqrt{3} - 9 : in \sqrt{:b^2+1}$.

Tum quia $PR . PA :: BX (= P\alpha + PX) . XT ::$

$:: b . 1 :: \frac{9}{2}b\sqrt{3} - 3b . \frac{9}{2}\sqrt{3} - 3$.

Erit $AP . XT :: 1 . \frac{9}{2}\sqrt{3} - 3$.

Et $AP . PD (= 2XT) :: 1 . 9\sqrt{3} - 6$.

Et $AP . AD :: 1 . 9\sqrt{3} - 5$.

Et quia $AR . PR :: Go . Do :: \sqrt{:b^2+1} . b ::$

$:: 9\sqrt{3} - 9 : in \sqrt{:b^2+1} . 9b\sqrt{3} - 9b$.

Ergo $AP . Do :: 1 . 9b\sqrt{3} - 9b$.

Sed est $P\alpha . D\odot :: \sqrt{c}AP . \sqrt{c}AD :: \sqrt{c}1 . \sqrt{c}:9\sqrt{3} - 5$.

$:: \sqrt{c}27b^3 (= 3b) . \sqrt{c}:243b^3\sqrt{3} - 135b^3$.

Ergo $AP . D\odot :: 1 . \sqrt{c}:243b^3\sqrt{3} - 135b^3$.

At vero, $\sqrt{c}:243b^3\sqrt{3} - 135b^3$: *est minus quam*

$9b\sqrt{3} - 9b = \sqrt{c}:4374b^3\sqrt{3} - 7290b^3$.

Nam $243\sqrt{3} - 135 < 4374\sqrt{3} - 7290$.

hoc est $243\sqrt{3} < 4374\sqrt{3} - 7155$.

hoc est $243\sqrt{3} + 7155 < 4374\sqrt{3}$.

hoc est $7155 < 4131\sqrt{3}$.

hoc est $\sqrt{51194025} < \sqrt{51195483}$.

Ergo & $D\odot$ *minus quam* Do.

Adeoque punctum medium inscriptæ Bα, non est ipsum T punctum, sed aliud aliquod inter B & T.

Sed neque medium inscriptæ EM, est in puncto C, (sed inter C & M;) cum enim KE minus sit quam LM, erit & EC minus quam CM.

Non itaque vel recta αC, vel quidem alia ulla recta (quippe nulla alia recta transit per puncta α, π.) diameter esse potest ad verticem α.

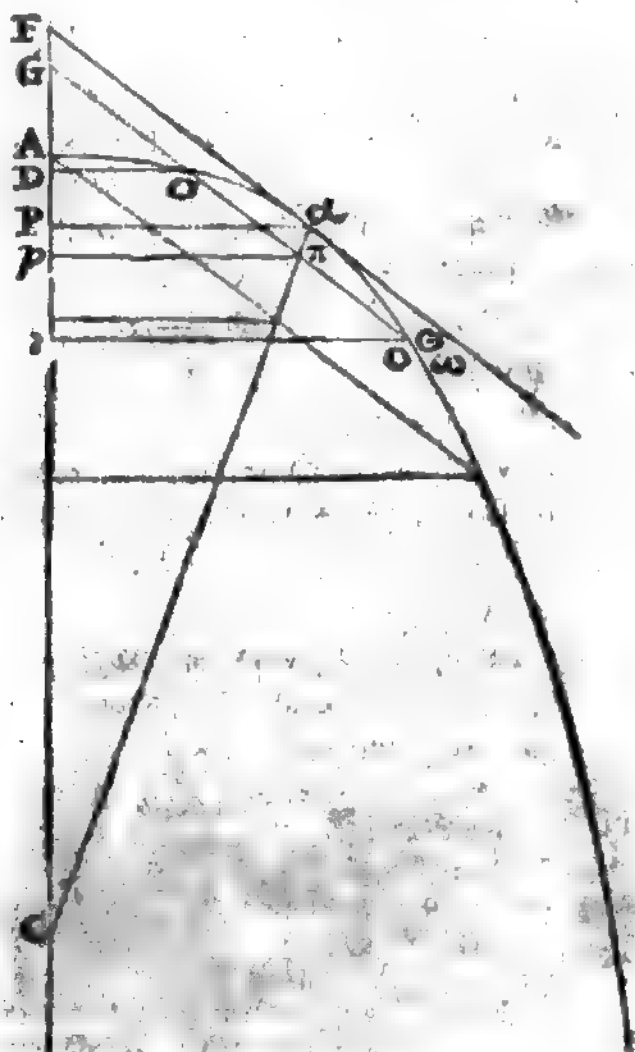
Sed neque (ut videtur) regularis curva; sed quæ rectæ απTC occurrat tum in α, tum iterum in π, & postea inter T & C, (incidit enim supra T, versus B; at infra punctum C, versus M;) adeoque rectam αC sæpius secet necesse est. Quæ cum admodum irregularis videatur, utpote circa rectam αC tortuose incedens, non videtur operæ pretium in illius naturam studiosius inquirere.

Illius autem curvæ (qualiscunque demum fuerit) situs est hujusmodi; Nempe, Rectæ αC occurrens in α, hinc subtus tendit ad usque π (punctum medium inscriptæ per verticem); transiens autem rectam in π, deinceps supra incedit usque dum præteriverit punctum T; tum demum non procul ab illo puncto T rectam jam tertio transiens, deinceps deorsum tendit; neque postea vel rectam illam αC attingit usquam, vel etiam diametrum AP. Quo enim argumento concludit tua demonstratio, ad punctum C non attingere curvam illam, eodem concludi poterit, neque ad ullum aliud diametri punctum pertingere, nedum ad eam rectæ αC partem quæ est ultra C.

Ne autem id gratis dictum videatur, quod, ab α ad π (punctum medium rectæ per verticem inscriptæ) curva subtus tendat; facit demonstratio tua quarta, quæ

 hoc

hoc evincit: Ubi ſupponitur recta απ non jam παραλλήλως incedere, ſed ad diametrum convergere, eique tandem occurrere, ut in figuris duabus præcedentibus, in puncto C. Punctum autem D inferius (quod tantundem deorſum à p diſtare ſupponitur quantum inde diſtat D alterum ſurſum) appello, diſtinctionis ergo, δ. Eique ordinatim applicata δ☉, occurrere ſupponitur curvæ in ☉, rectæque OO in O, quod intra curvam cadere evincit hæc demonſtratio.



Sumpto AD $= \frac{1}{8}$ AP. (*Adeoque* PD $= \frac{7}{8}$ AP.)

Erit Pα.DO :: $\sqrt{c}$ AP. $\sqrt{c}$ AD :: $\sqrt{c}\,1.\sqrt{c}\,\frac{1}{8}$ :: $1.\frac{1}{2}$.

Cumque ſit Pα.DO :: PF.DG :: $1.\frac{1}{2}$ :: $3.\frac{3}{2}$.

ſitque AP.PF :: 1.3.

Erit AP.DG :: $1.\frac{3}{2}$.

Et AP.FG(= PF − PD − DG) :: $1.(3 - \frac{7}{8} - \frac{3}{2} =)\frac{5}{8}$.

Tum quia AP.PC :: $1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{3}{4}\sqrt{3} - 1$ :: $1.4\sqrt{3}+5$. (*ut ſup. demonſt.*)

Erit FP.PC :: $3.4\sqrt{3}+5$.

Et AP.FC(= FP + PC) :: $1.4\sqrt{3}+8$.

Et quia FC.FG :: αC.απ :: PC.Pp :: $4\sqrt{3}+8.\frac{5}{8}$ ::

$$:: 4\sqrt{3}+5.\left(\frac{\frac{5}{8}\,in: 4\sqrt{3}+5}{4\sqrt{3}+8} =\right)\frac{15\sqrt{3}-10}{32}.$$

Erit AP.Pp :: $1.\frac{15\sqrt{3}-10}{32}$.

Ergo AP.Dp(= DP + Pp) :: $1.\left(\frac{7}{8} + \frac{15\sqrt{3}-10}{32} =\right)\frac{15\sqrt{3}+18}{32}$.

Et AP.Dδ = 2pD :: $1.\frac{15\sqrt{3}+18}{16}$.

Et AP.Gδ(= GD + Dδ) :: $1.\left(\frac{3}{2} + \frac{15\sqrt{3}+18}{16} =\right)\frac{15\sqrt{3}+42}{16}$.

Et quia GD.Gδ::DO.δO:: $\frac{3}{4}$. $\frac{15\sqrt{3}+42}{16}$.

Ergo Pα.δO::3. $\frac{15\sqrt{3}+42}{16}$ ::1. $\frac{5\sqrt{3}+14}{16}$.

Item Pα.δ⊙::√c AP.√c Aδ(=√c: AD+Dδ:)

::√c 1 = 1. √c($\frac{1}{8}+\frac{15\sqrt{3}+18}{16}=$) $\frac{15\sqrt{3}+20}{16}$.

Sed est √c $\frac{15\sqrt{3}+20}{16} > \frac{5\sqrt{3}+14}{16} = $ √c $\frac{3315\sqrt{3}+5894}{4096}$

Hoc est, $\frac{3840\sqrt{3}+5120}{4096} > \frac{3315\sqrt{3}+5894}{4096}$.

Sive $3840\sqrt{3}+5120 > 3315\sqrt{3}+5894$.

Hoc est, $525\sqrt{3} > 774$.

Vel $\sqrt{826875} > \sqrt{599076}$.

Ergo δ⊙ > δO.

Adeoque & πω > πO.

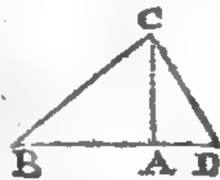
Et propterea punctum bisectionis inscriptæ est infra punctum π. Quod erat ostendendum. Et similiter ostenditur de alia quavis inscripta, quæ superior sit ea quæ per verticem transit.

Cumque hæc omnia sint legitime demonstrata; Quid interim, inquies, de Æquatione nostra dicendum erit, quæ demonstrationibus hisce tuis subverti plane videatur. Quamvis enim utrobique conveniat propositionem examinandam falsam esse: At tamen de situ puncti D superioris, pugnare mutuo videantur. Quippe per Æquationis nostræ radicem supra inventam, esset pD superius $= 3d\sqrt{3} + 3d$; at in demonstratione tua prima, habetur pA (hoc est pD sursum) $= 3d$. Item cum sit pD superius $= 3d\sqrt{3}+3d$, & pD inferius $= 3d\sqrt{3}-3d$, esset utriusque aggregatum, hoc est, recta DD $= 6d\sqrt{3}$: at in demonstratione tua secunda, est AD (hoc est, in præsenti casu, DD) ad AP, ut 1 ad $3\sqrt{3}$; adeoque cum sit AP $= d$, erit AD = DD $= 3d\sqrt{3}$, non $6d\sqrt{3}$.

Quid itaque dicemus; Num utraque vera esse? (tum Analysin nostram, tum demonstrationes tuas?) At qui illud fieri possit? siquidem ἀληθῆ συναληθεύειν. Num itaque vel has vel illam falsi accusabimus? atque alicubi erratum esse dicemus? Sed neque videtur hoc dicendum. Eccubi enim? Num igitur dicemus tandem (quod tamen ut dicam non nisi extrema necessitate adigar) Analyseos leges non satis ratas habendas esse? adeoque Analyticen ipsam (quod faciunt nonnulli, ipsius parum gnari,) accusabimus, quasi quid falsum doceat? At ab hoc ego D. V. satis abhorrere non dubito; quippe quo Analysin accuratius nemo, nemo subtilius, exercet. Fateor equidem fieri nonnunquam posse (quod tamen nemo quem scio Analysta hactenus prodidit,) ut in casu impossibili, non eam statim detegat analysis impossibilitatem, sed rem quasi possibilis esset solvat; & vice versa, videatur aliquando analysis in ἀδύνατον exire, quum interim res exposita non sit plane impossibilis: At nihil ego tale hoc in casu dicendum autumo.

Ne autem ego temere illud fassus videar, & cui Tu forsan haud statim assentiendum esse putaveris; non abs re fore autumo, utut πάρεργον videatur, eorum utrumque exemplo indicare.

Si supponatur Triangulum cujus duo crura sint BC = 2, CD = 1, & basis BD = 4, petatur autem, si à vertice C demittatur ad basin perpendicularis CA, quodnam illa basis punctum designet; sive, quanta futura sit recta BA. Analysis sic procedit. Est CBq − BAq = CAq = (CDq − ADq = CDq − Q: BD − BA: =) CDq − BDq + 2BD×BA − BAq. Adeoque CBq = CDq − BDq + 2BD×BA. Hoc est CBq − CDq + BDq = 2BD×BA. Ideoque $\frac{CBq - CDq + BDq}{2BD}$ = BA. Hoc est $\frac{4-1+16}{8} = \frac{19}{8}$ $= 2\frac{3}{8}$ = BA. quod erat inquirendum. Quin casus autem ille sit impossibilis, ecquis



quis dubitet? quippe ponitur Basis utrisque simul cruribus major. Tentata tamen Analysis non secus procedit quam si casus esset maxime possibilis.

At alteram concessionis partem quod attinet; Nempe quod Analysis aliquando ad quid impossibile nos deducere videatur, cum interim casus expositus minime sit impossibilis: Quo hoc rectius ostendam, opus erit de Æquationibus Cubicis resolvendis pauca præmittere; quæ tum huic negotio, tum etiam inquisitioni nostræ primariæ subserviant.

Æquationes omnes cubicas vel tales esse vel ad tales saltem reduci posse, quæ non nisi sub Radice (ut loquuntur) sint affectæ, notum est. (Quippe si sub quadrato sit affecta æquatio, gradum supremo proximum tolli posse docuit Cartesius, atque ante illum Vieta, Harriotus, aliique.) Possunt autem illæ omnes vel ad hanc formam $Ac - Bq\,A = \pm Dc$, vel ad hanc reduci $Ac + Bq\,A = \pm Dc$.

Hujusmodi vero ego Æquationes Cubicas, adeoque solutu difficiliores, memini me olim conatum (exercitii gratia, postquam Analytices rudimenta imbiberam) ad quadraticas reducere. Idque hac methodo.

Positis, $Z = A + E$. $Æ = AE$. $\mathcal{Z} = Ac + Ec$.
Erit, $Zc = Ac + Ec + 3AAE + 3AEE = \mathcal{Z} + 3ÆZ$.
Adeoque, $Zc - 3ÆZ = \mathcal{Z}$.

Item positis $X = A - E$. $\mathcal{X} = Ac - Ec$.
Erit $Xc = Ac - Ec - 3AAE + 3AEE = \mathcal{X} - 3ÆX$.
Adeoque $Xc + 3ÆX = \mathcal{X}$.

In Æquationibus itaque cubicis ad hanc formam constitutis, $Zc - 3ÆZ = \mathcal{Z}$; animadvertebam, *Æquationis radicem* Z, *esse summam duarum quantitatum* A, E, *quarum rectangulum* Æ (*tertia pars coefficientis intermedii termini;*) *&, cuborum aggregatum* $\mathcal{Z}$, *terminus absolutus.*

Item, in Æquationibus Cubicis ad hanc formam constitutis, $Xc + 3ÆX = \mathcal{X}$; *est æquationis radix* X, *duarum quantitatum differentia, quarum rectangulum est* Æ (*tertia pars coefficientis;*) *&, cuborum differentia,* $\mathcal{X}$, *terminus absolutus.*

Adeoque redacta est illarum Æquationum difficultas, ad hoc problema; *Datis duarum quantitatum, tum Rectangulo, tum Cuborum summa vel differentia, ipsarum quantitatum vel summam vel differentiam aut ipsas etiam quantitates investigare.* Quod sic efficitur,

$$\text{Est } \frac{Æ}{A} = E.\ \frac{Æc}{Ac} = Ec.$$

$$\text{Ergo } Ac + \frac{Æc}{Ac} = Ac + Ec = \mathcal{Z}.$$

$$\text{Et } Acc + Æc = \mathcal{Z}Ac.$$

$$\text{Sive } \mathcal{Z}Ac - Acc = Æc.$$

$$\text{Similiter } \frac{Æ}{E} = A.\ \frac{Æc}{Ec} = Ac.$$

$$\text{Adeoque } \frac{Æc}{Ec} + Ec = \mathcal{Z} = Ac + Ec.$$

$$\text{Et } \mathcal{Z}Ec - Ecc = Æc.$$

Resolutis itaque æquationibus (quadraticis quidem, sed ex radice solida ortis,)

$$\mathcal{Z}Ac - Acc = Æc = \mathcal{Z}Ec - Ecc.$$

$$\text{Erit } \tfrac{1}{2}\mathcal{Z} \pm \sqrt{:}\,\tfrac{1}{4}\mathcal{Z}q - Æc. = \begin{cases} Ac. \\ Ec. \end{cases}$$

$$\text{Adeoque } \left.\begin{aligned} &\sqrt{c}\cdot\tfrac{1}{2}\mathcal{Z} + \sqrt{:}\,\tfrac{1}{4}\mathcal{Z}q - Æc. \\ &+ \sqrt{c}\cdot\tfrac{1}{2}\mathcal{Z} - \sqrt{:}\,\tfrac{1}{4}\mathcal{Z}q - Æc. \end{aligned}\right\} = A + E = Z.$$

Ad

Ad quam regulam exigendæ sunt Æquationes Cubicæ hujus formæ $Zc - 3ÆZ = +\mathfrak{Z}$: (vel etiam hujus $Zc - 3ÆZ = -\mathfrak{Z}$, quæ ab illa hoc solo differt, quod quæ illic affirmative exponendæ sint quantitates $+A+E, = Z$; hic interpretandæ sint negative, $-A-E = -Z$.) Quam, *Regulam primam* jam appellabimus.

Eodem modo, cum sit $Ac - \frac{Æc}{Ac} = Ac - Ec = \mathfrak{X}$.

$$\text{Erit } Acc - Æc = \mathfrak{X}\,Ac.$$
$$\text{sive } Acc - \mathfrak{X}Ac = Æc.$$
$$\text{Item } \frac{Æc}{Ec} - Ec = Ac - Ec = \mathfrak{X}.$$
$$\&\ Æc - Ecc = \mathfrak{X}\,Ec.$$
$$\text{hoc est } Ecc + \mathfrak{X}Ec = Æc.$$

Resolutis itaque æquationibus

$$Acc - \mathfrak{X}Ac = Æc = Ecc + \mathfrak{X}\,Ec.$$

$$\text{Erit } \sqrt{:\tfrac{1}{4}\mathfrak{X}q + Æc:} \pm \tfrac{1}{2}\mathfrak{X}: = \begin{cases} Ac. \\ Ec. \end{cases}$$

$$\text{Adeoque } \left.\begin{matrix} \sqrt{c}.\sqrt{:\tfrac{1}{4}\mathfrak{X}q + Æc:} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{X}. \\ -\sqrt{c}.\sqrt{:\tfrac{1}{4}\mathfrak{X}q + Æc:} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{X}. \end{matrix}\right\} = A - E = X.$$

Atque ad hanc regulam exigendæ sunt hujus formæ $Xc + 3ÆX = +\mathfrak{X}$ æquationes omnes. Vel etiam hujus $Xc + 3ÆX = -\mathfrak{X}$: cum hoc solo discrimine, quod cum illic quantitas major A, sit affirmativa; minor E, negativa; & $X = A - E$ quantitas affirmativa; hic, major A erit negativa, minor E affirmativa, adeoque & $X = -A + E$ quantitas negativa. Atque hanc jam appellabimus *Regulam Secundam*.

Exemplum posterioris Regulæ hoc esto $Xc + 12X = 63$. Hoc est, inquam, $Xc + 3ÆX = \mathfrak{X}$. Ergo $\frac{12}{3} = 4 = Æ$. $\frac{4}{A} = \frac{Æ}{A} = E$. Et $Ac - \frac{64}{Ac} = Ac - Ec = \mathfrak{X} = 63$. Adeoque $Acc - 64 = 63\,Ac$. vel $Acc - 63\,Ac = 64$. (Et similiter $\frac{64}{Ec} = Ac$. & $\frac{64}{Ec} - Ec = Ac - Ec = \mathfrak{X} = 63$. Adeoque $64 - Ecc = 63\,Ec$. vel $64 = Ecc + 63\,Ec$.) Ergo $\sqrt{:\frac{3969}{4} + 64:} \pm \frac{63}{2} = \sqrt{\frac{4225}{4}} \pm \frac{63}{2} = \frac{65}{2} \pm \frac{63}{2} = \begin{cases} 64 = Ac. \\ 1 = Ec. \end{cases}$

Et propterea $\sqrt{c}\,64 - \sqrt{c}\,1 = 4 - 1 = 3 = X = A - E$. Vel etiam, (si principio positum esset -63) mutatis ubique signis numeri 63, proveniret $-4 + 1 = -3 = X = -A + E$.

Vel sic (immediate ad regulam exigendo) Æquatio est $Xc + 12X = \pm 63$. Ergo 3) 12 ($4 = Æ$. adeoque $64 = Æc$. Et $\frac{63}{2} = \frac{1}{2}\mathfrak{X}$. adeoque $\frac{3969}{4} = \frac{1}{4}\mathfrak{X}q$. & propterea,

$$\sqrt{:\tfrac{1}{4}\mathfrak{X}q + Æc:} \pm \tfrac{1}{2}\mathfrak{X} = \sqrt{:\tfrac{3969}{4} + 64:} \pm \tfrac{63}{2} = \begin{cases} 64 = Ac. \\ 1 = Ec. \end{cases}$$

Adeoque $\pm\sqrt{c}\,64 \mp \sqrt{c}\,1 = \pm 4 \mp 1 = \pm 3 = X$.

Exemplum prioris hoc esto, $Zc - 12Z = 65$. Hoc est, inquam, $Zc - 3ÆZ = \mathfrak{Z}$ Ergo 3) 12 ($4 = Æ$. & $\frac{4}{A} = E$. & $Ac + \frac{64}{Ac} = Ac + Ec = (\mathfrak{Z} =)\ 65$. Et $Acc + 64 = 65\,Ac$. vel $64 = 65\,Ac - Acc$. (& similiter $\frac{64}{Ec} + Ec = Ac + Ec = \mathfrak{Z} = 65$. adeoque $64 = 65\,Ec - Ecc$.) Ergo $\frac{65}{2} \pm \sqrt{:\frac{4225}{4} - 64:} = \frac{65}{2} \pm \sqrt{\frac{3969}{4}} = \frac{65}{2} \pm \frac{63}{2} = \begin{cases} 64 = Ac. \\ 1 = Ec. \end{cases}$

Et

Et propterea $\surd c\, 64 + \surd c\, 1 = 4 + 1 = 5 = Z$. Vel etiam, (si principio positum esset -65,) mutatis ubique signis numeri 65, provenisset $-4 - 1 = -5 = -Z$.

Vel sic (immediate ad regulam exigendo;) Æquatio proposita est $Zc - 12Z = \pm 65$. Ergo $3)\,12\,(4 = Æ$. adeoque $64 = Æc$. Et $\frac{65}{2} = \frac{1}{2}Z$. adeoque $\frac{4225}{4} = \frac{1}{4}Zq$. Et propterea

$$\tfrac{1}{2}Z \pm \surd : \tfrac{1}{4}Zq - Æc : = \tfrac{65}{2} \pm \surd : \tfrac{4225}{4} - 64 : = \begin{cases} 64 = Ac. \\ 1 = Ec. \end{cases}$$

Adeoque $\pm \surd c\, 64 \pm \surd c\, 1 = \pm 4 \pm 1 = \pm 5 = Z$.

Postquam has ego Regulas inveneram; nec illis simile quidquam apud eos quos tum videram Analystas notaveram (Cardanum siquidem non tum videram,) apud quos de Æquationibus Cubicis resolvendis altum erat silentium: In Cartesii Geometriam, (quæ sub id temporis aut paulo serius, Gallice primum prodiit, necdum enim tunc temporis extabat Latine, sed post annos aliquot,) incidebam. Apud quem duas itidem inveni regulas, quas *Cardani Regulas* appellat, easdem plane cum nostris, utut paulo aliter designatas, nulla tamen demonstratione munitas, nec vel levissimo dato indicio, quo de illarum fundamento constare possit. Cardanum tandem nactus, (qui illas *Scipioni* cuidam *Ferreo* acceptas refert,) easdem apud eum inveni alia quidem methodo demonstratas, (longa satis & perplexa, quæque rei originem neutiquam explicat,) quas ego ex Analyseos principiis, ut dictum est collegeram. Quæ quidem investigatio, si nihil aliud novi in se contineat, saltem eo nomine D[ni] Vestræ non ingrata forsan est futura, quod earum originem patefaciat.

Jam itaque posita æquatione resolvenda, $r^3 + 27r = 172$: Quoniam r^3, & $27r$, eodem signo notantur, pertinebit ea ad regulam secundam. Adeoque cum sit $3)\,27\,(9$, & $9 \times 9 \times 9 = 729$, item $2)\,172\,(= 86$, & $86 \times 86 = 7396$;

$$\text{Erit } \surd : 7396 + 729 : \pm 86 = \surd\, 8125 \pm 86 = \begin{cases} Ac. \\ Ec. \end{cases}$$

$$\text{Adeoque } \surd c : \surd\, 8125 \pm 86 : = \surd\, 13 \pm 2 = \begin{cases} A. \\ E. \end{cases}$$

Adeoque $A - E = r = 4$.

$r^3 + 27r = 172$.

$2)\,172\,(86$ $3)\,27\,(9$

$\times 86$ $\times 9$

516 81

688 $\times 9$

7396 729

$+729$

$$\surd c : 25\surd\, 13\, (= \surd\, 8125) \pm 86 : = \begin{cases} \surd\, 13 + 2 = A. \\ \surd\, 13 - 2 = E. \end{cases}$$

Ergo Æquationis $r^3 + 27r = +172$, rad. $r = +4 = A - E$.

Et Æquationis $r^3 + 27r = -172$, rad. $r = -4 = -A + E$.

Et eodem modo de Æquationibus hujusce formæ omnibus statuendum: Nulla enim omnino est istius formæ æquatio, quæ non unam aliquam radicem habet realem: Sed & unicam; nam quas expectes duæ reliquæ, sunt tantum imaginariæ, & impossibiles.

Pari methodo; Si exponatur æquatio resolvenda $r^3 - 27r = 154$. quæ, propter duarum potestatum contraria signa, ad regulam primam exigenda est. Adeoque cum sit $2)\,154\,(77$, & $77 \times 77 = 5929$; item $3)\,27\,(9$, & $9 \times 9 \times 9 = 729$: Erit

$$77 \pm \surd : 5929 - 729 : = 77 \pm \surd\, 5200 = \begin{cases} Ac. \\ Ec. \end{cases}$$

Adeoque

Adeoque $\sqrt{c}:77\pm\sqrt{5200}:=\frac{7}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{13}=\begin{cases}A.\\E.\end{cases}$

Adeoque $A+E=7=r$.

$$r^3-27r=154$$

$$2)\,154\,(77 \qquad 3)\,27\,(9$$

$$\times 77 \qquad \times 9$$

$$539 \qquad 81$$

$$539 \qquad \times 9$$

$$5929 \qquad 729$$

$$-729$$

$$\sqrt{c}:77\pm(\sqrt{5200}=)\,20\sqrt{13}:=\begin{cases}\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}=A.\\ \frac{7}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13}=E.\end{cases}$$

Ergo æquationis $r^3-27r=154$, *radix* $r=7=A+E$.
Et æquationis $r^3-27r=-154$, *radix* $r=-7=-A-E$.

Sic æquationis $r^3-27r=\pm 296$, invenietur radix ± 8; ſunt enim Ac, Ec, $=148\pm(\sqrt{21175}=)\,55\sqrt{7}$. adeoque $A, E, =4\pm\sqrt{7}$. & $A+E=8=r$. Atque ad hanc formam æquationes aliæ innumeræ reſolvendæ, radicem exhibebunt realem unam; & quidem unicam. Nam quas exſpectes duæ reliquæ erunt tantum imaginariæ; unicum ſaltem ſi excipias caſum, nempe quando quadratum ſemiſſis termini abſolute cogniti, æquatur cubo trientis coefficientis termini medii; tunc enim tum $\pm A$ tum $\pm E$, (quæ erunt invicem æquales,) tum $\pm A\pm E$, erunt radices reales. Puta $r^3-27r=\pm 54$, cujus radices ſunt $\pm 6, \mp 3, \mp 3$.

Verum ſi exponatur æquatio reſolvenda $r^3-27r=\pm 44$, ejuſdem cum illis formæ; eaque ad eandem regulam primam exigatur: res ſtatim tranſibit ad impoſſibile. Cum enim, ex methodo iſtius regulæ, cubus trientis coefficientis, auferendus ſit ex quadrato ſemiſſis termini abſoluti, atque reſidui latus quadraticum tum addendum tum auferendum ſemiſſi termini abſoluti, ut habeantur Ac, Ec, hoc eſt $\frac{1}{2}Z\pm\sqrt{:\frac{1}{4}Zq-Æc}$. Id fieri omnino nequit; quia 729 ($Æc$ cubus trientis coefficientis) ex 484 ($\frac{1}{4}Zq$ quadrato ſemiſſis termini abſoluti) non poteſt auferri (major ex minori,) vel ſaltem (ſi utcunque auferatur) reſiduum ($484-729=-245$) erit negativa quantitas, cujus itaque nulla poteſt eſſe radix quadratica, (quippe quadratum omne, ſive ex radice affirmativa, ſive negativa, ſemper eſt affirmativum,) adeoque cum $\sqrt{:\frac{1}{4}Zq-Æc:}=\sqrt{:-245}$. ſit quid impoſſibile, erunt etiam (propter ipſius radicis impoſſibilitatem) $\frac{1}{2}Z\pm\sqrt{:\frac{1}{4}Zq-Æc}$, (nempe $22\pm\sqrt{-245}$,) hoc eſt, Ac, Ec, impoſſibilia.

$$r^3-27r=\pm 44.$$

$$2)\,44\,(22 \qquad 3)\,27\,(9$$

$$\times 22 \qquad \times 9$$

$$44 \qquad 81$$

$$44 \qquad \times 9$$

$$+484 \qquad 729$$

$$-729$$

$$22\pm(\sqrt{-245}=)\,7\sqrt{-5}.$$ Impoſſibile.

(Atque idem continget quotieſcunque cubus trientis coefficientis, major eſt quam quadratum termini abſoluti. Sicut in æquatione quadratica $-Aq+BA=Æ$, quoties contingit $Æ$ majus eſſe quam $\frac{1}{4}Bq$, quod illic ſemper putatur indicium caſus impoſſibilis.)

Quid autem? Num itaque dicemus æquationem $r^3-27r=\pm 44$, plane impoſſibilem eſſe? nullamque omnino habere radicem? Nullo modo. Habet ſiquidem omnino tres radices, nempe, $\pm\sqrt{15}\pm 2$, $\mp\sqrt{15}\pm 2$, ∓ 4; hoc eſt, æquationis $r^3-27r=+44$, radices ſunt, $+\sqrt{15}+2$, $-\sqrt{15}+2$, -4; & æquationis $r^3-27r=-44$, radices ſunt $-\sqrt{15}-2$, $+\sqrt{15}-2$, $+4$.

Eodem modo, æquationis $r^3 - 27r = \pm 10$, radices sunt $\pm\frac{1}{2}\sqrt{33} \pm \frac{5}{2}$, $\mp\frac{1}{2}\sqrt{33} \pm \frac{5}{2}$, ∓ 5.

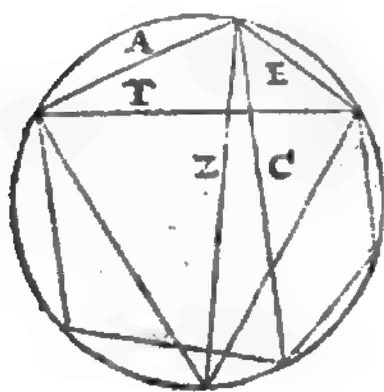
Item, æquationis $r^3 - 27r = \pm 26$, radices sunt, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{105} \pm \frac{1}{2}$, $\mp\frac{1}{2}\sqrt{105} \pm \frac{1}{2}$, ∓ 1.

Sic, æquationis $r^3 - 27r = \pm 46$, radices sunt $\pm 2\sqrt{6} \pm 1$, $\mp 2\sqrt{6} \pm 1$, ∓ 2.

Item, æquationis $r^3 - 7r = \pm 6$, radices sunt ∓ 1, ∓ 2, ± 3.

Atque in aliis pariter. Non itaque, ex eo quod Analysis nos ducat aliquando ad impossibile, concludendum protinus erit, & casum esse impossibilem: Sive, (quod tantundem valet,) quod ostendit Analysis juxta unam aliquam suppositionem impossibile esse, esse propterea impossibile simpliciter.

Porro sub id ipsum tempus, quo Regulas illas duas inveniebam; **De Angulorum sectionibus** (exercitii causa) nonnulla commentatus eram. Atque illic, inter alia, ad Anguli Trisectionem has observabam æquationes; $3\,RqA - Ac = RqC = 3\,RqE - Ec = -3\,RqZ + Zc$; quarum Radices recepto aliquo notationis modo explicare frustra conatus, non aptiorem videbam modum illud exprimendi; (sed nec Cartesius, qui, ut postea reperi, eandem sibi rem tractandam proposuerat,) quam quod, *Posito R circuli radio, recta C circulo inscripta peripheriam totam in duo segmenta divideret, quorum unius trientem subtenderet A, alterius E, (ejusdem æquationis duæ radices,) & radix tertia Z, subtenderet totius peripheriæ trientem utrovis arcuum A vel E auctum,* (*nam & hujus arcus triplum subtendit C:*) *Ea tamen lege, ut ubi A, E, sint quantitates affirmativæ, tertia Z sit utrique simul æqualis, sed negative interpretanda: ubi autem Z affirmativa, ibi A, E, negativæ.* (Quippe illud ubique obtinet, in æquationibus cujuscunque gradus; si omnino desit potestas supremæ proxima, radices omnes affirmativæ simul sumptæ, negativis omnibus simul sumptis, neglectis signis, æquales erunt, sive radices illæ reales sint sive saltem imaginariæ; adeoque servatis signis, se mutuo destruunt: unde fit quod potestas illa supremæ proxima, cujus coefficiens semper est radicum simul omnium mutatis signis, aggregatum; hoc casu, propter radices affirmativas & negativas se mutuo perimentes, prorsus excidat.) Puta Æquationis hujus $3\,RqL - Lc = RqC$, vel $Lc - 3\,RqL = -RqC$: exponitur radix, L, de tribus radicibus puta $+A$, $+E$, & $-Z = -A - E$. Hujus autem $+Lc - 3\,RqL = RqC$, vel $+3\,RqL - Lc = -RqC$, radix L, de tribus radicibus exponetur $-A$, $-E$, $+Z = +A + E$. Atque hanc Regulam *tertiam* jam appellabimus.



Quo pacto ad hanc regulam perveneram, non opus est ut jam ostendam; quippe longius illud esset quam ut hic commode inseratur, quodque alibi forsan aliquando sumus demonstraturi.

Interim; si ad hanc regulam exigatur hujusmodi æquatio, $r^3 - 27r = \pm 44$ hoc est, inquam, $Lc - 3\,RqL = \pm RqC$. Erit triens coefficientis $\frac{27}{3} = 9 = Rq$, ergo $3 = R$. Item quia $44 = RqC$, erit $\frac{44}{9} = C$. Scribatur itaque circulus cujus radius $R = 3$, eique aptetur recta $C = \frac{44}{9}$, peripheriam dirimens in duo segmenta; quorum majoris trienti subtendat A, minoris trienti E, atque his simul æqualis sumatur Z. Erunt, per expositam Regulam, Æquationis expositæ radices $\pm Z$, $\mp A$, $\mp E$.

$r^3 - 27r = \pm 44$. $\quad Lc - 3\,RqL = \pm RqC$.
$3)\,27\,(9 = Rq$. $\quad \sqrt{9} = 3 = R$.
$9)\,44\,(4\frac{8}{9} = C$, subtensa arcus tripli.
$\mp A$, $\mp E$, $\pm Z$, (subtensæ simpli) radices.
∓ 4, $\mp\sqrt{15} \pm 2$, $\pm\sqrt{15} \pm 2$.

Et eodem modo, Æquationes $r^3 - 27r = \pm 10$, $r^3 - 27r = \pm 26$, $r^3 - 27r = \pm 46$, $r^3 - 7r = \pm 6$, aliæque innumeræ, solvi possunt per trisectionem arcus. Verum

Verum si ad eandem regulam exigatur æquatio, $r^3 - 27r = \pm 154$: res statim ad impossibile deveniet: Quippe $3)\,27\,(9 = Rq$, adeoque $\sqrt{9} = 3 = R$. Atque $9)\,154\,(17\frac{1}{9} = C$. At circulo cujus Radius est 3, non poterit inscribi subtensa $17\frac{1}{9}$, cum hæc sit duobus radiis, hoc est diametro, major.

Similiter si ad eandem regulam exigatur æquatio $r^3 - 27r = \pm 296$; omnino idem obtinget. Quippe $9)\,296\,(32\frac{8}{9} = C$, major esset quam duplum $R = 3$. Adeoque recta illa huic circulo non inscriptibilis.

$r^3 - 27r = \pm 154$.	$r^3 - 27r = \pm 296$.
$3)\,27\,(9 = Rq$.	$3)\,27\,(9 = Rq$.
$\sqrt{9} = 3 = R$.	$\sqrt{9} = 3 = R$.
$9)\,154\,(17\frac{1}{9} = C$.	$9)\,296\,(32\frac{8}{9} = C$.

subtensæ impossibiles.

Quid autem? num æquationes has (& ejusmodi mille alias) omnino impossibiles dicemus? Nullo modo. Habet etenim illa radicem $r = \pm 7$; hæc, radicem $r = \pm 8$; Ut modo ostensum est, easdem ad Regulam primam exigendo.

Et quidem æquationes omnes hujusce formæ, quæ ad regulam primam examinatæ radicem realem habent (vel affirmativam, vel saltem negativam,) illæ ad hanc regulam si exigantur, ad impossibile nos deducunt; (hoc est, illæ omnes in quibus quadratum semissis quantitatis absolutæ, majus est cubo trientis coefficientis termini medii:) contra vero, quæ videbantur illic impossibiles, (nempe ubi quadratum semissis quantitatis absolutæ, minus est cubo trientis coefficientis,) radices hic habebunt reales. Nec ulla interim æquatio utrobique exhibebit radices reales, nisi illæ solæ ubi quadratum semissis termini absoluti, æquatur cubo trientis coefficientis. Qualis est $r^3 - 27r = \pm 54$; item $r^3 - 12r = \pm 16$. (quippe illic $9 \times 9 \times 9 = 729 = 27 \times 27$; hic $4 \times 4 \times 4 = 64 = 8 \times 8$.) aliæque similes. Cujus quidem ratio est, quia coefficiens medii termini in prima regula supponitur 3 Æ (triplum rectanguli duarum quantitatum A, E;) in secunda vero, (non 3 Æ, sed 3 Rq hoc est) $Aq + Æ + Eq$, (nam, in circulo, $3\,Rq = Tq = Aq + Æ + Eq$, quod nos alibi demonstravimus, estque cognitu non inutile:) adeoque quoties contingit æquales invicem esse A, E, (quod tunc evenit quando dictum Quadratum dicto Cubo æquatur, nec alias unquam,) perinde erit sive dicatur coefficiens 3 Æ, sive $Aq + Æ + Eq$; adeoque perinde erit ad utram exigatur regulam æquatio illa; Secus autem, ubi non æquantur. Atque hæc quidem utut digna sint quæ fusius explicentur; non tamen id erit hujus loci; cum videam me jam satis (ne dicam nimium) prolixum esse.

At quorsum, inquies, tendunt hæc omnia? Num ut Analyticen fallacem ostendam? (ut quæ nec casus impossibiles detegat, & possibiles interim tanquam impossibiles perhibeat.) Nullo modo: Sed, caute tractandam; ne nos ipsos decipiamus dum ea quasi inde tradita reputemus quæ non sunt; & pro determinatis habeamus quæ Analysis in ambiguo relinquit, & indeterminata.

At quid, inquies, de Æquatione nostra dicendum est? aut quomodo solvenda sunt ista ἐναντιοφανῆ?

Dicam brevi. Nempe vexanda adhuc est æquatio illa, quæ nos vexavit hactenus; ut tandem quid certi prodat. Quippe simile omnino non raro patitur Æquatio Analytica, atque Proteus Homericus, (Odyss. δ.)

——γέρων ἅλιος νημερτής·
Ἀθάνατος Πρωτεὺς Αἰγύπτιος ὅς τε θαλάσσης
Πάσης βένθεα οἶδε.

Utut enim νημερτὴς sit, *veridica*, nec plane fidem fallat; suas tamen habet *insidias*,

——λόχον θείοιο γέροντος,

Et *formidabiles astutias*,

——ὀλοφώϊα τοῖο γέροντος·

nec nisi fortius tandem pressa verum fatebitur. Comprimendus itaque est Proteus, & prensandus fortius, ne elabatur.

 Τῷ

Τὸν μὲν ἐπὴν δὴ πρῶτα κατευνηθέντα ἴδησθε,
Καὶ τότ' ἔπειθ' ὑμῖν μελέτω κάρτος τε, βίη τε,
Αὖθι δ' ἔχειν, μεμαῶτα καὶ ἐσσύμενόν περ ἀλύξαι,

Et varias licet formas induat versipellis, variasque subire tentet latebras & vel insidias struere; quo se subducat incautis, vel etiam imponat;

Πάντα δὲ γιγνόμενος, πειρήσεται, ὅσσ' ἐπὶ γαῖαν
Ἑρπετὰ γίγνονται, καὶ ὕδωρ, καὶ θεσπιδαὲς πῦρ·

premendus tamen adhuc, & quidem fortiter

Ὑμεῖς δ' ἀστεμφέως ἐχέμεν, μᾶλλόν τε πιέζειν·

nec prius hic dimittendus est

———γέρων ὀλοφώϊα εἰδώς,

quam, latebris exutus omnibus, palam eloquatur totumque pandat negotium;

Τόν γ' εἴ πως δύναιο λοχησάμενος λελαβέσθαι,
Ὅς κέν τοι εἴπῃσιν ὁδὸν καὶ μέτρα κελεύθου.

Nec quidem Analyticen Homerus rectius depingere potuisset, si vel maxime fuisset Analysta.

Esto itaque quod nobis hactenus molestus fuerit hic Proteus noster;

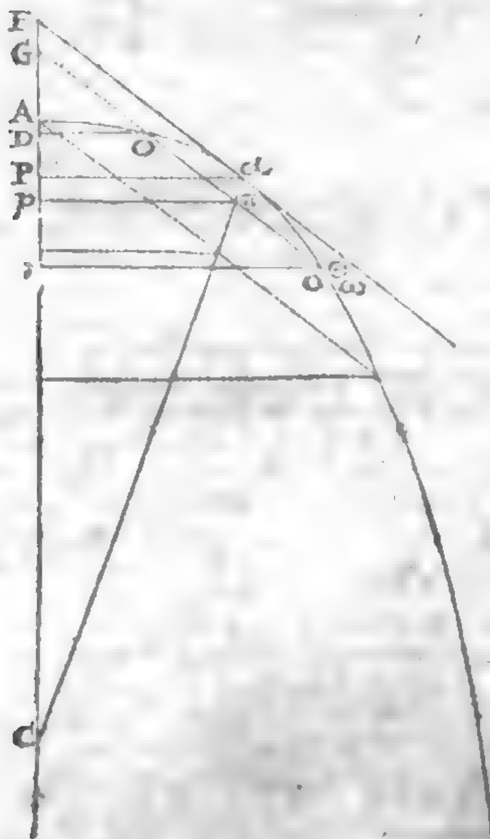
———οὐδ' ὁ γέρων δολίης ἐπελήθετο τέχνης·
Ἀλλ' ἤτοι πρώτιστα λέων γένετ' ἠϋγένειος,
Αὐτὰρ ἔπειτα δράκων, καὶ πάρδαλις, ἠδὲ μέγας σῦς,
Γίγνετο δ' ὑγρὸν ὕδωρ, καὶ δένδρεον ὑψιπέτηλον.

Ne tamen animum despondeamus. Quippe dum

Ἡμεῖς ἀστεμφέως ἔχομεν τετληότι θυμῷ,

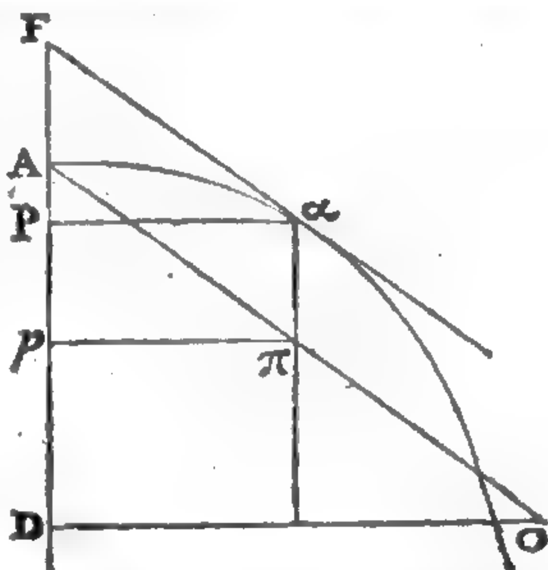
non dubitandum est, quin, vi tandem adactus, id eloquatur, quod forte quæsiisse non pigebit.

Resumamus itaque æquationem nostram (ut, quid factum sit, distincte perpendamus;) $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$, hoc est $q^3 \pm 9dq^2 = \pm 27d^2g$, (variatis nempe signis $+$, $-$, prout pD vel deorsum vel sursum, à puncto p, sumenda supponatur.) Eam autem in hanc protinus æquationem mutavimus $r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g \mp 54d^3$: substituta nova radice $r = q \pm 3d$ (quod quidem pD, quatenus supponimus deorsum sumendam, auget; sursum vero, minuit, quantitate $3d$:) Quod quidem tantundem est, atque, pro puncto p, aliud diametri punctum sumere quod sit tribus diametris altius quam est p punctum; (quippe hoc tanto tum auget pD deorsum sumendam tum pD sursum sumendam minuit.) Punctum autem sic sumendum, id ipsum est quod hactenus G diximus, (communis intersectio Diametri AP, & inscriptæ OO, saltem productarum;) quippe $pG = PF = 3d$, adeoque $GD = pD \pm pG = q \pm 3d = r$. (Adeoque jam licebit, si libeat, quantum ad puncta D designanda, punctum p negligere; adeoque linearum $\alpha\pi$, πp, constructionem, quæ ad designandum p punctum instituta est; cum non minus possit punctum



punctum D per ipsius à puncto G distantiam designari, quam per distantiam à puncto p.) Nec interim hinc aliquid mali metuendum quod nonnunquam $3d$ major sit quam q. Nam ubi hoc accidit, $GD = q - 3d = r$ (hoc est, quatenus supponitur sursum sumenda) est quantitas negativa, adeoque punctum D (quod supponitur supra) cadit infra G. Quod quidem, quoad D infimum, semper contingit, &, quoad aliud D tum quum G est supra A. Adeoque priori casu æquatio quæ respicit D sursum, unam habet radicem negativam, posteriori, duas; (nempe quoad radicem r; nam harum una, adjectione $3d$, ut habeatur $q = r + 3d$, evadet affirmativa; puta si $r = -d$, erit $r + 3d = -d + 3d = +2d = q$. adeoque, licet r sit hoc casu quantitas negativa, erit q positiva; hoc est, punctum D erit infra G, sed supra p) contra vero in æquatione quæ respicit D deorsum, ut post patebit. Sed hoc obiter.

Porro, cum sit $r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g \mp 54d^3 = 27d^2 \, in : \pm g \mp 2d : = \pm 27d^2b$ (posito scilicet $b = g - 2d$:) quoties contingit esse $g = 2d$ (quod tunc fit cum punctum G puncto A coincidit, qui tuus casus est; quippe tum $FG = FA = 2d$;) erit $b = g - 2d = 0$. Adeoque, $r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g \mp 54d^3 = \pm 27d^2 \times 0 = \pm 0$. Et propterea $r^3 = 27d^2r$, & $r^2 = 27d^2$, adeoque $r = \pm\sqrt{27d^2} = \pm 3d\sqrt{3}$. (potest enim quadrati simplicis radix exponi tum affirmative tum negative.) Adeoque sive sursum sive deorsum sumatur, erit $GD = 3d\sqrt{3}$. Et propterea utriusque aggregatum, $DD = 6d\sqrt{3}$.



Verum, inquies, cum ex hypothesi inscripta OO, hoc est, in præsenti casu, AO, occurrat curvæ in A, erit & ipsum punctum A, punctorum D alterum, nempe superius: cumque eidem puncto A, coincidat etiam punctum G, qui fieri potest, ut GD superius, hoc est AA, seu potius ipsum A punctum, æquari possit $3d\sqrt{3}$? (nisi saltem sit $d = 0$, quod non supponitur.) Et quidem, cum antea demonstratum sit, AD (hoc est DD) $= 3d\sqrt{3}$; qui fieri potest ut jam sit $DD = 6d\sqrt{3}$?

Dicam brevi qui hoc fiat. Nempe; æquationis $r^2 = 27d^2$. radices duas (nec enim plures habet) $+3d\sqrt{3}$, $-3d\sqrt{3}$, duo designare puncta D (nempe rectas GD, GD, terminantia,) quorum alterum tanto superius est, quanto alterum est inferius puncto G, vel (in præsenti casu) A: verum aliud adhuc esse punctum D quod ipsi A coincidit, præter duo illa D, hac æquatione designata. Quod ne miremur, animadvertendum est, utut æquatio $r^2 = 27d^2$ quadratica cum sit, non nisi duas habeat radices, eam tamen unde huc deventum est, $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$, cubica cum fuerit, omnino tres habuisse, (vel reales vel saltem imaginarias;) quarum cum in processu perierit una, non tamen ea propterea prorsus negligenda est, sed solicite potius inquirenda. Non autem ea prius perierat, quam positum fuerit tum $q \pm 3d = r$, tum etiam (nam nisi & hoc etiam ponatur nondum periit) $g = 2d$. Cum itaque, tum in æquatione $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$, tum etiam in $r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g \mp 54d^3$ (extra præsentem casum) radices omnino tres sint; ex tribus autem radicibus r, r, r, cum (posito $g = 2d$,) evanescat una, erit harum saltem una $r = 0$. (Quod quidem semper obtinet in æquationibus cujuscunque gradus, quando absoluta quantitas evanescit, sive fit $= 0$; nempe radicum saltem unam esse $= 0$: reliquæ autem radices, depressione facta per communem, partium omnium divisionem, in ea quæ prodit inferioris gradus æquatione manebunt involutæ.) Cum enim in æquationibus omnino omnibus id universaliter verum sit, quod quantitas absoluta, æqualis sit facto ex omnibus radicibus invicem ductis, (neglectis saltem utrobique signis $+ -$,) fieri non potest, ut sit $\pm 27d^2g \pm 54d^3 = \pm 27d^2b = r \times r \times r = 0$, nisi ex tribus r, sit saltem una $r = 0$; adeoque, quoad hanc, $q \pm 3d = r = 0$, hoc est $q = \mp 3d$. Hoc est; si supponatur pD deorsum sumenda, erit (præter duas alias) radix una $q = -3d$; adeoque sumpta in contrarias partes (nempe sursum) $pD = 3d$ habebitur punctum illud D, (quod propterea puncto A coincidit, cum sit etiam $pA = 3d$:) si vero

supponatur

supponatur pD sursum sumenda, erit radix una $q = +3d$ (quod duorum signorum inferius denotat,) adeoque sumpta in easdem partes (hoc est sursum) $pD = 3d$, habebitur iterum punctum illud D, idem cum A. Quoad autem reliqua duo puncta D; cum sit $r = \pm 3d\surd 3$, (sive supponatur D sursum sive deorsum poni, quippe utrobique duæ sunt radices altera affirmativa, altera negativa,) & ($q \pm 3d = r$, sive) $r \mp 3d = q$, (nempe si supponatur pD deorsum, $r - 3d = q$; si sursum, $r + 3d = q$;) erit, quæ supponitur deorsum, $\pm 3d\surd 3 - 3d = q - pD$; quæ sursum, $\pm 3d\surd 3 + 3d = q = pD$; (utrobique scilicet duæ radices; affirmativa, quæ juxta suppositionem contingit, & negativa, quæ in partes suppositioni contrarias, quæ igitur eadem est cum contrariæ suppositionis affirmativa.)

Ut dicta igitur recolligam. Posita æquatione $9dq^2 + q^3 = 27d^3$, sive $q^3 + 9dq^2 = 27d^2g$. (quæ supponit punctum D deorsum, adeoque ipsius radices affirmativæ designant D deorsum, negativæ sursum;) posito $r = q + 3d$, erit $r^3 - 27d^2r = +27d^2g - 54d^3$; adeoque (si $g = 2d$) est $r^3 - 27d^2r = 0$; cujus tres radices $+3d\surd 3$, $-3d\surd 3$, ± 0, (quibus designantur GD, GD, GD, sive AD, AD, AA. hoc est $AD = 3d\surd 3$ deorsum, $AD = 3d\surd 3$ sursum, & $AD = AA = 0$) & propterea, æquationis $q^3 + 9dq^2 = 27d^2g$, (cum sit $r = q + 3d$, hoc est $q = r - 3d$) erunt tres radices $+3d\surd 3 - 3d$, $-3d\surd 3 - 3d$, $0 - 3d$; quibus designantur tres rectæ pD, pD, pD; hoc est $pD = 3d\surd 3 - 3d$ deorsum, $pD = 3d\surd 3 + 3d$ sursum, itemque $pD = 3d$ sursum $= pA$.

Atque id ipsum plane eveniet, posita æquatione $9dq^2 - q^3 = 27d^2g$, vel $q^3 - 9dq^2 = -27d^2g$, (quæ supponit punctum D sursum, adeoque hujus radices affirmativæ designant D sursum, negativæ deorsum.) Posito $r = q - 3d$, hoc est $q = r + 3d$, erit $r^3 - 27d^2r = -27d^2g + 54d^3$; adeoque (si $g = 2d$,) erit $r^3 - 27d^2r = 0$: cujus æquationis tres radices sunt $+3d\surd 3$, $-3d\surd 3$, ± 0; quibus designantur GD, GD, GD, sive AD, AD, $AD = AA$; hoc est $AD = 3d\surd 3$ sursum, $AD = 3d\surd 3$ deorsum, & $AD = AA = 0$. Et propterea, cum sit $q = r + 3d$, erunt æquationis $q^3 - 9dq^2 = -27d^2g$ tres radices $q = +3d\surd 3 + 3d$, $q = -3d\surd 3 + 3d$, $q = 0 + 3d$; hoc est $pD = 3d\surd 3 + 3d$ sursum, $pD = 3d\surd 3 - 3d$ deorsum, & $pD = 3d$ sursum $= pA$.

Habemus itaque in utraque æquatione (quæ nempe supponit D deorsum, & quæ supponit D sursum) tres radices easque utiles omnes, sed & (mutatis signis ob suppositiones contrarias) easdem utrobique. Est enim r hoc est GD, id est (hoc casu) AD. Nempe

$$AD \begin{cases} \text{suprema} = \text{sursum} + 3d\surd 3 = \text{deorsum} - 3d\surd 3. \\ \text{media} \quad = AA = \text{sursum } 0 = \text{deorsum } 0. \\ \text{infima} \quad = \text{sursum} - 3d\surd 3 = \text{deorsum} + 3d\surd 3. \end{cases}$$

Adeoque (cum sit pD, hoc est q sursum $= r + 3d$, & q deorsum $= r - 3d$,) erit

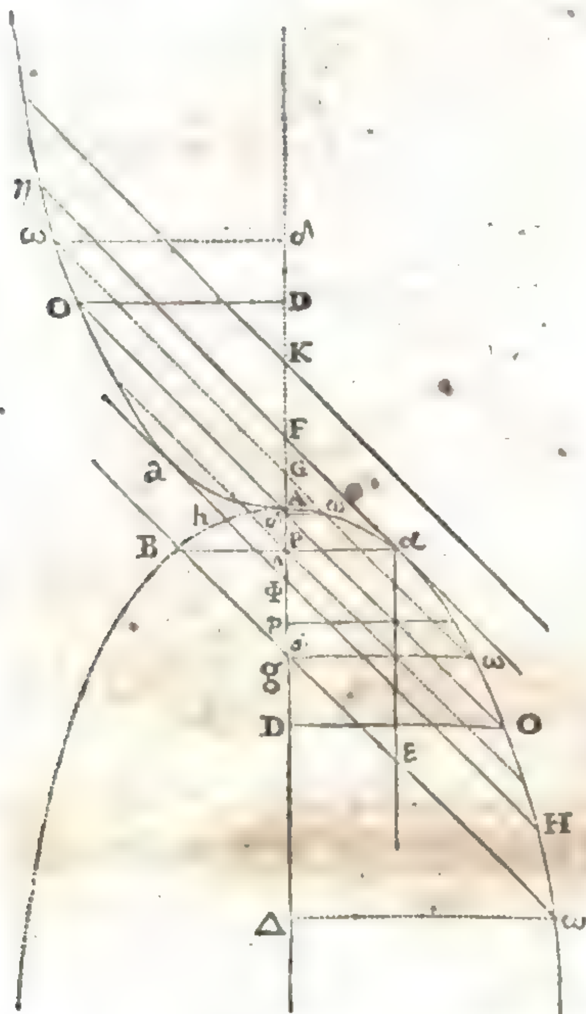
$$pD \begin{cases} \text{suprema} = \text{sursum} + 3d\surd 3 + 3d = \text{deorsum} - 3d\surd 3 - 3d. \\ \text{media} \quad = pA = \text{sursum } 0 + 3d = \text{deorsum } 0 - 3d. \\ \text{infima} \quad = \text{sursum} - 3d\surd 3 + 3d = \text{deorsum} + 3d\surd 3 - 3d. \end{cases}$$

Vides itaque jam probe convenire omnia. Nempe tum $pA = 3d$ quod supponit tua prima demonstratio; tum $Ap + pD$ deorsum $= AD$ deorsum $= 3d\surd 3 - 3d$, pl: $+ 3d = 3d\surd 3$, quod habet demonstratio tua secunda; tum rectam AD non esse bisectam in p, (non quidem quia $3d\surd 3 + 3d > 3d\surd 3 - 3d$, uti primum videbatur, sed) quia $3d > 3d\surd 3 - 3d$. Et propterea neque rectam $\alpha\pi$ esse diametrum.

Verum adhuc inquies, nova hic emergit difficultas, (quasi non tam Proteus sit quam

quam Hydra quicum nunc agatur.) Cum enim D punctum, sit, per constructionem, diametri punctum illud cui ordinatim applicatur recta OD in curva αA terminata: qui omnino fieri possit, ut ejusmodi ullum reperiatur punctum supra verticem A? quod tamen insinuat hæc æquatio: cujus siquidem saltem una radix, sursum sumenda, supra verticem excurrit, (nam $pD = 3d\sqrt{3} + 3d$ sursum, major est quam $pA = 3d$, adeoque verticem superat recta $AD = 3d\sqrt{3}$.)

Dicendum itaque (quod quidem hæc evincit instantia) curvam Paraboloeidis Cubicalis αA, supponendam esse ultra verticem A non deorsum flecti ad B, sed sursum potius ad a: Adeoque ipsius genuinum situm esse (quod parum forsan putaveris) non αAB, sed αAa. (Atque hoc illud est mysterium quod pridem insinuabam post detegendum.) Cui quidem curvæ occurrit recta OO in tribus



omnino punctis; nempe O, A, O: unde ordinatim-applicatæ, diametro occurrunt in punctis D, A, D; coincidentibus siquidem OD mediis, ipsi puncto A, quoties scilicet per ipsum verticem transit ea recta: (Similiter, mutatis mutandis, recta $\omega\omega$, occurrit curvæ in punctis tribus ω, ω, ω; quibus in diametro respondent δ, δ, δ.) Quæ tria puncta, tribus æquationis cubicæ radicibus indicantur.

Ne autem hunc (inexpectatum forsan) curvæ situm mireris nimium; eundem plane postulat, si paulo accuratius perpendatur, ipsa Paraboloeideos Cubicalis natura; utpote cujus ordinatim-applicatæ, ponuntur, in diametrorum ratione subtriplicata; adeoque diametri in ordinatim-applicatarum ratione triplicata. Quod sic colligimus.

Si, verbi gratia, ordinatim applicata DO, quæ designat puncti O à diametro distantiam dextrorsum, dicatur $+a$; distantia huic æqualis sinistrorsum, dicenda erit $-a$: atque harum cubi, $+a^3 = +a \times +a \times +a$, & $-a^3 = -a \times -a \times -a$.

 adeoque

adeoque diametri AD, AD, quibus conveniunt hæ ordinatim applicatæ, erunt ut $+a^3$, $-a^3$, (quippe in ordinatim-applicatarum ratione triplicata,) hoc est, ut quantitas affirmativa, eique æqualis negativa, sive ut AD deorsum, & huic æqualis AD sursum. Adeoque si curvæ punctum O dextrorsum, respondeat diametri puncto D deorsum; ejusdem curvæ punctum O sinistrorsum, respondebit diametri puncto D sursum. Unde sequitur curvæ situs ille quem indicavimus α A a.

Quod autem in Parabola se res secus habeat (quæ situm huic similem non postulat) ratio est; quia parabolæ ordinatim-applicata DO dextrorsum $=+a$, & DO sinistrorsum $=-a$, eundem plane diametri situm postulabunt: cum utriusque tum $+a$, tum $-a$, quadratum sit $+a^2$, (quippe $+a\times+a=+a^2=-a\times-a$,) erunt diametri AD, AD, quibus hæ conveniunt ordinatim-applicatæ, ut $+a$, $+a$; adeoque tum magnitudine æquales, tum in eodem situ; adeoque idem utrobique punctum D: non autem, ut in Paraboloeide cubicali, æquales magnitudine sed contrario situ. (Quod autem de Parabola jam dictum est, pariter obtinet in Paraboloeidibus, Biquadraticali, aliisque à potestate sexta, octava, decima, &c. denominatis; nempe quando dimensionum numerus est Par: sicut &, ex adverso, quod de Paraboloeide Cubicali dictum est, perinde etiam obtinet in Paraboloeide Surdesolidali, aliisque à potestate septima, nona, &c. denominatis; nempe quando dimensionum numerus est Impar; imo, inquam, eadem de causa, etiam in linea recta, quæ haberi poterit linea Paraboloeidis Lateralis, ab una dimensione dicta, hoc est, Trianguli; quippe & hæc ad verticem usque ducta, si continuetur, continuabitur sursum. Quæ monuisse sufficiat.)

Sin porro urgeas; Annon possit ea curva α A, ubi ad A perventum est, etiam deorsum

deorsum flecti ad B, æque ac sursum ad a? Potest, inquam: sicut &, si esset Parabola, posset non minus sursum flecti ad a, quam deorsum ad B; nam ut ejusmodi duæ lineæ Parabolicæ sic componantur nihil impedit. An vero, dices? si id fiat, annon esset ea linea α A B, curva Paraboloeideos cubicalis? Esset, inquam; eodem sensu quo linea Parabolica dici possit, quæ ad instar α A a recurvata sit. Verum, accuratius loquendo, dicendæ videantur (saltem quod ad hoc negotium) tum hic duæ semiparabolæ, tum illic duæ semiparaboloeideos curvæ. Quippe, cum situs ille subcontrarius α A a (ob jam dicta) sit non minus Paraboloeideos Cubicalis curvæ genuinus, quam Parabolæ genuinus sit situs suus α A B ad ejusdem rectæ A B partes oppositas: non minus judicandus esset α A B situs Paraboloeideos cubicalis præternaturalis, quam esset situs α A a præternaturalis Parabolæ.

Verum, utut sit, (sive situ naturali, sive præternaturali;) cum utcunque non incommode supponi possit hujusmodi curva B A α ω, cique inscribi recta B ω, tangenti F α parallela; annon æquatione aliqua indagari possunt, diametri puncta, puta Δ, Δ, ad quæ pertingant ordinatim-applicatæ B Δ, ω Δ? Possunt inquam. Et quidem quod ad ω Δ, ea quam hactenus tractavimus æquatione investigabitur, (uti mox videbitur,) quoad autem B Δ non quam hactenus versavimus æquatione, sed longe alia. Quippe ad æquationem illam ponendum est, non A P. A Δ :: P α c. Δ B c (quod præsentis indaginis fundamentum est,) sed A P. — A Δ :: P α c. Δ B c. Verum cum illa indagatio a præsenti negotio sit aliena; intermittendam illam hic loci sentio, donec eam quam hactenus tractavimus æquationem penitius absolvero.

Cum itaque hactenus æquationis $r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g \mp 54d^3$, adeoque $q^3 - 9dq^2 = \pm 27d^2g$ radices, unico saltem casu determinavimus, scilicet, cum $g = 2d$, hoc est cum inscripta per verticem transit: Superest, ut alios adhuc casus perpendamus; nempe, cum $g < 2d$, (hoc est cum intersectionis punctum G est supra verticem;) & cum $g > 2d$; adeoque G infra verticem. Priori casu, erit $+g - 2d$ quantitas negativa; posteriori, quantitas affirmativa.

Ne autem æquationis geminæ $r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g \mp 54d^3$, juncta consideratio confusionem pariat, separare libet; eamque seorsim perpendere quæ punctum D deorsum spectat $r^3 - 27d^2r = +27d^2g - 54d^3$, cujus propterea radices negativæ interpretandæ erunt in contrarias partes, hoc est sursum (quæ autem de hac dicentur omnia, eadem mutatis mutandis de altera quæ D sursum spectat intelligantur, cum hoc solo discrimine, quod quæ in una sunt radices affirmativæ, eædem in altera sunt negativæ, & contra.) Tum pro differentia duarum g, $2d$, substituo b; adeoque $g - 2d = \pm b$, nempe $+b =$ A G deorsum, hoc est, si $g > 2d$, hoc est, F G > F A, adeoque G infra verticem: & $-b =$ AG sursum, si sit $g < 2d$, hoc est F G < F A, adeoque G supra verticem, (non modo si inter F & A, ubi saltem F G erit quantitas affirmativa, sed multo magis si sit supra F, ubi ipsa F G erit per se quantitas negativa, (supponitur enim G infra F) adeoque $g - 2d$ erit multo magis negativa, (nempe — F G — F A.) denique, pono $d = 1$ (licet enim diametrum quocunque numero designare, adeoque reliquas quantitates ad hunc numerum comparare,) ut liceat, tum d, tum ipsius omnes potestates omittere. Adeoque æquatio punctum D deorsum spectans, erit $r^3 - 27r = \pm 27b$ (prout scilicet G contingat infra suprave verticem.)

His positis, ut æquationem expositam $r^3 - 27r = \pm 27b$, resolvamus; Videndum primo num $b = 0$; quippe si hoc contingat, tum res jamjam absoluta est; nempe evanescente $\pm 27b$, erit $r^3 - 27r = 0$, (adeoque radicum altera $r = 0$) & $r^2 = 27$, (adeoque radices duæ reliquæ, $r = +\sqrt{27}$, $r = -\sqrt{27}$.) quippe casus hic, ille est quem hactenus tractavimus; ubi nempe inscripta per verticem transit.

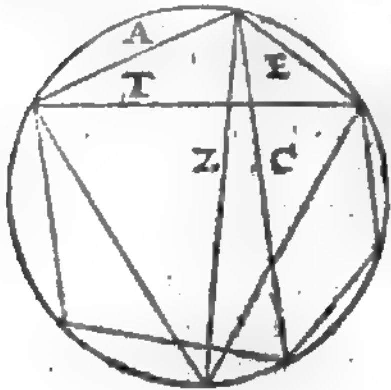
Sin illud non contingat, sed b quantitatem habeat (sive addendam sive auferendam;) Videndum secundo; utrum Quadratum semissis numeri $27b$; majus sit, an minus, an æquale, Cubo Trientis numeri 27: Hoc est, utrum $\frac{729}{4}b^2$, plus sit, an minus, quam 729, aut etiam æquale. Hoc est, utrum b^2 sit majus, minus, an æquale, 4: Sive b majus, minus, an æquale 2.

$$\begin{array}{r} 2)\ 27b \\ 2)\ 27b \\ \hline 4)\ 729b^2\ (\frac{729}{4}b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ \times 9 \\ \hline 81 \\ \times 9 \\ \hline 729 \end{array}$$

Si quadratum minus sit, exigenda est æquatio ad (supra memoratarum) Regulam

lam Tertiam: Si majus, ad Primam; Sin æquale, ad utramvis; scilicet indifferenter vel ad Tertiam vel ad Primam.

Esto itaque primo, hujusmodi æquatio $r^3 - 27r = -26$. (Hoc est, sit $26 = 27b$, adeoque $\frac{26}{27} = b = AG$, & quidem AG sursum, propter signum $-$: adeoque $FG = g = 2 - \frac{26}{27} = 1\frac{1}{27}$.) quæ respondet inscriptæ $\alpha G \alpha \alpha$. Hæc cum exigenda sit ad Regulam tertiam (est enim $13 \times 13 = 169$, minus quam $9 \times 9 \times 9 = 729$,) Scribatur circulus cujus radius sit 3 (radix quadratica trientis coefficientis 27) hoc est, scribatur circulus cujus radius æquetur rectæ $PF = 3d$. Huic circulo aptetur recta $C = \frac{26}{9} = 2\frac{8}{9}$ (quod emergit ex divisione quantitatis absolutæ per trientem coefficientis,) hoc est, sit $C = \frac{26}{9}d$. Trisectis itaque duobus arcubus quibus subtenditur C, erunt trientum subtensæ A, E, æquationis duæ radices affirmativæ; (nempe Gδ, Gδ, deorsum;) & $-Z = -A - E$, radix negativa, (hoc est Gδ sursum.) Et quidem $A = \frac{1}{2}\sqrt{105} - \frac{1}{2} = G\delta$ infimæ, $E = 1 = G\delta$ deorsum mediæ, $-Z = -\frac{1}{2}\sqrt{105} - \frac{1}{2} =$ Gδ sursum.



Et quidem idem omnino accideret si posita esset æquatio $r^3 - 27r = +26$, (quod fieret si recta transiisset tanto infra verticem quanto illic supra, hoc est prope punctum P, cui inscriptæ literas suas non apposui ne nimia foret confusio,) nisi quod tunc radices quæ prius erant affirmativæ jam essent negativæ, & contra; adeoque trium radicum, sive rectarum Gδ, Gδ, Gδ, maxima, & quidem ea sola, deorsum tenderet, reliquæ duæ sursum.

Atque hæc quidem contingunt, quoties b minus est quam $2d$; hoc est, quoties G incidit vel inter A F, vel inter Aϕ. Posito scilicet, $A\phi = AF = 2d$.

Esto tum æquatio hujusmodi $r^3 - 27r = +154$ (hoc est $b = 5\frac{19}{27} = AG$ deorsum, puta A g.) Exigenda est hæc æquatio ad regulam primam; (propter quadratum semissis termini absoluti, majus Cubo trientis coefficientis termini medii, nempe $72 \times 72 = 5184 > 729 = 9 \times 9 \times 9$.) Hujus autem æquationis, est radix unica possibilis affirmativa; nempe $7 = g\Delta$ deorsum (ut supra ostensum est;) reliquæ duæ impossibiles. Quod argumento est rectam αB non nisi in uno puncto expositæ curvæ occurrere. Quamvis enim verum sit quod recta αg occurrat etiam in B, curvæ AB; non tamen illud ad præsens negotium omnino spectat: quippe hæc æquatio non spectat curvam αAB, sed curvam αAa, ut supra dictum est. Atque idem intelligendum erit de puncto h, iisque omnibus quibus intersecatur BA, etiam ultra verticem ex altera parte sursum continuata.

Pari modo, si posita esset æquatio $r^3 - 27r = -154$. nisi quod illic radix quæ unica est possibilis, esset negativa, adeoque sursum sumenda: & conveniret hæc æquatio rectæ per K ductæ; si nempe AK, sive AG sursum, ponatur $5\frac{19}{27}$.

Atque hoc contingit quoties b, vel AG (sive sursum sive deorsum) major est quam $2 = AF$. Hoc est, quoties g vel est minus quam o, vel plus quam $4d$: Quippe si illud, erit G supra F; si hoc, erit infra ϕ.

Denique; si ponatur æquatio $r^3 - 27r = \pm 54$. (adeoque $b = \pm 2$.) perinde est ad utramvis regulam exigatur; (quia quadratum semissis termini absoluti, æquatur cubo trientis coefficientis, $27 \times 27 = 9 \times 9 \times 9 = 729$.) Si ad tertiam exigatur; scripto circulo cujus radius $3 \ (= \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9},)$ inscribatur recta quæ sit 6 $(= \frac{54}{9};)$ hæc autem (cum sit diameter, quippe $6 = 3 + 3$) dirimet circulum in duos semicirculos; utriusvis autem semiperipheriæ trienti subtendit recta radio æqualis; adeoque tum $A = 3$, tum $E = 3$; item $Z (= A + E) = 6$. Hoc est, si $r^3 - 27r = +54$, (posito nempe G, in ϕ,) radix affirmativa $+6$ deorsum sumenda; & negativæ $-3, -3$, (sumendæ sursum,) quæ propter æqualitatem suam coincidunt, adeoque pro duabus curvæ intersectionibus indicant unum contactum, nempe a. Si vero sit $r^3 - 27r = -54$, (posito nempe G in F,) radicum maxima 6 erit negativa, sursum sumenda; & duæ minores 3, 3, affirmativæ, sumendæ deorsum, & (propter æqualitatem, adeoque coincidentiam,) indicabunt punctum contactus, α.

(Inventis autem omnibus radicibus r; si illis sigillatim auferatur (quippe jam in ea sola versamur æquatione quæ supponit D deorsum poni) $3d$, habentur totidem

tidem radices $q = r - 3d =$ p D. puta, ſi ſint radices r, ut in exemplo primo, $+\frac{1}{2}d\sqrt{105} - \frac{1}{2}d$, $+1d$, $-\frac{1}{2}d\sqrt{105} - \frac{1}{2}d$: erunt totidem radices q; $+\frac{1}{2}d\sqrt{105} - 3\frac{1}{2}d$, $-2d$, $-\frac{1}{2}d\sqrt{105} - 3\frac{1}{2}d$. Et ſimiliter in reliquis. Ubi interim notandum eſt, quod hac ſubductione fieri poteſt, ut quæ fuerat radix affirmativa tranſeat in negativam. Puta, quoties punctum D, eſt infra G, ſed ſupra p.)

Adeoque hujuſce æquationis caſus omnes ſolvimus. Atque eadem opera, hujuſmodi curvæ ope, methodum oſtendimus æquationes cubicas, hujuſce formæ omnes $r^3 - mr = \pm n$, Geometrice ſolvendi. Nempe ſumpta diametro $d =$ AP $= \sqrt{\frac{1}{27}m}$ (cui ordinatim-applicata ſit Pα; adeoque, ſumpta PF $=$ 3 PA $= \sqrt{\frac{1}{3}m}$, Fα tangens,) & AG $= \frac{n}{m} = b$ (deorſum quidem ſi ſit $+n$, ſurſum vero ſi $-n$;) ducatur per G recta, tangenti Fα parallela, occurrens curvæ in puncto (uno, aut pluribus, prout contigerit,) O; ducta ordinatim-applicata O D, determinabit æquationis radicem G D $= r$; & quidem, ſi occurſus puncta O plura ſint, totidem erunt & puncta D, adeoque Æquationis totidem radices poſſibiles; affirmativæ quæ deorſum, negativæ quæ ſurſum, tendunt.

Tandem, ut totum aliquando abſolvamus negotium; Quoniam jam facta eſt mentio puncti B, aliorumque ſimilium, in curva B A, etiam ſurſum continuanda; adeoque & punctorum diametri quæ his reſpondeant: Libet & eam rem aliquatenus intueri. Diximus jam ſupra; ſi Pα dextrorſum ſit $+p$, ejuſmodi recta ſiniſtrorſum erit $-p$; adeoque ut illius cubus $+p^3$, ſic hujus $-p^3$; & propterea, ſi diametri ſitus deorſum, puta A P dicatur $+d$, ſurſum erit $-d$: adeoque licet ſit $d . d :: p^3 . p^3$. non tamen (ſumptis ordinatim applicatis in contrariam partem) $d . d :: +p^3 . -p^3$. ſed $+d . -d :: +p^3 . -p^3$. Hoc eſt, licet ſit (quoad Δ inferius) A P . A Δ : Pαc . $\Delta\omega$c, non tamen (quoad ſuperius) A P . A Δ :: Pαc . ΔBc. ſed A P . $-$ A Δ :: Pαc . ΔBc.

His autem conſideratis; eadem methodo qua uſi ſumus (mutatis mutandis) ad prop. 47. Con. Sect. rem ad æquationem perducemus. Nempe A P $= d$. A$\Delta = d + g - q$ (nam Δ ſuperius inquirimus;) adeoque $-$ A$\Delta = -d - g + q$. Pαc $= p^3$. ergo, propter analogiam indicatam, $d . -d - g + q :: p^3 . \frac{-d - g + q}{d} p^3 = \Delta$Bc.

Sed etiam eſt F P . Pα :: gΔ . ΔB. hoc eſt, (ut ibidem oſtenditur,) $3d . p :: 3d - q . \frac{3d - q}{3d} p = \Delta$B. ubi ΔB eſt quantitas negativa, ſicut ipſa $3d - q$, quippe q major eſt, hoc caſu, quam $3d$.) ejuſque cubus $\frac{27d^3 - 27d^2q + 9dq^2 - q^3}{27d^3} p^3 = \Delta$Bc $= \frac{-d - g + q}{d} p^3$.

Adeoque (facta reductione) $27d^3 - 27d^2q + 9dq^2 - q^3 = -27d^3 - 27d^2g + 27d^2q$. Hoc eſt, $q^3 - 9dq^2 + 54d^2q = +27d^2g + 54d^3$. Quæ, ſubſtituendo $r + 3d = q$: reducitur ad æquationem hanc $r^3 + 27d^2r = 27d^2g - 54d^3$. Nam

$$
\begin{array}{r}
r^3 + 9dr^2 + 27d^2r + 27d^3 = q^3. \\
-9dr^2 - 54d^2r - 81d^3 = -9dq^2. \\
+54d^2r + 162d^3 = +54d^2q. \\
\hline
r^3 + 27d^2r + 108d^3 = 27d^2g + 54d^3. \\
\text{Et} \quad r^3 + 27d^2r = 27d^2g - 54d^3.
\end{array}
$$

Atque idem plane eveniet, ſi punctum B fuerit in curvæ AB continuatione ſurſum ultra verticem A, (nam, ut nunc ordinatim-applicata negativa, nempe ſiniſtrorſum, applicatur diametro affirmativæ, puta deorſum: ita, caſu iſto, ordinatim-applicata affirmativa, hoc eſt dextrorſum, applicabitur diametro negativæ, puta ſurſum; applicabitur enim ſupra verticem A: adeoque utrobique mutanda erunt diametri AΔ ſigna, ut analogia rite inſtituatur:) cum hoc unico diſcrimine, quod cum illic $b = g - 2d =$ AG ſit quantitas affirmativa (deorſum

Ii 3

sum sumenda:) adeoque æquationis quantitas absoluta, affirmativa; $+27d^2b$: hic erit negativa (sursum sumenda) adeoque absoluta quantitas $-27d^2b$ negativa: (illic enim g, major erit, hic minor quam, 2 d.) Et proinde quæ illic est radix affirmativa, g Δ sursum, suppositioni consona, (nam de Δ sursum instituebatur hæc inquisitio:) hic erit negativa, g Δ deorsum, suppositioni contraria. Nempe illic Δ altius erit quam g, hic inferius. Quæ omnia satis intelligentur, si supponatur curva B A continuari ultra verticem sursum, (eo modo quo α A continuatur ad a,) quam ego continuationem, in schemate, consulto omisi ne reliqua turbaret, sed imaginatione facile supplebis. Ut enim curvam B A infra verticem secant rectæ ω B, H ⊕, in punctis B, h; quæ puncta spectat æquatio $r^3+27d^2r=+27d^2b$: sic continuationem illam supra verticem secabunt in aliis punctis rectæ ω G, α F; quæ puncta spectabit æquatio $r^3+27d^2r=-27d^2b$.

Hujus autem æquationis $r^3+27d^2r=\pm 27d^2b$, radix (unica quidem; quippe reliquæ quas exspectes duæ non sunt, nisi imaginariæ; quod indicio est rectam quamlibet tangenti F α parallelam, non posse curvæ B A, utut sicut dictum est sursum continuatam, nisi in uno solo puncto occurrere,) Arithmetice investigatur per regulam nostram secundam, superius allatam: Geometrice vero (si saltem permittas ut hanc curvam appellem Geometricam) hujus curvæ beneficio. Nempe, constructis reliquis ut prius, sicut rectæ per G transeuntis puncta, curvæ α A a occurrentia (sive plura sint sive unicum) designant radices æquationis hujus $r^3-27d^2r=\pm 27d^2b$ (ductis nempe à punctis illis ad diametrum ordinatim applicatis;) ita ejusdem rectæ occursus curvæ B A (si opus, continuatæ,) designat æquationis $r^3+27d^2r=\pm 27d^2b$ radicem (possibilem unicam) nempe ducta inde ad diametrum ordinatim-applicata.

Inventa autem hac radice $r=$ g Δ, addendo $3d$ habebitur radix $q=r+3d$ $=$ p Δ: si & hanc libeat inquirere.

Sin libeat adhuc conjuncta æquatione utrumque rectæ B ω terminum indicare; (vel etiam Sectionum puncta B, O, omnia, ejusdem rectæ occursu facta:) id sic faciendum erit $r^3\mp 27d^2r=+27d^2b$, si nempe punctum B sit in curva A B infra verticem, (hoc est, si punctum G sit infra verticem A;) si autem in ejus continuatione supra verticem (hoc est, si G supra A;) erit $r^3\mp 27d^2r=-27d^2b$. Quippe æquatio $r^3-27d^2r=\pm 27d^2b$ respicit omnia puncta O; & reliqua $r^3+27d^2r=\pm 27d^2b$, puncta B.

Æquationes itaque omnes utriusque formæ, (adeoque æquationes cubicæ ad unam omnes, quippe ad harum alteram æquationes omnes cubicæ facile reducuntur,) $r^3-27d^2r=\pm 27d^2b$, & $r^3+27d^2r=\pm 27d^2b$; Unius hujus curvæ ope facile resolvuntur. Quippe prioris radices omnes occursu rectæ G O curvæque α A a, indicantur; ut superius ostensum est: Posterioris, occursu ejusdem rectæ, curvæque B A (continuatæ) radix innotescit, uti jam ostendimus.

Et quanquam fatendum sit, easdem omnes Conisectionum ope solvi posse, cum interim sit hæc nostra curva uno adhuc gradu magis composita, (adeoque videamur ex problemate, ut loquuntur, Solido, fecisse Lineare;) cum tamen hæc ipsa curva sit ex ita compositis simplicissima, & quidem vix difficilior (ne dicam facilior) factu quam Conisectionum aliquæ (puta Hyperbola, vel etiam Ellipsis;) eaque semel ducta, quodcunque habeat latus rectum (cujus hic nulla habetur ratio,) ad æquationes mille diversissimas (ne dicam omnes) una inserviat; nec aliud insuper postulet ad totum negotium absolvendum, quam parallelarum aliquot rectarum ductum: si non simplicior, saltem expeditior methodus videri possit, quam quæ per Sectiones Conicas adhibetur.

Eodem fere modo unius Parabolæ, ejusque inversionis, ope, solvi possent æquationes omnes quadraticæ. Et Paraboloeidium superioris ordinis ope, æquationes altiores, (si non omnes, multæ saltem,) solvi poterunt; verum hæc omnia prosequi, non est hujus loci.

Verum si libeat adhuc, mensuras in diametro jam inventas, ad ipsas inscriptas transferre, adeoque rectarum G O, G O, G O, vel etiam G O, G B, (sumpto ubivis in diametro, puncto G) ipsis G D, G D, G D, vel etiam G D, G Δ, (fig. præced.) proportionalium, quantitates habere; Id facili negotio obtinebitur. Nempe sumptis P F . F α :: (A P . T α :: G A . G T ::) $d . e :: b . k$ (adeoque) $:: r . b ::$ G D . G O. Prodibunt pro æquationibus jam exhibitis r^3-27d^2r

$=\pm 27$

$= \mp 27 d^2 b$, & $r^3 + 27 d^2 r = \mp 27 d^2 b$, hæ omnino ſimiles $b^3 - 27 e^2 b = \mp 27 e^2 k$, & $b^3 + 27 e^2 b = \mp 27 e^2 k$; quarum prioris radices indicabunt inſcriptarum parallelarum ſegmenta puncto G & curva α A a intercepta; poſterioris vero earundem ſegmenta eodem puncto G & curva B A &c. intercepta.

Atque hinc quidem licebit ipſam, quam ſupra indicavimus, diametrum curvam (ſic enim libeat dicere) quæ rectas parallelas curvæ B A α inſcriptas biſecat (quæ toti huic negotio anſam porrexit) ulterius explicare, ejuſque puncta ſingula per eorum à diametro AD diſtantiam G δ in ipſis GO parallelis menſurandam exhibere.

Siquidem inſcripta o O, vel ω O, (punctum inferius diſtinctionis gratia, dicimus O; ſuperius, ſi in curva A α, o; ſi in A B, ω:) vel eſt G O − G o, vel G O + G ω. Adeoque, quoties G eſt ſupra A, eſt o O differentia duarum radicum affirmativarum æquationis hujus $b^3 - 27 b = -27 k$, puta b, b, (quas radices diſtinctionis item gratia dicemus B = G O, & b = G o:) Quoties autem G eſt infra A, eſt ω O ſumma duarum radicum (affirmativarum) æquationum $b^3 \mp 27 b = 27 k$, (quarum alteram B, alteram β dicemus,) nempe, æquationis $b^3 - 27 b = 27 k$ radix (vel poſſibilis, vel ſaltem) affirmativa unica B = G O, & æquationis $b^3 + 27 b = 27 k$ radix unica poſſibilis β = G ω. Et propterea ſemiſſis inſcriptæ o O = G O − G o = B − b, erit, $\frac{1}{2}$ B − $\frac{1}{2}$ b; & inſcriptæ ω O = G O + G ω = B + β, ſemiſſis $\frac{1}{2}$ B + $\frac{1}{2}$ β. Adeoque G δ diſtantia puncti G a puncto inſcriptæ medio, erit illic $\frac{1}{2}$ o O + o G = $\frac{1}{2}$ B − $\frac{1}{2} b + b$ = $\frac{1}{2}$ B + $\frac{1}{2} b$; hic vero, $\frac{1}{2}$ ω O − ω G = $\frac{1}{2}$ B + $\frac{1}{2}$ β − β = $\frac{1}{2}$ B − $\frac{1}{2}$ β. Quod vel ex ipſo ſchematis inſpectu liquet.

Cognitis itaque, ex ſupra traditis, tum B, b, illic; tum B, β, hic; habetur diſtantia diametri curvæ, à diametro recta, in ipſis G O parallelis menſuranda; (quod pariter etiam obtinet in aliis cujuſcunque gradus Paraboloeidibus inventis, ſuo in ſingulis modo, B, b, β ut mox docebitur:) adeoque verus iſtius curvæ ſitus ſinuoſus quoad ipſius ſingula puncta. Quæ quidem primo partem ſuam concavam (à puncto α aliquouſque deorſum) ad rectam A P diametrum obverſam habet; deinde vero, flexione in contrarias partes facta, partem convexam: Et quidem hoc eo pacto fit, ut non modo ad rectam eam non pertingat unquam; ſed & ita interim appropinquet, ut omni aſſignabili diſtantia propius accedat; adeoque eam ſibi habeat vere Aſymptoton. Quod ſic oſtenditur.

1. Cum ſit (quod modo dictum eſt) inſcripta ω O = ω G + G O = β + B; ſitque (quod jam ſupra oſtenſum eſt) G O major ubique quam G ω; manifeſtum eſt medium inſcriptæ, à puncto G, ad partes O ſemper vergere, nec ad punctum ipſum G aut rectam A G uſpiam accedere. (Quæ quidem intelligenda ſunt, ut & ſequentia, ubi G incidit infra punctum A: ubi enim ſupra illud punctum contingit, non eſt quod ſimus ſoliciti; quippe tum, non modo inſcriptæ o O punctum medium, ſed & ipſa tota ad eaſdem partes poſita eſt.)

2. Manifeſtum item eſt, diſtantiam puncti G, à puncto medio, æqualem eſſe ſemi-differentiæ rectarum G O, G ω; ſive B, β, (Quippe ſi linea ſecetur tum in partes

partes duas æquales, tum in totidem inæquales, inter-segmentum erit semi-differentia partium inæqualium: ut notum est.) Hoc est $G\delta = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}\beta$. Adeoque decrescente vel etiam evanescente illa differentia, decrescet pariter, vel evanescet ea distantia.

3. Posito autem $c = 1$ erit B æquationis hujus $b^3 - 27b = 27k$ radix affirmativa; ut ostensum est; adeoque per regulam nostram primam (saltem quoad parallelam Ga omnesque ipsi inferiores ut dictum est, de superioribus autem non est cur dubitemus.)

$$B = \sqrt{c.}\,\tfrac{27}{2}k + \sqrt{:}\tfrac{729}{4}k^2 - 729: + \sqrt{c.}\,\tfrac{27}{2}k - \sqrt{:}\tfrac{729}{4}k^2 - 729.$$
hoc est $\sqrt{c.}\,\frac{27}{2}k + 27\sqrt{:}\frac{1}{4}k^2 - 1 : + \sqrt{c.}\,\frac{27}{2}k - 27\sqrt{:}\frac{1}{4}k^2 - 1.$
hoc est $3\sqrt{c.}\,\frac{1}{2}k + \sqrt{:}\,\frac{1}{4}k^2 - 1 : + 3\sqrt{c.}\,\frac{1}{2}k - \sqrt{:}\,\frac{1}{4}k^2 - 1.$

Et similiter cum sit β æquationis hujus $b^3 + 27b = 27k$ radix possibilis unica, erit (per Regulam secundam superius traditam,)

$$\beta = \sqrt{c.} + \tfrac{27}{2}k + \sqrt{:}\tfrac{729}{4}k^2 + 729: - \sqrt{c.} - \tfrac{27}{2}k + \sqrt{:}\tfrac{729}{4}k^2 + 729.$$
hoc est $\sqrt{c.} + \frac{27}{2}k + 27\sqrt{:}\frac{1}{4}k^2 + 1 : - \sqrt{c.} - \frac{27}{2}k + 27\sqrt{:}\frac{1}{4}k^2 + 1.$
hoc est $3\sqrt{c.} + \frac{1}{2}k + \sqrt{:}\,\frac{1}{4}k^2 + 1 : - 3\sqrt{c.} - \frac{1}{2}k + \sqrt{:}\frac{1}{4}k^2 + 1.$

4. Quo autem harum quantitatum ab invicem differentiam, (adeoque & semidifferentiam quæ est ipsa de qua agitur distantia,) tum sensim decrescere, tum tandem si in infinitum procedatur evanescere ostendam; assumo (quod & notissimum est) Æqualem Quadratorum differentiam (quod & de aliis potestatibus verum erit) in quadratis majoribus, minorem quam in minoribus, radicum differentiam postulare. (Puta $\sqrt{2} - \sqrt{1}$ majus quam $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, &c. ut notum est:) & quidem eousque augeri posse quadrata, ut data illorum differentia differentiam radicum postulet minorem quavis assignata. (Quod & tum alibi, tum ubi de Hyperbolæ Asymptotis agitur, Con. Sect. prop. 39. monuimus.)

5. Adeoque differentia duarum $\frac{1}{2}k$, $\sqrt{:}\frac{1}{4}k^2 \pm 1$, hoc est, $\sqrt{\frac{1}{4}k^2}$, $\sqrt{:}\frac{1}{4}k^2 \pm 1$, crescente quantitate k, (adeoque crescentibus quadratis, dum interim eadem manet quadratorum differentia 1,) tum perpetuo decrescit, tum tandem assignata quavis minor evadit.

6. Et propterea, tum $\frac{1}{2}k - \sqrt{:}\frac{1}{4}k^2 - 1$; tum $-\frac{1}{2}k + \sqrt{:}\frac{1}{4}k^2 + 1$; crescente ut dictum est k, decrescunt sensim & evanescunt; adeoque & eorum latera cubica, & horum tripla; hoc est, quantitatum B, β membra posteriora.

7. Sed &, iisdem de causis, in ipsarum membris prioribus decrescit pariter atque sensim evanescit, differentia duarum $\sqrt{:}\frac{1}{4}k^2 - 1$, & $\sqrt{:}\frac{1}{4}k^2 + 1$, (crescentibus scilicet ut dictum est, quadratis, eadem interim manente quadratorum differentia 2.) eaque quæ hinc dependet membrorum item primorum differentia: Et propterea ipsarum item quantitatum B, β, differentia; adeoque & puncti G ab inscriptæ medio distantia. Quod erat ostendendum.

Sed & eadem puncta omnia, tum O, o, ω, tum Δ, δ, &c. non minus designari possunt per suam a recta TT distantiam, quam a GG; nempe addita, ablatave, prout res exigat, recta $GT = k$.

In reliquis autem cujuscunque gradus Paraboloeidibus, habentur tum B, b, (quando G supra A) tum B, β, (quando G infra A,) ordinando & resolvendo has æquationes. Nempe

In Parab.	Quadrat.	Cubic.	Biquadr.	
b (pro B, b,) =	$2\sqrt{q}: b - k:$	$3\sqrt{c}: b - k:$	$4\sqrt{qq}: b - k:$	&c.
b (pro B, β,) =	$2\sqrt{q}: k \pm b:$	$3\sqrt{c}: k \pm b:$	$4\sqrt{qq}: k \pm b:$	

Quod probabitur eodem fere modo cum demonstratione tua secunda.

Atque hæ sunt tandem, Illustrissime Domine, per quas deduxit nos ambages Æquatio illa. Superest ut Honoratissimam Dominationem Vestram patientiæ vestræ jam nimium læsæ veniam exoremus: (in quam quidem eo peccavi audacius, non modo quod noverim quam tu sis ad condonandum facilis, facilisque petenti; verum eo maxime quod neque hæc tibi forsan ingrata fore autumaverim:) Atque ut me digneris ultra reputare,

Illustrissime Domine,

Oxonii Dec. 5. 1656.

In D. V. obsequium Paratissimum,

JOH. WALLIS.

DE

Proportionibus, Dialogi;

A

Marco Meibomio

Conscripti; Refutatio.

CUM, currente prelo, ad Operis Arithmetici Cap. XXXVII perveneram, incidi in *Marci Meibomii* De Proportionibus *Dialogum*, anno superiori *Hafniæ* magna quidem cum pompa sed infeliciter editum: Cumque illius Refutationem aliquam illic haud incommode inserendam putaveram, adeoque hanc quæ sequitur meditatus eram; vidi molem eousque excrevisse ut vix opportune uno Capite coerceri posset; nec etiam, citra injuriam, Lectoris patientiam nimia digressione detineri posse. Adeoque, levi illic commonefactione habita, integram ejusdem Refutationem, in hunc locum, seorsum rejiciendam putavi.

Virum equidem autumo haud indoctum; Adeoque num quæ illic edidit serio protulerit, an joco potius, & quasi ludendo, dubitandum forsan erit. Novimus enim & magnos viros nonnunquam ludendo quasi, & tanquam ironice, illud proferre, quod ne quidem ipsi per omnia verum putant. Ut, qui *Moriæ Encomium* scripsit, vir ipse interim prudentissimus; Item, qui *de Umbra Asini*; qui, *in laudem Podagræ*; & quæ similia. Quo referenda sunt *Kepleri somnium*; aliusque *de Novo Orbe*, (sive Incolis Lunæ,) tractatus; & quæ sunt hujusmodi. Ubi ingeniose multa dicta sunt, & quidem non parum subest veri; at interim nemo sobrius authores illos per omnia serio loquutos suspicabitur, sed saltem seria ludis immiscuisse.

Et quidem si hoc pacto se intellectum velit Clarissimus Vir; exiguum est admodum quod ego in contrarium dicendum habeo: Nisi quod nollem sacratissimum Dei nomen, quod in Præfatione sua aliquoties usurpatum video, ludendo usurpari. Quippe sacratius illud est quam ut jocis nostris ironice immisceatur. Cætera quod spectat; possum quidem ego sive ludos suos, sive joco-seria, atque ingeniose dicta in re ludicra, æquo animo ferre. Nec enim ego quicquam video, quidni & in Mathematica, utut severa disciplina, etiam ludere quantisper liceat; &, reliquorum asperitatem, lepide, faceteque traditis, nonnunquam demulcere.

Verum si omnino serio agat Vir Clarissimus, (quod nonnullos arbitrari video,) verosque se de Pythagora, Eudoxo, Euclide, Ptolemæo, Archimede, Apollonio, Theone, Pappo, Eutocio reliquisque ex veteribus Choragis (ne & recentiores nominem Mathematicos,) triumphos agere censeri velit: Duo omnino sunt quæ me impediunt ne ipsi possim hac ex parte consentire. Alterum, quod quicquid ipse veri abstrutum habet, minime novum sit; sed & veteribus olim cognitum, & recentioribus etiamnum Mathematicis probe perspectum. Alterum, quod quæ ipse in Mathesin videtur introducturus nova; ea plane falsa sint, & res nihili.

Non interim ignoro, quam de hoc invento suo altum sentire videatur. Quod in limine cuivis obvium est. Tum ex eis quæ ad Regem habet, Epist. pag. 5. *traditis autem illis* (de Rationum doctrina) *Elementis quanquam Divini, Pythagoras, Eudoxus, Euclides, & quotquot unquam Pythagorici floruere, sudarunt; primus omnium eruditam vetustatem, quantum ex scriptis illius [...]ar, ingenti molimine, quod præfiscini dixerim, superavi.* Tum ex ipsius ad [...]ctorem præfatione, quam (quasi universus orbis ipsi gratulari debeat) his verbis orditur; *Quod Orbis literatus gaudeat! Posteritas grata memoria recordetur!*

Primi novas Geometricarum rationum leges in natura deteximus; & falsas propositiones in eo libro invenimus, quem ultimæ antiquitatis Divini viri, Pythagoras, Eudoxus, Euclides, ex Ægyptiorum & Patriarcharum inventis condiderunt, omnium autem seculorum præcipui Philosophi & sapientes legendo examinarunt. (Quod quidem quot parasangis inventum Columbi, novum orbem indicantis, antecellat; deinceps multis exponit.) Egregium equidem facinus! & Viro dignum! Cui, si libet, Prologum faciamus, *Magna petis Phaeton* —— Metuo enim ne & congruum sortiatur Epilogum,

—— *Magnis tamen excidit ausis.*

Quid autem tanti moliminis opus suscepturo animos fecerit, si dubitemus; exponit ipse, pagina sequente; nempe quod nihil sibi arduum fore aut inaccessum, experimento jam sæpius edoctus fuerit. Quippe huc spectare videntur quæ illic habet: nempe, Jam *Illo tempore tot locorum in desperatis auctoribus restitutione, quasi perpetuis victoriis, animatus, nihil tam arduum, nihil ita intricatum in scientiis, quæ quidem ratione aliqua constitutæ essent, inveniri arbitrabar, ut, si ingenii nervos contendere vellem, explicatum illud dare diffiderem.* Virum itaque jam videtis facinori parem.

Hoc animo fretus, (quod præfat. pag. 3. indicat,) *Principia quædam Geometrica convellere suscepit.* Et quidem, *ut sciolum vulgus, etiam intelligendi difficultate, ab his arceret; breviter & presse omnia primum conceperat:* Et quanquam, *mutata deinde sententia, interpolata multa fuerint & late explicata, quæ ad intelligendam doctrinam ipsam pertinere viderentur: Ut tamen sciolos* adhuc *torqueret, multa concinne admodum & jucunde excogitata,* etiamnum *omisit.*

Nequis autem, *audaciores jam fieri homines, non sapientiores,* causetur, qui veterum tradita, *adamantinis fundamentis* suffulta, ausint sollicitare; ipsumque, *nugis suis animatum, Sisyphi saxo majus volvere,* suspicetur; adeoque vel *Josephi Scaligeri* infortunio monitum, qui *impotenti animo divini Archimedis nomini insultarat,* ab his inceptis deterreri posse, vel etiam debere: Ille potius, *immortalitatem ex novis suis in hoc pulvere inventis consequi anhelans, omnem sibi posteritatem demereri posse,* confidit; Neque tantum Euclidis *præcipua quædam Geometriæ Elementa* convulsum iri; sed & simul *Archimedis*; veterumque *omnium, famam, & doctrinæ soliditatem, ineluctabili quodam fato, hoc tempore ruituram.* Nempe huc spectant, libri sui paginæ primores septem.

Quum itaque non modo, *Pythagoras, Eudoxus, &c. ad rei veritatem non omnino penetrarunt,* sed & *quædam, quæ veteres recte docuerant, sinistra recentiorum interpretatione sunt depravata*: Utrique malo succurrendum statuit, pag. 9. *Itaque & recentiores omnes,* inquit, *reprehendam, qui antiquos non intellexerunt; & antiquos corrigam, qui male quædam prodiderunt; utrosque insuper nova docebo.* Atque hæc quidem est suscepti ratio.

Quanta vero hoc cura præstitum fuerit, successu quanto; non item gravabitur indicare. Quamvis enim, pro eo quo erat acumine, & sagacitate, *duarum horarum spacio illius doctrinæ fundamenta excogitaverit,* quam tum Veteres tum Recentiores omnes hactenus ignorarunt: attamen, ne, nimis festinans, aut cæcos parturiret catulos, aut informes; lambendo, & relambendo, satis prospexit: quippe *in quibus deinde examinandis integro quinquennio fuit occupatus,* Præfat. p. 2. quod & subinde itidem monet pag. seq. Successu autem eo factum est, ut & *Deo opt. max. humillimas,* inquit, *gratias agere deberem, qui, ad inveniendum, ingenium suffecit; & disciplinis Mathematicis gratulari, quod certiora in posterum tradere possint*: Ideoque eo magis, quo *majus est falsum invenisse, quod omnes sapientes verum credebant; quam novi aliquid in eo reperisse, de quo multi ante dubitarant,* quod monet præf. p. 1. Et propterea, non tantum *Eutocium, Theonem, totamque antiquitatem,* nedum *juniores omnes,* crassissimæ incusat ignorantiæ, pag. 88, 89, 99, 100, 101, 127, 161, 165, 166, 167, 169, 173. Verum &, *ut Euclides,* tanquam *in hac causa victus, circinum & regulam sibi tradat,* modestus petit. pag. 148. Atque, se judice, *immortalem sibi inventionis gloriam comparavit.* pag. ult.

Quoniam autem, utut *sciolum vulgus arceat,* quid tamen *lector candidus & eruditus judicaverit,* audire non refugiat; præf. pag. 3. satis forsan securus, se album inde calculum reportaturum; nec adversam metuens sententiam, *quod,* inquit,

quit, *judicium contra quinquennale examen magno molimine intercedet*: Non abs re fore judicavi, hanc novam ipsius doctrinam ad examen vocare; ne sibi opus sit, quod facturus videtur, *Elementorum librum quintum, editione sua*, commaculare. Quippe ego me *Lectorem candidum* spondere ausim, quam interim *eruditus*, penes alios esto judicium.

Et quoniam, *Harmonicorum ignoratione, recentiorum errores succrevisse* (ibidem) suspicatur; quod & subinde aliquoties repetit: præsertim pag. 196, nempe *Juniores, quod rerum naturam in Canonicis nunquam considerassent, adeoque, quid Ratio esset, ignorarent, monstrosam, & contra naturæ decreta natam, Rationis Compositionem*, excogitasse: Et pag. 101. *Illos*, inquit, *errores, ob neglectum Musices studium, Mathematicis Deus immisit; uti olim Deliis Apollo pestem, quod Geometriæ nullam illi operam darent.* Et quæ sequuntur. (Quasi quidem ex Harmonice statuminanda esset Geometria, potius quam, ex hac, illa.) Et proinde (ut ait, præf. pag. 3.) *Hoc maxime optaret, tam sua quam Lectoris gratia, qui ad hæc legenda & examinanda accedet, ut antequam censoria virgula quidquam damnare suscipiat, exempla hujus novæ doctrinæ, quæ in Harmonicis natura monstravit, probe perpendat, &c.* Sciat, velim, etiam hac ex parte optioni suæ satisfactum iri. Neque me ab Harmonicis cousque abhorrere, quin quæ inde protulerit probe intellexerim, & quantum satis est perpenderim. Utut ego interim nihil ex Harmonicis productum video, quod vel profundæ admodum sit speculationis, vel sensis suis impense faveat.

Priusquam autem novæ hujus doctrinæ medullam attingam, occurrit in limine, quod monet, præf. p. 6. de *Authorum locis* aliquot, quæ *Græce & Latine edenda censuit. Quantum*, inquit, *in vertendis illis & emaculandis* (utinam non & commaculandis aliquoties) *præstiterim, illi demum cognoscent, qui aliorum versiones inspexerint. Nam &* (quod quidem verum est, nec vel ipse hac ex parte excusandus est) *doctissimi quidem viri, in his interdum hallucinati sunt.*

Quam enim, inquit, *turpe est, quod Jos. Scaliger, vir in Græcis & Latinis literis summus*, ὀρθογώνιον ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, *interpretatus sit, Clavium aliosque, etiam doctos viros, sequendo*, [Rectangulum sub AB, BC,] *cum vertendum esset* [Rectangulum ab AB, BC,] *nempe* contentum, περιεχόμενον. Quod quidem, utut censuram forte aliquam mereri possit, (nam revera, τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, vel ut brevius dici non raro solet, τὸ ὑπὸ ΑΒΓ, latinius dicendum esset, *quod rectis* AB, BC, vel simpliciter, *quod ab ABC, continetur rectangulum*;) tamen nec adeo *turpe* est hoc Sphalma, (cum sensum haud omnino immutaverit,) nec etiam ab ipso primo detectum. Id enim jam olim, ante annos plus triginta notaverat Honoratissimus D. *Henricus Savilius*, (à me non sine honore nominandus,) in suis ad Euclidem prælectionibus.

Verum id omnino turpius est, quod ab hoc authore sæpissime peccatur; dum nempe, (illud Scaligeri mendum vitare volens,) τὸ ὑπὸ & τὸ ἀπὸ, (quæ apud Euclidem, reliquosque, accuratissime distinguenda sunt, quippe diversi admodum significatus,) ille plane confundit; utramque exponens per Latinorum *a*, vel *ab*. Exemplum esto, pag. 48. l. 17. φημὶ δὴ, ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ· τουτέστι, τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ, ἐπὶ τὴν ΘΗ. Ubi ni accuratissime distinguantur τὸ ἀπὸ, & τὸ ὑπὸ, (quorum illud Quadratum innuit, hoc Rectangulum,) nihil inde sensus elicietur, sed confundentur omnia. At horum ille utrumque per *a*, vel *ab* indiscriminatim reddit; Et, nisi ex abundanti supplevisset voces *Quadratum & Rectangulum*, quæ in Græco textu non habentur, confudisset omnia. Sic enim reddit (neglecta plane præpositionum vi,) *Atque hinc quoque dico*, quadratum *ab AH in HG*, ad quadratum *a CH in HF, majorem rationem habere, quam* quadratum *ab AH ad* rectangulum *a BHC*: hoc est, Quadratum *ab AH in HG, ad* Rectangulum *a BHC in HG*. (Et sic multoties tum illic, tum alibi passim.) At omnino potius esset (quod fecerunt quos ille culpat) ut ὑπὸ *sub*, & ἀπὸ *ab*, reddatur, (utut minus Latine forsan, at magis distincte, quod quidem hic spectandum erat,) quam ut utrumque per *ab* efferatur. Vel saltem, si (ut genuina vis præpositionis ὑπὸ retineatur) τὸ ὑπὸ ΒΘΓ, hoc est, τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘ, ΘΓ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, reddatur *quod* (*rectis*, vel) *a rectis BH, HC, continetur Rectangulum*, (nam ὑπὸ cum Genitivo constructum, agentem ut plurimum indicat, sicut apud Latinos *ab*:) tum nullo modo commodum est, ut & ἀπὸ sic

reddatur; puta, τὸ ἀπὸ ΑΘ, hoc est τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ γραφόμενον τετράγωνον, reddatur *quod a recta AH describitur quadratum.* At inquiet, Annon ἀπὸ significat *ab*? Omnino, inquam, (sicut & ὑπὸ significat *sub.*) At non, sicut *quod rectis BH HC continetur rectangulum,* illæ rectæ continent; sic *quod recta AH describitur quadratum,* illa describit recta; sed potius Geometra *ad* illam rectam, vel *super* eam. Vertendum igitur esset τὸ ἀπὸ ΑΘ, *quod ad,* vel *super, AH describitur,* aut fit, quadratum: vel etiam per *ex,* ut τὸ ἀπὸ ξύλου (γινόμενον) Latine dicitur, *quod ex ligno fit*: vel denique, citra præpositionem, quadratum rectæ AH: Non autem, quod hic author ubique facit, quadratum *ab AH,* ob causam jam supra dictam. Atque hoc quidem ad ipsius Criticismum critice reponendum duxi.

At interim non nego quin hac ex parte laudandam nonnunquam præstiterit operam. Sed & non raro, quæ vel maxime erant emendanda, ille minime animadvertit. Non raro etiam, quæ prius erant sat recte constituta, reddidit depravata.

Ejusmodi quidem ego ipsius παρεργίας reputo, quod, dum in rationis definitione, 3 *d* 5. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. magna disquisitione inquirit, quid sit illud ἡ κατὰ πηλικότητα (de quo post videbitur.) quid interim illud ποιὰ σχέσις significet, neutiquam est solicitus. Sed (alios, fateor sequutus) exponit *quædam relatio p. 9. l. 24.* vel, ad summum, *certa quædam relatio, p. 10. l. 27.* Et alibi, (ut & similem Aristoxeni definitionem *pag.* 83. *l.* 20.) quasi quidem ποιὰ tantundem significet atque τὶς *quædam,* vel *certa quædam.* (Sic in Euclidis Introduct. Harmonica; *pag.* 1, 2, 43, 49.) Cum certum sit ex perpetuo istius vocis usu, ποιὸν, qualitatem respicere: neque tam indefinite *aliquam,* quam *aliqualem,* seu potius *qualitativam* habitudinem hic innuat; quæ nempe prædicamentum Qualitatis spectet. Et quidem in accurate definiente, nullo modo ferendum videtur, ut ratio definiatur indefinite *relatio quædam,* sed determinandum erat; *quænam* relatio. Cum enim ut est notissimum varia sint admodum relationum sive habitudinum genera, determinandum erat (siquid definite proferre vellet) quod genus relationis hic spectetur.

Nec quidem sufficit, quod dixerit Euclides ἡ κατὰ πηλικότητα *secundum quantitatem*; nam vel τῶν κατὰ πηλικότητα σχέσεων sunt etiam varia genera. Atque hoc quidem potuisset ille (ni maluisset depravare) ex scholiaste didicisse, quem citat *pag.* 11. *l.* 25. λέγεται δὲ καὶ ἄλλη σχέσις, κατὰ τὸ ἔχειν (*lege* ὑπερέχειν) καὶ ἐλλείπειν. *Est autem & alia* (inquit) *quæ dicitur relatio, secundum excessum & defectum.* Nempe, præter eam, de qua illic agitur, relationem, quæ *Ratio* appellatur, est & alia, inquit, Relatio sive habitudo, quæ *Differentiam* spectat, sive excessum & defectum: quæ & ipsa quidem est ἡ κατὰ πηλικότητα σχέσις, (prout hic ille intelligit πηλικότητα,) sed non ποιὰ σχέσις: quippe illic solummodo excessus, quantitas spectatur, non qualitas; sive, *quanto* sit hoc illo majus, non *quantuplo.* Dum autem hic Author, pro ἄλλη legendum vult ἄλλως, prorsus hallucinatur. Non enim (quod ille putat) de qua agitur relatio, quæ *Ratio* dici solet, eadem & alio nomine dicitur *Relatio secundum excessum & defectum*; sed plane alia. Estque hoc suorum παραδιορθωμάτων unum.

Sin quæratur, Ecquid hic Qualitatum sit, in Ratione sive Proportione? Notissimum certe est, ut figurarum Magnitudinem ad Quantitatem spectare, ita & figurarum Speciem ad Prædicamentum Qualitatis, nempe ipsius (ut loquuntur) speciem quartam. Constat autem Figuratio, sive specierum figuræ determinatio, duabus potissimum partium ad invicem habitudinibus; puta Ratione, & Inclinatione. Quarum itaque utraque est ποιὰ σχέσις, ut quæ Quantitatis Qualitatem, puta Figuram determinant. Illa quidem κατὰ πηλικότητα, hæc autem κατὰ τὸ κλίσιν: quippe ex comparatorum Quantitate (secundum Quotientem æstimanda) dependet illa, hæc ex Situ. Atque hæc quidem si probe intellexisset hic Author, non tantum sibi facessere negotium opus haberet, ut, quid sit ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ σχέσις, magno molimine exponeret.

Alterum ejusdem παραδιορθωμάτων, (quo *pag.* 13. *l.* 2. & 9. pro ἀριθμοῖς perperam substituisset λόγοις,) cum ipse in erratorum catalogo revocaverit, ego pro restituto habeo, adeoque prætereo.

Dum vero *pag.* 10. & 11. (& alibi passim.) pro *Quanto* substituit *Quotum*; & pro *Quantitate, Quotitatem*; id admodum absurde factum videtur. Ecquis enim mortalium τὸ ποσὸν *p.* 10. *l.* 17. (quod in συνεχὲς & διωρισμένον mox est distribuendum) interpre-

interpretatus esset *Quotum*? Et quis, quæso, non plane mirabitur, dum hæc verba, (*lin.*23.) πηλικότης τὸ πέρας ἐστὶ τοῦ συνεχοῦς ποσοῦ· καὶ ποσότης τοῦ διωρισμένου· exponi videat, *Quantitas est terminus continui quoti, & quotitas discreti*? Cui & simile mox occurrit, (*pag.* 11. *l.* 3.) *Differunt* τὸ πηλίκον *&* τὸ ποσόν. *quod* τὸ πηλίκον, *ad quotitatem continuam referatur.* τὸ ποσὸν *ad discretam.* Dic, o bone, quis unquam ita *continuum quotum*, dixerit, aut *quotitatem continuam*? Solemus quidem non raro *Quantitatem*, tum de continuo, tum de discreto dicere; de magnitudine, inquam, perinde atque de multitudine. Atqui ita *Quotitatem* dixerit, tu certe primus es mortalium. *Quantus numerus*, interrogabit quilibet; at *quot magnitudo*, quærit nemo; sed *quantum magnitudinis.*

At, inquit, ποσὸν *verti* quotum *potius quam* quantum, *ne cum* πηλίκον *id confunderem. Differunt enim mathematicis* τὸ πηλίκον *&* τὸ ποσὸν, *quod* τὸ πηλίκον, *ad quantitatem, seu potius quotitatem, continuam referatur*; τὸ ποσὸν, *ad discretam: quomodo & in hoc Scholio accipiuntur* πηλικότης *&* ποσότης; *adeoque hoc ultimum novo vocabulo, necessitate adductus, verti* Quotitas.

Miror equidem, quam hæc parum critice, à viro Critico, sint prolata! De *quotitate continua*, modo dictum est. Si enim, quod ille vult, *quotitas* ad discretam tantummodo spectat quantitatem, qui poterit ille sine absurdo dicere *quotitatem Continuam*? Deinde, dum innuit, τὸ ποσὸν *ad discretam quantitatem referendum*, non item ad continuam; iterum hallucinatur. Non enim τὸ ποσὸν (*quantum*,) sed τὰ πόσα (*quot*,) de quantitate discreta speciatim dicitur. Ποσὸν autem, vel de quantitate in genere, prout utrique speciei (continuæ & discretæ) indifferenter se habet, vel etiam speciatim de continua dici solet. Et ποσότης in scholio (prout πηλικότητι opponitur, & ad discretam quantitatem restringitur) sat quidem recte *quotitas* vertitur; non autem tam à ποσὸν, quam à πόσα, dici intelligendum est. Quod autem ille inter τὸ πηλίκον & τὸ ποσὸν discrimen assignat, omnino suum est, non Mathematicorum. Sunt enim vel plane idem, (quoties nempe τὸ ποσὸν de continuo speciatim dicitur;) vel saltem τὸ ποσὸν tanquam genus tum de continuo tum discreto indifferenter dicitur; τὸ πηλίκον, speciatim de continuo. Dum vero se ποσὸν, *quotum* vertisse dicit, ne cum πηλίκον id confunderet; admodum & hoc imprudenter factum est; vertisset siquidem (suo sensu) ποσὸν *quantum*, & πηλίκον *quam magnum*, (ut genuina utriusque vocis vis conservaretur;) πόσα denique *quam multa*. Quippe τοῦ ποσοῦ *quanti*, duæ sunt species, πηλίκον *quam magnum*, & πόσα *quam multa*. Vel, si abstractis potius uti placeat, *Quantitatis* duæ sunt species, *Magnitudo* & *Multitudo*. Sin metuat, ne hinc πηλικότης & μέγεθος confundantur; Dico, primò, non magnum illud esse incommodum, si (quod contendit hic author, *p.* 86. *l.* 9. & alibi) tantundem significent. Deinde, ut accuratius respondeamus, dico vocem μέγεθος, nonnunquam sensu concreto significare *rem magnam*, nonnunquam sensu abstracto *rei magnitudinem*, seu grandoris mensuram; priori sensu, per *magnum* exponi poterit; posteriori, plane idem esse atque πηλικότητα seu πηλίκον, *magnitudinem*, seu *quam magnum*. Denique, sin adhuc duabus vocibus Græcis, utut synonymis, duas Latinas aptare volet, poterit alteram, *magnitudinem* appellare; alteram, *grandorem*. Ut nullo modo opus sit *quoti* aut *quotitatis* vocem, pro *quanto* aut *quantitate*, præter omne exemplum, substituere, ubi vel de *quantitate* continua, vel etiam quantitate in genere, verba fiant. Ubi vero, quod non raro fit, τὸ ποσὸν, generis appellatio, attribuitur quantitati discretæ, (quo sensu *Equus* dicitur *animal*, aut etiam *sentiens*,) ferri quidem potest, ut *quoti* voce vertatur: Nec tamen interim necessario fit; nam & *quantus numerus*, & *quanta multitudo*, sine solœcismo dici consuevit; & quidem melius quam *quotus numerus*, *quota multitudo*; quippe *quotus*, potius ad numeros (ut loquuntur) Ordinales quam Cardinales respicit; & quærenti *quotus*? respondendum potius *primus*, *secundus*, *tertius*, *&c.* quam *unus*, *duo*, *tres*, *&c.* Et quidem vel magnitudinum voces omnes, etiam Multitudini non raro attribuuntur; puta dum numerus alius alio *major* dicitur, aut *minor*; item *maximus*, & *minimus*; sed & *magnus*, *parvus*, *&c.* ut nullo modo mirandum sit, numerum dici, ποσὸν *quantum*; nec opus sit ut *quotum* substituamus.

Ejusdem commatis est, quod *pag.* 87. *l.* 9. Ἐπειδὴ τοῦ ποσοῦ, τὸ μὲν ὃν ἐν τοῖς συνεχέσι κείμενον, ὃ δὴ μέγεθος καλεῖται, περὶ ὃ δὴ μάλιστα ἡ γεωμετρία· τὸ δ᾽ ἐν διῃρημένοις, ὅπερ ἀριθμὸς προσείρηκα, περὶ ὃν ἡ ἀριθμητικὴ καταγίνεται. Exponit, *Quoniam Quoti aliud est in corporibus continuis, quod Magnitudo vocatur, circa quam imprimis versatur Geometria; aliud*

in discretis, quod Numerus existit, circa quem Arithmetica occupatur. Quasi quidem *quotum* genus esset ad *quam magnum*, & *quam multa*. Neque hilo melior est, quam subjungit, correctio, *lin.* 17. *Rectius forte τὸ ποσὸν verteretur* Aliquotum, *quia πόσον* est *Quotum.* Imo, inquam, rectius verteretur *Aliquantum*, quia non *quotitas*, sed *quantitas*, genus est ad magnitudinem & multitudinem.

Sed nimius essem si ipsius omnia vel παροράματα vel παραδιορθώματα, quæ passim admisit, notare vellem. Utut enim Criticus admodum videri velit, aut etiam Hypercriticus, (aliisque *ignorantiam & neglectam Græcæ literaturæ culturam*, quasi ipse solus intelligat, multoties exprobret;) quin potius Παρασφαλτικὸς non raro habendus sit, ego nullus dubito; nec, credo, dubitabunt alii, si vel censuras ejus critice expendant. Ego, omissis aliis, eorum unum aut alterum, quæ ad præsens spectent negotium, adhuc expendam.

Horum alterum, Archimedis *prop.* 8. *lib.* 2. de sphæra & cylindro, spectat, cum Eutocii in illam commentariis, p. 41. & seqq. Cum enim se alibi, in librariorum mendis expurgandis, diligentissimum ostendit; & laudandam aliquando operam impendit: hic, vel data opera, negligens videtur. Nam *p.* 41. *l.* 27. pro διπλάσιον (quod librariorum incuria irrepserat) restituendum erat διπλασίονα. (Sic Euclid. Sect. Canonis. p. 28. 66.) Quod quidem librarii mendum esse, vel hinc patet, quod in hujus propositionis, tum ἐκθέσει *p.* 42. *l.* 4. tum συμπεράσματι *p.* 45. *l.* 16. (ubi ipsa propositionis verba erant recitanda,) legitur διπλασίονα, non διπλάσιον, quod indicio est, ita in ipsa propositione lectum fuisse. Sed & sic legitur sæpius in demonstrationis curriculo, *p.* 44. *l.* 6, 9, 11. & in commentariis Eutocii, *p.* 49. *l.* 29. & *p.* 55. *l.* 22. & *p.* 60. *l.* 18. 29. & *p.* 62. *l.* 15. 23. & τριπλασίονα *p.* 55. *l.* 19. Similiter *p.* 43. *l.* 9. ubi item mendose legitur διπλάσιον, restituendum erat διπλασίονα. Quod quin librarii mendum sit, minime dubitandum est; quoniam ubi hic ipse textus ab Eutocio recitatur *p.* 49. *l.* 29. recte legitur διπλασίονα. Atque eadem etiam adhibenda erat correctio, *p.* 43. *l.* 3. & *p.* 45. *l.* 29. & *p.* 60. *l.* 13. Similiter ubi in editione Basileensi mendose legeretur λόγος διπλάσιον, ille non minus mendose substituit, λόγος διπλάσιος, *p.* 55. *l.* 6. cum omnino substituendum esset λόγος διπλασίων, quod quidem vel ex *l.* 9. satis est manifestum ubi διπλασίων legitur, ut & *p.* 64. *l.* 4. Eodem modo ubi alibi in eadem editione Basileensi, corrupte legitur διπλάσιον, substituit ille διπλασίω, *p.* 47. *l.* 14. cum potius substituendum esset διπλασίονος. Sed & alibi pro διπλάσιος, substituendum διπλασίων. *p.* 60. *l.* 32. & *p.* 92. *l.* 11. & *p.* 63. *l.* 7. Et pro τριπλάσιος, τριπλασίων, *p.* 63. *l.* 10. & *p.* 64. *l.* 9. & pro διπλάσια, διπλασίονα, *p.* 54. *l.* 15. Quanquam enim, huic quidem authori, perinde forsan sint λόγος διπλάσιος & λόγος διπλασίων: non tamen veteribus Geometricis perinde significant: quod sive ille neget, sive ignoret, probe norunt alii.

Parem emendationem desidero, Scholii *pag.* 30. Nempe *l.* 32. pro διπλάσιος; substituendum διπλασίων & *pag.* 31. *l.* 35. pro τριπλάσιον, τριπλασίονα & contra *l.* 16. pro τριπλασίονα, substituendum τριπλάσιον. Sed & ibidem ὁ λόγος ὁ ἐκ τῶν δύο, exposuisset potius *rationem ex binis compositam*, quam *rationem ex binis constantem.* Adeoque sensus, qui jam plane turbidus est, perspicuus esset; Οὐ λέγει, ὅτι δύο λόγοι τοῦ ἑνὸς διπλάσιοι εἰσί· καὶ τοῦτο μὲν γάρ. ἀλλ' ὅτι ὁ λόγος, ὁ ἐκ τῶν δύο, διπλασίων ἐστίν. Hoc est, *Non dicit* Euclides (10 *d* 5) *duas rationes unius esse duplas,* (puta $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \times 2 = \frac{6}{2}$,) *quod etiam verum: sed rationem, ex binis compositam esse duplicatam*; puta $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ esse duplicatam rationis $\frac{3}{2}$. quo quid esse potest magis perspicuum? Hoc autem, dum ille sic exponit, *Non dicit, duas rationes unius esse duplas; quod etiam verum: sed rationem ex binis constantem esse duplam*; ecquis inde sensum ullum commodum eliciet? (quam frigide autem hoc interpretetur Meibomius *pag.* 171. *l.* 10. qui volet, videat.) Sed & sequente *pag. l.* 35. pro τριπλάσιον, legendum τριπλασίονα, & contra *l.* 15. pro τριπλασίονα, legendum τριπλάσιον.

Superest adhuc aliud, quod & omnium turpissimum est, παραδιόρθωμα. quo perpetuo peccat; & quidem data opera. Nempe, cum apud Euclidem, reliquosque, λόγος διπλάσιος, τριπλάσιος, τετραπλάσιος, &c. atque λόγος διπλασίων, τριπλασίων, τετραπλασίων, &c. immane quantum discrepent; Ille hæc ubique, vertendo, confundit; nec aliter hæc quam illa exponit. Neque solum ipse negligit, sed nec ab aliis observari discrimen patietur. Adeoque cum interpretes Latinos videat, *Campanum*, *Clavium*, &c. (quo discrepantiam illam utcunque retineant) illic rationem *duplam*, *triplam*, &c. dixisse; hic *duplicatam*, *triplicatam*, *quadruplicatam*, &c. *quam deinde* (ut ait pag. 173.) *loquendi formulam omnes Mathematici usurparunt*: exclamat

clamat ille, (quasi horrendum aliquod facinus accidisset,) *O stupendam Græcæ Linguæ ignorantiam*! (quod nempe nescíverint homines τὸ δὶς & τὸ δισσὸν, iisdem vocibus Latinis efferre: neque λόγον διπλάσιον, & λόγον διπλασίονα confundere:) *atque erroris fœditatem*! (quod nempe malint distinctius loqui:) *qua non vulgus Mathematicorum, sed Duces atque Principes inclatuerunt*! Nempe non modo interpretes Latini, sed & ipsi Græci, Euclides, Theo, Eutocius, &c. quibus diversa sonant διπλάσιος & διπλασίων quippe nesciebant pariter, tum hi, Græce loqui; tum illi, intelligere: utpote ab *Euthymio, Hermotimoque*, (quæ sibi fecit nomina *Meibomius*) nondum edocti.

Dicet fortasse; διπλάσιος & διπλασίων, si Etymon spectemus, perinde significare; nec esse cur hæc vox magis quam illa reddatur *duplicatus*. Fortasse quidem. Sed nec, inquam, si derivationem spectemus, differre videbuntur *duplus* & *duplicatus*, (atque alibi forsan, extra hunc casum, promiscue usurpantur,) at saltem usu differunt, tum λόγος διπλάσιος & διπλασίων, tum *ratio dupla* & *duplicata*.

Dicet porro, Lexicographos, & nominatim Stephanum, pro Synonymis habere. Nec mirum, inquam, Lexicographos, (utut viros doctos, & Græcæ Linguæ peritos, si non & peritos Mathematicos,) haud semper Lynceos esse in vocabulis Mathematicis interpretandis: (præsertim dum quid ex usu Mathematicis peculiari, magis quam ex vocis Etymo, dependeat:) Neque enim tam à Lexicographorum interpretationibus, quam à Mathematicorum definitionibus, petendæ sunt ejusmodi vocum interpretationes. Et quidem, iisdem Lexicographis, ἐπιμόριος & ἐπιμερὴς tantundem significant: Nec tamen interim volet, credo, Meibomius, ut λόγος ἐπιμόριος, & λόγος ἐπιμερὴς, apud Mathematicos, promiscue usurpentur.

Missis autem his criticismis, (qui ad Grammaticam magis pertinent, quam Geometriam,) ipsius de Rationibus & Proportionibus novam doctrinam perpendamus.

Ratio, inquit, *quæ Græcis λόγος dicitur, secundum quam hoc ad illud rationem habere adfirmamus, Duorum ejusdem generis terminorum inter se certa relatio, definitur*. pag. 9. At, inquam, mutila est hæc definitio? Annon enim Pater & Filius, sunt *termini ejusdem generis*? Annon eorum inter se relatio, puta Paternitas & Filiatio, est *certa relatio*? At ea certe *Ratio* non est, de qua jam agitur. Claudicat itaque hæc definitio. Sed vel *Magnitudinum* ad invicem *relatio*, aut etiam *certa relatio*, non omnis, est *Ratio*: nam λέγεται καὶ ἄλλη σχέσις, κατὰ τὸ ὑπερέχειν καὶ ἐλλείπειν, ut ex Scholiaste modo audivimus; quæ & ipsa non minus est *certa relatio*, quam quæ *Ratio* dicitur.

Deinde Rationem distribuens, pag. 13. &c. aliam vult esse *Rationem Æqualem*; aliam *Inæqualem*; & quidem vel *Majorem*, vel *Minorem*. Cum dixisset potius, *Rationem æqualitatis, inæqualitatis, majoritatis, minoritatis*; vel etiam *Rationem æqualium, inæqualium, majoris, minoris*. Nempe hoc vellet, loquitur tamen minus accurate. Quippe Rationum nulla non est tum æqualis, tum inæqualis, & quidem tum major, tum minor, prout illa cum aliis aliisque comparatur. Puta ratio 3 ad 2, æqualis est rationi 6 ad 4, major autem ratione 6 ad 5, minor tamen quam 6 ad 3. Rationem autem *majorem* (intellige, rationem majoritatis,) subdividit in *multiplicem, superparticularem*, (superpartientem, sive, ut ille loqui malit,) *superpertem, multiplicem-superparticularem*, (multiplicem superpartientem, sive) *multiplicem-superpertem*; recepto more. Et rationem *minorem* (seu potius, minoritatis) similiter in *submultiplicem, subsuperparticularem &c.* eodem modo quo alii. Quibus dum ille *certiora tradi posse* insinuat; metuo ne quæ ille pro certioribus habet, pro magis incertis sint habenda, quod suo forsan loco, cum ipsa protulerit, videbitur.

Dum autem huic distributioni hoc subjungit (p.15.) *Porro & hoc monendum, numeri ad numerum rationem dici, quando major ad minorem in nulla fuerit prædictarum rationum: cujus rationis est limma in Harmonicis, contentum his minimis numeris, 256 ad 243*: Omnino somniasse videtur. Nam neque id verum est; nec quam adfert instantia hujusmodi quicquam suadet. Est enim ratio 256 ad 243, superpartiens; nempe supertredecupartiens ducentesimas quadragesimas tertias: ut dividendo patet. Nempe 243) 256 ($1\frac{13}{243}$. Verum quidem est; in quantitatibus *Irrationalibus* (ut loquuntur) Rationes esse innumeras quæ ad hæc genera non reducuntur. At in numeris, (sive integris, sive etiam fractis,) qui quidem sunt rationales inter se omnes, nulla est quæ ad illorum generum aliquod non reducatur. Sed,

Sed, his missis, ad ea quæ sibi potissimum tradenda suscepit properabimus. Sunt autem ea saltem hæc quatuor. 1. Eutocium, cæterosque, non intellexisse quid sit πηλικότης: & rationum πηλικότητας male per divisionum quotientes æstimasse. Adeoque quid sit *rationum compositio* parum intellexisse. 2. Non aliam esse rationis *duplationem*, *triplationem*, &c. quam quæ definitur *duplicatio*, *triplicatio*, &c. 10 *d* 5. Adeoque perperam locutum Theonem, aliosque, qui *sextuplum* esse volunt *tripli duplum*. Et non nisi ob stupendam Græcæ Linguæ ignorantiam, alio sensu usurpari rationem *duplicatam*, *triplicatam*, &c. atque *duplam*, *triplam*, &c. quo nempe διπλασίων, τριπλασίων, &c. & διπλάσιος, τριπλάσιος, &c. distinguantur. 3. Non eam semper rationem majorem dicendam esse, quæ majorem quantitatem innuit, (puta $\frac{1}{2}$ quam $\frac{1}{4}$,) sed eam quæ ab æqualitate magis recedit, seu cujus termini magis inter se distant, (puta rationem $\frac{1}{4}$ majorem esse quam $\frac{1}{2}$,) & propterea, quæ æqualiter ab æqualitate recedunt (puta $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{1}$) invicem æquales esse. 4. Et propterea, dum Euclides, reliquique ad unum omnes Geometræ, rationem, verbi gratia, $\frac{1}{4}$ minorem habent quam $\frac{1}{2}$; tum Euclidis aliorumque nonnullas, tum Gregorii à Sancto Vincentio, *plus centum & triginta propositiones* hoc nomine *falsas* esse clamitat.

His ut viam sternat, continuis 55 paginis (nempe à pag. 16, ad p. 70. inclusive.) Ex Eutocio, Euclide, Archimede, &c. loca quædam Græce & Latine recitat, quæ secuturæ tractationi materiam administrent.

Tum p. 70. 71. rationem $\frac{81}{80}$, *quam*, inquit, *Commatis rationem recentiores faciunt*, ille centies & duodecies componit; hoc est, $\frac{81}{80}$ toties positam continue multiplicat; sive, quod tantundem est, radicis $\frac{81}{80}$, tot continue sequentes potestates investigat. Cui bono; ipse viderit.

Deinde, totis contiguis quatuor paginis, docet, in Minutiis, $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$ (quod quis nescit?) Item $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{7}{12}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}+\frac{7}{12}=\frac{24}{12}=2$. Sed & $\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{1}{12}$. Et $\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=\frac{8}{6}+\frac{9}{6}=\frac{17}{6}=2\frac{5}{6}$. Quæ siquis antea nescivérit, ab Euthymio, per me licet, discat.

Verum (inquit p. 66.) *si Rationum magnitudo sit exploranda, illa major est, cujus termini longius inter se distant*. Pulchra quidem definitio! atque Eythymio digna!

At interim longe aliud est sua *major ratio*, quam Euclidis & cæterorum omnium. Quippe illi, per *rationem majorem*, eam intelligunt, *quæ expositæ quantitatis plus indicat*. (Prout ex perpetuo istius appellationis usu, satis abunde constat.) Adeoque triplum duplo majus esse volunt, non quod 3, 1, magis distant quam 2, 1; (quanquam & illud verum sit;) sed quia 3 A plus indicat quam 2 A. Et pari de causa semissem quadrante majorem esse volunt, (hoc est, subduplum subquadruplo,) non quod 1, 2, plus distent, quam 1, 4, (quod falsum est,) sed quia $\frac{1}{2}$A plus designat quam $\frac{1}{4}$A. Et quidem, sicut integrum est semissis duplum, sic & semis est duplum quadrantis; quod quidem (ante Meibomium) omnes sani senserunt.

Ideoque Meibomius vel perperam nova sua definitione explicat quod illi *Majoris rationis* nomine voluere, quippe definitio definito non congruet; vel, si ipse iisdem vocibus aliud quid intellectum velit quam quod illi innuebant, non loquitur ad idem; adeoque absurde admodum eorum propositiones falsitatis incusat, quod novæ suæ nomenclaturæ non conveniant, (de qua nemo sobrius antehac cogitaverit,) si interim veræ sint (quod vel ipse nulla fronte negabit) eo sensu quo tum ipsos loquutos esse constat, tum sani omnes illos intelligebant. Loquebantur siquidem eo sensu quem voces illæ tunc temporis obtinebant, & quidem per omnia retro secula hucusque obtinuerunt, nec alio sensu intelligebantur, aut etiamnum à sobriis intelliguntur: quo sensu si vera sint quæ protulerunt, falsitatis minime sunt accusanda; quis enim illud juste postulet, ut Euclides, ante bis mille forsan annos, conjiceret quo novo sensu has voces usurpaturus esset Meibomius, eique sua dicta accommodaret.

Quo autem sensu loquutus sit Euclides, (reliquique,) nequis dubitet; illud 7ª definitione Vi, (quam ipse refert Meibomius p. 30. l. 4.) determinatur. Ea siquidem definitio, utut aliis verbis, eodem tamen quoad rem sensu quo nos jam diximus, quæ ratio sit apud illos habenda major, ostendit.

Quod autem ille pag. 126. l. 11. *falsam esse* contendat illam libri quinti definitionem *septimam*; omnino ridiculum est. Definitionibus enim suis Mathematici hoc tantum volunt, ut sciat Lector quo sensu hæc aut illa nomina apud se intelligenda

genda velint. Definitionem itaque illam falsam dicere, perinde est atque dicere, Euclidem nolle ut eo sensu vox illa intelligatur, quo intelligendam se velle dicit. Quod ne quidem *Meibomius* dicere sustinebit. Sed neque dicere potest, verbis ita intellectis, ut ea intelligenda se velle dicit Euclides, Propositiones sequentes falsas esse. Hoc tantum ait; *majoris rationis* appellatione se quidem aliud quid intelligere quam quod intellexerat Euclides, (aut etiam alius quispiam sive Veterum sive Recentiorum,) quod nec Euclidis definitioni, nec propositionibus huic definitioni consentaneis congruit; & propterea cum Euclidis definitio & propositiones utut inter se satis consentaneæ, ipsique (eo sensu) veritati, non tamen consentiant novæ Meibomii nomenclaturæ (de qua quidem illi ne per somnium cogitarunt, aut cogitasse debuerunt,) falsæ omnino (per logicam Meibomii) sunt dicendæ. Nempe sicut (quantum ad rationes minoris, ut loquuntur, inæqualitatis) per *rationem majorem* id ille intelligit, quod alii per *minorem*; sic & fortassis per *propositionem falsam*, id ipse intelligit, quod per *veram* alii.

Sed exempla videamus quibus hanc suam doctrinam exponit. *Quomodo* (inquit, *p.* 76. *l.* 3.) *ratio* $\frac{9}{6}$ *major est ratione* $\frac{8}{6}$; (Recte.) *quia nempe inter* 9 *&* 6 *majus est spatium, nempe ternarii; quam inter* 8 *&* 6, *nimirum binarii.* Non, inquam, Ideo. Sed potius quia illic antecedens superat consequentem majore sui parte, puta semisse; hic autem minore, nempe triente. (Saltem si per Meibomium liceat, Semissem majorem dicere, quam Trientem.) Non enim excessus ternarii, determinat rationem 9 ad 6; aut binarii, rationem 8 & 6, (Nam in 10 ad 7, & 11 ad 9, comparatis, id ipsum cernitur;) sed illic excessus semissis; hic, trientis. Porro, 8 & 6, longius invicem absunt, quam 2 & 1; at non item ratio $\frac{8}{6}$ major est ratione $\frac{2}{1}$.

Dicit; intelligendum illud de rationibus tantum ad communem consequentem reductis: vel saltem ad communem antecedentem. Puta $\frac{8}{6}$ & $\frac{12}{6}$. Vel $\frac{8}{6}$ & $\frac{8}{4}$, non autem $\frac{8}{6}$ & $\frac{2}{1}$. Esto.

At, inquam, 1°. Cur non igitur hujus conditionis facta est mentio in definitione? Nempe nihil illic dictum de communi vel antecedente vel consequente. 2°. Etiam ante illam reductionem, non minus sunt illæ rationes, æquales aut inæquales, quam ubi ad eundem terminum consequentem reducuntur. 3°. Fieri etiam omnino potest ut ad communem vel consequentem vel antecedentem minime reduci possint rationes comparandæ; puta, quando termini rationis unius ad rationis alterius terminos sunt heterogenei. Verbi gratia; si ratio ponderis ad pondus, comparetur ad rationem lineæ ad lineam: possunt quidem rationes illæ, (ne refragante, credo, Meibomio,) vel æquales esse, vel inæquales; & quidem vel hæc vel illa major: qui autem possint ad eundem consequentem reduci, nondum ostendit doctissimus vir: neque facile est ostensurus. Si enim volet vel alterius vel utriusque terminos commutandos in alios alius generis; exempli gratia ut ratio ponderis ad pondus, puta quadripondii ad bipondium, numeris exprimatur, ut 4 ad 2; & ratio item lineæ ad lineam, puta tripedalis ad bipedalem, ut 3 ad 2; atque has demum rationes comparandas, ut constet utra major: Hoc, inquam, est petere principium; nam etiamnum interrogabitur, quo criterio juxta hanc doctrinam innotescet rationem 4 ad 2 eandem esse vel æqualem rationi quadripondii ad bipondium, an majorem, minoremve. Nam, propter numeros & pondera invicem heterogenea, comparatio ad eundem terminum consequentem non poterit institui, quod solum est (juxta Meibomii definitionem) rationis æqualis, majoris, minorisve criterium. 4°. Sunt, credo, Semissis, Triens, Quadrans, &c. Sive subduplum, subtriplum, subquadruplum, &c. non minus Rationum nomina quam duplum, triplum, quadruplum, &c. Semissem vero Quadrante majorem esse, nemo sobrius negare debet, quippe qui duobus quadrantibus æquatur; *Omnes autem homines totum quavis sua parte majus esse, communi ratione percipiunt*, (vel Meibomio judice *pag.* 141. *l.* 16.) adeoque semissem Quadrante, utpote sui parte. At vero, per hanc Meibomii definitionem, subquadruplum $\frac{1}{4}$, subduplo $\frac{1}{2}$ vel $\frac{2}{4}$, (hoc est, quadrans semisse,) majus esset, cum 1 & 4 plus distent quam 1 & 2, vel 2 & 4. Quod quidem utut Meibomio haud absurdum videatur; vix tamen alii, credo, dictu commodum judicabunt. Sed progrediamur.

Differentia autem, inquit, *illarum* ($\frac{9}{6}$, $\frac{8}{6}$,) *est ratio* $\frac{9}{8}$ *quæ in utriusque rationis antecedentibus spectatur.* Nempe quia $\frac{9}{6}$) $\frac{8}{6}$ ($\frac{9}{8}$, quod sano sensu admitti potest: scilicet, si de Differentia divisionali, seu Quoto, intelligatur. At interim non minus

nus sane, alio sensu, dicetur differentiam esse $\frac{1}{6}$ quia nempe $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$. Sin de hoc dubitet; velim ut exponat mihi hos Horatii versiculos. *de Art. Poet.*

Romani pueri longis rationibus assem
Discunt in partes centum diducere: dicat
Filius Albani, Si de quincunce remota est
Uncia, quid superat? poteras dixisse, triens: Eu,
Rem poteris servare tuam. redit uncia: quid fit?
Semis. ——————

Quod, siquid ego intelligo, hoc est $\frac{5}{12}-\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$. Et $\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$. At *Semissem, Trientem, Unciam, Quincuncem &c.* non magis negabit, credo, Rationum esse nomina, quam *Duplum, Triplum, Duodecuplum, Duplum superbipartiens quintas &c.* nempe illorum correlata.

Eadem *pag. 76. l. penult. Mensura rationibus applicanda, nonnisi ratio esse potest,* (Recte.) *Uti enim longitudines mensuramus longitudinibus; superficies, superficiebus; corpora, corporibus, &c.* (Recte. Sed & Rationibus. Puta, linea tripedalis pedalem superat, linea quidem bipedali, sed in ratione tripla.) *Sic rationes rationibus.* Omnino. Puta ratio sextupla $\frac{6}{1}$, superat triplam $\frac{3}{1}$, ratione tripla $\frac{3}{1}$, (quia $\frac{6}{1}-\frac{3}{1}=\frac{3}{1}$;) sed in ratione dupla; quia $\frac{3}{1}$) $\frac{6}{1}$ ($\frac{2}{1}$. Eodem plane modo quo linea sex pedum, 6 P, superat lineam trium pedum, 3 P, linea trium pedum, 3 P, (quia 6 P − 3 P = 3 P;) sed in ratione dupla, quia nempe 3 P) 6 P (2 vel $\frac{2}{1}$.

Similiter, quod *pag. 77, 78.* colligit. *Dico igitur, rationem* $\frac{9}{8}$, *in qua tonus major spectatur, minorem esse decem commatis: majorem commatis novem*: suo sensu verum est, (sumpta commatis quantitate $\frac{81}{80}$;) quia nempe novem commata, hoc est ratio $\frac{81}{80}$ novies composita, (multiplicando;) sive radicis $\frac{81}{80}$ potestas nona, (λόγος ἐννεαπλάσιος,) $\frac{150094}{134217}$, minor est quam $\frac{9}{8}$; at ejusdem potestas decima, $\frac{984770}{858993}$ major quam $\frac{9}{8}$. Sive in continua progressione Geometrica, $\frac{81}{80}$. $\frac{81}{80}\times\frac{81}{80}$. &c. ÷ terminus nonus ($\frac{150094}{134217}$) minor est quam $\frac{9}{8}$, decimus autem ($\frac{984770}{858993}$) major. Si quid autem aliud hic velit Meibomius; frustra est.

His praemissis (inquit *pag. 78.*) *ad Rationum compositionem accedimus.* Et longa disquisitione, per multas deinceps paginas, inquirit, quid πηλικότητες voce intelligendum sit. Et quidem *quid πηλικότης esset, ex interpretibus nullum percepisse*, contendit *p. 87. l. 20.* (*Nimirum ex Graecae literaturae, in Graecis disciplinis cognoscendis, neglecta cultura, quid non ubique*, inquit, *errorum est enatum? p. 89. l. 5.*) Imo ne quidem *Eutocium & Theonem*, (utut Graeci fuerint) *p. 89. l. 12.* Imo, inquit *p. 169. l. 24. perspicuum est, non tantum ignorasse illos authores, quid sit rationum compositio; sed &, quid sit Ratio.*

Adeoque multis ostendit, *p. 79, 80, 81, 82, 83.* πηλίκον & πηλικότης de quantitate continua, sive magnitudine dici, (quod nemo nescit, sed non de hac sola;) ποσὸν autem & ποσότης, de multitudine, sive quantitate discreta.

Dicimus nos, verum quidem esse, quod soleant πηλίκον & πηλικότης, proprie & prima significatione, respicere quantitatem continuam, & quidem localiter extensam; puta quoad longitudinem, latitudinem, profunditatem; quae est proprie dicta magnitudo: Vel saltem, id quod ad instar magnitudinis consideratur, utut revera (proprie loquendo) magnitudo non sit; ubi nempe quaeritur *Quantum*; non *Quot*. Quo enim sensu, non modo proprie dicta *magnitudo*, hoc est, quantitas localiter extensa, sed & *tempus, pondus*, & ipse *numerus &c.* dici solent *magnum, parvum, majus, minus, &c.* Eodem etiam de horum quolibet, πηλίκον, *quantum* seu *quam magnum*, dici poterit. Sed & similiter haud inconcinne dicitur *quanta eruditio, quantus calor, quanta aetate, quanto honore, quanta authoritate vir, quanta multitudo &c.* non minus quam *eruditio magna, parva, major, maxima &c.* item *multitudo magna, magnus numerus, &c.* Sed & *Ratio major, minor*, adeoque & *quanta ratio.* Et quidem universim, quicquid tanquam mensurae capax proponitur, de illo haud incommode interrogamus non modo πόσον, *quantum sit*, sed & πηλίκον, *quam magnum.* Quod confirmabunt, siquis dubitet, tum authores Graeci passim, tum Lexicographi; in vocibus ἡλίκος, πηλίκος, τηλίκος, τηλικοῦτος &c. Sed nec ipse, credo, refragabitur Meibomius, quippe qui de φθόγγοις, sonis, πηλικότητα *significanter admodum dici*, affirmat *p. 83. l. 16, 20.* Ubi autem non mensuranda, sed numeranda proponuntur aliqua; non quidem πηλίκον, *quam magnum* quaerimus; neque πόσον, *quantum*; sed πόσα, *quot*.

Et

Et quidem numerus utrovis modo considerari potest. Ubi enim, verbi gratia dicitur, *Numerum ternarium, majorem esse binario*; atque *Tria, plura esse quam Duo*; tantundem utrobique, quoad rem, dicitur: At illic, consideratur utervis numerus ut Unum quid; & dicitur, Quantum illud; ad instar quantitatis continuæ: Hic vero, ut plura; & dicitur Quot sunt; ad instar Quantitatis discretæ.

Quod autem ille, ποσὸν ad quantitatem discretam, seu numerum restringere velit; quod facere videtur, *pag.* 11. *l.* 5. *pag.* 83. *l.* 2. *pag.* 95. *l.* 23. item *p.* 86. *l.* 27. & *p.* 87. *l.* 4. & alibi: Admodum incaute factum est; cum certum sit, ποσὸν, non minus de continuo dici. Testor enim quos ipse citat authores passim. Imo seipsum testor, qui *p.* 87. *l.* 5. id ipsum disertis verbis fatetur, Nempe, *generale esse vocabulum τὸ ποσὸν, quod & magnitudinem, & multitudinem comprehendat.* Cur igitur, ejusdem paginæ *l.* 4. & præcedentis lin. penult. contendat τὸ ποσὸν dici *non posse ubi ratio est ineffabilis, seu numero inexplicabilis*; Item, *Quotum, non nisi cum rationis magnitudines sunt commensurabiles*; ego sane non intelligo: præsertim cum proximis verbis *lin.* 5. agnoscat, τὸ ποσὸν utrique quantitati commune esse; & *lin.* 12. τὸ ποσὸν, *Quoti, aliud esse in corporibus continuis, quod magnitudo vocatur, ——— aliud in discretis.* Quicquid enim de *Quoto* sit, (quæ sua vox est,) certe ποσὸν, *quantum*, de quantitate continua dici, perinde atque discreta, nemo sobrius negabit. Et ipse quidem omnium minime negare debet, qui *continui quoti* & *quotitatis continuæ*, (pro *continua quantitate*,) sat sæpe meminit; & quidem primus.

Sed, ne difficiles simus; Ego quidem concedo, quod ille (ni fallor) hic contendit, (quod saltem contendere debet;) nempe, πηλίκον & πηλικότητα, vel de quantitate continua dici, vel saltem de eo quod ad instar continuæ quantitatis consideratur: scilicet, ubi quid consideratur ut *Quantum*, non ut *Quot*. (Sed & μέγεθος eadem, credo, latitudine sumendum erit: Nam quæ de magnitudinibus hic habet Euclides Propositiones, non solis proprie dictis magnitudinibus, sed etiam aliis non raro Quantis applicantur.) At quid porro?

Jam, inquit pag. 83. *videamus quomodo in rationis definitione hoc vocabuli locum habet*: nempe λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

Quid nobis hac in re videatur, superius dictum est; nempe eam hic innui habitudinem qualitativam, quæ sit ex quantitate oriunda; sive quæ magnitudinibus competit non tam secundum quod *multa* sunt, vel etiam simpliciter *magna*, &c. quam secundum quod *Quanta*, sive *Quam magna*, sint; vel potius *Quantupla*. Videamus quid alii.

Scholiastes (inquit p. 84.) hac voce, *infinitas magnitudines exclusas esse*, putat. Fortasse quidem. Neque male. Nam πηλίκον, *quam magnum*, non simpliciter *magnum* dicit, sed magni *determinatam magnitudinem*, sive *magnitudinis mensuram*; quippe de infinitis non dici potest πηλίκα, quam magna sint: adeoque nec illis attribuenda σχέσις, ἡ κατὰ πηλικότητα, quæ ipsis secundum πηλικότητα conveniat. (Scholiastæ verba habentur *pag.* 10. *l.* 21. τὸ δὲ, κατὰ πηλικότητα, inquit, in Rationis definitione additur, ἵνα χωρίσῃ τῶν ἀπείρων μεγεθῶν.) Quem autem hic exercet Meibomius, criticismus, *p.* 84. *l.* 27. *in eo graviter peccasse Scholiasten, quod has voces, κατὰ πηλικότητα, cum magnitudinum notione conjungendas putat, cum Euclides ipse relationis notioni illas adjunxerat; quod articulus ἡ in Græca Editione indicat*: mihi quidem nullius momenti videtur. Neque enim Scholiastes ita separat, quin articulus ἡ respiciat vocem σχέσις: (nempe ea relatio quæ est secundum quantitatem;) neque Euclides ita conjungit cum notione relationis, quin vox πηλικότητα magnitudines respiciat. Non enim intelligendum est, ἡ κατὰ τὴν σχέσεως πηλικότητα, quod videtur velle Meibomius. (Quasi dixisset Euclides, *Magnitudinum relatio ea quæ relationis quantitatem spectat*,) ecquis enim hic sensus esset? sed ἡ κατὰ τὴν αὐτῶν μεγεθῶν πηλικότητα; nempe, *ea magnitudinum inter se relatio, quæ ipsarum* (non, *ipsius*,) *quantitatem spectat.* Et propterea etiam, quod obiter moneo, quum dixisset ipse Meibomius *p.* 80. *l.* 1. *magnitudinum ejusdem generis, secundum quantitatem spectatarum relatio*; sat illud commode dictum fuerat, nec opus erat, ut, in emendandorum catalogo, pro *spectatarum*, substitueret *spectata*; utrumvis enim dicatur perinde est.

Tum *p.* 87. *l.* 23. hanc Commandini explicationem taxat, *Vide ne hoc potius dictum*

dictum sit, ut intelligatur proportio, quæ in quantitate, non item quæ in æstimatione consistit. Cui ansam fecit Scholiastæ illud lin. penult. διττὸς γὰρ ὁ λόγος· ὁ μὲν ἐν ἀξίᾳ, ὁ δὲ ἐν ποσῷ· *duplex siquidem est ratio; altera quoad æstimationem,* sive valorem; *altera quoad quantitatem.* Puta, Vini congius, congium Aquæ, ratione dignitatis sive æstimationis, multo superat; non autem, ratione quantitatis. Vult itaque Commandinus, & recte, vocibus, ἡ κατὰ πηλικότητα, excludi hic magnitudinum quoad dignitatem, aliamve ejusmodi, considerationem; eamque indicari, quæ est quoad quantitatem. Quippe non hic consideratur, num, comparatarum magnitudinum, hæc illa melior sit, vel rectior, aut regulatior, &c. (quæ & ipsæ sunt magnitudinum ποιαὶ σχέσεις;) Sed, num major, &c. Et quidem *quantuplo* major minorve; quæ sola est, ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ σχέσις.

Hunc (inquit p. 88.) *secutus Clavius,* [secundum quantitatem] *explicat, secundum quod una major est quam altera, vel minor, vel æqualis.* Recte quidem, & quidni? At, inquit, *hoc æque verum esset; si pro* κατὰ πηλικότητα, *Euclides dixisset,* κατὰ ποσότητα. Fortasse quidem, (nempe si intelligatur ποσότης, tanquam à πόσος, non tanquam à πόσα, dici:) & quid si? *Quinimo,* inquit, *si plane hæc verba omisisset, nihilominus hæc consideratio locum habuisset.* Fortasse quidem; si nempe ita omisisset ut interim subintelligenda velit: At si plane abesse velit, ne quidem subintellecta, ea consideratio locum non haberet; quippe reliqua definitionis etiam alibi locum habent. Si enim dicitur, *Diametrum peripheriâ minus curvam esse;* aut *Æquicrurum Scaleno regulatius;* erit utrobique δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις, *duarum magnitudinum ad invicem relatio qualitativa,* (hoc est, *Qualiter se habent:*) at interim *Ratio* non erit, quia non ἡ κατὰ πηλικότητα σχέσις. *Dissimilitudinem* quippe illa dicunt; *Rationem* non dicunt, nedum *Inæqualitatem.*

Cum autem horum nihil Meibomio placeat; sed, *ex interpretibus nullum, quid πηλικότης esset, percepisse,* contendat *p.* 87. *l.* 2. atque *omnes inde hallucinatos, quod vim vocabuli πηλικότης ignorarent:* videamus quid ipse velit, his vocibus κατὰ πηλικότητα, insinuari. Nempe, in hunc finem addita vult *p.* 83. *l.* 27. *ut relationem illam duarum magnitudinum spectandam innueret in quantitate & magnitudine; non autem in quotitate & multitudine.* Omnino quidem. Quippe, qui *lineam bipedalem pedalis duplam esse* asserit; non dicit *Quot* sit illa, sed *Quanta* sit, seu *Quantupla:* non enim *duas* esse dicit, sed *duplam.* An vero hoc illud est, quod nemo Interpretum percepit unquam? Sed ignorarunt omnes? Haud equidem crediderim. Quis enim illud nescit?

Verum hoc forsan addendum velit; nempe, non omnem rationem numero denominari posse; puta integro, (ut Dupla, Tripla, aliaque Multipla,) vel etiam Fracto, (ut sesquialtera, sesquitertia, superbipartiens tertias, &c.) sed eas esse posse magnitudinis ad magnitudinem rationes, quæ numeris explicabiles non sunt; ut (in Quadrato) Diametri ad Latus; aliæque ejusmodi irrationales: quibus igitur non tam *Quotuplum,* (quod, stricte loquendo, vix de aliis quam Multiplis dicitur) quam *Quantuplum* sit hoc illius ostenditur. (Quod etiam nemo nescit.) Atque huc, credo, spectant quæ habet p. 84. l. 22. *Vocabulum πηλικότης hoc fine adhibuit, ne scilicet sinistre in numero illa ratio spectaretur. Universalior enim est ratio in quantitate spectata, ea quæ spectatur in numero: quod non omnis ratio in quantitate spectata, numeris explicari possit.* Hoc autem quamvis ita verum sit, ut nihil verius: tamen, quid contineat novi, ego plane non video: quippe quod tritissimum est, & nemini ignotum. Sed & perinde verum est, neque jam primitus cognitum, hac ipsa (inter alias) ratione, tum Quid sit *Ratio,* tum Quid sit *Eadem ratio,* universalius de magnitudinibus universim, 3 & 5 *dd* 5. quam speciatim de numeris, 20 *d* 6. definiri. Multæ siquidem Magnitudinibus conveniunt Rationes, quæ numeris non conveniunt.

Dum vero addit, p. 85. *l.* 19. *Et hac de causa tertiæ definitioni statim quartam subjungit, quæ hoc melius explicaret; nempe, omnes ejusdem generis magnitudines, rationem inter se habere, quæ, si multiplicentur, se invicem superare possunt:* Minime assequitur in ea re Euclidis mentem: Atque illud, *ejusdem generis,* perperam inserit in Euclidis definitionem. Non enim id illic agit Euclides, ut ostendat, quænam homogeneæ quantitates, habeant ad invicem rationes; (quasi quidem, ex homogeneis, aliæ habeant, aliæ non habeant:) sed, cum def. præced. homogeneas quantitates habere ad invicem rationem ostenderat; docet hac def. quænam quantitates

titates dicendæ erunt invicem homogeneæ, adeoque rationem habere: nempe; illæ quæ, multiplicatæ, se mutuo possint superare: contra vero; quibus illud non contingit, haud erunt pro homogeneis habendæ. Verbi gratia, linea & superficies, heterogeneæ sunt, quia linea, utcunque multiplicata, nunquam æquabit superficiem, nedum superabit: Curvum autem, & rectum; puta diametrum, & perimetrum circuli; homogeneas quidem esse magnitudines, (adeoque ad invicem rationem habere,) utut dissimiles; quia tum perimeter diametrum ter sumptam superat, tum diameter quater sumpta superat perimetrum.

Nec melioris commatis est quod statim subjungit, lin. 23. *Si rationem in Arithmetica definire voluisset Euclides, ne quidem additurus esset* κατὰ ποσότητα, (credo equidem; sed potius & illic, κατὰ πηλικότητα, nam & hæc ipsa definitio numeris etiam convenit; qui quidem eodem sensu dici possunt μεγέθη, quo vocantur *magni*.) Sed interim quidni additurus esset? Non, inquit, additurus esset κατὰ ποσότητα, *Secundum quantitatem, duorum numerorum, aut etiam, numeratarum rerum, inter se relationem spectari: quod numerus cum numero comparari nequeat, nisi secundum numerum, quo major superat minorem*, &c. (Imo, inquam, & secundum Rationem qua major superat minorem;) *vel contra, minor a majore superatur; vel etiam, alter alteri est æqualis.* Nempe Senarius binarium superat, numero quidem quaternario; sed ratione tripla. Nec quidem, numeri ad numerum ratio, magis est numerus, quam, lineæ ad lineam ratio, est linea: Sin horum utrumque dicendum velit Meibomius (nempe alteram Numerum esse, alteram Lineam;) velim ut ulterius dicat, qui possit ratio lineæ bipedalis ad pedalem, atque numeri binarii ad unitatem, eadem esse vel æqualis ratio; cum altera numerus sit, altera linea, hoc est, quantitates invicem heterogeneæ. Revera, neque ratio est illic numerus, neque hic linea, sed utrobique tertium quid, nempe *multiplicatio in numerum*, vel saltem in aliquid generis numerosi, numeris homogeneum. Quippe *Duplum* (sive in numeris, sive in lineis &c.) est, non tam 2, quam $\times 2$, sive $\times \frac{2}{1}$.

Sed, his missis; concedimus in magnitudinibus secundum rationem comparandis, spectandum esse non tam Numerum, seu Quotitatem, quam Quantitatem; nempe, non quæritur *Quot*, sed *Quantum* hoc sit ad illud comparatum; hoc est *Quotuplum*, vel saltem *Quantuplum*. Concedimus etiam, Rationem hanc non semper veris numeris explicabilem esse; sed nonnunquam ἄῤῥητον & ineffabilem. Sed negamus, hoc omnibus interpretibus fuisse ignoratum.

Atque hactenus de duarum priori definitione, 3 *d* 5, quæ dixerat Meibomius perpendimus; &, quam nulla de causa ignorantiæ omnes incusaverit, vidimus. Videamus quid de altera sentiat, nempe 5 *d* 6. ubi definitur quid sit, Rationem ex rationibus componi.

Atqui, *Majori*, inquit, *cum admiratione me de altera definitione differentem audies, Nam & clari Mathematici, & Græci reprehensionem incurrent; Eutocius sc. & Theo. p.* 89. *l.* 8. Mirum hoc fateor. Quippe cum & clari sint *Mathematici*, & *Græci*, dici, credo, vix potest, hoc *ex Græcæ literaturæ neglecta cultura enatum esse*, nec, *quod vim vocabuli* πηλικότης *ignorarent*, unde tamen eas *omnes hallucinationes pullulasse* modo dixerat *p.* 88. *l.* 26. & *p.* 89. *l.* 6. Verum hinc ansam captat utrique insultandi, dum Euclidem inducit quasi de Eutocio loquentem *p.* 89. *l.* 22. *Hoc equidem mihi persuadere nequeo, adeo inconsideratum fuisse nostrum Eutocium, virum eximium, quem omnes ex editis in libros divini nostri Archimedis commentariis* μαθηματικώτατον *judicant.* Et de Theone *p.* 99. *l.* 28. *Hac narratione percellor, nec, quid dicam, habeo. An Theo, noster Theo, dixit rationem sextuplam esse duplam rationis triplæ? adeone rationem jam illo tempore sine ratione Mathematici consideraverunt? nec Græca verba tum homines intellexerant? &c.* Videamus itaque, quid sit, de quo hic triumphus agitur.

Definitionem illam; 5 *d* 6. ex editione Græca recenset *p.* 78. *l.* 18. λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσι τινάς: ubi pro τινὰς, *legendum censet* τινὰ, *nempe* λόγον. *Neque enim*, inquit, πηλικότητας *quantitates, facile supplebis &c.*

Mihi quidem, (utut τινὰ potiorem lectionem putem, quam & sequutos video interpretes,) perinde fere videtur utrumvis dicatur. Si legatur τινὰς, interpretandæ erunt πηλικότητες, ipsæ quantitates comparatæ, sive rationum termini, qui propterea erunt invicem ducendi, ut faciant τινὰς (πηλικότητας,) terminos alios. Non quidem Antecedens unius in suum consequentem, & alterius item in suum; (quod

 satis

ſatis abſurde ſupponit Meibomius *p.* 90. *l.* 13. &c.) ſed antecedens unius in antecedentem alterius, ut proveniat antecedens tertius; & ſimiliter conſequens in conſequentem, ut proveniat conſequens. Puta, ſi componendæ rationes ſint $\frac{a}{b}$ & $\frac{\alpha}{\beta}$, erit $a \times \alpha$ compoſitæ antecedens, & $b \times \beta$ compoſitæ conſequens, ipſaque propterea ratio compoſita $\frac{a\alpha}{b\beta}$. Sin legendum τινὰ, (quod potius crediderim) per rationis πηλικότητα intelligendum erit quod ex antecedentis ad conſequentem applicatione emergit, puta quotiens aut fractio; Quam ego veram eſſe exiſtimo πηλικότητος ſignificationem. Adeoque rationis $\frac{a}{b}$; vel potius $\times \frac{a}{b}$, quantitas erit $\frac{a}{b}$ & rationis $\frac{\alpha}{\beta}$ vel $\times \frac{\alpha}{\beta}$, quantitas $\frac{\alpha}{\beta}$: quæ λόγων πηλικότητες, invicem ductæ, ποιῶσι τινὰ (πηλικότητα λόγου, id enim ſupplendum malim quam λόγον) efficiunt, inquam, compoſitæ rationis quantitatem, (vel, ſi libet, compoſitam rationem,) $\frac{a}{b} \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\alpha}{b\beta}$.

Atque hunc poſteriorem ſenſum ſequuntur Eutocius, Theo, aliique tum antiquiores, tum recentiores Mathematici; fatente Meibomio *pp.* 79. 89. & alibi. Nempe Rationis *Quantitatem*, dicunt, *Numerum* (ſeu quod inſtar numeri eſt) *a quo data ratio denominatur p.* 17. *l.* 1. & ſic *p.* 22. *l.* 1. & 12. Nempe *numerum illum* (ſeu quod inſtar numeri eſt, ut ibidem fuſius explicatur) *qui ſi in ſequentem rationis terminum multiplicetur, efficiat antecedentem. p.* 17. *l.* 7. & 30. quæ quidem *quantitas invenitur, diviſa propoſitæ rationis antecedente magnitudine per conſequentem p.* 79. *l.* 12. Diviſionis igitur quotiens (ſive ſit numerus integer, ſive fractus, ſive etiam ſurdus &c.) erit Rationis Denominator, ejuſque quantitatem determinabit.

Si autem quæratur, cur Quotiens ille, ſive Rationis Denominator, rationis Quantitas diceretur: res non obſcura eſt. Cum enim, verbi gratia, vox *duplum* ſive ratio dupla, tantundem plane ſignificet atque $\times 2$ vel $\times \frac{2}{1}$: Signum multiplicationis $\times$ indicat, *Rationem* eſſe; & adjunctus Denominator 2 vel $\frac{2}{1}$, *Quanta* ſit illa ratio. Sive, quod tantundem valet, ſignum $\times$ indicat *Multiplum* (intellige ſenſu laxiori) vel, ſi libet, *Aliquantuplum*, & 2 vel $\frac{2}{1}$ *Quam* multiplum, ſive *Quantuplum*. Et ſimiliter intelligendum erit, quantacunque ſit ratio, puta $\times \frac{a}{b}$ ſive rationalis ſive irrationalis; nam utcunque $\frac{a}{b}$ indicabit quotientem qui oritur ex quantitate a per quantitatem b diviſa, adeoque denominabit rationem quam habet a quantitas ad quantitatem b. Quum enim ait ille, *p.* 91. *l.* 28. *non vidiſſe illos, vocabulum* πηλικότης *reſpexiſſe numeris ineffabiles rationes*; omnino ſecus eſt. Nam non minus quantitas rationis $\sqrt{2}$ ad 1, (hoc eſt, Diagonii ad Latus quadrati,) Diviſionis quotiente $\frac{\sqrt{2}}{1}$ vel $\sqrt{2}$, indicatur; quam rationis 2 ad 1, quantitas indicatur quotiente $\frac{2}{1}$ vel 2. Nec quidem hoc negatur Eutocii verbis *p.* 91. *l.* 25. citatis; (quod tamen inſinuat Meibomius *lin.* 18.) Id tantum negatur, Quotientem illum vere Numerum eſſe. Non negat rationis quantitatem hujuſmodi ſive diviſione ſive applicatione, indicari: Et multo minus quidem negat, *rationes magnitudinum numeris ineffabiles, ſic componi poſſe.* Eſto enim verbi gratia, tum Quadrati tum Cubi latus a, Quadrati Diagonium b, Diagonium Cubi c, quæ quidem ſunt quantitates invicem ἄῤῥητοι; nempe ut 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. Rationis c ad b, quantitas eſt $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$; rationis b ad a, quantitas eſt $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$; ex his invicem ductis, emerget $\frac{c}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{cb}{ba} = \frac{c}{a}$, hoc eſt $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, quantitas rationis c ad a, compoſitæ ex c ad b, & b ad a.

$$1)\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}\right.$$

$$1)\,2\,\left(\frac{2}{1} = 2\right.$$

Meibomium

Meibomium interim id forsan in toto hoc negotio decepit, quod putaverit eandem in utraque definitione (3 *d* 5 & 5 *d* 6) πηλικότητα designari; cum hæc ab illa admodum sit diversa. Nempe in altera (5 *d* 6) πηλικότητες τῶν λόγων; in altera (3 *d* 5) πηλικότης τῶν μεγεθῶν innuitur. Definitur enim λόγος, (3 *d* 5) δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα (nempe τῶν αὐτῶν, non τῆς σχέσεως, nedum τοῦ λόγου) πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. In altera vero def. (5 *d* 6) diserte dicitur αἱ τῶν λόγων πηλικότητες. Illic, *quanta magnitudo* designatur: hic, *quanta ratio*.

Nisi hoc potius dicendum malit, (quod & ego quidem judico,) πηλικότητα in priore definitione intelligi de Quantitate una (seu uno Quotiente, qui nempe ex unius rationis antecedente per suam consequentem diviso oritur; unde illa ratio denominetur:) in altera vero πηλικότητας dici de Quantitatibus (seu Quotientibus) pluribus (plurium rationum expositarum) ex quibus invicem multiplicatis oritur nova Quantitas (seu Quotiens) unde denominetur ratio ex rationibus expositis composita.

At inquit, *pag.* 91. *lin.* 4. *Insulsa illa esset rationum compositio &c.* quod πηλικότητας *quantitates, velit esse* ποσότητας *quotitates; atqui* πηλικότητας, *quantitates rationum inter se multiplicandas dicit Euclides; non* ποσότητας, *numeros hujusmodi, quibus rationum effabilium antecedentes, ad unitatem, tanquam communem consequentem, relatæ explicentur: quod hoc modo rationes numero ineffabiles componi nequeant.* Et *p.* 89. *l.* 12, *Diserte,* inquit, *uterque* (Eutocius & Theo) *per rationis* πηλικότητα *quantitatem, intelligi dicit* ποσότητα *quotitatem, seu, ut ipsi loquuntur, numerum a quo ratio denominatur.*

De rationibus, numero ineffabilibus componendis; modo dictum est. Per *quantitates* autem Eutocium & Theonem dicere, intelligendas esse *quotitates*; neutiquam concedendum est. Qui enim *quotuplum* dicit, non dicit *Quot*, sed *Quantum*. Nec, quia, verbi gratia, Ratio *Dupla*, à binario denominationem sumit, ideo, qui *Duplum* dicit, *multitudinem* dicit, sed potius *magnitudinem*, seu πηλικότητα. Qui enim lineam bipedalem pedalis duplam dicit, non illam duas esse dicit, sed numero unicam, magnitudine vero tantam quanta essent pedales duæ. Nempe *Duplum*, non *Duo* dicit, sed *tantundem atque duo*. Et quidem ipse Meibomius ni fallor, *p.* 83. *l.* 2. δίπηχυ, utut à numero denominatos, pro magnitudine habet, & similiter alibi.

At inquit, *p.* 96. *l.* 9. *hac multiplicatione quantitatum, tantum unam quantitatem nanciscamur*; (recte quidem; nempe quantitatem rationis compositæ, quæ quæritur:) *adeoque non rationem, quod erat propositum.* Imo, inquam & Rationem; nempe, cujus hæc est quantitas: sicut & *magnitudinem* exhiberi dicimus, quando exhibetur, *Quanta* sit illa magnitudo. *Hinc tamen sententiam insigni quadam interpretatione se juvare posse dicit* (quasi quis antea hoc nescivérit;) *nempe, ut dicamus consequentem rationis terminum ubique esse unitatem*; (si nempe rationis denominator habeatur pro termino antecedente.) At quis quæso nescit, tantundem esse rationem *duplam* dicere, atque rationem 2 ad 1? &, *triplam*, atque 3 ad 1? At, ait *p.* 97. *l.* 13. Cum Eutocius, *de consequente rationis termino, seu unitate, mentionem non injecerit; ita denominatores suos considerat, acsi uno illo antecedente termino, rationis quantitas essentialis exprimatur; quod plane est impossibile.* Imo vero, ut qui *duo* dicit, *duas unitates* dicere satis intelligitur; ita & qui *duplum* dicit (sive, *rationem a* 2 *denominatam,*) dicere *simpli duplum* satis intelligitur; etsi nec illic *unitatis*, nec hic, *simpli*, mentionem faciat.

Non itaque est, quantum ego quidem adhuc video, ex hactenus dictis quidquam, cur (quod vult Meibomius, p. 93. l. 5.) *Explosa sit Eutocii, & reliquorum sententia, de quantitate rationis numero* (aut saltem, qui numeri instar est, divisionis Quotiente) *exhibenda.* Interea tamen, dum hanc quantitatis rationum æstimationem, ex divisionis Quotiente faciendam, repudiat; nullam nobis aliam illius loco tradit, qua constet *quanta* quævis ratio dicenda sit. Si itaque non hoc, dicat velim, quo alio criterio erit æstimanda?

Hæc autem, ait, *omnia, quæ de rationum compositione, & verbis quibus illa tradita est, narrat, nunquam se moturum fuisse, nisi falsissimum dogma, & quod maximam errandi ansam aliis præbuit, inde fuisset fabricatum.* p. 99. l. 13. Videamus, quæso, quid sit. *Hac enim,* inquit, *denominatorum inter se multiplicatione fultus, Theo Alexandrinus, geometra alioqui eximius, quod ex Commentariis in Ptolemæi Magnam Constructionem videre est, adseruit,* (horrendum dictu!) *triple*

plæ duplam esse sextuplam, seu (quod ipsius verba magis sonant) *tripli duplum esse sextuplum*. Atque (quod certe videtur dolendum) *hunc secuti recentiores; volumina sua his paralogismis impleverunt*: Idque adeo ut (si Meibomio credamus) *hac narratione perculsus Euclides, quid dicat, non habeat*, &c. Et quidem (p. 100. l. 12.) eousque *hunc errorem ampliavit Gregorius a Sancto Vincentio*, ut (numerante Meibomio) *in solo octavo libro, centum septendecim falsæ propositiones contineantur*.

Gravis equidem hæc, inquam, est accusatio; & non paucos tangit. At, interim, quidni sic, uti loquutus est Theo, loqui liceat? Si autem sic loqui liceat, tota hæc vel sua sponte ruit accusatio. Nempe sic locuti sunt, vel Meibomio fatente, tum Veteres, tum Recentiores, si non omnes, plerique saltem; certe nemo omnium hactenus eam loquendi formam repudiavit, utut forsan aliquando ipsi etiam aliter locuti fuerint. Nec enim ita solus loquitur *Theo Alexandrinus*; sed & *hunc secuti sunt Cardanus, Rodulphus Volumnius, Clavius, &c.* p. 167. l. 10. *Claviumque secuta est* (non modo *Gregorius a Sancto Vincentio*, modo dictus, sed) *tota Mathematicorum cohors ad nostra usque tempora*. lin. 14. Similiter, p. 161. l. 8, *Theo & tota Mathematicorum posteritas*. Item p. 165. l. 17. *Hoc Theo vult & Eutocius, omniumque juniorum Mathematicorum filii*. Sed & ante hos, *Nichomachus Gerasenus, & Heronas*, ut liquet p. 17. l. 3. & Meibomius fatetur p. 165, l. ult. & p. 166. l. 3. Sed & *Ptolemæus*, ut liquet p. 190. l. 8. & fatetur Meibomius p. 192. l. 1. Et *Porphyrius*, ut liquet p. 191. l. 21, 29. Cum autem tot produxerit Meibomius, qui ita sint loquuti, tum Veteres tum Recentiores: ne unum quidem (quod notandum est) produxit vel ex Veteribus vel ex Recentioribus, qui hanc loquendi formam vel repudiaverit, vel etiam culpaverit. Adeoque, si sit error, saltem communis error est; & (si Juristis credimus) *communis error facit jus*; præsertim in vocabulorum significationibus, & loquendi formulis; quibus non alia præscribi solet norma, quam mos loquendi.

Quicunque autem sint, qui ita fuerint locuti; omnino tamen falsum esse prædicat Meibomius; Tripli duplum esse sextuplum; sive ut loquitur Theon p. 25. l. 28. *ἐὰν τὸ τριπλάσιον τινὸς διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον, si triplum alicujus duplaverimus, fiet ipsius sextuplum*; Et quæ sunt hujusmodi. *Verum*, inquit, *est, ternarium, rationis triplæ antecedentem* (dixisset potius, denominatorem,) *duplicatum, fieri senarium; sed falsum, illud quod triplum alicujus est, duplicatum, fieri sextuplum*.

At ego inquam, nihil video, cur illud dicatur falsum: imo omnino judico verissimum. Nec ita tantum loquutos esse per omnia, quantum liquet, secula Mathematicos; sed & vere loquutos. Exponantur, si libet, tres quantitates inæquales, A, C, F: Sitque C triplum τῦ A; & F duplum τῦ C: Annon F, quod est duplum τῦ C, hoc est, (ex hypothesi) duplum tripli τῦ A, est ipsius A sextuplum? Nemo certe sanus negabit. Vel sic, $C = 3A$, & $F = 2C = 2 \times 3A = 6A$. Vel, nisi hoc per se jam satis sit perspicuum, assumamus, ex Euclide, Axioma sextum, *Ejusdem duplicia sunt inter se æqualia*. Adeoque & (per Axioma primum) *Æqualium duplicia sunt inter se æqualia*. Unde sic argumentamur. Τὸ C æquatur triplo A: ex hypothesi: Ergo, per Axioma citatum, Duplum τῦ C, æquatur duplo τῦ tripli A. At Duplum τῦ C, (vel fatente, credo, Meibomio,) est Sextuplum τῦ A: ergo &, Duplum tripli A, est sextuplum τῦ A. Si autem nec dum sit satis perspicuum; id ipsum sic quarto aggrediamur. *Duplum, communi sententia, omnes homines judicant, quod bis habet simplum; triplum, quod tria simpla æquat; centuplum, quod centum*; (&, ni fallor, sextuplum, quod sex:) asserente Meibomio p. 170. l. 13. Ergo cum C sit, ex hypothesi, triplum A; erit C æquale τῷ A ter posito; hoc est, $C = 3A = A + A + A$. Item, cum F sit, ex hypothesi, duplum τῦ C, erit F æquale τῷ C bis posito, adeoque & 3 A bis posito, hoc est, ipsis $A + A + A$ bis positis, hoc est, $A + A + A$ plus $A + A + A$, hoc est $A + A + A + A + A + A$, hoc est, τῷ A sexies posito, hoc est, sextuplo τῦ A. Quod erat demonstrandum. Verum itaque est quod affirmat Theon, *ἐὰν τριπλάσιον τινὸς διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον, si triplum alicujus duplaverimus, fiet ipsius sextuplum*. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Verum quidem est, nec nos inficias imus, quod longe alio sensu dicatur, *rationis triplæ ratio duplicata* (*διπλάσιον*) *est noncupla*; quia nempe $\frac{3}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{9}{1}$: ob continuam multiplicationem. At interim non minus verum est, & *tripli duplum esse sextu-*

sextuplum; quia nempe $\frac{3}{1} \times 2 = \frac{6}{1}$: quod affirmat Theo, & cum illo, excepto Meibomio, alii omnes.

Atque eadem ratione, tripli semissem, sive semissis triplum, dicimus sesquialterum, (quod affirmat Theo p. 28. l. 18.) quia $\frac{3}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. Sic semissis, sive subdupli, duplum, dicimus integrum, quia $\frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{2} = 1$. quanquam verum etiam sit, rationis subduplæ rationem (non duplam διπλάσιον, sed) duplicatam, διπλασίονα, esse subquadruplam, quia $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.

Quæ omnia cum ita clara sint ut nihil magis, non est cur aut *explodat* ea Meibomius, aut, si explodat, vel maxime nos illud moveat. Et quidem, si (quod ait Meibomius p. 99. l. 26.) *Elementa quoque Euclidis, ad quæ fuse hæc tradidit Clavius, hanc explicationem ferre sint coacta*: non est tamen, cur id, vel nos, vel ipsum Euclidem, male habeat; quippe cui Euclides nuspiam refragatur.

Quod autem Archimedes (ut p. 101. l. 5.) *rationem* $\frac{27}{8}$ *dixerit* ἡμιόλιον *sesquialteram* [intellige, *triplicatæ subduplicatam*] *rationis* $\frac{18}{8}$ *seu* $\frac{9}{4}$, *& rationem* $\frac{9}{4}$ *esse* διπλασίονα *duplam* [seu potius *duplicatam*, sic enim rectius vertenda esset ea vox] *rationis* $\frac{9}{6}$ *seu* $\frac{3}{2}$: nos nihil movet, quippe & nos idem dicimus. Est siquidem $\frac{9}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$, (adeoque $\frac{3}{2} = \sqrt{\frac{9}{4}}$;) & $\frac{27}{8} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \sqrt{: \frac{9}{4} \times \frac{9}{4} \times \frac{9}{4}}$. Hoc est, quantitas $\frac{9}{4}$ est quadratum, (sive potestas secunda, sive ratio duplicata,) quantitatis $\frac{3}{2}$: Et quantitas $\frac{27}{8}$, est Cubus (sive potestas tertia, sive ratio triplicata,) quantitatis $\frac{3}{2}$, quæ est radix quadratica (sive potestas subsecunda, sive ratio subduplicata,) quantitatis $\frac{9}{4}$. Quod autem *nec Theo hoc intellexerit, nec ex posterioribus Mathematicis, ad nostra usque tempora, ullus*; miror equidem, qua fronte Meibomius affirmare sustinet. Nam, quis non?

Tota controversiæ cardo in hoc versatur, quod Meibomius vel nesciat, vel nolit, distinguere, inter rationis *duplationem, triplationem, quadruplationem, &c.* hoc est, multiplicationem in 2, 3, 4, &c. unde oritur λόγος διπλάσιος, τριπλάσιος τετραπλάσιος, &c. & rationis *duplicationem, triplicationem, quadruplicationem, &c.* unde oritur λόγος διπλασίων, τριπλασίων, τετραπλασίων, &c. quæ fit continuo ductu quantitatis in eundem multiplicatorem bis, ter, quater, &c. Quæ quidem inter se plane diversa esse, etiamsi Meibomius millies neget, non tamen eapropter est minus verum. Quippe aliud omnino est quantitatem A, bis multiplicare in numerum 3, & facta addere; unde proveniunt duo tripla, hoc est, duplum tripli, nempe $3A + 3A$ vel $3A \times 2$, nempe $6A$: aliud vero, quantitatem A in 3, bis continue multiplicare, hoc est, in 3×3, (non, ut prius, in $3 + 3$,) unde oritur tripli triplum, sive $A \times 3 \times 3 = A \times 9$, vel $9A$.

Dicet fortasse, eodem sensu, in Archim. 8. *l.* 2. de Sph. & Cylind. atque Eutocii in eum commentariis; de eadem dici λόγον διπλάσιον, & λόγον διπλασίονα. Fateor equidem id fieri. Sed, librariorum id incuriâ fieri non dubito (ut superius dictum est,) qui cum Matheseos fortasse minus fuerint gnari, neque λόγου διπλασίου & διπλάσιος discrimen satis accurate intellexerint, errorem illum, vel etiam eo majores, facile admiserint. Sed etsi demus, eadem voce (sive διπλάσιος ea sit, sive διπλασίων,) utrumque innui (quod, de voce ἡμιόλιος, fatendum videtur; ob vocum penuriam, admissum esse;) Non tamen inde sequitur, res esse confundendas; sed eo accuratius prospiciendum, utro sensu vox ambigua usurpetur; ne secus error obrepat. Nam & vocabula Geometrica, non semper eodem sensu usurpantur. Quippe nemo dubitat, quin alio sensu occurrat vox *μέρος 9 ax* 1. alio vero, 1 *d* 5. nempe illic, partem quamcunque innuit; hic, nonnisi partem aliquotam. Item περιέχειν, 10 *ax* 1, & 1 *d* 2. Illic, duabus rectis contineri spatium negatur; hic, duabus rectis contineri dicitur rectangulum. Et similiter alibi.

Sed videamus quæ sint hic Meibomii nova tradita.

Posito quod Septimius & Octavius eadem celeritate incedant; *Septimii*, inquit, *celeritas ad celeritatem Octavii est in ratione nulla*, (p. 102. l. penult.) Imo vero, inquam, in ratione Simpla, sive Æqualitatis, nempe, ut 1 ad 1, ut fatetur ipse *p.* 103. *l.* 2. At ille, inquit, *æqualem rationem, nihili seu nullam vocat*. (p. 103. l. 7.) At, inquam, quo Magistro? qua vel ratione vel authoritate fretus? quæ illum vel Grammatica, vel Mathematica, sic loqui docuit? Si Mathesin spectemus: Est quidem Æqualium inter se nulla Inæqualitas, nullus Excessus, nullus Defectus; at, nullam esse Rationem, nemo prudens dixerit Mathematicus. Si Grammaticam spectemus: quod bis tantundem atque alterum continet, duplum dicitur: quod ter, triplum; quod quater, quadruplum; &c. adeoque, quod semel, simplum; & non nisi quod nullies continet (adeoque nihil est) in nulla ratione

tione dici potest constitutum. Jam vero, quod æquale est, continet saltem semel tantundem; adeoque Simplum est; hoc est, in ratione Simpla constitutum: non, nullecuplum, sive in nulla ratione. Nulla itaque ratione asserit, æqualium rationem nullam esse. Sed videamus utcunque quid obtendat.

Omnes (inquit p. 113. l. 9.) *nihili rationes* (intelligit, rationes simplas sive æquales) *uti sunt* $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, *sunt inter se æquales*: (omnino. Addo, item omnes duplæ, uti $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$; Vel etiam omnes triplæ, uti, $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{9}{3}$.) *Quemadmodum in Logistica notæ nullæ*, 0, 0, 0, *inter se, tanquam nihili res, æquales existunt.* (Addo; vel etiam omnes notæ unitatis, 1, 1, 1; vel etiam binarii, 2, 2, 2, &c.) At, inquam, nullo modo hinc sequitur, Rationes Simplas esse rationes nihili, magis quam, Rationes duplas, triplas, aliasve, rationes nihili esse. Sed procedamus. Quid porro?

Porro, inquit p. 104. l. 20. *ratio dupla* $\frac{2}{1}$, *a ratione nihili* (simplam, intelligit) $\frac{1}{1}$, *tanto abest, quanto ab eadem ratione nihili in alteram partem abest ratio subdupla* $\frac{1}{2}$. Recte quidem. Quippe ea duplo major est, hæc duplo minor, quam ratio simpla. *Itaque*, inquit, *ratio* $\frac{1}{2}$ *æqualis est rationi* $\frac{2}{1}$. Nullo modo. Non enim quæ ab eodem æqualiter in oppositas partes differunt sunt ideo protinus æqualia. Non utique, inquam, sequitur; quod, si numerus octonarius, sit, quam quaternarius, duplo major; & binarius, eodem, duplo minor; propterea binarius æquabitur octonario. Et quidem, cur hoc minime admittendum sit, ab eodem ipso mox audiemus argumenta. At, inquit, *ideo autem ratio* $\frac{1}{2}$, *æqualis est rationi* $\frac{2}{1}$, *quod inter illius terminos*, 1 *&* 2, *tantum intervallum sit, quantum inter hujus terminos*, 2 *&* 1. Verum, inquam, neque hoc sequitur. Non enim ex terminorum inverse sumptorum æquali intervallo, sed ab eorum directe sumptorum æquali Quotiente, colligitur æqualis Ratio. At vero, si 1 per 2 dividamus, & 2 iidem per 1, eundem utrobique quotientem provenire, nos negamus; nec ipse, credo, affirmabit. Sed pergat.

Intervallum autem, inquit p. 105. l. 2. *seu distantia inter duas has rationes* $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, *est ratio bis dupla, seu* $\frac{4}{1}$. Egregie quidem, atque μαθηματικωτάτως: Nempe, duorum invicem æqualium; alterum alterius est bis duplum. Siquidem hæc cum præcedentibus cohærent optime. Sed videamus, qui probet.

Quoniam enim, inquit, *ratio* $\frac{1}{1}$, *superat rationem* $\frac{1}{2}$, *ratione* $\frac{2}{1}$; *sed rationem* $\frac{1}{1}$, *superat ratio* $\frac{2}{1}$, *ratione* $\frac{2}{1}$; *Ergo ratio dupla* $\frac{2}{1}$, *superat rationem subduplam* $\frac{1}{2}$, *ratione bis dupla, id est, quadrupla.* Omnino recte. Verum hinc ego sic disputo.

Quorum alterum alterius quadruplum est, ea non sunt inter se æqualia: sed, rationum $\frac{2}{1}$, & $\frac{1}{2}$, altera alterius quadrupla est: Æquales itaque non sunt. Vel, si illa loquendi formula displiceat, sic accipiat; Quorum hoc illud ratione quadrupla superat, ea non sunt inter se æqualia: Sed ratio $\frac{2}{1}$, rationem $\frac{1}{2}$, ratione quadrupla superat. Æquales itaque non sunt. Sed pergit.

Quod etiam ex additione (seu compositione) *planum fit. Si enim, rationi subduplæ, addatur ratio quadrupla, inde fit, seu componitur ratio dupla.* Atque hoc etiam recte. quippe $\frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$. Argumentamur itaque ut prius; Rationes $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{1}$, non esse æquales; cum hæc illam superet ratione quadrupla.

Atque his habet similia, de rationibus sesquialtera & subsesquialtera, p. 106. l. 19. &c. Nempe *Ratio sesquialtera* $\frac{6}{4}$, *& subsesquialtera* $\frac{4}{6}$, *quamvis non eædem sint, sunt inter se æquales*: At interim, *inter se distant ratione bis-sesquialtera, seu dupla superquarta.* Quæ quam bene inter se cohæreant, ipse viderit.

Multa habet his intermista exempla; à motu in contrarias partes desumpta: quæ nec præsenti suo negotio admodum favent, & sunt aliis nominibus vitiosa: sed quæ non tanti sunt ut ea curiosius expendam. Hoc autem pede fere claudicant omnia: Nempe, quod, cum duplum accessum sic designaverit $\frac{2}{1}$, duplum recessum designandum putet $\frac{1}{2}$; (ut p. 104. l. 19. & alibi passim:) quasi quidem, inversio rationis, indicaret motum contrarium. At, inquam, contrarietas motus, indicanda erat, non inversione rationis, (nam si $\frac{2}{1}$ accessum indicet, etiam $\frac{1}{2}$ indicabit item accessum, utut minorem:) sed, mutatione signorum $+$ $-$: Puta si $+\frac{2}{1}$ duplum accessum indicet, duplum recessum indicabit $-\frac{2}{1}$, non autem $+\frac{1}{2}$. Hoc autem cum ille non satis intellexerit, sibi fraudi fuit. Quamvis enim verum omnino sit, quod exemplo suo ibidem it probatum; nempe, recessum partium duarum, non minus duplum esse recessus partis unius, quam est duarum partium accessus, duplus accessus partis unius; adeoque eandem sive æqualem rationem:

Cum

Cum tamen hinc infert; propterea, rationem $\frac{1}{2}$, æqualem esse rationi $\frac{2}{1}$; omnino hallucinatur. Inferendum enim erat; $-\frac{2}{1}$ ad $-\frac{1}{1}$, eandem vel æqualem esse rationem, atque $+\frac{2}{1}$ ad $+\frac{1}{1}$. Quod quidem verum est; sed, à suis tensis satis remotum.

Eadem fere semper oberrat chorda, in exemplis sive instantiis suis passim allatis: quod cum ei fraudi fuerit non semel, nobis saltem semel indicasse sufficiat; nec opus sit sæpius repetere, cum quilibet, paulo attentior, facile deprehendat.

Potuisset quidem Meibomius, hujus erroris satis moneri, cum viderit Lucium & Titium, tum, ex hypothesi, eadem celeritate moveri; tum, juxta suum ipsius calculum, alterum milliaria 81 eodem confecisse tempore quo alter non nisi 16 confecerit. Unde dum se extricare conatur, p. 107. l. 24. omnino nihil agit.

Quæ, de Divitiis & Paupertate comparandis, habet, p. 110. item de Mistorum viribus, p. 111. &c. neque admodum perspicue tradita sunt, & parum accurate: Sed quæ tuto omitti possunt, cum nihil inde magni colligere possit quo sententiam suam stabiliat; nec ad singulas minutias, lectorem detinendum putem. Quod vero, ut ait p. 183. l. 25. *mirari soleat, antiquorum nullum ad utilissimam hanc, de mistorum viribus in data ratione augendis, aut minuendis, contemplationem accessisse, ut quousque in his progredi possimus, determinaret*: Si vel Pharmacopœos consuluisset, vel Aurifabros, mirari forsan desiisset: quippe in componendis medicamentis, illi; metallis, hi; non suis illos artibus carere deprehendat, quibus de mistorum viribus augendis, minuendis, æstimandis judicent. Et quidem eo spectat totum illud, de *Regula* quæ dicitur *Alligationis*, apud Arithmeticos, negotium.

Quæ de Rationum Compositione &c. habentur p. 98. &c. iterumque p. 114. &c. satis tum prolixe tum perplexe (*qua quidem*, inquit, *rationes componendi methodo, rerum natura nullam breviorem admittit, nullam concinniorem* p. 115. l. 23.) cui illa bono inserviant, ego plane non video. Cum enim per *5 d 6*, ratio ex rationibus $\frac{a}{b}$, $\frac{\alpha}{\beta}$, composita, sit $\frac{a}{b}\times\frac{\alpha}{\beta}$. quid longa narratione opus sit, ut intelligamus rationi $\frac{a}{b}$, rationem $\frac{\alpha}{\beta}$ componendam, ducendo $\frac{a}{b}$ in $\frac{\alpha}{\beta}$; adeoque divisione, adimendam. Ut nempe illic prodeat $\frac{a\alpha}{b\beta}$, quia $\frac{a}{b}\times\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a\alpha}{b\beta}$; hic vero, $\frac{a\beta}{b\alpha}$, quia $\frac{\alpha}{\beta})\frac{a}{b}(\frac{a\beta}{b\alpha}$. Cujus item effectionem Geometricam nemo nescit. Annon autem hæc multo brevior & concinna magis fuerit operatio, quam quâ ille nullam aut breviorem aut concinniorem in rerum natura admitti posse judicat; penes lectores sit judicium.

Cum vero, tum p. 94. l. 4. tum p. 177. l. 25. non nisi minorem rationem majori auferendam putet: non satis videtur rationum diremptionem intelligere; quæ non tam subductionis, quam divisionis, opus est: posse autem fractionem minorem per majorem dividi, nemo nescit. Cum enim, (ut loquitur p. 116. l. 7.) *rationes* $\frac{2}{1}$ *&* $\frac{3}{4}$ *additæ, faciant rationem* $\frac{6}{4}$; quidni pariter ex composita $\frac{6}{4}$, dempta $\frac{2}{1}$ superesse dicamus $\frac{3}{4}$; atque ex eadem $\frac{6}{4}$, dempta $\frac{3}{4}$, superesse $\frac{2}{1}$? (utut $\frac{2}{1}$, hoc est, $\frac{8}{4}$, majorem esse quam $\frac{6}{4}$, ne quidem Meibomius negaverit) quippe, duarum componentium, utravis dempta, superest reliqua.

Sed videamus quæ sequuntur. Quippe, cum hactenus, nonnisi *quasi per nebulam veritatis aliquod lumen conspeximus*; jam deinceps, *clarissimum & nulla obscuritatis nebula interceptum veritatis solem visuros*, pollicetur, p. 118. l. 7. &c.

Rationis, inquit, (p. 118. l. 13.) *natura & essentia consistit in duabus ejusdem generis rebus, secundum certam magnitudinem* (addo, divisione, non subductione, æstimandam) *inter se comparatis*; seu potius, in earum comparatione. *Quæ distantia cum infinitæ sit aut parvitatis, aut magnitudinis*; *hinc*, inquit, *colligimus, quavis ratione infinite minorem, aut majorem, saltem potentia, dari posse.* Et recte quidem hoc colligitur. *Quod fieri posse, multi*, inquit, (p. 119. l. 6.) *qui hæc penitus perspecta non habent, negarint.* At, quæso, quinam illi? quippe ego illud nulli (nisi qui plane sit ἀμύητος) dubium esse posse putaveram.

Porro, inquit, (p. 118. l. 23.) *rationem quæ in æqualibus magnitudinibus spectatur, rationem quidem esse statuimus*, (& Recte quidem:) *sed nullius quantitatis*; (at hoc perperam:) *quod nihili distantia magnitudines illius, antecedens & consequens,*

consequens, inter se distant. Imo, inquam, *distantia Unitatis.* Uti enim in rationibus $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{4}$, aliisque duplis, antecedentium & consequentium distantia (divisione quærenda) binario æstimatur, (quantacunque interim sit earum differentia, subductione quærenda, quæ quidem non omnino attenditur,) unde & denominationem obtinent: ita in rationibus $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, aliisque simplis, terminorum distantia, divisione patefacta, unitate mensuratur. Quippe, ut illic quotiens est 2, sic hic, 1. (utut differentia, subductione quæsita, cujus hic nulla habetur ratio, sit 0.)

Quæcunque autem alia, magna, parva, (quidni item & ipsa,) *unitatis loco accipi potest,* p. 119. l. 29. Hoc est, (quamvis ille videatur hoc nescire) *Radix* dici poterit, vel *Potestas prima,* aut etiam *Ratio exposita*; quæ aliquoties continuata, hoc est, in se ducta, ejusdem *Quadratum, Cubum, Biquadratum,* &c. exhibebit: vel *Potestatem secundam, tertiam, quartam, &c.* vel etiam (nam & hoc tantundem valet) *Rationem duplicatam, triplicatam, quadruplicatam, &c.* διπλασίονα, τριπλασίονα, τετραπλασίονα, &c. Nempe hoc suadent quæ post occurrunt, *p.* 120. *l.* 4. *Cæterum cum omnis ratio unitatis loco considerari possit* (nempe ut potestas prima, seu Radix, puta $\frac{a}{b}$) *ex ea bis composita dupla efficitur primæ seu simplæ*, (duplicatam, intelligit, aut potestatem secundam, seu quadratum, $\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$) *ex ter composita, simplæ tripla,* (seu potius triplicata τριπλασίονα, potestas tertia, cubus, nempe $\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3}$:) *ex vicies composita, simplæ vigecupla,* (hoc est potestas vicesima $\frac{a^{20}}{b^{20}}$.) *Ter autem composita, seu tripla,* (triplicatam intelligit, $\frac{a^3}{b^3}$,) *sesquialtera est bis compositæ, seu duplæ,* (vel potius duplicatæ $\frac{a^2}{b^2}$: Nam $\frac{a^3}{b^3}=\frac{a^2}{b^2}\times\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$.) *quater composita, supertertia est triplæ*; (nempe $\frac{a^4}{b^4}=\frac{a^3}{b^3}\times\sqrt{^3}\,\frac{a^3}{b^3}$.)

Manifestum itaque est per rationis expositæ duplam, triplam &c. eum hic intelligere, duplicatam, triplicatam &c. διπλασίονα, τριπλασίονα, &c. quas definit Euclides 10 *d* 5. hoc est, expositæ rationis potestatem secundam, tertiam, &c. seu ab, expositæ rationis, denominatoris quadrato, cubo, &c. denominatam.

Atque harum respectu verum est $\frac{1}{1}$ vel etiam 1, quæcunque fuerit exposita ratio, loco nihili habendam, hoc est, illius potestatem nullam esse. (Saltem nisi ipsa ratio exposita, sit etiam $\frac{1}{1}$, quo casu ipsius etiam quotacunque potestas est $\frac{1}{1}$.) Quippe notum est, 1 . ℞ . ʒ . ℭ . ʒʒ . &c ∺, sive $1 . a . a^2 . a^3 . a^4$. &c. ∺, hoc est, *unitatem, radicem, quadratum, cubum, biquadratum,* &c. esse continue proportionalia: & quotacunque expositæ radicis potestas sit eorum quodlibet, toties supponitur 1 in radicem illam continue multiplicari, puta $1\times a$ est prima potestas radicis a, & $1\times a\times a$ ejusdem potestas secunda; $1\times a\times a\times a$, tertia &c. adeoque 1 simpliciter posita, ejusdem radicis a potestas nulla, quippe in quam nullies ducitur: At $\frac{1}{a}$ potestas prima privativa, seu inversa, denominanda puta ab -1: Item $\sqrt{a}$, potestas dimidiata; quippe media proportionalis inter nullam & primam; & $\sqrt{a^3}$ vel $a\sqrt{a}$, potestas dimidiata tertiæ, seu quæ dimidiata potestate superat primam; puta a $\frac{3}{2}$ vel $1\frac{1}{2}$ denominanda. Et sic ubivis. Quod autem de radice a dictum est, puta, dum ponitur $a=$ ℞; perinde intelligendum erit de radice quavis alia, puta si ponatur $\frac{a}{b}=$ ℞: quippe rem hoc ne hilum variabit.

Sed & hinc etiam manifeste sequitur, (quod & norunt omnes,) quod, quoties radix ponitur major quam 1; singulæ potestates continue augentur, (puta si ℞ $=2$, erit ʒ $=4$, ℭ $=8$, &c.) ubi enim in continua multiplicatione, multiplicator (quæ radix est) est unitate major, multiplicandus plusquam semel ponitur, ut habeatur productum: Quoties autem radix, (hoc est, continuus multiplicator) est minor quam 1; potestates continue decrescunt (puta si ℞ $=\frac{1}{2}$, erit ʒ $=\frac{1}{4}$, ℭ $=\frac{1}{8}$, &c.) quia tum multiplicandus ponitur minus quam semel; nempe ipsius aliquanta pars; & propterea sequens potestas præcedente semper minor

minor erit: Si autem radix ſit 1; aut etiam $\frac{1}{1}$; poteſtates omnes nec auctæ erunt nec diminutæ; ſed & ipſæ, 1: (nam ſi $R = 1$, erit $q = 1 \times 1 = 1$, & $c = 1 \times 1 \times 1 = 1$. &c.) quia cum multiplicator eſt 1, multiplicandus præciſe ſemel ponitur.

Quod autem hic de poteſtatibus univerſim ex quacunque radice dictum eſt; id & ſpeciatim in rationibus valet: puta, ſi expoſita ratio, ſeu radix, ſit major quam $\frac{1}{1}$; ratio duplicata, triplicata, &c. hoc eſt, poteſtas ſecunda, tertia, &c. continue creſcunt: ſin minor; decreſcunt: ſi denique æqualis; æquales. Quod quidem ſi advertiſſet Meibomius, non fuiſſet miratus, (p. 171. l. 22, & p. 173. l. 19. & alibi,) rationem minorem, majoris duplicatam, aut triplicatam, &c. dici poſſe. Hujus quidem rei ignorationem, errorum ſuorum prope omnium originem & fontem judicamus.

Cum autem ait, pag. 121 l. *penult. In diagrammate*, AB, *ut ita dicam, nulla eſt ipſius* CB: *at* CB *ſeu* DE *dupla eſt ipſius* FG. Mirum eſt quam ſe, ambigua, vocis *dupla*, ſignificatione inopinato confundit.

A ———————— B ———————— C

D ———————— E …… F ——— G

Verum quidem eſt, uti modo diximus, rationem ſimplam $\frac{1}{1}$, rationis duplæ $\frac{2}{1}$, (vel alterius cujuſvis expoſitæ,) *poteſtatem nullam* eſſe, (ſive, poteſtatem à nihilo ſeu 0 denominandam,) quo ſolo ſenſu æqualitatis ratio, reſpectu alterius cujuſvis, *nihili ratio* dici poteſt, hoc eſt, iſtius poteſtas nulla; nempe, nec rationis expoſitæ ratio *duplicata*, *triplicata*, (ſive, ut ille loquitur, *dupla*, *tripla*,) aliave ulla poteſtas. At vero hic nil tale agitur. Non enim, dum dicit DE *duplam eſſe ipſius* FG, vult illam hujus *rationem duplicatam* eſſe; (quippe, nec DE, nec FG, ratio eſt, ſed linea,) ſed lineam DE, bis tantundem continere atque FG. Adeoque quo ſenſu *linea* DE *eſt dupla lineæ* FG, ut quæ bis tantundem continet; eodem & *linea* AB, *eſt* (non *nulla*, ſed) *ſimpla lineæ* BC, ut quæ tantundem (non *nullies*, ſed) ſemel continet.

Schema pag. 122. ejuſque in ſeq. explicationem, ego ut πάρεργον omitto. Quippe ad præſens negotium vix quicquam ſpectat.

At, *Ex his*, inquit, p. 125. l. 25. *principiis omnia ſua dogmata, tam quæ veterum, illuſtrium Geometrarum, principia convellunt, & falſitatis convincunt; quam quæ recentiorum hallucinationes oſtendunt, deducuntur.* Nempe, *rationis Geometricæ naturam & eſſentiam in magnitudinum, quæ rationem conſtituunt, inter ſe diſtantia* (*quod in Arithmetica ratione omnes admittunt*) *generaliter eſſe conſtitutam: uti abſolutorum numerorum eſſentia in diſtantia a nihilo ſpectatur.* (Adeoque p. 121. l. 10. *Eſſentia ſua ſubdupla ratio æqualis eſt rationi duplæ, quia diſtantia magnitudinis utriuſque rationis eſt æqualis: at vero cum in diverſas partes hæ rationes tendant; dupla adſcendendo, deſcendendo ſubdupla; ratio dupla ſuperat rationem ſubduplam ratione quadrupla.*) *Ex parte autem* (inquit p. 126. l. 5.) *hoc principium Euclides admiſit, nempe in rationibus exceſſivis: ſed generaliter in omnibus rationibus, etiam defectivis* (ſic appellat rationes, ut loquuntur, minoris inæqualitatis,) *hujus dogmatis veritatem ipſe* (inquit) *primus oſtendit. Uti enim* (inquit pag. 141. l. 22.) *ſi a* 12 *&* 10 *auferam* 11, *reſidui ſunt* +1 & −1, *qui inter ſe æquales exiſtunt; ſed alter exceſſivus, alter defectivus; ſic ſi a rationibus* $\frac{16}{8}$ & $\frac{9}{8}$ *auferam rationem* $\frac{3}{2}$, *reſiduæ ſunt* $\frac{4}{3}$ *&* $\frac{3}{4}$ *inter ſe æquales; ſed una exceſſiva, altera defectiva. Atque hæc* (inquit) *ultima doctrinam ſuam valde confirmant.* p. 141. l. 26. & p. 142. l. 17. &c. *Verum igitur eſt*, (inquit p. 129. l. 3.) 7 ad 4 *majorem rationem habere, quam* 5 *ad* 4: *At falſum,* 4 *ad* 5 *majorem rationem habere, quam* 4 *ad* 7; aut etiam (ut p. 127. l. 4.) 16 *ad* 24, *minorem habere rationem quam* 21 *ad* 31; *Cum contra ſtatuendum ſit,* 16 *ad* 24, hoc eſt 21 *ad* $31\frac{1}{2}$, *majorem habere rationem quam habeat* 21 *ad* 31; *quoniam major eſt diſtantia inter* 21 *&* $31\frac{1}{2}$, *quam inter* 21 *&* 31. *Falſa igitur* (inquit) *eſt octava propoſitio libri quinti Elementorum Euclidis, &c.* p. 126. l. 8. Eſtque hæc argumentationis ſuæ ſumma, fideliter (quod nec ipſe, credo, diffitebitur) collecta, ſuiſque ipſius verbis expreſſa.

Nolo ego ad hæc reponere, quod ipſe Euclidem reponentem introducit. p. 129. l. 18. *Siquæ unquam ineptiæ, & olim, cum inter mortales degerem, & ex quo hac beata quiete mihi frui licuit, fando ad aures meas pervenere, inter illas certe has primo loco cenſere poſſum.* Sed, quæ ad argumentationis vires dicenda ſunt,

 repo-

reponam: quippe & multa perperam supponit, & justa deest multoties consequentia.

Dicimus itaque 1°. *Arithmeticam*, ut loquitur, *rationem*, in terminorum ab invicem distantia, sive differentia, fundatam, Subductionis ope colligendam. Sic tripondii & bipondii, aut etiam quadripondii & tripondii, differentia, est, unum pondo; lineæ tripedalis & bipedalis differentia, est, linea pedalis: numeri quinarii & ternarii, vel etiam denarii & octonarii, differentia, est binarius.

2°. Differentiam illam dicimus, non quidem Arithmeticam rationem esse, (proprie loquendo,) aut etiam ipsius rationis Essentiam; sed Fundamentum istius relationis, quæ dicitur Ratio Arithmetica; quæ tamen alia atque alia est, prout ad hunc aut illum terminum refertur. Sic numerus binarius non est relatio, nedum ratio vel Arithmetica vel Geometrica, quam habet vel quinarius ad ternarium, vel hic ad illum: sed quinarii ad ternarium ratio, est *excessus binarii*; seu binario major esse; ternarii ad quinarium ratio est, *defectus binarii*, sive binario minor esse. Quæ quidem rationes sive relationes, utut eodem fundamento absoluto nixæ, non eadem sunt relatio, nec quidem æquales; sed & satis diversæ, atque hac illa major: Sicut & Patris ad Filium, & Filii ad Patrem, eadem relatio non est, (nec quidem æqualis, sed hac illa superior) utut utriusque fundamentum sit eadem generandi actio.

3°. Omnino igitur inconsulte dictum est, & admodum inconcinne, $+1$ *&* -1, *æquales esse*: & quod nemo sobrius dixerit. Quippe ille huic æqualis non est numerus; sed integro binario major. (Est enim $+1 = -1 + 2$.) Neque enim, quod 1 & 1 tantundem sint, ideo & æquari dicendum erit $+1$ & -1; nisi insuper, tantundem esse, dicamus, *excedere* & *deficere*. Nec quidem meliori ratione dicet $0+1$ & $0-1$ tantundem esse, quia utrobique æqualiter ab 0 receditur; quam tantundem esse $4+1$ & $4-1$, quia utrobique æqualiter receditur à 4. Quodque ait, p. 141. l. 8. *majus esse, quod longius ab initio suo, hoc est, a nihilo, distat*; Verum quidem est, dummodo crescendo distent: at vero quod, decrescendo, à principio suo longius distat, id minus est. Et sicuti $4-2$, minus est quam $4-1$, quia, à communi principio 4, id longius distat decrescendo; sic & ob eandem causam, $0-2$, minus est quam $0-1$, quoniam magis, à principio suo 0, decrescendo distat. Quippe, quod magis deficit, id minus est.

4°. Dicimus pariter, *Rationis* item *Geometricæ*, fundamentum esse, terminorum ab invicem *distantiam*; non autem, ut prius, *Subductione*, sed *Divisione* æstimandam. Non enim, quia 4 & 2, atque 4 & 6, binario pariter distant, ergo & eandem utrobique distantiam, quæ nempe rationem spectet, dicet Meibomius. Quanquam enim tum $4-2=2$, tum $6-4=2$; non tamen rationem 2 ad 4, atque 4 ad 6, vel 6 ad 4, eandem esse, aut æqualem, reputat: Sed 4 ad 2, atque 8 ad 4, eandem esse rationem dicet, atque eandem ab invicem terminorum distantiam, nempe divisionalem; quia tum $\frac{4}{2}=2$, tum $\frac{8}{4}=2$. Nec quidem alio sensu verum erit, rationis duplæ & subduplæ magnitudines æqualiter invicem distare. Peto enim, Annon eadem sit ratio, quadripondii ad bipondium, atque quadripedalis lineæ ad bipedalem? Affirmabit, credo. Ergo, inquam, Distantiæ sunt utrobique æquales. Quod ipsum, credo, fatebitur; certe inficiari non debet. Verum hoc de distantia residuali (subductione quærenda) dici non potest. Quippe residuum, illic Pondus est; hic, Linea: at pondus lineæ nemo sobrius æquale dixerit, cum sint heterogenea. De distantia itaque Divisionali intelligendum erit: nempe linea quadripedalis bipedalem lineam toties præcise continet, quoties quadripondium continet bipondium. Quippe ut 2 L) 4 L (2, ita 2 P) 4 P (2. Porro, esto verbi gratia quantitas A, quadripondium: erit hujus duplum 2 A, octipondium; subduplum $\frac{1}{2}$ A, bipondium: Erit quidem distantia divisionalis, utrobique æqualis; nam tum A) 2 A (2, tum $\frac{1}{2}$ A) A (2: at in subductione secus est, quippe $2A - A = A$, at $A - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A$. Non igitur, hoc sensu, eadem esset utrobique terminorum distantia. Neque interim dicere potest, reductionem faciendam esse ad communem vel antecedentem vel consequentem, priusquam fiat hæc comparatio: nam neque ille hoc facit, cum dicit rationes $\frac{3}{4}$ & $\frac{4}{3}$, (aut etiam $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{1}$,) invicem æquales, quod termini æqualiter utrobique ab invicem distent. Nam rationes $\frac{3}{4}$ & $\frac{4}{3}$, ad communem consequentem reductæ, erunt $\frac{9}{12}$ & $\frac{16}{12}$; ad communem vero antecedentem reductæ, erunt $\frac{12}{16}$ & $\frac{12}{9}$; at neutro modo erunt æquales terminorum differentiæ, sed in altera $12-9=3$, in altera $16-12=4$.

Intelligendum

Intelligendum igitur erit, vel ad mentem suam, de distantia divisionali; ex divisionis quotiente æstimanda: quam & nos agnoscimus rationis Geometricæ fundamentum esse.

5° Negamus tamen, hanc divisionalem *distantiam*, esse ipsam rationem, sive (ut loquitur) *naturam & essentiam rationis Geometricæ*: Sicut & ante negavimus residualem differentiam esse rationem Arithmeticam. Est quippe ratio, ea quæ ex hac distantia oritur Relatio, quæ interim, prout hunc illumve terminum respicit, est alia atque alia; puta *tantuplo majus*, & *tantuplo minus*. Atque hoc didicisse potuerat ab eo quem citat p. 167. l. 2. *Theone Smyrnæo*; cujus hæc verba profert; ἀπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἕν, καὶ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς πρὸς τὰ δύο, διάστημα ἓν καὶ τὸ αὐτό, λόγος δὲ ἕτερος· τῶν μὲν δύο πρὸς τὸ ἕν, διπλάσιος· τοῦ δὲ ἑνὸς πρὸς τὰ δύο, ἥμισυς. *A binario ad unitatem, & ab unitate ad binarium unum idemque est intervallum*, (de intervallo divisionali, loquitur; qualia sunt intervalla musica;) *Ratio autem diversa: binarii ad unitatem dupla; unitatis ad binarium, dimidia.* Eodem plane modo, quo Patris à Filio, & Filii à Patre, idem est intervallum; at diversa ratio; nempe hæc illius inversa; utraque ab eodem fundamento orta.

6° Pessime itaque infertur, ob idem utrobique intervallum, sive æqualem distantiam (divisionalem,) æquales esse rationes duplam & subduplam. Quippe ratio dupla $\frac{2}{1}$, relatum dicit correlato suo *esse duplo majus*; at subdupla $\frac{1}{2}$; *duplo minus esse*; Eodem plane modo quo, binarii excessus $+2$, indicat *binario majus esse*; & binarii defectus -2, *binario minus esse*. At nemo sobrius, *duplo majus esse*, & *duplo minus esse*; vel etiam *binario majus esse*, & *binario minus esse*; pro eodem vel æquali habebit: nisi qui & *majus*, ac *minus*, tantundem esse velit. Rationem autem, *Relationem* esse, non tantum *Relationis fundamentum*, ex ipsa definitione patet, quæ nec Meibomio displicet; dicitur enim σχέσις, quod est, ipso Interprete, *Relatio*.

7° Quod itaque contendit, *rationem 4 ad 7, majorem esse quam rationem 4 ad 5*, (atque his similia:) quippe, quia major terminorum ab invicem distantia: (quo solo nomine falsas esse contendit propp. 8. & 10 e 5 Euclidis, ejusque 7 d 5. & demonstrationes tum prop. 14, 20, 21, e 5. tum Archimedis 2/1 de Sphæra & Cylindro, atque Eutocii in illam commentationes, multas item Pappi propositiones in lib. 7. Collectaneorum; aliasque à Theone & aliis traditas; ut liquet p. 126. &c. item Clavii, Gregorii, aliorumque plurimas. Et quidem, cum *totam antiquitatem ignoratæ in quibusdam Elementis Geometriæ*, tum *juniorum pravas explicationes & monstrosas hallucinationes*, se inde *demonstraturum* sperat, p. 127. l. 24.) omnino falsum est. Adeoque quæ hinc dependent omnia, (hoc est, tota doctrina sua nova,) sponte corruunt. Verum quidem est, 4 a 7 *magis deficere*, quam 4 a 5, adeoque rationem innuere *magis defectivam*: quod ipse contendit p. 143. l. 12. At vero, quod est *magis defectivum*, sive *magis exiguum*, id, nobis videtur, *minus esse*, non *majus*: adeoque & Rationem *magis deficientem*, appellabimus *minorem*; sicut tum veteres, tum (excepto Meibomio) recentiores omnes. Si autem Meibomius per *majus*, intellectum velit, *magis exiguum*; secum loquatur licet, cumque Hermotimo suo, atque Euthymio; (suumque illis prædicet acumen esse *maximum*;) siquidem reliqui hoc non intelligent.

8° Nos itaque nec *explosum* iri patimur, nec *antiquatum*, veterem loquendi morem, (quod vult Meibomius p. 93, & 110.) Nec eam, quam habet p. 134. l. 14. consequentiam admittimus, *Si ratio $\frac{7}{4}$ major est ratione $\frac{6}{4}$ seu, quod idem est, si ratio $\frac{4}{7}$ minor est ratione $\frac{4}{6}$; etiam revertendo, ratio $\frac{7}{3}$ minor est ratione $\frac{6}{2}$*. Rationem utique *majorem* dicimus, non quæ utcunque *ab æqualitate magis recedit*, sed quæ *vel æqualitatem magis superat, vel ab ea minus deficit*; quæ autem *vel minus superat, vel magis deficit*, eam nos *minorem* rationem (antiqua nomenclatura) appellamus. Siquidem rationem triplam $\frac{3}{1}$, dupla $\frac{2}{1}$, majorem dicimus; quia 3 A, plus est quam 2 A. Item rationem subduplam $\frac{1}{2}$, majorem esse, quam subtriplam $\frac{1}{3}$, (utut hæc ab æqualitate magis recedat,) quia $\frac{1}{2}$ A, plus est, quam $\frac{1}{3}$ A. Et quanquam ille multis contendat, aliter de minutiis, aliter de rationibus judicandum, pag. 131. &c. quippe, (ut ait p. 133. l. 10.) *ratio $\frac{6}{4}$, æqualis est duabus $\frac{6}{5}$ & $\frac{5}{4}$; at minutia $\frac{6}{4}$, æqualis duabus $\frac{5}{4}$ & $\frac{1}{4}$*, nos utrobique idem dicendum non dubitamus, nempe tum minutiam, tum rationem, $\frac{6}{4}=\frac{6}{5}\times\frac{5}{4}$; & non minus tum minutiam, tum rationem $\frac{6}{4}=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}$. Et quidem nil aliud sunt minutiæ, sive fractiones, quam rationum indicia. Ecquid enim est $\frac{1}{2}$ A, quam quod est ad A, ut 1 ad 2? & $\frac{2}{3}$ A, quam quod est

est ad A, ut 3 ad 2 &c. & sic ubique. Sive enim dicamus $\frac{1}{2}$ A, quantitatis A dimidium esse, sive subduplum, perinde est. Quod nec Meibomius negare debet, qui p. 166. l. 25. *rationem dimidiam*, atque *subduplam*, pro eodem habet.

9° Quod autem dimidium sive subduplum, majus sit quam triens sive subtriplum, (& de reliquis similiter,) si dubitet, sic probamus. *Omnes homines totum quavis sua parte majus esse communi notione percipiunt*, (dictante Meibomio, p. 141. l. 16.) At, subtriplum subdupli pars est: ergo, hoc illo majus est. Minorem hoc exemplo probamus. Subtriplum libræ, sunt 4 unciæ; (sicuti libra est harum triplum:) ejusdem libræ Subduplum sunt unciæ 6; (sicuti libra est harum duplum:) Sunt autem 4 unciæ, unciarum 6, pars aliqua; subtriplum itaque subdupli pars est, adeoque minus, quod erat probandum. Vel sic aliter, ad mentem suam. Ratio $\frac{1}{3}$, per ipsius doctrinam, componitur ex duabus additis $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$; adeoque sua parte $\frac{1}{2}$, major est; quod erat probandum. (Sed, ad hominem, hoc ultimum dictum esto, magis quam ad rem; non enim ego propterea existimo, quicquid ipse putaverit, rationem $\frac{2}{3}$ aut minorem esse quam $\frac{1}{2}$, aut etiam huic æqualem: utut distantia terminorum, si divisionem spectemus, sit illic minor; si subductionem, æqualis. Nam $3-2=1=2-1$; item 2)3(1$\frac{1}{2}$, ut 1)2(2. sed ad hominem valet argumentum posterius; ad rem saltem prius.) Vel sic tertio adversus eundem argumentamur. *Si æqualibus æqualia addantur, aggregata erunt æqualia.* per 2 ax. 1. At, si rationibus $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$ addantur (Meibomii sensu) æqualia, (puta utrobique ratio, $\frac{4}{1}$,) aggregata non erunt æqualia; (quippe illic $\frac{16}{3}=\frac{4}{3}\times\frac{4}{1}$, hic vero $\frac{12}{4}=\frac{3}{1}=\frac{3}{4}\times\frac{4}{1}$, ne quidem Meibomio refragante:) Non itaque æquales sunt rationes $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$, quod vult Meibomius. Item quarto. *Si æqualibus inæqualia addantur tota erunt inæqualia*; (per 4 ax. 1) & quidem *illud majus, ubi majus additur*: (quod, credo, nec Meibomius negabit.) At, si rationibus $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$ addantur inæqualia; illic $\frac{4}{1}=\frac{36}{9}$, hic $\frac{64}{9}$; aggregata erunt æqualia, nempe utrobique $\frac{16}{3}=\frac{4}{3}\times\frac{4}{1}=\frac{3}{4}\times\frac{64}{9}$. Non itaque æquales sunt rationes $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$, quod vult Meibomius. Item, si rationibus æqualibus $\frac{8}{1}$, & $\frac{8}{1}$, addantur (Meibomii sensu) rationes $\frac{4}{5}$ & $\frac{4}{7}$; aggregatum illud ubi additur $\frac{4}{5}$, (nempe $\frac{32}{5}=\frac{8}{1}\times\frac{4}{5}$,) majus erit eo ubi additur $\frac{4}{7}$, (nempe $\frac{32}{7}=\frac{8}{1}\times\frac{4}{7}$:) ratio itaque $\frac{4}{5}$ major est quam ratio $\frac{4}{7}$; non autem minor, quod vult Meibomius. Item quinto. *Si ab æqualibus æqualia adimantur, residua erunt æqualia*; per 3 ax. 1. At si à rationibus $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, auferantur æqualia, (puta utrobique ratio $\frac{1}{3}$,) residua non erunt æqualia (sed illic $\frac{4}{1}$ seu $\frac{16}{4}$; hic vero $\frac{9}{4}$; quippe $\frac{1}{3}$)$\frac{4}{3}$($\frac{4}{1}=\frac{16}{4}$, & $\frac{1}{3}$)$\frac{3}{4}$($\frac{9}{4}$, etiam Meibomii sensu.) Non igitur æquales sunt expositæ rationes $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, quod vult Meibomius. Tandem sexto. *Si ab æqualibus inæqualia auferantur, residua erunt inæqualia*; (per 5. ax 1.) & quidem *illud minus, ubi majus aufertur*; (quod nec inficiabitur, credo, Meibomius.) At si à rationibus $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$, auferantur inæqualia, illic quidem ratio $\frac{10}{9}$, hic autem ratio $\frac{5}{8}$; residua erunt æqualia; nempe utrobique ratio $\frac{6}{5}$, nam $\frac{10}{9}$)$\frac{4}{3}$($\frac{36}{30}=\frac{6}{5}$ atque etiam $\frac{5}{8}$)$\frac{3}{4}$($\frac{24}{20}=\frac{6}{5}$, ut patet. Non igitur æquales sunt rationes $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$, quod vult Meibomius. Item, si ab æqualibus rationibus $\frac{8}{1}$, $\frac{8}{1}$, auferantur (item Meibomii sensu,) rationes $\frac{4}{5}$ & $\frac{4}{7}$; residuum illic minus erit, hic majus; quippe $\frac{4}{5}$)$\frac{8}{1}$($\frac{40}{4}=\frac{10}{1}$; at $\frac{4}{7}$)$\frac{8}{1}$($\frac{56}{4}=\frac{14}{1}$; ut patet. Ergo, quæ illic aufertur ratio $\frac{4}{5}$, major est quam quæ hic aufertur $\frac{4}{7}$: Non autem minor, quod vult Meibomius. Et quidem, nisi hæc abunde sufficerent, addi possent istis alia infinita, quibus constaret, quam absurde dictum sit, rationes $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, item $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, &c. invicem æquales; aut etiam rationem $\frac{4}{7}$ majorem esse quam $\frac{4}{5}$; & quæ his similia.

10. Cum itaque quæ adversus prop. 8 e 5. Euclidis, (aliaque quæ ab hac dependent) adducit Meibomius, a p. 126. ad p. 136. inclusive; huic nitantur omnia, quod ratio $\frac{4}{7}$ major sit quam ratio $\frac{4}{5}$ (sic enim ipse ait p. 136. l. 3. *Cæterum omnis hæc ratiocinatio, qua Euclidei Theorematis falsitatem demonstramus, paucis verbis includi potest. Quoniam enim ratio $\frac{7}{4}$ major est quam ratio $\frac{5}{4}$, quod in ista 7 supra 4 majori spatio ascendat quam 5 supra eundem 4; idcirco & ratio $\frac{4}{7}$ major est quam ratio $\frac{4}{5}$, quod 4 infra 7 magis descendat quam infra 5.*) quod quam absurde dictum sit jam ostendimus. Inconcussa manet Euclidei dicti veritas; adeoque & quæ inde rite deducuntur omnia ab Eutocio, Archimede, Pappo, Theone, aut etiam recentioribus. Nec dum necesse est, (quod contendit ille p. 148. l. 16.) *ut Euclides, cæterique, in hac causa victi, circinum & regulam Meibomio tradant.*

Quæ deinceps de Euclidis Demonstratione habet, (a p. 136. l. 9. & sequentibus ad p. 141. inclusive,) partim nihili sunt, partim sibi adversantur. Nam 1°. Dum

p. 137. l. 8. *falsam esse* ait 8 *def.* 5. cui illa innititur demonstratio: hoc tantum vult; *Majoris rationis* eam Euclidis definitionem, ei, quam appellat Meibomius majorem rationem, minime convenire. Quod quidem verum est. Siquidem per *rationem majorem* aliud vult Euclides, aliud Meibomius. Definit autem Euclides, non quid Meibomius, sed quid ipse per *Majoris Rationis* appellationem intellexit. Et quidem recte. Quippe eodem sensu ubique in suis propositionibus intelligitur *major ratio*, quo in illa definitione intelligendam esse dixerat. Quod neque Meibomius negare poterit: ut nec, Euclidis propositiones omnes, eo sensu intellectas, veras esse: hoc est, quo sensu se intellectum vult Euclides, eo sensu quæ dixit vera esse. 2° Dum pag. 141. perhibet demonstrationem illam ex 8 *def.* 5. petitam *ineptam* esse: videtur haud satis intellexisse, quid sit, apud Geometras, ex definitione demonstrare. Posito enim, quod ea sit *majoris rationis* definitio, quæ habetur 8 *d* 5; non aliter demonstrare debuit, rationem, de qua 8 *e* 5 agitur, majorem esse; quam ostendendo, majoris rationis definitionem huic convenire: quod ibidem ab Euclide factum est; nec (si demonstrationem eam satis intelligat) Meibomius id inficiabitur. 3° Quod autem habet, *p.* 137. *l.* 10. Nempe, *ut majori certitudine omnia clarescant, se novum adhuc suum quoddam de rationibus Geometricis inventum nobis non invisurum, ex quo, siquid tamen certi a mortalibus comprehenditur, evidentissimam doctrinam de rationum magnitudinibus explorandis hauriamus*: cujus quidem inventi summa hæc est, *si rationis antecedentem terminum multiplicemus*, fit *rationis additio*, adeoque ratio augetur, hoc est, fit major; *sin consequentem*, fit *rationis ablatio*, adeoque ratio minuitur, hoc est, fit minor. Hoc, inquam, *suum* fortasse esse poterit; at certe *novum* non est inventum: quippe nemo hoc non novit, (id ipsum nempe tradit ea quam ille oppugnatum it prop. 8 *e* 5.) sed & ipsi Meibomio adversatur vel maxime. Nam, juxta hanc regulam, si rationis $\frac{4}{5}$, consequentem 5 multiplicemus in $1\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$, ut fiat ratio $\frac{4}{7}$ (nam $5\times1\frac{2}{5}=7$,) minuitur ratio $\frac{4}{5}$; ablatione rationis $\frac{7}{5}$. Non itaque major erit $\frac{4}{7}$ quam $\frac{4}{5}$ (quod vult Meibomius,) sed minor erit. Item si rationis $\frac{4}{7}$ sive $\frac{20}{35}$, antecedentem 20, multiplicemus in $1\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$, ut fiat ratio $\frac{28}{35}$ (nam $20\times1\frac{2}{5}=28$) hoc est $\frac{4}{5}$, augebitur ratio $\frac{4}{7}$, adjecta ratione $\frac{7}{5}$; adeoque ratio $\frac{28}{35}$ hoc est $\frac{4}{5}$, major erit quam $\frac{20}{35}$ hoc est $\frac{4}{7}$; non autem (quod vult Meibomius) minor erit.

Deinde vero à pag. 141. ad p. 148. inclusive, vix quicquam occurrit novi: sed eadem subinde canitur cantilena. Quod enim p. 147. ex Harmonica producitur, parum ad rem spectat: quippe de Intervallis tantum agit, non de Rationibus: (aliud autem esse Intervallum, *διάστημα*, aliud Rationem, *λόγον* ex Theone Smyrnæo modo dictum est: quod cum non satis animadverterit Meibomius, quæ ex Harmonicis sibi favere putaverit, revera fraudi sunt.) Ecquis enim dubitat, quin inter 6 & 3, atque inter 3 & 6, idem sit intervallum? (aut etiam inter Patrem & Filium, atque Filium & Patrem?) at interim eandem aut æqualem esse rationem (hoc est, Relationem,) 6 ad 3, atque 3 ad 6, sive Arithmeticam, sive Geometricam, haud quisquam dixerit, (nisi qui & relationem Patris ad Filium, & Filii ad Patrem, eandem esse dixerit.) Nam, quod ad rationem ut loquuntur Arithmeticam, 6 est ternario major quam 3; at 3 ternario minor quam 6: Quis autem *ternario majus esse*, & *ternario minus esse*, tantundem esse dixerit? Quod autem ad rationem attinet Geometricam, est 6 duplum τοῦ 3, at 3 est subduplum τοῦ 6: nempe illud, duplo majus; hoc, duplo minus: Quis autem, *duplo majus*, & *duplo minus*, tantundem esse dixerit?

Quod autem p. 146. l. 3. insinuatur; *Cæterum facile quoque ex his colligitur, diversi generis rationes, excessivam & defectivam, inter se, quatenus una altera major est, aut minor, comparari non posse: quod comparatio ejusdem generis nomina requirat*: Et p. 153. l. 17. *Excessivas rationes cum excessivis, & defectivas cum defectivis solum comparari posse*: Et similiter p. 129. l. 14. p. 148. l. 1. Et alibi. Mirum est qui dixisse possit. Nam & ipse hujusmodi comparationes multoties instituit. Puta p. 140. l. 21. *Certissimum*, inquit, *est, majorem esse rationem* $\frac{7}{4}$ *quam sit ratio* $\frac{5}{4}$, *quoniam dum utrique eadem addita est*, (nempe ratio $\frac{3}{1}$,) *& eadem ab utraque ablata*, (nempe $\frac{4}{1}$,) *majorem residuam relinquit ratio* $\frac{7}{4}$ *quam* $\frac{5}{4}$; *illa, rationem* $\frac{21}{16}$; *hæc, ne quidem nihili* (æqualitatis, intelligit) *rationem, sed defectivam* $\frac{15}{16}$. Ubi manifeste comparat rationem (ut loquitur) excessivam $\frac{21}{16}$; atque defectivam $\frac{15}{16}$, eamque hac majorem appellat. Sic p. 105. l. 4. *Quoniam*, inquit, *ratio* $\frac{1}{1}$ *superat rationem* $\frac{1}{2}$, *ratione* $\frac{2}{1}$; *sed rationem* $\frac{1}{2}$ *superat ratio* $\frac{2}{1}$, *ratione* $\frac{4}{1}$;

Ergo ratio (excessiva) $\frac{2}{1}$ *superat rationem* (defectivam) $\frac{1}{2}$, *ratione bis dupla, id est, quadrupla.* Si autem excessiva defectivam superet, hoc est, major sit; cur interim, *quatenus una altera major est aut minor, comparari non posse*, dixerat. Sed &, *similiter*, inquit, *ratio* $\frac{9}{4}$ *major est quam ratio* $\frac{4}{9}$, *ratione* $\frac{81}{16}$. p. 107. l. 6. Item p. 106. l. 27. & p. 144 l. 4. *ratio*, inquit, *sesquialtera a ratione subsesquialtera, distat ratione bis sesquialtera*; ne autem dubitemus utra major sit, addit p. 144. l. 9. rationem *sesquialteram excessivam* ($\frac{3}{2}$) *superare rationem sesquialteram defectivam* (hoc est, subsesquialteram $\frac{2}{3}$) *ratione bis sesquialtera.*

Quod ipsi hac in re videtur fraudi fuisse, hoc est: Viderat ille, expositæ rationis rationes duplicatam, triplicatam, quadruplicatam, &c. quas appellat ille duplam, triplam, quadruplam, &c. ita constitutas esse, ut si earum aliqua sit ratio excessiva, hoc est, ratione simpla ($\frac{1}{1}$) major, etiam reliquæ erunt excessivæ; si defectiva, defectivæ: (Quod quidem verum est: quippe illud universaliter obtinet, si radix sit unitate major, ejus item potestates omnes erunt unitate majores; si minor, minores; si æqualis, æquales:) Adeoque rationes excessivam & defectivam, ejusdem expositæ rationis sive radicis potestates non esse. Cum itaque nullo ille respectu rationem ratione majorem aut minorem putandam esse velit, nisi quatenus expositæ alicujus pluries pauciusve multiplicata dici possit, hoc est, radicis alicujus altior inferiorve potestas; quæ ejusdem radicis sive expositæ rationis potestates esse non possint, eas inter se, quatenus una altera major sit aut minor, comparari non posse putavit. (Oblitus interim, se ipsum, ne alios dicam, longe aliam majoris minorisve rationis æstimationem passim adhibere, ut modo dictum est.) Quasi quidem non alia de causa numerum 16 numero 4 majorem censeamus, quam quod hic, numeri 2 sit potestas secunda, sive Quadratum; ille, quarta, sive Biquadratum: Et, eadem de causa, numerum fractum $\frac{1}{16}$ majorem quam $\frac{1}{4}$, quia radicis $\frac{1}{2}$, hic quidem quadratum, ille biquadratum: Duorum vero, fracti nempe $\frac{1}{4}$, & integri 4; aut etiam fracti $\frac{1}{2}$, & integri 16; neutrum majorem esse, aut minorem, putandum sit; quia nullius radicis, sive integræ sive fractæ, uterque possit potestas esse. Quæ omnia quam absurde dicta sint nemo non videt. Nam (præterquam quod falsum sit, numerum $\frac{1}{16}$ majorem esse quam $\frac{1}{4}$ partem toto; item, numerorum 4 & $\frac{1}{4}$, vel $\frac{1}{2}$ & 16, neutrum majorem minoremve esse;) considerationis est omnino extraneæ ad numerorum inter se majoritatem, aut minoritatem, sive excessum & defectum, æstimandum, quod sint tertii alicujus, forinsecus assumendi, potestas aliqua. Et quidem non magis est essentiale numero 64, ut sit potestas secunda, puta radicis 8; quam ut sit potestas tertia puta radicis 4; aut etiam sexta, radicis 2; sed & quarta, radicis $\sqrt{8}$ sive $2\sqrt{2}$; & quinta, radicis $\sqrt[5]{64}$; aut duodecima, radicis $\sqrt{2}$; item prima, radicis 64; & subsecunda, radicis 4096; & subtertia, radicis 262144; & potestas subsesquialtera, sive subsemitertia, radicis 512: & sesquitertia, sive quartæ subtertia radicis, $16\sqrt{2}$. Et sic in infinitum. Quodque de radicis numerosæ potestatibus dictum est, id universim valet de cujuscunque generis aliis, & speciatim, de Rationibus, gradatim multiplicatis. Adeoque omnino ineptissimum est, earum magnitudines, ab eo quem habent potestatis gradu æstimare. Addo insuper, superiorem potestatem sive gradum nonnunquam minoris esse magnitudinis: Nec quidem sumptis tantum variis radicibus, puta 16, quadratum numeri 4, majorem esse quam est 8, cubus numeri 2; sed & eadem sumpta radice, quæ puta minor sit quam 1. Nam radicis $\frac{1}{2}$, potestas tertia, seu cubus, $\frac{1}{8}$, minor est quam ejusdem quadratum $\frac{1}{4}$: Eodem plane modo quo radicis sive rationis expositæ $\frac{1}{2}$ (subduplæ) ratio triplicata sive potestas tertia $\frac{1}{8}$ (suboctupla,) minor est quam ejusdem ratio duplicata, sive potestas secunda $\frac{1}{4}$ (subquadrupla;) utut illa superioris gradus, sive denominationis, potestas sit; hæc inferioris. Quæ quia non satis perspexit Meibomius, id ei novæ suæ doctrinæ male fundatæ ansam porrexit.

Quod vero ait, p. 148. l. 3. de prop. 10. *e.* 5. *Decima autem propositio cum octava, cui ut fundamento superstructa est, corruit*; & similia de aliis ibidem, & deinceps ad paginam 161. cum non alio vertantur cardine, quam quod putaverit se octavam quinti evertisse: non est ut de iis admodum simus soliciti. Quippe eadem opera stabiliuntur & illa. Nec opus ut eadem sæpius repetamus. Nam nec ipse, credo, Meibomius negabit, quin, concessa veritate prop. 8. *e.* 5, reliqua, ab authoribus suis Archimede, Apollonio, Eutocio, Pappo, &c. legitima satis consequentia inde sint deducta.

Quæ deinde, p. 161. &c. ad p. 174. iterato habentur; de *minimus* voce; de Rationum

rationum denominatoribus; de triplo duplo, æquali sextuplo, &c. de Theone & Eutocio ita loquentibus; Clavio item, aliisque, ipsos secutis; atque his similibus; non est ut iis ulterius insistam. Quippe quibus jam supra satisfactum est. Neque alius gloriationi suæ locus relinquitur, quam habet pag. 169. l. 24. *Ex his perspicuum est, non tantum ignorasse illos authores.* (Nichomachum Gerasenum, Heronam, Theonem, Eutocium, Cardanum, Rodulphum Volumnium, Clavium, &c.) *quid sit rationum compositio; sed &, quid sit Ratio.* Cum potius dicendum videatur, nec quid sit eorum alterutrum, intellexisse Meibomium, nec quid sibi velint authores citati.

Quod autem habet p. 171. l. 22. *Quare, ex veterum sententia, ut ratio quadrupla est duplæ rationis dupla* (intelligit, *duplicatam,*) *sic ratio subquadrupla est subduplæ subdupla* (non, inquam, sed *duplicata;*) Similiter *subcentupla ratio, subdecuplæ rationis est subdupla,* (nullo modo, sed, *duplicata:*) Iterumque p. 173. l. 19. *Quippe, uti ante dictum est, ratio* $\frac{8}{27}$, *rationis* $\frac{8}{12}$ (vel $\frac{2}{3}$) *non est tripla, sed subtripla; seu, ratio* $\frac{8}{27}$ *ad rationem* $\frac{8}{12}$ *est ex Euclidis sententia, quam octava quinti tradidit, ut* 1 *ad* 3, *non autem, quod Commandinus & Clavius putavit, ut* 3 *ad* 1. Omnino falsum est: totumque illud negotium à Meibomio perperam intellectum, & depravatum misere. Nequaquam enim dicendum est, rationem $\frac{1}{4}$, rationis $\frac{1}{2}$; & rationem $\frac{1}{100}$, rationis $\frac{1}{10}$; subduplicatam esse, sed duplicatam; (nam $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, & $\frac{1}{100} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$;) neque rationem $\frac{8}{27}$, rationis $\frac{2}{3}$, subtriplicatam, sed triplicatam esse; (nam $\frac{8}{27} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$.) Id enim expressis verbis definit Euclides, 10 *d* 5. *Cum tres magnitudines* (*continue*) *proportionales sint,* (puta 1, 2, 4, vel 1, 10, 100,) *prima ad tertiam* (1 ad 4, vel 1 ad 100) *διπλασίονα, duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam* (1 ad 2, vel 1 ad 10.) *At cum quatuor magnitudines* (*continue*) *proportionales fuerint,* (puta 8, 12, 18, 27,) *prima ad quartam* (8 ad 27) *triplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam,* (8 ad 12.) Est itaque ratio $\frac{1}{4}$, duplicata rationis $\frac{1}{2}$; & $\frac{1}{100}$, duplicata rationis $\frac{1}{10}$; (non subduplicata, sive, ut Meibomius loquitur, subdupla:) & $\frac{8}{27}$, triplicata (non subtriplicata) rationis $\frac{8}{12}$ sive $\frac{2}{3}$. Quod autem ille hic habet de octava quinti, est nihil ad rhombum. Quippe ea propositio, (quæ nempe rationem $\frac{1}{4}$ minorem esse statuit quam $\frac{1}{2}$; atque $\frac{1}{100}$, minorem quam $\frac{1}{10}$; & denique $\frac{8}{27}$, minorem quam $\frac{8}{12}$,) nihil habet commune cum decima definitione quinti, (ubi definitur quæ ratio dicenda erit *διπλασίων, τριπλασίων,* duplicata, triplicata, &c.) Non enim quia ratio rationis *duplicata* aut *triplicata* dicitur; ideo & *major* dicenda erit: nec, si *minor* sit; duplicata, aut triplicata, dici non poterit. Sed ad hoc, ut ratio rationis duplicata, aut triplicata sit, vel etiam subduplicata, subtriplicata, &c. omnino accidentarium est ut sit major, aut minor. Est quidem ratio dupla, tripla, &c. *λόγος διπλάσιος, τριπλάσιος,* &c. major semper quam simpla: (puta 2 A, 3 A, &c. major quam 1 A:) at vero ratio rationis duplicata, triplicata, *διπλασίων, τριπλασίων,* &c. nunc major est nunc minor: Hoc est a^2, a^3, &c. nunc major quam a; si nempe a major quam 1: nunc autem minor; si nempe a minor quam 1. Ut & superius ostensum est. Quum itaque illic subjungit, p. 173. l. 23. *Quare, secundum Euclidis doctrinam, prima ad secundam,* 8 *ad* 12, *majorem rationem habet, quam ad quartam,* 8 *ad* 27. omnino verum est, per 8 *e* 5. Dum autem addit, *& ratio* 8 *ad* 27 *subtripla est rationis* 8 *ad* 12. hoc falsum est. Nam & ratio $\frac{8}{12}$ seu $\frac{2}{3}$ major est quam $\frac{8}{27}$; per 8 *e* 5; & hæc interim illius triplicata, adeoque potestas superior, per 10 *d* 5. Cumque ille rationem rationis triplicatam, *τριπλασίονα,* ita *ὀνομάζει,* (lin. 22.) acsi sit *ut* 3 *ad* 1; & subtriplicatam, *ὑποτριπλασίονα, ut* 1 *ad* 3: iterum hallucinatur. Dixisset enim, non *ut* 3 *ad* 1, sed ut cubus ad radicem, seu ut ℭ ad ℞, vel R^3 ad R: item non *ut* 1 *ad* 3; sed ut radix ad cubum, seu ut ℞ ad ℭ, vel R ad R^3. Adeoque ad Euclidis mentem pulchre constarent omnia, quæ Meibomius perperam interpretando luxavit misere.

Quæ pag. 174. & deinceps ad finem, de *Rationum inter se Rationibus* habet; haud cæteris saniora exsistunt. Versantur autem ea partim in evertendis eis quæ à Gregorio à S. Vincentio hac de re traduntur; partim in nova sua doctrina eruenda.

Gregorium ille multoties sollicitat; Puta, *Præf. pag.* 5. *l.* 9. *Hujus,* inquit, *errores, quod plane insignes sint, totumque orbem irretitum teneant, clarius demonstrandos duxi, ut omnes viderent in circuli quadratura perficienda, non plus novi quam falsi ab ipso esse repertum. Enimvero ab inventæ matheseos tempore nul-*

lum fuisse puto, qui plus centum & triginta falsas propositiones ex uno erroneo principio deduxisset. Gratiam itaque a Mathematicis me initurum credidi; si quadraturam illam ab ipso fundamento everterem. Iterumque libri pag. 100. *l.* 11. *Hunc vero errorem* (Theonis, Eutocii &c. de rationum Denominatoribus) *ampliavit Gregorius a S. Vincentio, qui grande illud opus Geometricum, de Quadratura Circuli, ante septem annos edidit, si effectum spectemus, conatu solo laudabile. Hic, ut scopum feriret, de rationum proportionibus, seu, ut ipse cum Boethio vocat proportionalitatibus Geometricis, protulit nova inventa; revera autem multa nova errata. Namque in solo octavo libro, qui hujus doctrinæ fundamenta continet, centum septemdecim falsas propositiones numeravit Euthymius: tot nimirum quot Euclideis fundamentis carent.* Iterumque, p. 203, l. 1. *Falsæ igitur sunt in octavo de Quadratura Circuli libro, propositiones 117. quibus, ex libro decimo, 17 adjungemus; ut falsarum propositionum, & quidem elementarium, numerus excrescat ad 134.* Et lin. 9. *Cæteras in quibus demonstrandis, has falsas Elementares usurpavit, operose recensere nolui; quod rerum Geometricarum gnarus sciat, cum fundamento male jacto ruere quicquid ipsi fuerit superstructum. Nec ita omnia ipsius nova inventa censui, ut adfirmare sustineam, nullum cuiquam spicilegium esse relictum.* Item pag. 161. l. 27. *Rogo itaque vos, ut pauca etiam de istis me narrantem audiatis; eoque magis, quod novum quoque proportionum genus, ab uno, non infimi subsellii Geometra, nuper sit inventum, cujus adminiculo Circuli quadraturam, toties irrito conatu a vobis tentatam, spissis voluminibus se demonstrasse opinatur.* Quinam autem sint illi tam insignes errores, demonstrandum aggreditur. p. 188. l. 26. & deinceps ad finem libri.

Gregorium hunc quod attinet; fateor equidem illum eam, quam ambiebat, circuli Quadraturam minime attigisse. Quod in ἐξετάσει sua, ante tres annos, ostendit *Christianus Hugenius*; & nos, si opus sit, parati sumus itidem ostendere. Verum interim haud pauca minime contemnenda prodidit, suamque in Geometricis peritiam ostendit: Nec omnino, eo nomine, culpandus videtur, quo illum sollicitat Meibomius. Et quidem, ni fallor, vel Meibomius ipse propositiones illas plus centum triginta, quas ille ut falsas incusat, fatebitur, eo quo illas protulit Gregorius sensu, veras esse. Nec alio, quantum ego video, nomine eas culpat Meibomius, quam quod alio sensu nonnullas loquendi formulas usurpaverit (Theonem, Eutocium, Clavium, aliosque secutus,) quam quo eas usurpari vult Meibomius, & quidem solus.

Grandi paralogismo (inquit p. 188. l. 26.) *lapsus est Gregorius a S. Vincentio, qui Clavii de Denominatoribus doctrinam secutus, rationum proportionem in hujusmodi numeris constituit, ut* $\frac{8}{2}$ *ad* $\frac{4}{2}$, *ita* $\frac{6}{2}$ *ad* $\frac{3}{2}$: *aut permutando ut* $\frac{8}{2}$ *ad* $\frac{6}{2}$, *ita* $\frac{4}{2}$ *ad* $\frac{3}{2}$. Hoc est, (neque enim aliter hic vult Gregorius) ut $\frac{8}{2}$ Quadruplum, ad $\frac{4}{2}$ Duplum; sic $\frac{6}{2}$ Triplum, ad $\frac{3}{2}$ Sesquialterum: & permutando, ut Quadruplum, ad Triplum; sic Duplum, ad Sesquialterum: quippe tum illic utrobique ut 2 ad 1; hic autem, utrobique ut 4 ad 3. Atque hoc quidem quin verum sit, ego nihil video. Esto enim expositum pondus A. hujus quadruplum est 4 A, duplum 2 A, Triplum 3 A, sesquialterum $\frac{3}{2}$ A. Annon autem proportionalia sunt $\frac{8}{2}A = 4A$. $\frac{4}{2}A = 2A :: \frac{6}{2}A = 3A$. $\frac{3}{2}A :: 8.4 :: 6.3 :: 2.1$? Item permutando $\frac{8}{2}A = 4A$. $\frac{6}{2}A = 3A :: \frac{4}{2}A = 2A$. $\frac{3}{2}A :: 8.6 :: 4.3$? Si itaque hoc verum sit (quod ne quidem Meibomium negaturum credo; imo inquam, disertis verbis fatetur p. 198. l. 4.) neque aliud Gregorius hîc intellectum velit, (quod ne quidem Meibomius ignorat: nam se, definitione sua, se explicantem introducit Meibomius p. 192. l. 16. & p. 194. l. 8.) quorsum eum falsitatis incusat? At interim ni hoc falsum sit, neque falsæ erunt illæ 134 quas ille condemnat propositiones: vel fatente Meibomio, p 198. l. 4. Quod quidem Gregorio, hac ex parte, vindicando, abunde sufficiat.

Sed & sic loquutum Ptolemæum, — Harmonicorum lib. 1. cap. 6. fatetur Meibomius p. 190. l. 8. Τὸ γὰρ δὶς διὰ πασῶν ὅπως ἔχει πρὸς τὸ διὰ πέντε καὶ διὰ πασῶν τεταγμένον, ὁ τετραπλάσιος λόγος πρὸς τὸν τριπλάσιον· ὡς μόνον τὸ διὰ πασῶν πρὸς τὸ διὰ πέντε τεταγμένον, ὁ διπλάσιος λόγος πρὸς τὸν ἡμιόλιον· ἐὰν γὰρ ἴσος ἀριθμὸς λαμβάνηται τριπλάσιός τε καὶ τετραπλάσιος καὶ πάλιν ἡμιόλιός τε καὶ διπλάσιος, ἐπίτριτον ποιοῦσι λόγον, ὅ τε τετραπλάσιος πρὸς τὸν τριπλάσιον, καὶ ὁ διπλάσιος πρὸς τὸν ἡμιόλιον· ὥς τε ὅσῳ συμφωνότερόν ἐστι τὸ διὰ πασῶν τοῦ διὰ πέντε, τοσούτῳ συμφωνότερον γίνεσθαι καὶ τὸ δὶς διὰ πασῶν τοῦ διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε. Quæ vel Meibomio interprete, sic sonant Latine. *Bis dia pason consonantia* (nempe $\frac{2}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{4}{1}$) *ita se habet ad*

ad dia pente & dia pason, (nempe $\frac{3}{2}\times\frac{2}{1}=\frac{3}{1}$,) *hoc est quadrupla ratio ad triplam: ut sola dia pason* ($\frac{2}{1}$) *ad solam dia pente* ($\frac{3}{2}$;) *id est, dupla ratio, ad sesquialteram. Si enim unius & ejusdem numeri* (puta 4) *sumantur triplus & quadruplus* (nempe 12 & 16 ;) *& rursus sesquialter & duplus,* (nempe 6 & 8 ;) *super-tertiam rationem* ($\frac{4}{3}$) *faciunt & quadruplus ad triplum* (16 ad 12,) *& duplus ad sesquialterum* (8 ad 6.) *Adeo ut, quanto consonantior est dia pason consonantia ipsa dia pente, tanto sit consonantior bis dia pason quam dia pason & dia pente.* Adeoque non veteribus tantum, sed & Harmonicis, (quo toties provocat Meibomius; quasi hi soli sint rationum gnari; aliique saltem *Juniores, quod rerum naturam in Canonicis nunquam considerassent, quid ratio esset, ignorarent,* p. 196. l. 1. & alibi passim,) satis receptum videmus hunc loquendi morem. Siquidem, tum rationes, Ptolemæo, sunt denominatoribus suis proportionales, (quod vult Gregorius;) nempe $\frac{4}{1} . \frac{3}{1} :: \frac{2}{1} . \frac{3}{2} :: 4 . 3$. contra quam vult Meibomius: Tum etiam, ut ex Porphyrii in hunc locum Commentario liquet, p. 191. l. 29. καὶ γὰρ διπλασιασθεὶς ὁ μὲν ἡμιόλιος, τὸν τριπλάσιον ποιεῖ. ὁ δὲ διπλάσιος, τὸν τετραπλάσιον. καὶ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχει ὁ τετραπλάσιος πρὸς τὸν διπλάσιον, καὶ ὁ τριπλάσιος πρὸς τὸν ἡμιόλιον. *Etenim duplicatus sesquialter, facit triplum; & duplus, quadruplum: ideoque eandem rationem habet quadruplus ad duplum, quam triplus ad sesquialterum.* Quod, quid aliud sit, quam quod, in Theone, tanto strepitu, damnat Meibomius, (ἐὰν τὸ τετραπλάσιον τινος διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον,) ego sane non intelligo. Sed & ejusmodi passim apud alios loquendi formulas extare, non admodum videtur dubitandum, si modo id operæ pretium esset inquirere.

Imo, inquam, & ipse Meibomius nonnunquam, incautus, perinde loquitur. Cum enim ait, p. 112. l. *quippe nihili misto* $\frac{4\,v}{4\,a}$, *in sesquialtera ratione debilius est mistum* $\frac{4\,v}{6\,a}$. Hoc est, mistum illud ubi ratio vini ad aquam est $\frac{4}{4}$, fortius esse quam mistum illud in quo vini ad aquam ratio est $\frac{4}{6}$, (sive hoc illo debilius esse,) in ratione sesquialtera. Hoc est, ratio vini ad aquam (quippe, ex hac, æstimanda est fortitudo misti) $\frac{4}{4}$, major est ratione $\frac{4}{6}$, (non ait, ratione, sive per rationem, quasi hæc esset differentia, sed) *in ratione sesquialtera*; Hoc est, in ratione 3 ad 2. sive ut 3 ad 2. (quippe, esse ad alterum in ratione sesquialtera, est, esse ut 3 ad 2.) Quid hoc aliud est, quam rationem (puta vini ad aquam) $\frac{4}{4}$, sive $\frac{6}{6}$ esse ad rationem $\frac{4}{6}$; ut 3 ad 2, sive ut 6 ad 4? Quod vult Gregorius. Sic p. 113. l. 12. *mistum* $\frac{4\,v}{6\,a}$, *in sesquialtera ratione fortius est misto* $\frac{4\,v}{9\,a}$. Hoc est, vini ad aquam ratio $\frac{4}{6}$, est ad rationem $\frac{4}{9}$, in ratione 3 ad 2. Sive $\frac{4}{6} . \frac{4}{9}$ ($:: \frac{6}{9} . \frac{4}{9} :: 6 . 4$) $:: 3 . 2$. Item p. 113. l. 26. *Fortius est mistum* $\frac{81\,v}{36\,a}$, *quam mistum* $\frac{16\,v}{36\,a}$ *in ratione quater sesquialtera*, $\frac{81}{16}=\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}$. Hoc est, fortitudo illius misti, sive ratio vini ad aquam in illo misto, $\frac{81}{36}$, est ad rationem in hoc, $\frac{16}{36}$, in ratione $\frac{81}{16}$; sive ut 81 ad 16. adeoque ratio $\frac{81}{36}$. rat. $\frac{16}{36} :: 81 . 16$. Omnino prout vult Gregorius. (Et similiter alibi, ut, si opus sit, ostendi poterit.) Non est itaque, cur hoc tam acriter condemnet Meibomius, cum & ipse (si crimen sit) eodem teneatur crimine.

Quod in contrarium, hujusce loquendi formulæ, adducit Meibomius, plane nihili est. Nempe p. 189. l. 1. non esse, *ut* $\frac{8}{2}$ *ad* $\frac{4}{2}$, *ita* $\frac{6}{2}$ *ad* $\frac{3}{2}$, quia *non quemadmodum rationis* $\frac{4}{2}$ *dupla est ratio* $\frac{8}{2}$, *sic rationis* $\frac{3}{2}$ *dupla exsistit ratio* $\frac{6}{2}$. Si, per *rationem duplam*, intelligit λόγον διπλάσιον, sive × 2; dicimus, omnino ita esse; ut illic, sic hic; nam & $\frac{4}{2}\times 2=\frac{8}{2}$, & $\frac{3}{2}\times 2=\frac{6}{2}$. Sin, *per rationem duplam*, intelligit *duplicatam*, λόγον διπλασίονα, sive potestatem secundam: Negamus consequentiam; quippe, quia non sit utrobique λόγος διπλασίων, ergo non utrobique eadem ratio διπλάσιος, nullo modo sequitur. Perinde enim est acsi argueret, non esse, ut 2 ad 4, sic 3 ad 6, quia non, quemadmodum 4 est quadratum 2, ita & 6 quadratum 3. Sive, non esse $2 . 4 :: 3 . 6$. hoc est $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$, quia non est $3\times 3=6$, sicut est $2\times 2=4$. Atque ejusdem farraginis sunt reliqua quæ in hunc finem producit omnia.

Hujusmodi item sunt quas profert demonstrationes. Nempe p. 178. l. 9. *Cæterum* inquit, *rationem* $\frac{6}{2}$ *non esse rationis* $\frac{3}{2}$ *ejusdem duplam; &c. duplici demonstratione*

tione

tione ostendemus. Si per rationem duplam, triplam, hic intelligat, λόγον διπλασίονα, τριπλασίονα, (quas definit Euclides 10 *d* 5,) nos hoc concedimus; nec quispiam est qui contrarium contendit: Sin λόγον διπλάσιον, τριπλάσιον, intelligat; videamus demonstrationes. *Prima* inquit, *hoc adsumto lemmate; Duplorum duplos esse excessus; adeoque triplorum, triplos; sesquialterorum sesquialteros.* Nos hoc lemma concedimus, si, per *excessus*, intelligit, *subductionum residua*; sin autem *divisionis quotientes* intelligit, negamus. Quippe $4-2=2$. $8-4=4$. $12-6=6$. $6-3=3$. (At $\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{12}{6}=\frac{6}{3}=2$.) Dum autem addit; *sic rationes* $\frac{3}{2}$ *&* $\frac{4}{3}$ *inter se differunt ratione* $\frac{9}{8}$; jam transit εἰς ἄλλο γένος, nempe pro subductionis residuo, substituit divisionis quotientem; non enim est $\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\frac{9}{8}$, sed $\frac{4}{3}$) $\frac{3}{2}$ ($\frac{9}{8}$. Item, dum pergit; *harum duplæ* $\frac{81}{1}$ *&* $\frac{16}{1}$, *ratione* $\frac{81}{16}$, *inter se distant.* Non enim rationum $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, duplæ, sed duplicatæ, (non διπλάσιοι, sed διπλασίονες,) sunt $\frac{81}{1}$, & $\frac{16}{1}$: quæque emergit ratio $\frac{81}{16}$ (rationis $\frac{9}{8}$, non διπλάσιος sed διπλασίων) non subducendo oritur, sed dividendo; non enim $\frac{81}{1}-\frac{16}{1}=\frac{81}{16}$, sed $\frac{16}{1}$) $\frac{81}{1}$ ($\frac{81}{16}$. Sed procedat demonstratio. *Cum itaque,* inquit, *simplorum rationum* $\frac{3}{2}$ *&* $\frac{4}{3}$, *differentialis ratio* (nempe divisione orta) *sit* $\frac{9}{8}$ (quia scilicet $\frac{4}{3}$) $\frac{3}{2}$ ($\frac{9}{8}$:) *duplarum* $\frac{6}{2}$ *&* $\frac{8}{3}$, *differentialis ratio, erit simplæ differentialis rationis dupla, nempe* $\frac{81}{64}$. Nullo modo inquam. Sed eadem ipsa $\frac{9}{8}$. Nam jam de differentia divisionali agitur, (de qua lemma non procedit,) non de subductionali. Sin velit lemmati suo exemplum aptare; sic potius dixisset; Quoniam simplarum rationum $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, differentia (subductione quærenda) sit $\frac{1}{6}=\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\frac{9}{6}-\frac{8}{6}$; erit duplarum $\frac{6}{2}=\frac{3}{2}\times 2$, & $\frac{8}{3}=\frac{4}{3}\times 2$, differentia $\frac{6}{2}-\frac{8}{3}=\frac{18}{6}-\frac{16}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{6}\times 2$, nempe dupla differentiæ simplarum. Quod quidem verum est, uti lemma postulat.

Altera, inquit, demonstratione idem ostendimus, hoc sumpto lemmate; *Arithmeticæ progressionis numeros, quorum secundus primi duplus est, eodem excessu proximos binos se invicem superare* (seu potius, eorum unum superare reliquum; non enim se mutuo superant, sed alter superat, alter superatur) *quo primus superat nihilum.* Esto. Quid deinde. *Cum itaque,* inquit, *in hac rationum progressione* $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{12}{2}$, (dic potius $\frac{0}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{2}$, &c. secus enim non erit progressio Arithmetica;) *ratio* $\frac{3}{2}$ *simpla sit, & unitatis loco* (hoc est primo) *ponatur; cujus dupla est* $\frac{6}{2}$; *tripla,* $\frac{9}{2}$; *&c. continebit dupla* $\frac{6}{2}$, *bis simplam* $\frac{3}{2}$, (recte quidem, nam $\frac{6}{2}=\frac{3}{2}\times 2$.) *Atqui* inquit, *duæ simplæ additæ, efficiunt* $\frac{9}{4}$. Nullo modo: sed potius, multiplicando compositæ, non enim $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$, sed $\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}$, sunt $\frac{9}{4}$. Sunt autem $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{6}{2}$, quam & progressio exhibet, & lemma postulat. Neutra itaque demonstratio procedit. Ea vero quam appellat ille *veram rationis sesquialteræ progressionem* $\frac{32}{32}$. $\frac{48}{32}$. $\frac{72}{32}$. $\frac{108}{32}$ &c. vel $\frac{1}{1}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{9}{4}$. $\frac{27}{8}$. &c. Non est progressio Arithmetica, quam lemma supponit; sed Geometrica; adeoque nihil ad rhombum. Atque de reliquis instantiis, par esto judicium.

Sed nec felicius suam exponit de Rationum Ratione doctrinam: quam sic definit, p. 174. l. 12. *Ratio rationum est duarum rationum ejusdem seriei, a fundana ratione secundum naturales numeros progredientis, secundum rationem certa quædam inter ipsas relatio. Cum enim,* inquit, *ratio aliqua alterius dupla, tripla, sesquialtera,* (duplicata, triplicata, &c.) *dicitur; ratio fundana & simpla* (hoc est, radix,) *secundum naturalem numerorum seriem excrevisse, hoc est, continua sui adpositione major facta, intelligitur;* (hoc est continua multiplicatione fiunt potestates reliquæ:) *ita si quamcunque rationem sibi ipsi adponam, fit ratio prioris, nempe simplæ & fundanæ, dupla,* (duplicata;) *si hanc cum fundana componam, fit fundanæ tripla &c. tripla autem ad duplam* (triplicata ad duplicatam) *est ut 3 ad 2* (ut potestas tertia ad secundam, seu ut cubus ad quadratum,) &c. *Porro possumus quamcunque rationem, fundanæ & simplæ rationis, hoc est, unitatis* (radicis seu potestatis primæ) *loco collocare. Unde innumeræ rationum progressiones exsurgunt, quarum aliquot exemplorum loco exposui.*

	0	1	2	3	4	5	6
I.	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{32}{1}$	$\frac{64}{1}$
II.	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{27}{1}$	$\frac{81}{1}$	$\frac{243}{1}$	$\frac{729}{1}$
III.	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{64}{1}$	$\frac{256}{1}$	$\frac{1024}{1}$	$\frac{4096}{1}$
IIII.	$\frac{1}{1}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{100}{1}$	$\frac{1000}{1}$	$\frac{10000}{1}$	$\frac{100000}{1}$	$\frac{1000000}{1}$
V.	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$	$\frac{729}{64}$

Prima

Prima inquit, *progressio est rationis duplæ; altera, triplæ; tertia, quadruplæ; quarta decuplæ; quinta sesquialteræ, &c.* Per *rationem* itaque *fundanam*, λόγον πυθμενικὸν, Radicem intelligit, sive potestatem primam, uti manifestum est: contra quam ipse alibi p. 137. l. 15. rationem æqualitatis $\frac{1}{1}$ (non autem ut nunc, Radicem seu potestatem primam,) appellat *rationum omnium Fundamentum & principium*. Sed aliter adhuc p. 15. l. 13. eodem *fundanæ rationis* nomine, intelligit rationis in minimis numeris designationem; *Sic*, inquit, *ex* $\frac{3}{2}.\frac{6}{4}.\frac{9}{6}.\frac{12}{8}$. *quæ omnes sunt in ratione sesquialtera; fundus est*, πυθμὴν, *seu* πυθμενικὸς λόγος, *fundata* (lege *fundana*) *ratio*, $\frac{3}{2}$ *quæ primis inter se numeris comprehenditur. Et sic de cæteris.* Et similiter p. 165. l. 20. Adeo sibi inconstans est in suorum terminorum acceptatione. At, inquam, quicquid sit quod hac appellatione alibi velit, manifestum est eum per *rationem fundanam*, hic intelligere, radicem sive potestatem primam. Hinc autem continua multiplicatione (sive ut ille loqui malit, continua radicis fundanæ adpositione) emergit series Geometrice proportionalium ab 1 seu $\frac{1}{1}$ inchoata; hoc est, continua potestatum series; Quarum Radix, prima est; quadratum, seu ratio duplicata, secunda; (reliquæque juxta numeros naturales deinceps denominandæ;) ratio autem æqualitatis $\frac{1}{1}$, potestas nulla. (Et quidem si satis intellexisset Meibomius, hoc nihil aliud esse quam quod universim tradi solet, nempe 1 . R . Z . C . ZZ . &c. seu 1 . *a* . *aa* . *aaa* . *aaaa*. &c. aut $1 . a . a^2 . a^3 . a^4$. &c. esse Geometrice proportionalia; eorumque indices, sive exponentes potestatum, 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . &c. Arithmetice proportionales: Non esset cur ille, perplexa sua rei facillimæ traditione hanc sibi & aliis molestiam crearet.) Per *rationum rationem* itaque nihil aliud hic intelligit Meibomius (utut illud definitione sua satis obscure tradiderit) quam mutuum ad invicem situm seu ordinem quem inter se habent duo pluresve termini ejusdem progressionis Geometricæ ab 1 inchoatæ. Adeoque rationem *triplam ad duplam esse ut 3 ad 2, hoc est, in ratione sesquialtera*; nil aliud significat, quam ejusdem rationis rationem triplicatam ad duplicatam, esse ut ejusdem radicis potestas tertia ad secundam, cujus indices sive exponentes 3, 2, sunt in ratione sesquialtera $\frac{3}{2}$.

Sed & ultra notandum est, se in seriem suam nullos alios terminos admittere, quam qui fiunt continua appositione rationis fundanæ: adeoque, in expositarum suarum serierum qualibet, rationes expositis intermediæ nullum in suis seriebus locum habent. Quamvis enim nonnunquam de ratione sesquialtera loquatur, (quæ videri possit intermedia inter potestatem primam & secundam,) non tamen ait rationem ullam esse fundanæ seu simplæ sesquialteram, sed saltem triplam secundæ sesquialteram esse.

Quod forsan non tanti esset ut notatu dignum videatur, nisi propter sequentia. Nempe p. 175. l. 27. *Illud autem nove hic observandum* dicit, *cujusque ex his rationum progressionibus rationem cum suæ seriei & progressionis ratione solum comparari posse, ita ut sciatur, quam rationem hæc ratio ad illam rationem, & vicissim, obtineat*; & p. 176. l. 13. *Nullo autem modo diversæ progressionis rationes inter se comparari possunt ut quam inter se rationem habent definiatur. Quare*, inquit, *ratio* $\frac{3}{2}$ *quæ primæ seriei prima est, ineffabilem rationem habet, non tantum ad* $\frac{4}{3}$, *quæ prima est seriei secundæ, sed & ad omnes alias seriei secundæ, tertiæ, quartæ, & cæterarum in infinitum, rationes. Hoc autem inde quoque evidens est, quod duas diversarum progressionum rationes per quamcunque aliam minorem mensuraturi, nullam plane invenire queamus, quæ utramque exacte metiatur.* Cui simile occurrit p. 133. l. 17. *Diversi fundi rationes nullam communem mensuram admittunt, ideoque nec rationem inter se habent effabilem.* Quod quidem ne putemus eum de ratione veris numeris effabili hoc intelligere; admittere autem rationem utcunque lineis explicabilem; qualis est diametri ad latus quadrati, aliæque passim rationes ἄῤῥητοι: Etiam & has exclusas se velle, patet, p. 192. l. 25. *Demonstratum*, inquit, *est superius, ejusdem duntaxat progressionis rationes inter se esse* (non inquit, ut numerum ad numerum, sed) *ut lineam ad lineam.*

At, inquam hoc plane falsum est, non modo aliorum sensu, sed & suo. Nam rationes diversi (ut loquitur) fundi, rationem ad invicem habent, etiam suo sensu, satis explicabilem; nempe (ut nos loqui solemus) dici potest, quota sit potestas hæc illius. Eaque ratio satis est effabilis, non modo ut linea ad lineam (quod ipse negat,) sed (quod magis est) non raro, ut numerus ad numerum. Et quidem, ne longius abeamus, suam ipsius instantiam, jam prolatam, examinabimus.

bimus. *Ratio*, inquit, $\frac{2}{1}$, *quæ primæ ſeriei prima eſt*, *ineffabilem rationem habet, non tantum ad rationem* $\frac{3}{1}$, *quæ prima eſt ſeriei ſecundæ*, *ſed & ad omnes alias ſeriei ſecundæ, tertiæ, quartæ, &c.* De ratione quam habet ratio aſſignata, ad rationem aliquam ſeriei ſecundæ, non admodum ero ſolicitus; quoniam quidem ea, utut lineis explicabilis ſit (quod ſi opus eſſet, utut ille neget, facile ſumus demonſtraturi;) numeris tamen (ſenſu ſuo) explicabilis non eſt: Verum, quam habet rationem ratio expoſita ad rationes ſeriei tertiæ (vel ſuo ſenſu,) eſt & numeris explicabile. Quippe expoſita ratio $\frac{2}{1}$, eſt ad ſeriei tertiæ rationem $\frac{4}{1}$, (ut ille loquitur) ut 1 ad 2; ſive (ut loquuntur alii) ratio ſubduplicata: eadem expoſita ratio $\frac{2}{1}$, ad rationem (ejuſdem ſeriei tertiæ) $\frac{16}{1}$, eſt ut 1 ad 4, ſive ſubquadruplicata: item rationis $\frac{64}{1}$, ratio ſuboctuplicata, ſive (ut ille loquitur) ut 1 ad 8. Et de reliquis pariter. Quod quidem adeo perſpicuum eſt & obvium, ut mirum ſit, qui ille poſſit non videre; cum manifeſtum ſit, nullam non rationem ſeriei tertiæ, etiam & in ſerie prima (ſatis continuata) reperiri; utut non viceverſa. Sed & nulla non ratio ſeriei primæ, ad primam tertiæ $\frac{4}{1}$ (aliamve tertiæ ſeriei quamvis) utut in ſerie tertia nuſpiam ſedem habeat, rationem habebit (vel ſuo ſenſu) numeris explicabilem. Puta, ad rationem $\frac{4}{1}$, ratio $\frac{2}{1}$, eſt (Meibomii ſenſu) ut 1 ad 2; ratio $\frac{8}{1}$, eſt ad eandem, ut 3 ad 2; ratio $\frac{32}{1}$, ut 5 ad 2; & ſic de reliquis; (quamvis interim rationes $\frac{2}{1}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{32}{1}$, nec in ſerie tertia reperiantur, nec ex rationis fundanæ $\frac{4}{1}$ continua adpoſitione fiant:) Quæ omnia adeo & vera ſunt & per ſe perſpicua, & nemini non nota, ut ne quidem Meibomius, ubi ſecundas cogitationes adhibuerit, ſit negaturus. Ubi autem ille, ex uno aut altero exemplo concludit pag. 177. l. 23. *eadem ratiocinatione quaſcunque alias diverſæ ſeriei rationes, quacunque alia communi menſura menſuratas ineffabilem inter ſe rationem habere cognoſcemus*; iterumque p. 178. l. 3. *planum itaque eſt, omnes diverſæ ſeriei, ſeu non ab eadem fundana ratione adſcendentes, rationes inter ſe eſſe incommenſurabiles.* Dicimus non ſufficientem factam eſſe inductionem. Non enim ſi ratio $\frac{81}{80}$ non ſit rationum $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{1}$ communis menſura; ergo nullarum diverſæ ſeriei rationum, ulla erit communis menſura. Quippe nos in contrarium inſtantias oſtendimus, quas ne quidem Meibomius negare ſuſtinebit.

Falſum itaque eſt (etiam ſuo ſenſu) quod hîc affirmat Meibomius, *Diverſi fundi rationes, rationem inter ſe effabilem non habere.*

Falſum item eſt, (ut ſupra oſtendimus) *Tripli duplum non eſſe* (ſenſu Theonis) *ſextuplum.* Et quæ ſunt hujuſmodi, quæque hinc dependent omnia. Adeoque

Falſum eſt, quod contra Gregorium contendit Meibomius, *Non eſſe ut* $\frac{1}{3}$ *ad* $\frac{3}{4}$ *ita* $\frac{6}{5}$ *ad* $\frac{3}{4}$: aut *Gregorii propoſitiones plus centum triginta falſas eſſe*: aut denique *Eutocii, Theonis, Clavii, aliorumque de rationum denominatoribus doctrinam, falſam eſſe.*

Falſum item (ut ſupra oſtenſum eſt) *Rationem duplam & ſubduplam invicem æquales eſſe.* Aut etiam *Rationem* $\frac{1}{4}$ *majorem eſſe quam* $\frac{1}{2}$. Et quæ hiſce ſunt ſimilia. Adeoque

Falſum eſt; *Octavam aut decimam quinti Euclidis, aut ejuſdem libri definitionem ſeptimam, falſas eſſe*; aut quæ hinc dependent. Et propterea, Archimedes, Eutocius, Theo, Pappus, aliique, quod ea pro veris habuerint, à Meibomio, falſo inſimulantur criminis.

Falſa denique ſunt ea omnia, quæ, in ſuo de *Proportionibus Dialogo*, nove protulit Meibomius.

F I N I S.

M. *Mersenni* locus notatur.

CUM præcedentem Tractatum hactenus absolverant operæ, res suas ita disponentibus Typothetis, ut alioqui vacuæ superfuissent hæ paginæ: Haud abs re fore judicavi *Marini Mersenni* locum, qui præfatione Generali ad sua *Cogitata Physico-Mathematica*, Titulo *De Rationibus & Proportionibus*, numeris 12, 13, 14, habetur, breviter expendere: ubi in eundem cum *Meibomio* errorem lapsus videtur.

Nempe cum Clavius, ad finem l. 9. Euclidis, notaverat *Compositionem rationis* (de qua 10 *d* 5, & 5 *d* 6, agitur,) *non esse tanquam Totius ex Partibus, quod Additionis negotium est*; (sed tanquam Facti ex Factoribus, Multiplicando;) *Quia secus totum esset minus sua parte*, (nam $\frac{1}{100}$, quæ componitur ex $\frac{1}{10}$ & $\frac{10}{100}$, utravis componente minor est; & $\frac{1}{2}$, quæ componitur ex $\frac{4}{2}$ & $\frac{2}{8}$, altera quidem componentium minor est, utut reliqua major.) Respondet Mersennus, *id etiam evenire, in addendis quantitatibus negativis*; (nam ex partibus — 2 & — 3, totum — 5, est utravis minus; & ex partibus — 2 & + 4, totum vel aggregatum + 2, est altera quidem majus, utut altera minus.) Ut igitur se expediat, ipsum supponit quod & Meibomius, (& quidem fieri potest, ut Meibomius hinc ansam nactus sit,) *Proportio*, inquit, *æqualitatis Nihili similitudinem refert*; *Proportio Majoris inæqualitatis, attollitur supra nihilum*; *Proportio Minoris inæqualitatis, deprimitur infra nihilum*. Atque hinc colligit; Prout adjectione vel ablatione o nihili, nihil accedit vel demitur quantitati; ita nec accessione proportionis æqualitatis, augetur vel minuitur proportio. Quemadmodum autem adjectione Quantitatis positivæ (sive ut loquitur, *Entis*,) augetur; Negativæ autem sive Ablativæ (sive ut loquitur, *Anti-entis*) minuitur quantitas: Ita accessio proportionis majoris inæqualitatis, auget; Minoris autem, minuit proportionem.

Verum hic sibi perperam assumit, Proportionem *Æqualitatis*, nihili instar esse; *Minoris* autem inæqualitatis, minoris quam nihili, sive instar quantitatis negativæ; cum interim illæ sint non minus positivæ rationes, utut minores, quam quæ majoris inæqualitatis. Quippe qui *simplum* dicit, non illæ rem *nullies* apponi intelligit, sed *semel*. Et qui *subduplum* poni dicit, non aliquid *auferri* dicit, sed saltem semissem *poni*. Et quidem *Duplo*, tanquam *Enti* sive quantitati positivæ, non opponitur, tanquam *Anti-ens*, vel quantitas ablatitia, *Subduplum*, sed *Dupli defectus*. Quippe + 2 A & — 2 A, sunt oppositæ quantitates affirmativa & negativa; non autem +2A & + $\frac{1}{2}$ A, sive + A x 2 & + $\frac{A}{2}$, quorum utraque est positiva.

Et quidem in scala potestatum juxta quam rationes dici solent Duplicata, Triplicata, &c. puta $\frac{2}{1}, \frac{4}{1}, \frac{8}{1}, \frac{16}{1}$, &c. quanquam ratio æqualitatis $\frac{1}{1}$, erit *nullius gradus*, sive ut loqui liceat, Nullana potestas; seu potestas a o denominanda; & proinde $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, &c. gradus descendentes, adeoque à — 1, — 2, — 3 denominandi: non tamen propterea quantitates illæ dicendæ sunt ablatitiæ, magis quam fractiones decimales (quorum loci seu gradus infra unitatis locum consistunt, adeoque indices habent negativos,) dicendæ negativæ quantitates; aut etiam fractiones $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, &c. dicendæ sunt quantitates negativæ, quia radicis 2, potestates continue consequentes sunt 4, 8, 16, &c. adeoque 1 ejusdem potestas nullana, & propterea, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, ejusdem radicis 2, potestates adhuc inferiores, adeoque ab indicibus negativis denominandæ.

Sed cum rationum Compositio, Multiplicationis sit, non Additionis, opus; ut ex 5 *d* 6 patet: Dixisset potius rationem æqualitatis $\frac{1}{1}$, esse instar 1 Unitatis; quæ quantitatem multiplicans reddit quantitatem Factam reliquæ Factrici æqualem: rationes autem Majoris inæqualitatis, $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$, &c. instar numerorum unitate Majorum, qui quantitatem Factam exhibent reliqua Factrice, seu multiplicata, Majorem: Ra-

 tiones

tiones autem Minoris Inæqualitatis, esse instar numerorum (non negativorum seu minorum quam o sed) positivorum minorum tamen quam 1; puta fractorum qui inter 1 & o intercedunt: quippe qui, multiplicantes, Factam exhibent quantitatem, non quidem negativam, sed multiplicata tamen minorem. Qua lege pulchre constarent omnia.

Et quidem quod mirandum cuipiam forsan videbitur. *Rationem duplicatam, exposita nonnunquam minorem esse*; &c. nihil in se habet incommodi: Nil enim aliud sonat, quam *Quadratum vel Cubum vel Biquadratum, &c. Radice sua minus esse posse*; nempe quoties Radix est numerus unitate minor.

FINIS.

DE SECTIONIBUS CONICIS,

Nova Methodo Expositis,

TRACTATUS.

Anno 1655 primum editus.

Oo 2

Clarissimis Viris, & Mathematicis,

D. *SETHO WARD* S.T.D.

ET

D. *LAURENTIO ROOK* M.A.

Publicis Astronomiæ Professoribus; altero *Saviliano* in Academia *Oxoniensi*, altero *Greshamensi* in *Greshamensi* Collegio *Londini*.

JOHANNES WALLIS Geom. Prof. SAVILIANUS. S.

QUid novi ferat (Clarissimi Viri) Libellus iste, ab ipso statim quem præfert titulo innotescit. Nempe Sectiones Conicas (rem veterem) nova methodo tradit. Erat scilicet Conicorum traditio Veteribus jam olim cognita, Apollonio Pergæo vetustior, & quidem in methodum jam tum redacta; ut nec ipse diffitetur Apollonius, & aliunde constat: (Nam Archimedes ipse Apollonio antiquior, *Elementa Conica* sæpius memorat:) sed ab Apollonio, (cujus Conicorum libri quatuor supersunt,) in meliorem formam redacta, & insigniter aucta, (quod in causâ fuisse credimus cur priora illa Elementa Conica perierunt.) Antiquiores enim illi, Coni solius Recti (quem solum Euclides definiverat) contemplationem aggressi, non aliam videntur ipsius sectionem considerasse quam quæ fit à plano quod ipsius lateri alicui rectum sit; quod propterea in Cono Rectangulo (eo nempe cujus opposita latera angulum in coni vertice rectum comprehendunt) opposito lateri maneret parallelum; in Cono Acutangulo, lateri opposito occurreret; in Cono autem Obtusangulo, ab eo recederet. Atque hinc curvas tribus illis sectionibus emergentes, appellabant, Coni Rectanguli, Coni Acutanguli, & Coni Obtusanguli, Sectionem; quibus etiam nominibus utitur Archimedes. Sed & propterea Conisectionum illarum nominibus, solas erectas intelligebant, non item Scalenas; (ut & Diametri nomine, solum intelligebant Axem; &, Verticis Sectionis nomine, axis verticem;) sectiones quippe Scalenas, sive inclinatas, non aliter tractabant quam ut Erectarum portiones; (quod & de Conoidibus pariter intelligendum erit.) Apollonius autem, præter Conum Rectum, etiam Scalenum introduxit, (& forsan primus,) & propterea Coni definitionem ab Euclide traditam (ut quæ soli recto conveniebat) in aliam (quæ etiam Scalenis conveniat) immutavit. Sed neque solam illam plani secantis positionem (quæ coni latus recte secat; hoc est, ad angulos rectos) sed aliam quamlibet admisit; adeoque Coni cujuslibet (sive recti sive scaleni) sectionem quamlibet plano utcunque posito factam, consideravit. Adeoque & sectionum nomina prius recepta necesse habuit immutare, (quippe è Sectionibus tribus quamlibet invenire cuilibet cono inesse, prout planum secans alio atque alio situ positum intelligatur,) quas igitur alii, Coni Rectanguli, Coni Acutanguli, Coni Obtusanguli, sectionem, appellaverant; ille Parabolam, Ellipsem, Hyperbolam, dicendas voluit: quæ nomina ab illius prop. 11, 12, 13, libri primi, originem duxerunt; atque hactenus à Geometris retinentur. Sed & eidem Sectioni plures Diametros, inesse voluit, prout hujus illiusve coni sectione facta intelligatur; quarum singulæ sibi peculiares habent & vertices, & Ordinatim-applicatas, & Latera-recta. At fatendum interim est horum etiam non pauca, utut aliis nominibus, aliis antea, saltem Archimedi, innotuisse: hoc tamen discrimine, quod quæ *Coni Sectiones* (nempe inclinatæ) ab Apollonio dicuntur, eædem ab Archimede *Sectionis* (erectæ) *Portiones* dici videantur; (& similiter de Conoidibus:) ut in ipsius libro de Rectanguli Coni Sectionis quadratura (cui *de quadratura parabolæ*

rabolæ recentiores nomen fecerunt,) & in libris *de Conoidibus* & *Sphæroidibus*, passim est videre.

Hæc autem Conicorum doctrina, quamvis ab Apollonio satis Geometrice tradita, (unde & *Magni Geometræ* nomen est adeptus,) aspera tamen adhuc mansit & difficilis, ut, qui illam ausus attingere, sit è paucis unus. Unde & nimis neglecta fuit, tanquam insuperabilis difficultatis plena: (Quod quidem eatenus obtinuit, ut ex libris Octo, quos scripserat Apollonius, non nisi primi quatuor ad nostras manus pervenerint;) Maxima quippe Geometrarum pars vel eo non accedebant plane, vel tanquam canis ad Nilum. Eamque difficultatem quamvis aliquanto minuere conati sint Midorgius, aliique, minime tamen sustulerunt. Quam igitur plerique cane pejus & angue formidabant, Conicorum Doctrinam, nos demulcendam suscepimus & levigandam, ut deinceps non minus tractabilis evadat quam ipsa Euclidis Elementa; nec sit cur quis in posterum ipsius aggressum metuat. Quod quidem quousque præstiterim, non est cur alios quam vos ipsos æquiores putem judices; qui pro ea qua polletis, ut in reliqua literatura, ita speciatim in Mathesi peritia provinciam quam suscepistis ornatis maxime.

Opus ipsum quod attinet; videbitis me, statim ab initio, Cavallerii *Methodum Indivisibilium*, quasi jam à Geometris passim receptam, tam huic quam tractatui sequenti (qui huic gemellus est) substernere; (ut multiplici figurarum inscriptioni & circumscriptioni, quibus in ἀπαγωγῇ aliàs utendum sæpius esset, supersedere liceat;) sed à nobis aliquatenus sive emendatam sivè saltem immutatam: pro rectis numero infinitis, totidem substitutis parallelogrammis (altitudinis infinite-exiguæ;) ut & pro planis, totidem vel prismatis vel cylindrulis; & similiter alibi.

Schemata adhibui quam potui simplicia, ne intricatiores linearum ductus confusionem inferant: & quidem iisdem ubi fieri commode posset repetitis, vel parum immutatis, uti mallem quam ubique novis; quo magis fiant lectori familiaria. In quem etiam finem, iisdem ut plurimum literis eadem (per totum fere tractatum) puncta designamus, utut schemata fuerint immutata; atque iisdem symbolis easdem designamus ubique quantitates: sed neque illa fortuito assumpta, sed plerumque cum delectu, ut ipse vel literarum, vel symbolorum intuitus rem designatam aliquatenus referat; quæ quamvis non necessaria videri possit curiositas, cum tamen & phantasiæ & memoriæ adjuvandæ inserviat, nonnullis forsan erit non ingrata, reliquisque saltem inoffensa. In symbolis adhibendis, secuti sumus partim D. *Oughtredum* nostratem, partim D. *Carthesium* (nisi velitis potius ut D. *Harriotum* nostratem nominem, qui in eadem fere semita D. *Cartesio* prævivit) nonnunquam utrumque; prout vel hujus vel illius vel utriusque notatio præsenti negotio explicando magis videbatur accommoda. Demonstrationes passim ex Arithmeticæ symbolicæ calculo petendas duxi, ut quæ brevitati simul atque perspicuitati inserviunt maxime, quasque non minus legitimas esse quam quæ vario linearum implexu fiunt, non est cur quisquam dubitet. In toto denique operis decursu ea brevitate studuimus omnia præstare quæ perspicuitati non officiat.

Prolixum itaque de Conicis tractatum non exhibemus; adeoque multa ab aliis tradita, nos consulto omisimus, quæ tamen, si opus videbitur, possit quilibet non magno negotio supplere, vel ex nostris deducere. Post enim principia fundamenta tradita, non erit difficile reliqua quasi totidem inde consectaria adjungere. Eritque fortasse tractatus iste vel ipsa brevitate gratior, quam si minutiora sectando factus esset prolixior. Quicquid sit, vestro illud duxi aliorumque Mathematicorum judicio permittendum. *Valete*.

DE
Sectionibus Conicis
TRACTATUS.

Proœmium.

QUUM Sectionum Conicarum (quæ dici solent) doctrinam (prout vulgo tradi consuevit,) satis obscuram animadverteram, atque perplexis admodum Demonstrationibus involutam: totum illud negotium paulo attentius apud me perpendendum statui; ut siqua possem arte rem satis intricatam quadantenus extricatiorem darem. Quod & in sequentibus (Divino favente auxilio) me aliquatenus assequutum esse confido.

In illum finem, *Conum* ipsum primo (unde, quæ dicuntur, *Coni-sectiones* ortum trahere existimantur) accuratius paulo considerandum duxi; ut inde Coni-sectionum originem repeterem, earumque affectiones tanquam à vero fonte deducerem; Methodi saltem qua & Apollonius Pergæus, *Magnus Geometra* dictus, & post illum tam Veteres quam Recentiores incedunt, fontes aperirem; qui in ipsis Demonstrationibus non ita semper eminent ut statim perspiciantur, & fortassis etiam nonnunquam studio occultantur. Non tamen ea methodo totam Coni-sectionum doctrinam prosequor; sed eousque saltem procedo donec primarias atque essentiales earum affectiones detexerim, ut ipsarum natura atque essentiales characteres innotescant, ut inde reliquæ deinceps affectiones calculo deduci possint; (Quod etiam in sequentibus factum est.) Atque hoc quidem præstitum est in propositionibus, sive Sectionibus viginti primoribus. Insertis interim obiter nonnullis de Conoidibus & Pyramidoidibus (quatenus sine nimia digressione commode fieri potuit;) & præmissis aliquot quasi Lemmatibus necessariis.

Deinde, sepositis quæ à Cono dependent mensuris, aliisque in eorum locum substitutis, quæ Coni-sectionem ubique (sive in Cono, sive extra Conum,) comitentur; Coni-sectiones (vulgo dictas) Cono liberatas atque exemptas, absolute (nullo ad Conum respectu habito) considerandas suscipio, (totam tractationem quasi de novo exorsus,) tanquam totidem lineas (sive figuras) curvas in plano descriptas, quæ vel Sectione Coni, vel etiam aliis modis infinitis effici possent. Neque enim Parabola, Ellipsis, aut Hyperbola, à Cono secto magis necessario dependent, quam vel Peripheria vel etiam Triangulum, (quæ quidem & secto Cono, & aliis mille modis produci possunt:) Ideoque simplicius atque universalius tradi & possunt & debent.

Denique, Appendicis loco, specimen exhibere libuit ampliandæ Curvarum doctrinæ; (sicut &, in progressu, Conoideωn & Pyramidoideωn, tam erectorum quam scalenorum, quod tamen nemo, quod sciam, antea fecerat, doctrinam attigeram; cum antea Conoideωn non nisi rectorum, nec quidem Pyramidoideωn omnino, ratio ulla habita fuerit:) adjuncta ad calcem nova, nec ab ullo (credo) antehac tentata Paraboloideωn speculatione.

Atque hæc sunt quæ in sequentibus exspectet Lector φιλομαθὴς, brevi quantum potui methodo tradita, nec tamen ea propter obscuritate involuta. Ideoque

prolixam,

prolixam, quam nonnulli affectare videntur, numerosæ Lemmatum & Propositionum seriei, linearibus ubique demonstrationibus, sat quidem longis nonnunquam atque involutis, comprobatorum, pompam diffugiens; ipsas ut plurimum non modo ἐκθέσεις, sed & ἀποδείξεις (ubi id levi commonitione tanquam in transitu præstari possit, nec Propositionis seriem nimis conturbet) ipsis Propositionibus inserui, brevitati simul & perspicuitati consulens: Demonstrationibus etiam (eadem de causa) potius ex Arithmetico calculo petitis (Arithmeticam *speciosam* intellige) rem agens, quam linearibus; cum illæ nec minus scientificæ sint, & magis perspicuæ, sed & simpliciores sunt atque magis universales, nec quisquam est (quod sciam) qui Demonstrationes Arithmeticas in Geometria admittendas negaverit; & quidem (præterquam ubi de Angulis aut Inclinationibus agitur, aliove aliquo situ locali, aut quæ immediate hinc dependent,) non video quorsum linearibus ductibus in demonstrando admodum opus sit, cum ea omnia quæ ex Rationibus sive Proportionibus ordinandis, alternandis, invertendis, convertendis, componendis, dividendis, addendis, auferendis, &c. dependent, non magis Geometrica sint quam Arithmetica, ne dicam potius pure Arithmetica; quanquam (ut Arithmetica omnia) tàm rei Geometricæ quam aliis etiam disciplinis Mathematicis sæpissime immisceantur.

His Præmonitis, rem ipsam aggredior.

PARS

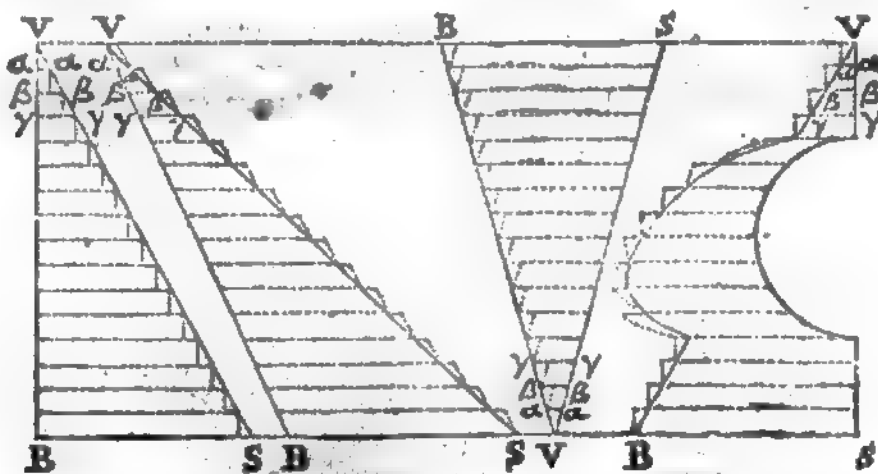
PARS PRIMA.

PROP. I.

De Figuris planis juxta Indivisibilium methodum considerandis.

SUppono in limine (juxta Bonaventuræ Cavallerii *Geometriam Indivisibilium*) Planum quodlibet quasi ex infinitis lineis parallelis conflari: Vel potius (quod ego mallem) ex infinitis Parallelogrammis æque altis; quorum quidem singulorum altitudo sit totius altitudinis $\frac{1}{\infty}$, sive aliquota pars infinite parva; (esto enim ∞ nota numeri infiniti;) adeoque omnium simul altitudo æqualis altitudini figuræ.

UTrovis autem modo res explicetur (sive per infinitas lineas parallelas, sive per infinita parallelogramma æque alta infinitis illis lineis interjecta) eodem res redibit. Nam Parallelogrammum cujus altitudo supponitur infinite parva, hoc est, nulla, (nam quantitas infinite parva perinde est atque non-quanta,) vix aliud est quam linea. (In hoc saltem differunt, quod linea hæc supponitur dilatabilis esse, sive tantillam saltem spissitudinem habere ut infinita multiplicatione certam tandem altitudinem sive latitudinem possit acquirere, tantam nempe quanta est figuræ altitudo.) Nos igitur in sequentibus (partim quod ille mos loquendi in Cavallerii methodo de *Indivisibilibus* videatur obtinuisse, partim etiam ut brevitati consulamus,) Linearum potius quam Parallelogrammorum nomine partes illas figurarum infinite exiguas (sive altitudinis infinite exiguæ) nonnunquam appellabimus, quando saltem determinatæ altitudinis consideratio non habetur; Ubi autem determinatæ altitudinis instituetur consideratio (quod aliquando fiet,) exiguæ illius altitudinis eousque ratio habenda erit, ut ea infinities multiplicata totam figuræ altitudinem supponatur adæquare.

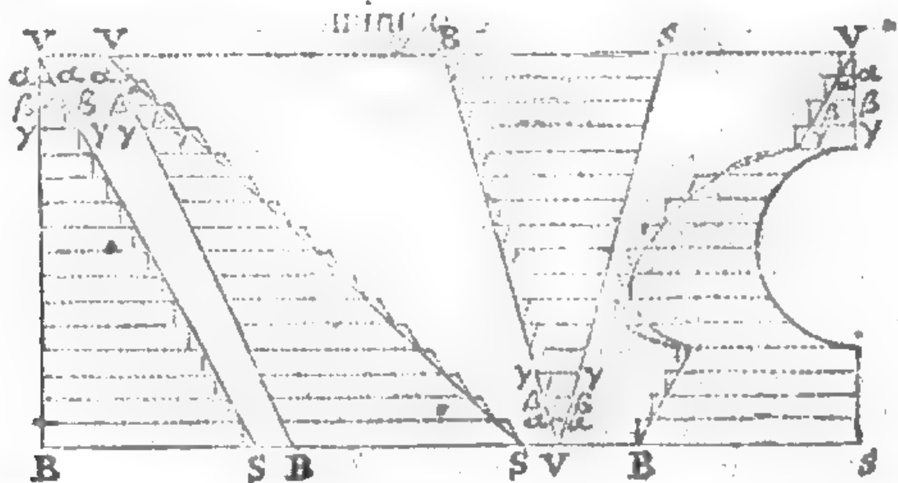


Quod autem de Lineis & Parallelogrammis perinde nominandis, dictum est, intelligendum etiam erit de Circulis & Cylindrulis, vel etiam de Planis quibusvis & Prismatibus super illa plana constitutis : dummodo supponantur tantam sive crassitiem sive altitudinem habere quantæ est $\frac{1}{\infty}$ *altitudinis illius figuræ quam constituunt.* Nam Cylindrus nullius altitudinis, vel infinite exiguæ, quid aliud est quam Circulus? & Prisma, altitudinis vel nullius vel infinite exiguæ, perinde atque planum tractari poterit. Atque hoc jam statim ab initio monendum esse duxi, ne sæpius illud deinceps repetere necesse foret.

PROP. II.

De Triangulo.

SI Triangulum recta, basi parallela, secetur, erit abscissum Triangulum secto simile; & propterea latera habebit proportionalia (ut notum est.) Adeoque, si Triangulum quodvis V B S, rectis quotcunque $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, &c. basi B S parallelis, & æqualiter ab invicem dissitis, secetur; quæ propterea Crurum utrumvis (adeoque & utrumque) dividant in segmenta æqualia, (& propterea etiam totum Triangulum in segmenta æque alta:) erunt illæ rectæ $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, &c. Arithmetice proportionales: (sunt enim inter se $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, &c. ut $V\alpha$, $V\beta$, $V\gamma$, &c. hoc est, ut 1, 2, 3, &c. propter æquales excessus $V\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, &c.) Ideoque si rectæ illæ supponantur numero infinitæ, erit



omnium series, (hoc est, totum Triangulum, per prop. præced. aggregatum rectarum numero infinitarum Arithmetice proportionalium, quarum minima est punctum V (verticis nimirum,) maxima est B S basis Trianguli.

Atque idem continget si infinitis illis rectis supponamus totidem Parallelogramma in eodem plano interjici, quorum singulorum altitudo sit $\frac{1}{\infty}$ altitudinis Trianguli: Erunt scilicet & illa Arithmetice proportionalia. Cum enim æquealta sint, sunt & basibus proportionalia.

Hæc autem omnia Parallelogramma simul sumpta, figuram constituent Triangulo illi sive inscriptibilem sive circumscriptibilem, (cum omnium bases supponantur Triangulo aptari:) quo autem plura sunt (in ejusmodi figura inscripta vel circumscripta) Parallelogramma, eo minori sive excessu sive defectu differt figura illa à Triangulo cui adscribitur; adeoque, cum supponantur numero infinita, erit differentia illa infinite exigua, hoc est, nulla; atque propterea supponenda ea figura sic adscripta (ex Parallelogrammis infinitis Arithmetice proportionalibus conflata) Triangulo æqualis, seu potius eadem: Eadem quidem lege qua Polygonum regulare infinitorum numero laterum, (sive inscribi supponatur sive circumscribi) pro Circulo haberi solet.

Quod si quispiam sit qui noluerit hoc concedere, poterit ille potissima methodo Apagogica cogi: multiplicatis nempe eousque Parallelogrammis, ut differentia tandem quavis assignata quantitate minor sit. Ego vero ejusmodi ἀπαγωγαῖς supersedendum esse existimo, partim ne Lectori nauseam crearem ejusmodi cramben sæpius iterando, partim quia nemo est in Mathematicis paulo exercitatior, qui non poterit (si ipsi opus esse videatur, tantique supersit otii) supplere, cum ea Methodus demonstrandi tam apud Veteres quam Recentiores passim occurrat.

Quod

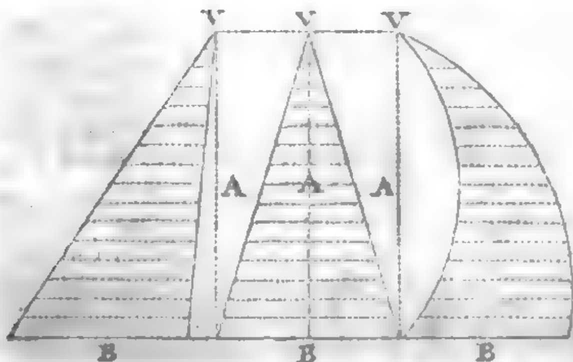
Quod autem de Triangulo jam dictum est, illud nempe figuræ ex infinitis Parallelogrammis conflatæ (sive inscriptæ sive circumscriptæ) æquale esse, seu potius eandem figuram; intelligendum erit de quavis alia figura plana; cum eadem sit in omnibus demonstrandi ratio. *Nec quidem Planis solummodo, sed & figuris Solidis illud convenit: si nempe pro Parallelogrammis substituamus Prismata*: (qua voce etiam Cylindrulos comprehendi volo, aut etiam ejusmodi quasvis figuras inter parallela plana similia, sive rectilinea sint sive curvilinea sive mista, æquabiliter positas; ne longis verborum ambagibus utendum sit.) Atque hoc semel moneo, ne quis deinceps novas Demonstrationes exspectet quoties idem de aliis figuris dicendum occurret.

PROP. III.

De Area Trianguli.

CUm Triangulum constet ex infinitis sive lineis, sive Parallelogrammis, Arithmetice proportionalibus, a puncto inchoatis & ad basin continuatis, (ut patet ex jam dictis:) Erit Area Trianguli æqualis Basi in Altitudinis semissem ductæ.

Est enim notissima apud Arithmeticos regula; *Summam Arithmeticæ progressionis, sive omnium quotcunque terminorum aggregatum, æquari aggregato extremorum in semissem numeri terminorum ducto.* Adeoque, si terminus minimus supponatur o; (prout hic supponitur, tantundem enim valet punctum in magnitudine atque o Ciphra in numero;) idem erit extremorum aggregatum atque ipse terminus maximus. Altitudinem vero figuræ, pro numero terminorum in Progressione, substituo, hac de causa, Quoniam cum numerus terminorum supponatur ∞, erit omnium longitudinum aggregatum $\frac{\infty}{2}$ Basis, (quia Basis jam est extremorum aggregatum.) Cum autem cujuslibet (lineæ vel parallelogrammi) crassities sive Altitudo supponatur $\frac{1}{\infty}$ Altitudinis trianguli; in illam tota longitudinum summa ducenda est; adeoque $\frac{1}{\infty}$ A in $\frac{\infty}{2}$ B erit area. Est autem $\frac{1}{\infty} A \times \frac{\infty}{2} B = \frac{1}{2} AB$. Adeo ut A (figuræ altitudo) non solum longitudinum numerum, sed eundem in communem omnium altitudinem ductum, exhibeat quæ quidem communis altitudo tanto minor supponenda est, quanto termini seu longitudines sunt plures.



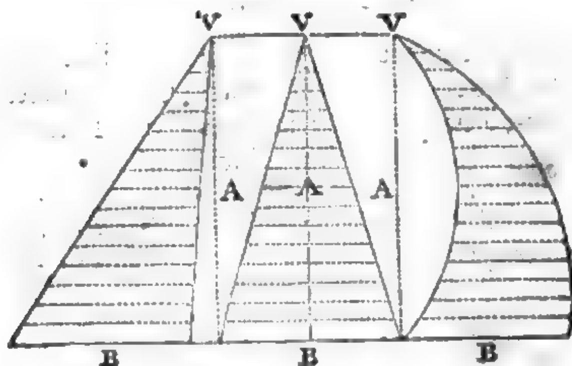
Notandum autem est, *Hoc non solummodo in veris Triangulis (rectilineis) valere; sed & idem pariter evenire quamvis crura sint vel curvilinea, vel quomodocunque a rectitudine distorta, modo rectæ omnes basi parallelæ sint suis a vertice distantiis proportionales, adeoque inter se Arithmetice proportionales.* Ejusmodi vero figuram, cum sit Trianguli instar, *Triangulum distortum, luxatum,* aut *deformatum,* licet appellare.

PROP. IV.

De Triangulis æque altis.

Hinc sequitur; Triangula super æqualibus basibus æque-alta, (sive rectangula sint sive obliquangula, sive item sint æquicrura sive scalena, sive quocunque modo luxata,) esse inter se æqualia.

Cum enim in calculo nulla angulorum situsve habeatur ratio, sed Basis solum-



modo & Altitudinis; modo de his constet, constabit etiam de area Trianguli.

Quod autem de Æqualitate dictum est, facile potest etiam Proportionalitati accommodari. Quod & sæpius deinceps erit intelligendum.

Has vero duas de Area Trianguli Propositiones, non ideo hic inserendas judicavi, acsi novum quid aut inauditum in se contineant, (quis enim hæc nescit?) sed ut via sternatur consimili argumentationi in aliis figuris sive planis sive solidis. *Si enim æquales sint tam bases quam altitudines, omniaque intermedia (sive Parallelogramma sive Prismata) eadem ratione vel crescant vel decrescant, æquales etiam erunt figuræ, quamvis earum altera erecta sit, altera vel inclinata vel quocunque modo luxata.* Nam cum infinitæ partes unius infinitis partibus alterius sigillatim æquentur, (quanquam fortassis in alio situ reperiantur,) erunt & aggregata æqualia.

Atque hoc quidem semel & universaliter monstrasse sufficiat, ne varias deinceps propositiones particulares, citra necessitatem, multiplicare cogar.

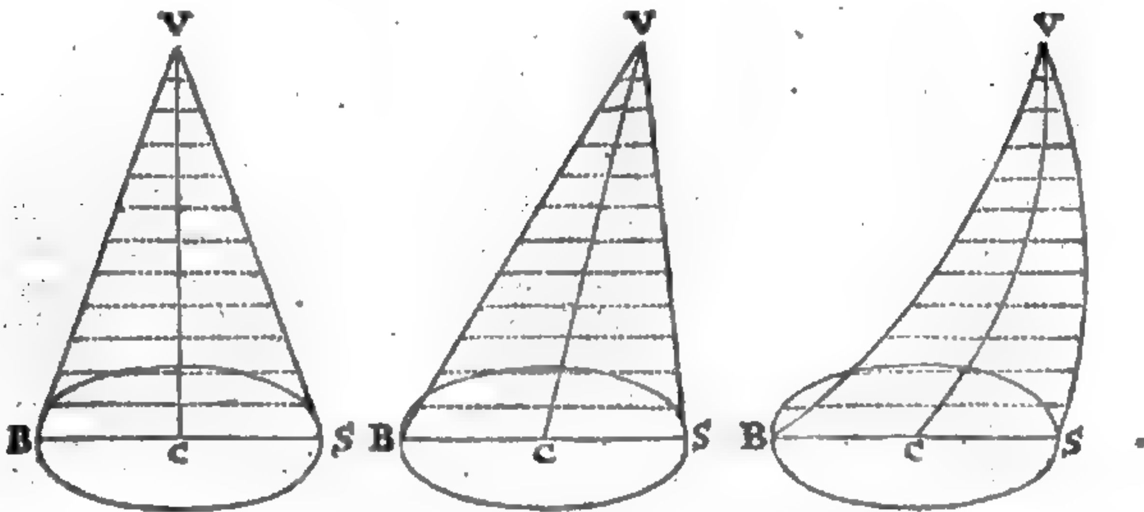
PROP. V.

De Cono.

Si infinitæ Rectæ parallelæ ex quibus constari supponitur Triangulum, fiant totidem Circulorum parallelorum diametri; formabitur figura solida qui *Conus* dicitur.

Rectaque à Trianguli vertice V (qui & *Coni Vertex* est) ad Basis BS punctum medium ducta, puta VC, (quam *Trianguli Diametrum* vel *Axem* libet appellare,) bisecabit etiam reliquas Trianguli rectas basi parallelas (totumque triangulum,) adeoque per singulorum circulorum parallelorum centra transibit; eritque propterea *Axis Coni*; Triangulumque expositum, VBS, per Axem Coni transiens, ipsum Conum ejusque parallelos Circulos bisecabit: Circulusque ille cujus diameter est basis Trianguli, *Coni basis* dicetur.

Conus



Conus autem sic formatus, si tam expositi Trianguli Crura sint æqualia, quam circulorum plana plano Trianguli recta, erit *Conus Rectus*, (utpote cujus Axis est Basi perpendicularis, qui propterea *Axis Rectus* dici solet;) si vero vel altera vel alterutra illarum conditionum desit, (puta si vel expositum Triangulum sit inæquicrurum, vel plana circulorum plano Trianguli oblique insistant,) erit *Conus Scalenus*, hoc est inclinatus vel obliquatus, (cujus nempe Axis *Basi* oblique insistit, atque *Axis Obliquus* dici solet:) si vero Triangulum Distortum fuerit, fiet & *Conus Distortus*, non verus Conus.

Prout autem Triangulum potest (productis infra basin cruribus) in infinitum continuari; ita & Conus pari modo continuandus supponitur.

Atque etiam, sicut (continuatis, post decussationem, Trianguli cruribus supra verticem) aliud formari potest κατὰ κορυφὴν Triangulum (quod *Triangulum oppositum* appellamus, ita & *Oppositum Conum* formari supponendum est.

Pleraque in propositione (præterquam quod Definitiones sint) per se satis patent, nec ulteriori egent Demonstratione. Unicum opus est, ut ostendam, nempe *Figuram solidam sic formatam*, (si Conum Distortum eximas,) *talem Conum esse qualem definit Apollonius*: Vel, quod idem est, Parallelos circulos coni nostri parallelis Circulis coni Apollonii congruere. Quod quidem verum est.

Nam (propter parallelismum Circulorum, adeoque & eorum Diametrorum in eodem plano existentium, istasque Diametros distantiis à vertice proportionales,) si latus alterutrum, expositi Trianguli per axem, puta VB circumferatur secundum circuli unius (puta Basis) Peripheriam, transibit etiam per Peripherias reliquorum, Radiorum extremitates lambens (qui ubique sunt distantiis à vertice proportionales & basis radio paralleli, adeoque, durante tota circumductione, triangulo quod Axe trianguli expositi, recta circumducta, & basis radio comprehenditur, ubique accommodatur,) totamque figuram describet: Quæ est Apollonii constructio Coni. Conus igitur à nobis formatus idem est cum Apollonii Cono: Quod erat ostendendum.

Atque hinc etiam sequitur, *A vertice ad quodvis superficiei Conicæ punctum rectam duci posse.*

Recordandum interim est, (quod supra universaliter monuimus,) sicut lineis trianguli, ita planis Coni, aliqualem crassitiem concedendam esse, quanta nempe est $\frac{1}{\infty}$ altitudinis Coni: vel, quod idem est, Circulorum appellatione, cylindrulos numero infinitos, tantæ quidem altitudinis, super circulis illis constitutos intelligendos esse; qui igitur solidum ex infinitis cylindrulis cono vel inscriptum vel circumscriptum supponuntur constituere; quod solidum idem esse cum cono, eodem argumento concluditur quo usi sumus de Triangulo, Prop. 2.

Coni autem *Altitudo*, mensuratur perpendiculo à Vertice ad planum Basis demisso;

misso; adeoque eadem est cum altitudine Trianguli, si circuli sint triangulo recti, (erit enim perpendiculum illud in ipso trianguli plano, adeoque ipsius etiam basi, saltem productæ, perpendicularis, ejus altitudinem metiens;) sin secus, minor erit; tunc enim perpendiculum ad basin trianguli demissum, erit ad Coni basin obliquum, adeoque majus perpendiculo altitudinem Coni metiente.

Notandum tamen insuper est, Conum formari posse, non modo si expositi Trianguli rectæ parallelæ, sint circulorum Diametri, verum etiam si circulis (vel quidem similibus Ellipsibus) alio quovis modo similiter aptentur; (quod, si opus sit, facile est demonstratu; nos autem obiter tantum monemus:) Verum, eo casu, Triangulum illud non necessario per Axem Coni incedet, neque ea omnia consequentur symptomata quæ hinc dependent.

Si vero, pro Circulis, substituantur totidem Figuræ rectilineæ, (aliæve vel curvilineæ vel mistæ, præter circulos & Ellipses,) non quidem Conus, sed saltem *Pyramis* emerget: Cui & ea omnia facile accommodari possunt (mutatis mutandis) quæ de Cono (hoc est, Pyramide rotunda) diximus. Pyramidis autem nomen hic latiori sensu accipiendum volo, quam ut solis figuris rectilineas bases habentibus conveniat; ita nempe ut bases planas quascunque admittat, (sicut & de Prismate supra dictum est ad Prop. 2.) ne scilicet longis verborum Ambagibus utendum esset. Adeoque ——

PROP. VI.

De Pyramide.

P*Yramidis* voce (sub qua & Conum comprehendo) intelligo Figuram solidam ex infinitis planis circa eundem Axem rectilineum ordinatim-positis conflatam; quorum omnium crassities supponuntur invicem æquales (nempe $\frac{1}{\infty}$ altitudinis figuræ solidæ,) diametri vero (vel homologa latera, aut etiam rectæ quævis similiter positæ) distantiis à vertice proportionales; adeoque ipsa plana in duplicata ratione distantiarum à vertice, (sicut & *Prismatis* nomine intelligo ejusmodi planorum aggregatum invicem æqualium.)

Si autem Pyramis plano per verticem secetur; manifestum est plana similia (parallela) similiter secari; communes ergo sectiones (planorum secantis & sectorum) sunt infinitæ rectæ Arithmetice proportionales, (nempe in subduplicata ratione figurarum, hoc est, in ratione distantiarum à vertice,) adeoque omnium aggregatum erit triangulum; per Prop. 2.

Axem vero Pyramidis (ut & Prismatis) appello, Lineam à vertice ductam, similium planorum parallelorum omnium centra conjungentem. *Plana* vero ad Axem *ordinatim-posita*, appello, quæ parallela, & similia similiterque posita, centra habent in axe.

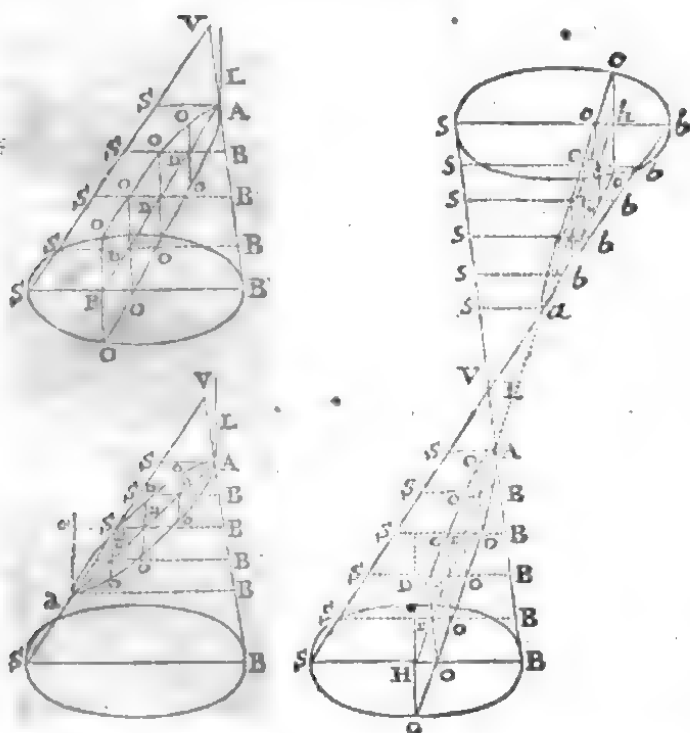
Si vero, vel quod triangulum, unde formari supponitur Pyramis, non sit rectilineum, (sed curvilineum, seu quocunque modo deformatum,) aut ob aliam quamlibet rationem, Planorum, centra non sint in eadem recta; vel ipsa plana circa eundem Axem non sint similiter posita, (sed spirali puta, vel alio quovis modo distorta;) modo interim plana sint similia & æqualiter crassa, debitamque ad invicem rationem retineant; *Pyramis laxata, distorta*, vel *deformata* dici potest. (Quæ etiam de Prismate, aliisque figuris solidis, pariter intelligenda sunt.) Lineaque omnium centra conjungens (si recta non sit) *Axis distortus* dici potest.

PROP.

PROP. VII.

De Coni-Sectione.

SI à puncto quovis, ut A, in Trianguli VBS (per Axem coni incedentis, & circa quod supponitur Conus formari) utrovis Crure, recta ducatur Triangulum secans (puta AP, AE, AH;) super quam intelligatur Planum plano Trianguli ita insistere, ut aliquem ex parallelis Coni circulis (si saltem ipsis parallelum non sit) secet secundum rectam OO, quæ sit istius circuli diametro puta BS, (in triangulo VBS exsistenti) perpendicularis, (adeoque & reliquos quos secat circulos isti parallelos secet secundum rectas ipsorum diametris in eodem triangulo exsistentibus perpendiculares, quæ propterea & ipsi OO parallelæ erunt; ut statim demonstrabitur:) communis Sectio superficierum Coni, planique secantis (puta OAO,) *Sectio-Conica* vel *Coni-Sectio*, dici solet; Et quidem vel Parabola, vel Ellipsis, vel Hyperbola: Nempe *Parabola*, si recta sic ducta sit reliquo cruri parallela, (adeoque nusquam ipsi, quantumvis utrinque producatur, occurrens,) ut AP: *Ellipsis* vero, si recta sic ducta ad crus oppositum vergat, (adeoque ipsi, saltem producto, sit infra verticem occursura,) ut AEa: *Hyperbola* denique si recta sic ducta ab opposito crure recedat, ut AH, (quæ igitur ex contraria parte producta opposito cruri, supra verticem continuato, occurret, puta in a.)



Punctum autem A, coni-Sectionis *Vertex* dicitur; & quidem A, a, (in Ellipsi & Hyperbola) *Vertices oppositi.* Rectæque AP, AE, AH, coni-sectionum *Diametri*, (nempe AP Parabolæ, AE Ellipsis, AH Hyperbolæ:) ipsaque Aa (Ellipseos vel Hyperbolarum) *Diameter transversa*: (idem nempe planum quod Hyperbolam in uno aliquo cono efficit,

efficit, cum etiam ad Oppositum Conum pertingat, *Oppositam Hyperbolam* ibidem efficit.) Rectam autem OO, reliquasque ipsi in eadem Coni-sectione parallelas, (totidem parallelis in Cono circulis, & Coni-sectioni communes,) *Ordinatim-subtensas*, sive *Ordinatim inscriptas*, appello: quæ, cum sint circulorum diametris perpendiculares, (ut constructio postulat,) ab ipsis bisecantur, adeoque & à Coni-sectionis Diametro, (quæ nempe per eadem bisectionum puncta transit;) Earumque semisses, ut DO, diametro Coni-sectionis *Ordinatim-applicatæ* dicuntur; suntque inter bina diametri circularis (cui perpendiculariter insistunt) segmenta, BD, DS, mediæ proportionales: Quæ quidem si diametro Coni-sectionis AD, ad angulos rectos insistant, Diameter illa *Axis* dici solet (qui suis ordinatim-applicatis est perpendicularis;) sin minus, saltem Diameter, vel *Diameter Obliqua* vel *inclinata* dici solet.

Ut autem Conus ipse, sic & Coni-sectiones (Parabolam intellige & Hyperbolam, nam de Ellipsi secus est,) simul cum Cono in infinitum continuandæ supponuntur.

Quod autem *Planum Coni-sectionem efficiens, si unam ex parallelis Coni circulis secet secundum rectam* OO, *ipsius diametro* BS *perpendicularem, etiam reliquos illi parallelos quos secat circulos secabit secundum rectas quæ ipsorum diametris ipsi* BS *parallelis sint perpendiculares*: Sic demonstrabitur. Cum circuli supponantur paralleli, erunt & eorum sectiones OO, OO, (eodem plano factæ) parallelæ, (per 16 e 11.) quæ propterea cum parallelis circulorum diametris (BS, BS,) eosdem angulos faciunt, (per 10 e 11.) ponitur autem, angulos ad diametrorum parallelarum unam rectos esse; ergo & ad omnes; Quod erat demonstrandum.

Reliqua in Propositione vel Definitiones sunt, vel ex propositionis curriculo satis patent.

Monendum autem est *Parabolæ, Ellipsis, & Hyperbolæ* appellationibus, apud Geometras, (qua igitur libertate & nos aliquando usuri sumus,) nonnunquam curvas *lineas* in superficie conica factas, (quas in propositione definivimus,) nonnunquam vero *figuras planas* ejusmodi curvis terminatas, intelligi. Siquando autem de ambiguitate significationis metuatur, non incommodum erit *lineæ* vel *plani* vocem adjungere; ut *linea Parabolica, planum Parabolicum, &c.*

Monendum est etiam, sub *Ellipseos* nomine (quod tamen alii non solent) me etiam *Peripheriam Circuli* comprehendere, (vel etiam ipsum Circulum.) Circulus enim ab Ellipsi (figuram intellige linea Elliptica comprehensam,) non aliter differt quam ut Quadratum à Parallelogrammo. Nam ut *Parallelogrammum* cujus latera sunt æqualia angulique recti, vel (si libet) cujus diametri conjugatæ sunt æquales & ad angulos rectos, (habent enim & figuræ rectilineæ suas diametros, quanquam non ut curvilineæ numero infinitas, suisque diametris ordinatim-applicatas; & quidem Parallelogrammum diametrorum habet duo paria, nempe duas diagonales, & duas lateribus parallelas se mutuo bisecantes; tam illæ autem quam hæ sunt conjugatæ:) est *Quadratum*: Sic *Ellipsis*, cujus diametri conjugatæ sunt æquales & ad angulos rectos, *Circulus* est. Et quidem ea omnia quæ Ellipsibus universaliter conveniunt, conveniunt etiam circulis, (non minus quam quæ Parallelogrammis conveniunt, conveniunt Quadratis,) nisi quod Ellipseos appellatio non soleat illis attribui. Sicui nostra hæc phrasiologia non placeat, fruatur suo sensu; modo sciat, quid apud me Ellipseos nomine significetur; quod necessario monendum erat, ne dicta nostra perperam intelligantur.

Monendum insuper est, Quod ea omnia quæ jam exposuimus de uno Triangulo-per-axem, unde Conum formari supponimus, pariter intelligenda sunt de infinitis aliis Triangulis Conum per axem dividentibus. Potest enim super eorum quodvis ejusmodi formatio Coni supponi. Manentibus enim eisdem centris, distantiis, & planis, iidem formantur circuli, quamvis aliæ atque aliæ sumantur

mantur Diametri, hoc est, quamvis alio atque alio triangulo Conus per axem dividatur. Verbi gratia, Triangulo V$\beta\sigma$ (per axem etiam transeunti) eadem conveniunt quæ ipsi VBS convenire diximus.

Non tamen hæc ita intelligenda sunt, acsi quocunque Triangulo-per-axem accepto, eadem numerica Coni-sectio, methodo jam dicta, formaretur: Sed saltem quocunque Triangulo-per-axem accepto, puta V$\beta\sigma$, fieri potest ut illi accommodentur coni-sectiones eodem modo quo ipsi VBS. Quamvis enim verum sit, quod Coni-sectionis OAO, aliquod punctum, ut α, sit in crure Vβ; attamen planorum OAO, OBO, communis sectio OO, non erit trianguli V$\beta\sigma$ basi $\beta\sigma$ perpendicularis, (quod in Coni-sectionis genesi, in propositione tradita supponitur;) supponitur enim perpendicularis esse alii ejusdem circuli Diametro BS, rectam $\beta\sigma$ secanti; non igitur & ipsi $\beta\sigma$ perpendicularis esse potest.

At interrogabit fortasse quispiam, Quid causæ sit, cur illud postuletur ut recta OO (circulo & Coni-sectioni communis) sit circuli diametro BS (in triangulo VBS existenti) perpendicularis? Annon enim, si planum secans ad triangulum-per-axem aliter inclinaretur, secaret superficiem Coni? Omnino. An vero ea sectio non una esset ex eis quas definivimus? Esset omnino. Cur igitur illa sola inclinatio plani-secantis ad triangulum-per-axem admittitur, quæ rectam OO rectæ BS perpendicularem efficiat? Respondeo; Quod alia quævis inclinatio non minus quidem sufficeret ad Coni-sectionem aliquam efficiendam; sed minus apta esset ad Demonstrationes instituendas; cum hæ plerumque supponant rectam OO, eique parallelas, à circulorum diametris bisecari, quod non fieret nisi diametris illis essent perpendiculares. Ideoque cum Planum Coni-sectionem efficiens ad varia triangula-per-axem variam inclinationem habeat, illud ex omnibus triangulum seligunt Conicorum scriptores ad cujus basin rectæ illæ OO sunt perpendiculares. Unum enim aliquod triangulum per-axem (& quidem unicum) illud patitur, (nisi forsan coni-sectio proposita unus sit ex circulis basi parallelis,) quomodocunque Conus à plano secetur.

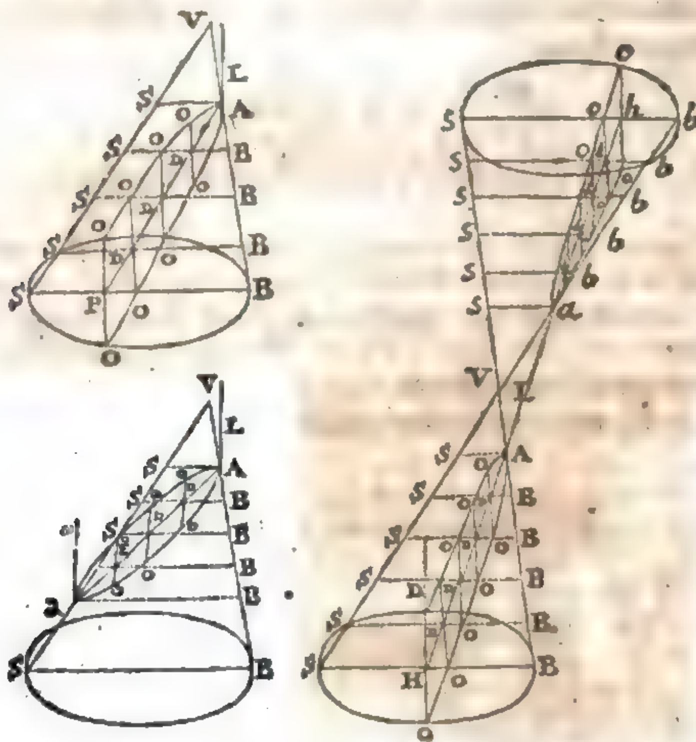
Quodnam autem ex omnibus illud sit, sic investigatur; si, verbi gratia, Conus VBO, plano secetur faciente Coni sectionem OAO, unum aliquem ex parallelis circulis OBO secante in OO: Ducatur in OBO circulo, diameter ipsi OO perpendicularis, quæ sit BS, & compleatur Triangulum VBS. Patet enim Planum Coni-sectionem efficiens, triangulo VBS ita insistere, (puta in AD, quæ propterea Coni-sectionis diameter erit,) ut circulum OBO secet secundum rectam OO ipsius Diametro BS (quæ & Trianguli VBS basis est,) perpendicularem, Quod erat faciendum. Triangulum igitur VBS illud est, secundum quod Coni-sectionis OAO natura & proprietates sunt perpendendæ, (si autem non ipsa BS, sed alia aliqua, puta $\beta\sigma$, fuisset ipsi OO perpendicularis; tum non Triangulum VBS, sed V$\beta\sigma$, seligendum esset.)

Et quamvis aliunde quidem verum sit (ut suo loco dicetur,) alias Diametros (aliosque propterea vertices) conisectioni OAO convenire; sola tamen AD ea est quæ dici solet *Diamèter ex generatione*; intellige, prout jam huic Cono applicatur: Nam revera eadem Coni-sectio potest vel alii forsan Cono, vel etiam huic in alio situ, ita accommodari, ut alias habeat Diametros-ex-generatione.

Atque hæc quidem ad pleniorem propositionis intelligentiam monenda duxi.

Sed & ulterius monendum est; Quod, *quum diximus Punctum* A *in utrovis Trianguli crure, puta* VB, *ubivis assignari posse*; *Vel excipiendum erit punctum Verticis V*; *vel, pro Coni-sectione exspectata, prodibit aliquid simplicius*; eo nempe quod una saltem quantitatum ex quibus Coni-sectio dependet, evanescet in nihilum seu non-quantum. Nam, verbi gratia, si punctum A assignetur in cruris VB puncto V, & velim Parabolam describere; recta AP (quæ ducenda erat parallela) cum ipsa VS coincidet; adeoque rectæ SD evanescent, & propterea evanescent ordinatim-applicatæ DO, (nam si altera multiplicantium sit o

ciphra, erit & quantitas producta o ciphra:) adeoque Parabola prodiret nullius latitudinis, hoc est, linea recta, terminata quidem ex parte A vel V, infinita vero ex parte P, vel O: (coincident enim puncta P, O, propter nullitatem ordinatim-applicatarum PO, vel DO.) Eodem modo si describenda sit Ellipsis; Posito puncto A in V, (ubicunque in crure VS supponatur a,) propter coincidentiam punctorum A, V, coincident etiam rectæ Aa, Va: ideoque, evanescentibus rectis DS, evanescent etiam DO; eritque propterea Ellipsis nullius latitudinis, hoc est, linea recta, utrinque quidem, terminata; (saltem nisi & punctum a in cruris VS puncto V assignetur; quo casu, propter coincidentiam punctorum A, a, recta illa degenerabit in unicum punctum.) Pari modo, si describenda esset Hyperbola; posito, ut prius, puncto A in V, (ubicunque assignetur H,) recta HA a crus utrumque VB, VS, eodem puncto V, secabit; adeoque transversa diameter Aa (propter coincidentiam punctorum A, a, V,) evanescet; adeoque Hyperbola in Triangulum degenerabit, (ut ex Hyperbolæ doctrina postea tradenda colligi poterit, interim idem satis patet ex dictis Prop. 6.) Saltem nisi recta



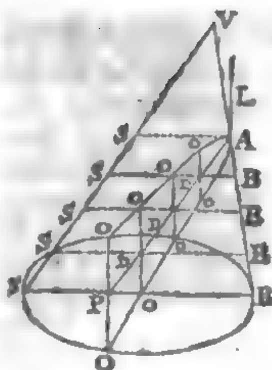
AH eousque recedat à crure VS, ut ipsi VB coincidat; quo casu, (sive A assignetur in vertice V, sive ubivis alias in crure VB,) evanescent rectæ DB, adeoque & DO; & pro Triangulo vel etiam Hyperbola OVO vel OAO, prodibit linea recta, ex una quidem parte terminata, ex reliqua vero infinita.

PROP. VIII.

De Parabola, Sectione Coni facta.

IN Parabola, Quadrata Ordinatim-applicatarum sunt interceptis Diametris proportionalia.

Quadrata nempe ordinatim-applicatarum PO, DO, &c. sunt rectis PB, DB, &c. (in triangulo APB parallelis) proportionalia, (adeoque & *interceptis Diametris*, hoc est, diametrorum segmentis inter



inter ipsas ordinatim-applicatas & verticem interceptis, PA, DA, &c.) æqualia quippe rectangulis BPS, BDS, &c. quæ propter æquales PS, DS, &c. (in parallelogrammo APSS) sunt æque alta, & propterea basibus (PB, DB, &c.) proportionalia.

Adeoque ipsæ ordinatim-applicatæ sunt in subduplicata ratione Diametrorum interceptarum; nempe in subduplicata ratione suorum quadratorum.

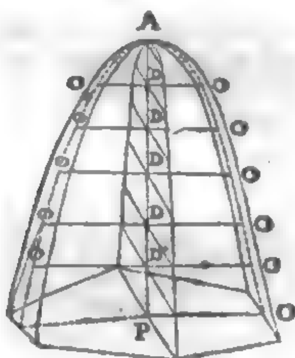
Si igitur ordinatim-applicatæ quotlibet æqualibus ab invicem distantiis sumantur; erunt earum quadrata in continua progressione Arithmetica, (ut patet ex dictis ad Prop. 2.)

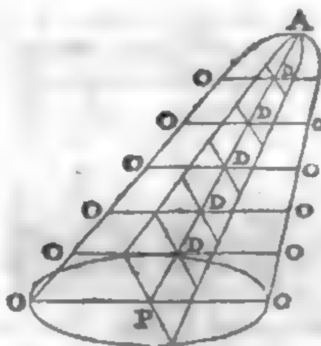
Constabit igitur (per Prop. 1.) semiparabolæ planum (adeoque & totius Parabolæ) ex infinitis numero lateribus quadratorum Arithmetice proportionalium.

PROP. IX.

De Conoide, & Pyramidoeide Parabolico.

Hinc sequitur; Si ex omnium in Parabola ordinatim-applicatarum quadratis, ad communem axem ordinatim positis, formetur *Pyramidoeides Parabolicum* (eo modo quo Prop. 5, 6. formavimus Pyramidem & Conum,) erit illud infinitorum numero planorum Arithmetice pro portionalium aggregatum, (sicut Triangulum rectarum,) ab o incipiendo & continue progrediendo ad basin usque.





Adeoque si Basis figuræ sic constructæ in semissem Altitudinis ducatur, prodibit totius figuræ soliditas: (eodem argumento quo usi sumus de triangulo Prop. 3.)

Cumque idem (eodem argumento) valeat de circulis, aliisve figuris planis similibus quibuscunque, (sunt enim ad invicem, ut diametrorum, vel rectarum quarumlibet similiter ductarum, quadrata;) erit universaliter *Conoeides vel Pyramidoeides Parabolicum*, quacunque base, (sive etiam erectum sit, sive scalenum, sive etiam quocunque modo luxatum, per ea quæ dicta sunt Pr. 4.) *æquale basi in semissem altitudinis ductæ*; hoc est, *Semissis Prismatis* (ut parallelogrammi Triangulum,) *super eadem basi æque-alti.*

Est enim (ex dictis) *Pyramidoeides Parabolicum* (sub quo & Conoeides comprehendo) Aggregatum planorum similium numero infinitorum Arithmetice proportionalium (ab o continue progrediendo,) circa

circa eundem axem rectilineum ordinatim-positorum; quorum quidem singulorum crassities supponitur æqualis ∞ altitudinis totius figuræ solidæ.

Quæ supra Prop. 5, 6. De Pyramide & Cono, eorumque altitudinibus, axibus, planisque ordinatim-applicatis; item de Pyramidibus Conisque rectis, scalenis, luxatis, &c. dicta sunt; eadem fere Pyramidoeidibus & Conoeidibus accommodanda sunt.

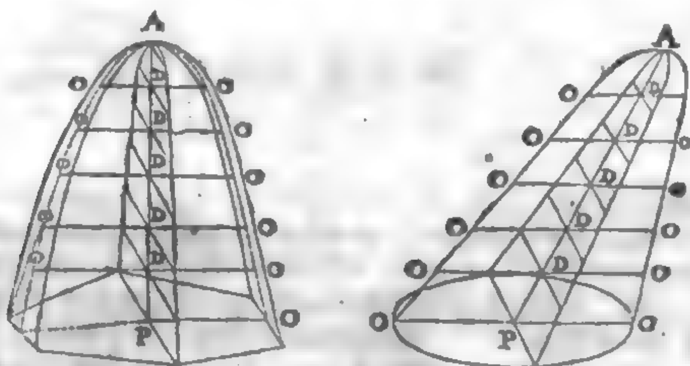
Ego vero hanc Conoeidis, (adeoque & Pyramidoeidis) Parabolici formationem potius adhibeo, quam quæ à veteribus aliisque adhiberi solita est, (nempe, circumducta Semi-parabola recta, manente Axe;) quoniam ea formatio non omnibus Conoeidibus (sed solummodo rectis) nec Pyramidoeidibus omnino convenit. Atque hoc eadem ratione facio, qua Apollonius Euclideam Coni formationem, (circumducto nempe Triangulo rectangulo, manente laterum circa angulum rectum alterutro,) in aliam commutavit (circumducta nempe per circuli peripheriam linea recta, manente ipsius uno aliquo puncto extra circuli planum exsistente:) quia scilicet Euclidea ista solis Conis rectis conveniebat, hæc autem quibusvis sive rectis sive scalenis. Non igitur mirari debet quispiam, si prout ille Euclideam Coni, sic ego Archimedeam Conoeideos, formationem specialem, in aliam magis universalem, commutaverim: quæ etiam & Pyramidoeidibus aliis (de quibus nulla hactenus, quantum scio, consideratio habita fuit) pariter conveniat.

Quæ autem, de Conoeidibus & Pyramidoeidibus Parabolicis formandis, jam diximus; eadem de Ellipticis & Hyperbolicis deinceps intelligenda erunt.

PROP. X.

De Conoeideos & Pyramidoeideos Parabolici sectione.

SI Pyramidoeides (vel Conoeides) Parabolicum plano per axem secetur; cum manifestum sit ipsius infinita numero plana similia similiter secari, & quidem per centra; erunt ea similiter bisecta; atque communes eorum cum plano secante sectiones erunt propterea in figurarum suarum, (quæ quidem Arithmetice proportionales sunt,)



adeoque & distantiarum à vertice, subduplicata ratione, &, propterea, ut ordinatim-applicatæ in Parabola. *Communis igitur sectio (Pyramidoeidis Parabolici, planique per axem secantis,) est Parabola.*

De aliis vero Conoeideos Parabolici sectionibus (non per axem) non libet hic speciatim disserere: *Sunt autem illæ omnes* (vel circuli, vel) *Ellipses.*

Nota tamen, ut ejusdem Parabolæ infinitæ sunt numero Diametri, (ut suo loco dicetur;) ita & *Conoeideos Parabolici infinitos esse* (sive *Diametros* dicas, sive) *Axes; qui quidem omnes* (ut Parabolarum Diametri) *sunt invicem paralleli: Qui omnes sua plana habent Ordinatim-applicata.*

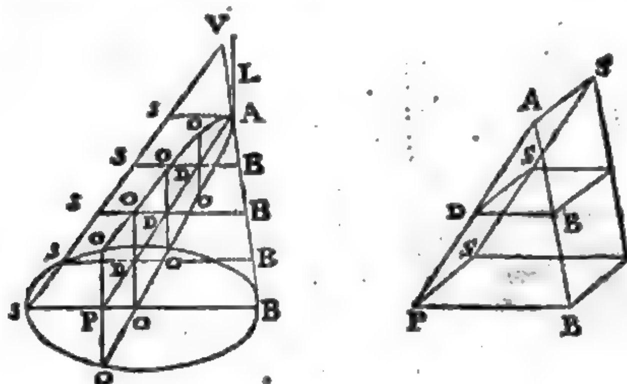
Verum hæc monuisse sufficiat, cum non sit hujus loci ea fusius prosequi.

PROP.

PROP. XI.

De Cuneo Parabolico.

SEd & libet hoc subjungere de Pyramidoeide Parabolico. Quoniam (in Cono) Rectangula BDS æqualia sunt Quadratis DO; si omnes rectæ BD ducantur in omnes DS, (hoc est, si super Triangulo APB, erigatur Prisma cujus altitudo sit AS, vel DS,) fient infinita



numero Parallelogramma BDS æqualia totidem Quadratis DO: Hoc est, Pyramidoeides Parabolicum (cujus basis sit Quadratum PO) æquatur Cuneo seu Prismati APBS, (quem *Cuneum Parabolicum* libet appellare.) Omnia enim BDS rectangula in Cuneo (ipsi BPS parallela) sunt ipsa rectangula BDS in Cono designata. Ideoque & totum toti æquatur, & quidem segmenta illius analogis segmentis hujus.

Intelligendum autem est, Altitudinem Cunei (perpendiculari ab acie AS ad oppositam basin BPS demissa æstimandam) eandem esse debere atque Altitudinem Conoideos.

PROP. XII.

De Parabolæ Latere-Recto.

MAnifestum est, (per ea quæ dicta sunt,) datis rectis DB, DS, hoc est, DB, AS; dari etiam DO (ordinatim-applicatam ad diametri punctum D) ut quæ est inter illas media proportionalis: At non contra; Nam & manifestum est, mensuras illas prorsus extraneas esse (extra Parabolæ planum constitutas) & omnino accidentarias, (non minus quam, in multiplicatione, numeri Factores ad numerum Factum, qui ab aliis etiam Factoribus, infinitis modis variatis, produci possit:) Possunt enim binæ rectæ DB, DS, infinitis modis variari, iisdem interim manentibus tam Diametro Parabolæ quam ad illam ordinatim-applicatis; (si nempe qua ratione augetur vel diminuitur PS vel AS, latus Parallelogrammi APS, eadem è contra minuatur vel augeatur PB latus trianguli APB.) Quod quidem eousque verum est, ut quælibet Parabola cuilibet Cono accommodari possit: (quod mox, ex abundanti, demonstrabimus.)

Ne igitur nulla sit determinata mensura, lineis ad ipsam Parabolam peculiariter pertinentibus exprimenda, qua ordinatim-applicatarum magnitudo explicetur: Loco rectarum DB, DS, hoc est DB, AS,

 (quarum

(quarum hæc invariata manet, illa perpetuo variatur, prout propius aut remotius abest à Parabolæ vertice) duas alias jam olim substituerunt Coni-sectionum contemplatores; Quarum altera est *Diameter intercepta*, AD, quæ intra Parabolam reperitur, estque semper rectæ DB (cujus vices supplet) proportionalis, (utraque nempe eadem ratione simul & crescunt & decrescunt pro vario situ *puncti-applicationis* D.) Reliqua vero, quod *Latus rectum* vocatur, (vel recta diameter, vel recta juxta quam possunt ordinatim-applicatæ, vel etiam, apud Midorgium, Parameter,) non uspiam vel in Coni-sectione, vel in ipso Cono, realiter exsistit; sed sola imaginatione suppletur, ut vices subeat rectæ DS, vel AS: Ideoque quantuplo major est vel minor AD quam DB, tantuplo è contrà minus vel majus supponitur Latus rectum, (puta LA,) quam DS vel AS: Adeoque tribus DB, DS, DA, vel DB, AS, DA, erit quarta reciproce-proportionalis LA; ut æqualia sint rectangula DA × AL, ipsis DB × DS, vel DB × AS, hoc est, quadratis DO. Vel, (substitutis idoneis symbolis, puta $b=$ DB, $s=$ AS, $d=$ AD, $l=$ LA, $p=$ DO,) erit ubique Quadratum ordinatim-applicatæ in Parabola $pp = (bs =)\ dl$.

Estque hoc quidem essentiale Parabolæ symptoma, unde reliqua omnia dependent, & calculo deduci possunt. Ut autem sectione Coni fiat, omnino accidentarium est. Ideoque, genuino symptomate sic reperto, Conum dimittere licet; adeoque ulteriorem in ipsius affectiones inquisitionem differemus donec ad absolutam Parabolæ tractationem (sine respectu ad Conum habito) perveniamus, (quam Prop. 21. & sequentibus aggrediemur:) Interim similia Ellipseos & Hyperbolæ genuina symptomata inquiremus, ut omnium tandem absolutam naturam seorsim perpendamus.

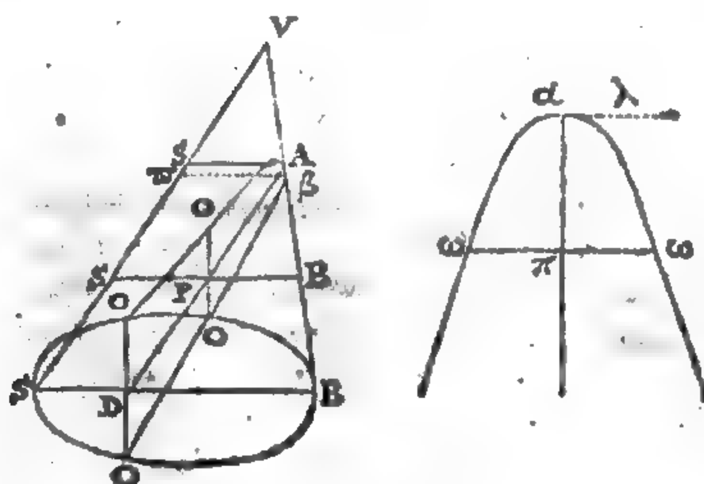
Monendum tamen est de Latere Recto; non idem Latus Rectum omnibus ejusdem Parabolæ Diametris convenire; (Quod etiam de Ellipseos & Hyperbolæ Latere Recto postea intelligendum erit:) Sed (ut habet quælibet Parabola infinitas numero Diametros, ut post dicetur, ita) quælibet Diameter suas habet ordinatim-applicatas, suumque Latus Rectum: Quæ quidem linea imaginaria, certæ tamen longitudinis, (quamvis vel ubivis alias scribi possit, vel etiam non scribi, sed sola imaginatione suppleri,) duci solet à Diametri Vertice ordinatim-applicatis parallela.

Quæ autem de Parabolæ Latere-recto dicta sunt, ea fere Lateribus-rectis Ellipseos & Hyperbolæ infra accommodanda erunt.

Quod autem supra polliciti sumus, ex abundanti, demonstrare; nempe, *Quamlibet Parabolam cuilibet Cono aptari posse*; sic ostenditur.

Sit proposita Parabola (cujuscunque Coni) $\alpha\omega$, cujus axis $\alpha\pi$, ejusque puncto cuilibet π ordinatim-applicata $\pi\omega$. (Quod autem quælibet Parabola Axem habeat, & quomodo in data Parabola reperiatur, post ostendetur; interim illud licebit, sine violata methodo, quasi concessum assumere, cum tota hæc Demonstratio sit ex abundanti:) Dico Parabolam illam cuilibet Cono, puta VBS, aptari posse.

Secetur enim per axem Conus propositus plano ad basin recto; sitque Triangulum illa sectione factum VBDS. In hujus alterutro crure puta VS, sumatur à vertice V π æqualis ipsi $\alpha\pi$ diametro Parabolæ propositæ; & intelligatur recta duci $\pi\beta$ parallela basi BS. Tum rectis $\pi\beta$, $\pi\omega$, quæratur tertia proportionalis, cui æqualis sumatur (in base Trianguli) recta SD; &, per punctum D, ducatur recta DA, lateri VS parallela, reliquoque cruri VB occurrens in



in A. Dico rectam AD diametrum esse Parabolæ in Cono cui Parabola proposita congruet. Quod sic ostendo.

Super Triangulo VBDS, rectaque in illo AD, (quæ est, ex constructione, cruri VS parallela,) ad angulos rectos erigatur Planum, DAO. Cum autem tam planum sic erectum, quam Basis Coni BOSD (ex constructione,) sint triangulo VBS recta; erit eorum communis sectio DO, eidem Triangulo recta sive perpendicularis (per 19 e 11,) adeoque tam rectæ AD quam (diametro basis Coni) BS perpendicularis (per 3 d 11;) ideoque (per 7 hujus) AO, sectio in superficie Coni Plano sic erecto facta, erit Parabola, ejusque Axis AD.

Tum in Axe AD sumatur recta AP, rectæ Vπ, (hoc est απ,) æqualis: ductaque SPB, rectæ SDB parallela; erit (propter similia triangula) PB æqualis rectæ πβ: sed & SP (propter parallelas) æqualis rectæ SD: Ideoque ordinatim-applicata PO (media proportionalis inter SP, PB, hoc est, inter SD, πβ) æqualis est rectæ πω, (quæ ipsis SD, πβ, media proportionalis est, ex constructione.)

Cum igitur tam AP, απ, quam PO, πω, sint æquales rectæ; atque angulus comprehensus APO, angulo comprehenso απω, æqualis, (quoniam uterque rectus;) puncta α, π, ω, punctis A, P, O, applicata congruent; (rectæque AP, PO, rectis απ, πω,) Atque idem eodem modo probari potest de reliquis punctis. Tota igitur αω toti parabolæ AO congruit. Quod fieri posse probandum erat. Adeoque datam Parabolam dato Cono aptavimus: Quod erat faciendum.

Idem Analytice sic poterit investigari. Propositum sit datam Parabolam αω (cujus Axis απ, ordinatim-applicata πω,) dato Cono VBOS adaptare. Et supponamus præstitum esse quod imperatur, sitque ea parabola Cono aptata AO, cujus Axis AP = απ, eique ordinatim-applicata PO = πω. Adeoque recta PO perpendicularis tam rectæ BPS basi Trianguli-per-Axem, aut ei parallelæ, (propter Coni-sectionem,) quam rectæ AP (propter Axem;) ideoque recta PO plano APB (quod trianguli planum est) recta, (per 4 e 11.) & propterea tam planum circuli BOP, quam Parabolæ AOP, (quorum communis sectio est PO) eidem Trianguli plano rectum erit, (per 18 e 11.) Atque hinc quidem constat, Triangulum-per-axem-Coni in quo quærendus est Axis Parabolæ, illud esse, quod Coni basi rectum est; Atque insuper, Planum-secans quod Parabolam efficit (adeoque & Parabolæ planum) isti Triangulo rectum fore. Quæ est prima pars inquisitionis.

Deinde (reperto jam quodnam sit Triangulum per Axem Coni in quo quærendus est Axis quæsitæ Parabolæ; & quam inclinationem habiturum est planum secans ad illud Triangulum: ut situs Axis Parabolæ in illo Triangulo reperiatur, sic progrediendum;) supposito, ut prius, rem factam esse quæ imperatur; & Parabolæ Axem AP in Triangulo-per-Axem VBS jacere: Erit AP (propter parabolam) alterutri Crurum, puta VS, parallela. Ideoque (si per puncta A, P, duci intelligantur in triangulo per Axem rectæ AS, BPS, basi parallelæ,) proportionales erunt (propter similia triangula) $VB . BS :: VA . AS = PS = \frac{BS \times VA}{VB}$.

Item $VS . SB :: AP . PB = \frac{BS \times AP}{VS}$. Item (propter Coni-sectionem)

SP.

SP . PO . PB $\div\!\!\div$, hoc est $\frac{BS \times VA}{VB}$. PO . $\frac{BS \times AP}{VS}$ $\div\!\!\div$ continue proportionales.

Ergo $POq = \frac{VA \times AP}{VB \times VS} \times BSq$. hoc est, $\pi\omega q = \frac{BSq}{VB \times VS} \times VA \times \alpha\pi$. & $\frac{VB \times VS \times \pi\omega q}{BSq \times \alpha\pi} = VA$. Ideoque proportionalia $BSq . VB \times VS :: \frac{\pi\omega q}{\alpha\pi} . VA$. Habetur ergo recta VA, adeoque Parabolæ vertex A, in crure VB, unde ducta AP cruri VS parallela, est diameter Parabolæ quæsitæ.

Hoc est. *Si Conus Propositus secetur plano per Axem, quod Basi Coni rectum sit, triangulum faciente VBS: & fiat, ut BSq quadratum basis trianguli, ad VB × VS rectangulum cruribus contentum; sic* $\frac{\pi\omega q}{\pi\alpha}$. (quadratum ordinatim-applicatæ in Parabola proposita, per Axem divisum, hoc est) *Latus rectum Parabolæ propositæ Axi conveniens; ad VA distantiam verticis Parabolæ a vertice Trianguli, in utrovis ipsius crure mensurandam; Et denique a vertice A recta ducatur AP opposito cruri parallela; eique Planum erigatur plano trianguli VBS rectum: Planum hoc in superficie Coni faciet Parabolam, cui Parabola proposita congruet.*

Demonstratio, per repetita Analyseos vestigia facile instituetur.

Pari fere methodo demonstrari poterit, *Datam Ellipsin vel Hyperbolam* (de quibus postea dicendum erit,) *non quidem Cono cuilibet, sed saltem Conis quotlibet specie differentibus, aptari posse.* Cujus Propositionis & Demonstrationem & Determinationem lubens prætereo, partim ne tædio sim, nec velim tironibus ingenium suum exercendi ansam præripere, partim etiam quoniam illud instituto nostro non est necessarium.

PROP. XIII.

De Ellipsi, sectione Coni facta.

IN ellipsi, Quadrata ordinatim-applicatarum æqualia sunt differentiis binorum rectangulorum; quorum quidem illa (majora) sunt interceptis-Diametris proportionalia; hæc vero (minora) in earundem ratione duplicata.

Sunt enim Quadrata DO æqualia Rectangulis BD × DS; (per prop. 7.) Ducta vero recta SFF, ipsi Aa parallela, & continuatis rectis BDS ad F; erunt ubique rectæ DS = DF − FS. Et Rectangula BD × DS = BD × DF − BD × FS. Sunt autem (propter æquales rectas DF) Rectangula BD × DF, rectis BD proportionalia, ideoque & rectis DA diametris interceptis (propter similia triangula ADB.) Rectangula vero BD × FS (quoniam tam BD quam FS rectæ sunt rectis DA proportionales) sunt in duplicata ratione diametrorum interceptarum DA. Cum igitur sit ubique DOq = (BD × DS =) BD × DF − BD × FS; constat propositum.

PROP. XIV.

De Elliptico Pyramidoeide, & Conoeide, (seu Sphæroeide) & Cuneo.

SI (ut Prop. 5, 6. formavimus Pyramidem vel Conum, & Prop. 9. Pyramidoeides Parabolicum,) ex omnibus quadratis DO ordinatim-applicatarum in ellipsi, formetur *Pyramidoeides ellipticum* bicuspe (hoc

(hoc est, Pyramidoides geminum super communi base, vertices habens oppositos,) æquabitur illud cuneo cuidam bicuneato (nempe binas oppositas acies habenti, sed situ subcontrario & quasi decussato) hoc est, corpori solido super basi triangulari aBA erecto, altitudinem habenti super puncto A æqualem rectæ AS, sed æquabiliter decrescentem donec super recta aB tandem evanescat & nulla sit. Et quidem segmenta illius, Analogis segmentis hujus. Adeoque & notæ mensuræ.

Manifestum enim est, quod, si Cuneus ille bicuneatus (quem *Cuneum Ellipticum* libet appellare) plano ad planum trianguli aBA recto (sicut & AS supponitur ad idem planum recta esse seu perpendicularis) ubivis secetur secundum rectam DB quæ sit aB rectæ parallela, sectio illa præstabit rectangulum BDS, cujus duo latera erunt rectæ aB parallela, reliquaque duo rectæ AS, totumque rectangulum BDS in Cuneo, Analogo rectangulo BDS in Cono designato, æquale erit: Adeoque rectangula omnia BDS in cuneo, æqualia erunt rectangulis omnibus BDS in Cono designatis, hoc est, omnibus quadratis DO; hoc est, totus Cuneus toti Pyramidoeidi bicuspidi æqualis erit, & quidem segmenta hujus analogis segmentis illius. Quod erat ostendendum. Ita tamen ut eadem retineatur altitudo Pyramidoeidis, & Cunei, ut Quadrata unius & Rectangula alterius æque crassa, intelligantur.

Cuneus autem ille bicuneatus, (quem Ellipticum diximus) est Pyramis super basi aBA, altitudinem habens AS, adeoque notæ mensuræ.

Quod autem de Pyramidoeide Elliptico ex omnibus Quadratis DO, dictum est; perinde valeret, si pro quadratis DO, substituerentur quadrata OO (ordinatim inscriptarum;) nisi quod Pyramidoeides hoc esset illius quadruplum.

Cognita vero mensura Pyramidoeidis Elliptici super basi quadrata, adeoque & ratione quam habet ad Parallelepipedum super eadem basi æque-altum: cognoscetur etiam ratio Conoeideos Elliptici (vel, ut dici solet, Sphæroeideos) ad Cylindrum super eadem basi æque-altum; vel etiam Pyramidoeideos super quacunque basi plana (puta triangulari, quinquangulari, &c. vel etiam curvilinea, aut mista,) ad Prisma super eadem basi æque-altum: (si nempe pro omnibus quadratis substituantur totidem circuli, triangula, aliæve similes figuræ.) Per *Basin* autem hic intelligo medium illud planum quod duobus illis sive Pyramidoeidibus sive Conoeidibus est basis communis.

Est autem *Ellipticus* ille (quem dicimus) cuneus, cunei Parabolici segmentum. Si enim cuneus Parabolicus AP, secetur Plano aSB; erit aSBA cuneus Ellipticus sive Pyramis super triangulari basi aBA; reliquum vero segmentum aBSPP est Pyramis super basi quadrilatera aBPP; utriusque vero Pyramidis cuspis communis S. Si igitur ex Prismate (cuneo nempe Parabolico) AP, auferatur Pyramis aBSPP, restabit Cuneus Ellipticus (vel Pyramis) aSBA; cui æquale est Pyramidoeides Ellipticum.

Sed & idem immediate colligi potest ex propositionis præcedentis calculo. Cum

enim omnia rectangula $BD \times DS$, hoc est, omnia quadrata DO, æquantur omnibus rectangulis $BD \times DF$, demptis omnibus $BD \times FS$, patet propositum. Omnia enim rectangula $BD \times DF$ constituunt cuneum Parabolicum, (per prop. 11.) Omnia vero $BD \times FS$, Pyramidem; (per prop. 6.) Eorum igitur differentia æquatur vel Cuneo Elliptico, vel etiam Elliptico Pyramidoeidi.

PROP. XV.

De Conoeideos & Pyramidoeideos Elliptici Sectione.

SI Pyramidoeides vel Conoeides Ellipticum plano per Axem (vel, si mavis, Diametrum) secetur; sectio erit (vel circulus, vel saltem) Ellipsis.

Probatio ejusmodi instituenda est, qualis prop. 6, & 10. ubi Sectio Pyramidis per-axem ostenditur esse Triangulum; & Pyramidoeidis Parabolici Parabolam.

Alias vero sectiones non per-Axem, non libet hic speciatim attingere. Moneo tamen *Conoeideos Elliptici* (hoc est, Sphæroeideos) *Axes* (nisi Diametros malis appellare) numero *infinitos esse in communi centro* (ut Ellipsium Diametri) *coeuntes; qui omnes sua plana habent ordinatim-applicata*. Nota etiam *Conoeideos Elliptici* (vel Sphæroeideos) *Sectiones omnes plano factas* (sive per-axem, adeoque & centrum, transeunte, sive non,) *esse* (vel circulos, vel saltem) *Ellipses*.

His autem diutius insistere non est hujus loci. Sufficit monuisse.

PROP. XVI.

De Ellipsis Latere-Recto.

CUM manifestum sit ex dictis, Quadrata DO, (Rectangulis $BD \times DS$ æqualia,) ex cognitis rectis BD, DS, cognosci posse; non autem, è contra, ex cognitis DO, cognosci rectas BD, DS; (possunt enim rectangula $BD \times DS$ infinitis modis variari, dummodo eadem maneat ordinatim-applicatarum quantitas, adeoque eadem Ellipsis in conis dissimillimis reperiri: ut patere poterit ex eis quæ supra de parabola dicta sunt ad Prop. 12.) Placuit igitur Conicorum scriptoribus (ut in Parabola, sic) in Ellipsi aliis mensuris ordinatim-applicatarum quantitatem determinare, quæ eandem Ellipsin ubique comitentur.

Nempe pro singulis rectis BD, substituunt singulas AD, diametros interceptas; quæ quidem illis sunt proportionales.

Pro recta vero AS, substituunt aliam, puta LA, imaginariam, (quod *Latus Rectum* appellant) quæ tribus AS, BD, DA, sit quarta reciproce proportionalis; ut sit ubique $BD \times AS = DA \times LA$. Adeoque Latus rectum $LA = \frac{DB}{DA} \times AS$, & $AS = \frac{DA}{DB} \times LA$.

Tum (continuata Diametro AD donec opposito Trianguli-per-axem cruri occurrat in a, ut habeatur Diameter-transversa Aa;) erit (propter similia triangula) $Aa . AS :: Da . DS = \frac{Da}{Aa} \times AS$. Ideoque

que BD × DS (= DOq) = $\frac{Da}{Aa}$ × AS × BD = $\frac{Da}{Aa}$ × LA × DA. (quia nempe BD × AS = DA × LA, ut dictum est.)

Hoc est (substitutis idoneis symbolis, nempe $t = Aa$, $d = DA$, $t - d = Da$, $l = LA$, & $e = DO$) Quadratum ordinatim-applicatæ in Ellipsi $e^2 = \frac{t-d}{t} ld = \frac{td - d^2}{t} l = dl - \frac{d}{t} dl = ld - \frac{l}{t} d^2$. (omnes enim hæ notationes tantundem valent.) Et quidem (repetita figura prop. 13.) tam separatim $ld = FD \times BD$, & $\frac{l}{t} d^2 = FS \times DB$, quam conjunctim $ld - \frac{l}{t} d^2 = FD \times DB - FS \times DB = SD \times DB = DOq$.

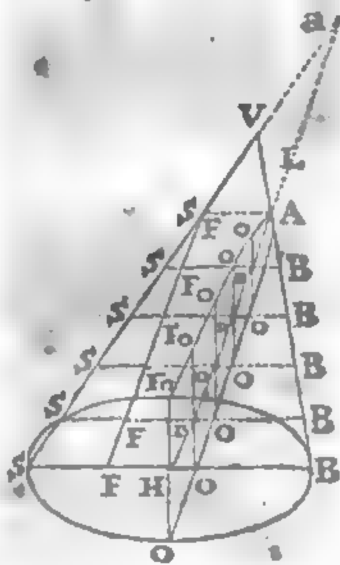
Demonstratione non opus est alia quam quæ propositionis curriculo passim intersertur.

Estque hoc quidem essentiale Ellipseos Symptoma; unde reliqua dependent & calculo deduci possunt. Ut jam non opus sit reliquarum affectionum in ipso Cono investigatio; sed melius & clarius infra in absoluta Ellipsis consideratione (sine ullo ad Conum respectu habito) instituetur: quam prop. 26. aggrediemur.

PROP. XVII.

De Hyperbola, Sectione Coni-facta.

IN Hyperbola; Quadrata Ordinatim-applicatarum, æqualia sunt aggregatis binorum rectangulorum; quorum quidem altera sunt interceptis-Diametris proportionalia, altera vero in earundem ratione duplicata.



Sunt enim Quadrata DO, æqualia Rectangulis BD × DS (per prop. 7.) Ducta vero recta SFF ipsi AH parallela, (quæ Trapezium SSHA in Parallelogrammum SFHA & Triangulum SFS, dirimat) erunt ubique rectæ DS = DF + FS, & Rectangula BD × DS = BD × DF + BD × FS. Sunt autem (propter æquales DF) Rectangula BD × DF, rectis BD proportionalia, ideoque & rectis DA Diametris-interceptis. Rectangula vero BD × FS (quoniam tam BD quam FS rectæ sunt rectis DA proportionales) in duplicata ratione rectarum DA diametrorum-interceptarum. Cum igitur sit ubique DOq = (BD × DS =) BD × DF + BD × FS; constat propositum.

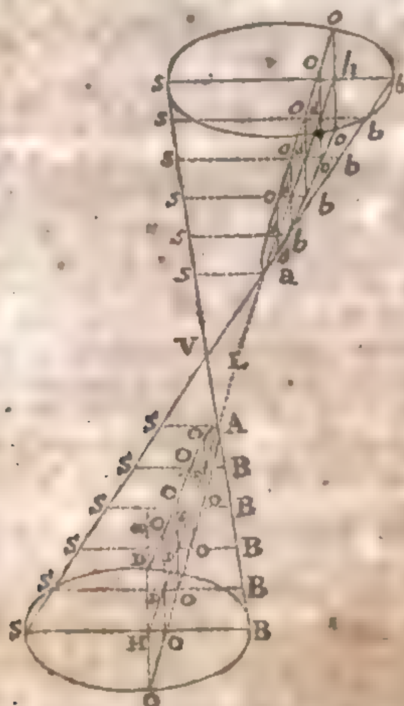
PROP. XVIII.

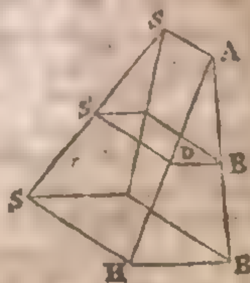
De Hyperbolico Pyramidoeide, Conoeide, & Cuneo.

SI (ut Prop. 9. & 14. formavimus Pyramidoeides Parabolicum & Ellipticum) ex omnibus Quadratis DO ordinatim-applicatarum in Hyperbola, formetur *Pyramidoeides Hyperbolicum*; æquabitur illud Cuneo cuidam, quem *Cuneum Hyperbolicum* libet appellare; nempe solido super basi triangulari AHB erecto, altitudinem habenti super puncto A æqualem rectæ AS, sed continue crescentem æquabiliter donec super recta HB æqualis evadat rectæ HS. Et quidem seg-

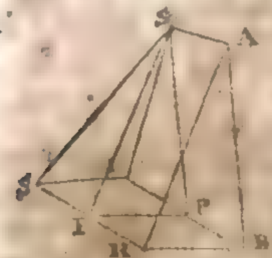
menta illius Pyramidoeidis, segmentis hujus Cunei analogis erunt æqualia. Adeoque tam Pyramidoeides totum quam illius segmenta notæ erunt mensuræ.

Si enim Cuneus ille Hyperbolicus plano ubivis secetur, quod plano Trianguli AHB rectum sit, (sicut & AS supponitur eidem triangulo recta esse,) & plano HBS parallelum: Rectangula singula hujusmodi sectione facta, puta BDS,



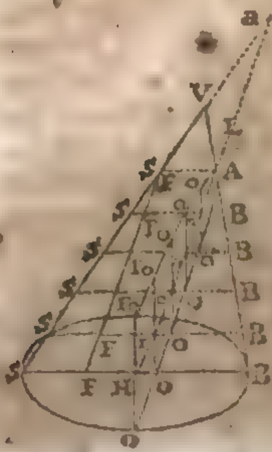


æqualia erunt singulis BDS in cono designatis, hoc est, singulis quadratis DO; adeoque aggregatum eorum aggregato horum; hoc est, totum Pyramidoeides toti Cuneo; atque (eadem ratione) segmenta illius analogis segmentis hujus. Modo interim curetur ut eadem retineatur Pyramidoeidis & Cunei Altitudo; ut Quadrata unius & Rectangula alterius æqualem supponantur crassitiem habere.



Cuneus autem ille Hyperbolicus, est frustum Prismatis (plano abscissum) super basi AHB erecti; altitudinem habens super puncto A æqualem rectæ AS, super punctis autem H, B, æqualem rectæ HS. Adeoque notæ mensuræ.

Est autem hic Cuneus, Aggregatum Cunei Parabolici HBASPF, & Pyramidis SPFS. Quod patebit si secari intelligatur plano SFP parallelo triangulo AHB.



Quod ipsum etiam concludi potest ex calculo. Cum enim singula Quadrata DO, vel rectangula BDS in Cono, æquentur singulis aggregatis BD×DF + BD×FS; manifestum est omnia BD×DF (per Prop. 11.) æquari Cuneo Parabolico, atque omnia BD×FS (per Prop. 6.) Pyramidi.

Cuneus autem ille, sive consideretur ut frustum Prismatis, sive ut aggregatum Pyramidis & Prismatis (Cuneive Parabolici,) erit notæ mensuræ; Adeoque & Pyramidoeides Hyperbolicum (huic æquale) erit notæ mensuræ.

Quod autem de Pyramidoeide ex quadratis DO dictum est, pariter etiam conveniret Pyramidoeidi ex Quadratis OO (ordinatim-inscriptarum) nisi quod hoc esset illius quadruplum.

Item

Item (quoniam similes figuræ planæ sunt ad invicem sicut homologorum laterum, vel etiam rectarum quarumlibet similiter inscriptarum, quadrata;) Cum cognoscatur mensura Pyramidoeidis Hyperbolici super basi quadrata, adeoque & ratio ipsius ad Parallelepipedum super eadem vel æquali basi æque-altum; cognoscetur etiam ratio cujuslibet alius Pyramidoeideos vel Conoeideos Hyperbolici super quacunque basi plana ad Prisma vel Cylindrum super eadem vel æquali basi æque-altum. Si nempe pro singulis quadratis substituantur vel Circuli vel Triangula, vel quævis aliæ figuræ planæ similes.

PROP. XIX.

De Conoeideos, & Pyramidoeideos Hyperbolici Sectione.

SI Pyramidoeides vel Conoeides Hyperbolicum plano per Axem (vel, si mavis, Diametrum) secetur; Sectio erit Hyberbola.

Probatur eodem argumento quo usi sumus de Pyramide & Cono prop. 6. atque de Pyramidoeidibus & Conoeidibus Parabolico & Elliptico, prop. 10. & 15.

Habet autem Conoeides Hyperbolicum Axes (nisi Diametros malis appellare) *numero infinitos, communi centro* (sed extra Conoeides) *coeuntes; Qui & sua habent plana ordinatim-applicata.*

Si vero secetur Conoeides Hyperbolicum plano per Axem (vel Diametrum potius) *non transeunte; potest ea Sectio vel esse Hyperbola, vel Parabola, vel Ellipsis* (circulusve.)

Et quidem de (Pyramidoeidibus & præsertim) Conoeidibus, Parabolicis, Ellipticis, & Hyperbolicis; eorumque Axibus sive Diametris, interceptis & transversis; Planisque ordinatum-applicatis, secantibus, & tangentibus; Centris, item & Lateribus-Rectis, aliisque ejusmodi: facile esset novam quidem nec injucundam disquisitionem instituere; (ad quod etiam satis proclivis sum, cum totam fere istius negotii difficultatem jam superaverim, nec quicquam fere supersit aliud quam ut quæ mente concepi verbis exprimam:) Verum illud non est hujus loci; neque jam licet nimium divagari. Et forsan alii cuidam non ingratum erit, ex ea methodo quam nos in Coni-sectionum tractatione calcamus, ansam arripere tale quid in Conoeidibus exercendi. Nobis interim & monuisse & innuisse hic loci sufficiat: aliud enim est quod præ manibus habemus.

PROP. XX.

De Hyperbolæ Latere-Recto.

CUm sit in Hyperbola, ut dictum est, $DOq = BD \times DS$; adeoque quantitas ordinatim-applicatarum DO, ex cognitis rectis BD, DS, cognosci possit; non contra: (cum possint rectæ BD, DS, infinitis modis variari, pro conorum variorum diversitate, aut etiam varia ad eundem conum applicatione, dum interim rectarum DO quantitas eadem maneat; sicut de Parabola & Ellipsi supra dictum est prop. 12, & 16.) Commodum igitur visum est Conicorum Scriptoribus, harum loco, alias mensuras substituere, quibus Ordinatim-applicatarum quantitatem exprimant, quæ eandem Hyperbolam ubique comitentur in quocunque demum cono, aut quocunque ad illum modo applicetur, aut etiam extra conum constituatur. (Quod & de Parabola & Ellipsi factum esse supra declaratum est.)

Nempe, pro singulis rectis BD, substituunt singulas AD diametros-interceptas, quæ quidem illis sunt proportionales.

Pro recta vero AS, substituunt aliam, puta LA, imaginariam, (quod *Latus-Rectum* appellant;) quæ tribus DB, AS, DA, sit quarta reciproce

reciproce proportionalis; ut sit ubique $DB \times AS = DA \times AL$; adeoque Latus rectum $LA = \frac{DB}{DA} \times AS$, & $AS = \frac{DA}{DB} \times LA$.

Denique (producta prius diametro DA, extra Hyperbolam, donec Opposito vel Triangulo vel Cono occurrat in a, ut habeatur Diameter-transversa Aa,) erit (propter similia triangula) $Aa . AS :: Da . DS = \frac{Da}{Aa} \times AS$; ideoque $BD \times DS (= DOq) = \frac{Da}{Aa} \times AS \times BD = \frac{Da}{Aa} \times LA \times DA$, (quia nempe $BD \times AS = DA \times LA$ ut dictum est.)

Hoc est, (substitutis idoneis Symbolis, nempe $t = Aa$, $d = DA$, $t + d = Da$, $l = LA$, & $b = DO$,) Quadratum ordinatim-applicatæ in Hyperbola $b^2 = \frac{t+d}{t} l d = \frac{td + d^2}{t} l = dl + \frac{d}{t} dl = ld + \frac{l}{t} d^2$ (omnes enim hæ notationes tantundem valent.) Et quidem tam separatim $ld = FD \times DB$, & $\frac{l}{t} d^2 = FS \times DB$, quam conjunctim $ld + \frac{l}{t} d^2 = FD \times DB + FS \times DB = SD \times DB = DOq$.

Estque hoc quidem primarium atque essentiale Hyperbolæ symptoma, unde reliqua dependent omnia & calculo comprobari possunt. Reliquas Hyperbolæ affectiones post investigabimus, ubi absolutam ipsius tractationem (sine respectu habito ad Conum) instituemus.

Atque hactenus quidem *Coni-sectiones* vulgo dictas, Parabolam, Ellipsin, atque Hyperbolam, inspecto Cono consideravimus; ut quæ à Cono-secto (quod & nomen innuit) originem traxisse reputantur. Adeoque primaria illarum symptomata ab ipso deduxi; quod & de aliis illarum affectionibus fecisse (si id opus esset) non adeo esset difficile. Quoniam autem earum natura magis absoluta est, quam ut ad Conum solum pertinere videantur; priorem contemplationem eousque prosecutus sum, ut & fontes aperirem unde Veteres doctrinam suam hausisse videntur, & quibus passibus ad abstrusas illas quas exhibent demonstrationes aut pervenerint aut saltem pervenisse potuerint; Et essentialia illarum symptomata inde deducerem, ut tandem liceat illas etiam extra Conum suum intelligere, aut etiam (si libet) de Cono in Conum transferre; cum earum affectiones reliquæ ex jam traditis (etiam sine Coni auxilio) deduci possint, ut in sequentibus patebit. Non autem earum affectiones omnes ea methodo prosecutus sum; quoniam illarum traditio ex absoluta, quæ sequitur, tractatione (seposito Cono) & clarius & facilius peragi possit, nec opus sit rem eandem iterato agere.

PARS

PARS SECUNDA.

C*UM tradita sint in praecedentibus* Parabolæ, Ellipsis, *atque* Hyperbolæ, (*quas* Coni-sectiones *appellant*,) *essentialia symptomata, ab ipso secto Cono* (*unde Originem traxisse existimantur*) *desumpta; quæ ipsarum naturam absolutam ita interim exponunt, ut sive à Secto Cono, sive aliunde genesin sortiantur, eadem natura absoluta eisdem characteribus designanda esset: Licebit in sequentibus illas* (*sive lineas sive figuras*) *secundum absolutam quam in se habent naturam contemplari, sine respectu ad genesin habito, quæ vel à Sectione Coni, vel etiam aliunde contingere possit: Et quidem undecunque contingat, absolutam earum contemplationem neutiquam conturbet.*

PROP. XXI.

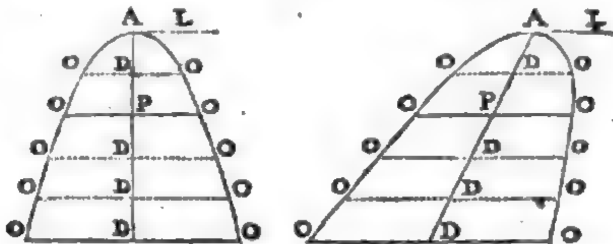
De Parabola, absolute considerata.

CUm sit in Parabola Quadratum Ordinatim-applicatæ cujuslibet ($p^2 = l d$) æquale rectangulo quod intercepta-Diametro & Latere-recto comprehenditur, (ut, inspecto Cono supra deprehendimus, prop. 12.) Licebit jam Parabolam, eo charactere ornatam, suo Cono eximere, atque absolute quidem & Universaliter definire.

Parabolam igitur appello eam (sive lineam curvam in plano descriptam, sive figuram planam, ejusmodi curva terminatam, puta O A O,) cujus ordinatim-applicatarum quadrata sunt interceptis-diametris proportionalia.

Rectam vero (imaginariam) quæ cum interceptis-diametris (tanquam communis altitudo) continebit rectangula (ipsis quidem diametris-interceptis proportionalia) Quadratis illis Ordinatim-applicatarum æqualia, appello *Latus-Rectum*; puta L A.

Ordinatim-applicatas vero appello, (D O, P O,) semisses parallelarum rectarum, (O O, O O,) Parabola utrinque terminatarum (quas *Ordinatim-inscriptas*, vel *Ordinatim-subtensas* appello) una linea recta (puta A D P, quam appello *Diametrum*) bisectarum.



Punctum autem illud bisectionis, (D vel P,) *Punctum applicationis* appello; in quo quippe Diametro suæ applicatur ea quam Ordinatim-applicatam diximus.

Diametri vero segmentum, puncto-applicationis & curva Parabolica comprehensum, (A D, A P,) *Diametrum-interceptam* appello.

Punctumque Diametri in curva illa existens (puta A) appello *Verticem*,

Verticem, (tam Diametri, quam ipsius Parabolæ, secundum illam Diametrum consideratæ.)

Ordinatim-positas appello non modo eas, quas supra *Ordinatim-inscriptas*, atque *Ordinatim-applicatas* dixi, (quæ vel utrinque vel ab altera saltem parte Parabola terminantur,) sed alias quasvis ipsis parallelas (quantævis longitudinis) Diametro similiter appositas, & propterea eosdem cum diametro angulos facientes.

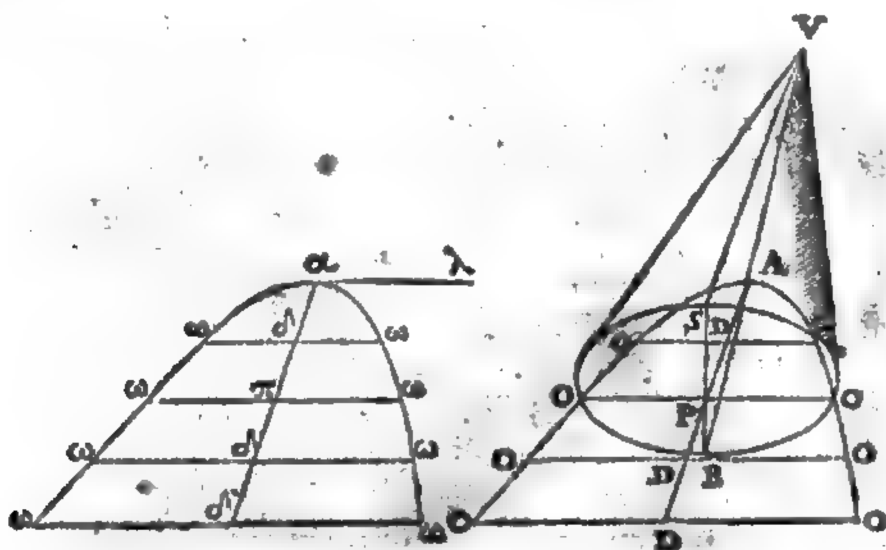
Atque hinc quidem, si fuisset res integra, neque Conicæ Sectiones, ut vocantur, Originem à Cono traxisse vulgo reputarentur, (quare & mihi necesse erat eas, secundum illam etiam hypothesin exponere, ne videar novas quasdam figuras comminisci, potius quam ab aliis receptas explicare:) licuisset totius hujusce tractationis initium posuisse, omissis eis omnibus quæ superius in parte prima exhibuimus; aut ea saltem (si libuisset adjungere) hinc quasi à vero fonte demonstrasse. (Adeoque novas terminorum aliquot definitiones necesse est & hic & deinceps aliquoties adjungere, omissâ Coni mentione, ne opus sit ad præcedentia recurrere, aut Coni auxilium in definitionibus postulare.)

Non enim est *Parabolæ* magis essentiale, ut fiat *Sectione Coni Plano lateri parallelo*; quam *Circulo*, ut fiat *Sectione Coni plano basi parallelo*; aut *Triangulo*, ut fiat *Sectione Coni per Verticem*. Neque illud volunt alii: Quamvis enim Parabolam (quod & de aliis Coni-Sectionibus similiter intelligendum est) secto Cono generari definiant; non tamen solas illas, quæ sectione Coni fiunt, pro Parabolis habent, (nam & alios agnoscunt Parabolam in plano describendi modos;) sed tales esse volunt (sive figuras sive lineas curvas) quales ejusmodi sectione Coni fieri possunt.

Parabolam autem à nobis definitam eandem esse cum Parabola Apollonii, & aliorum; talem nempe, qualis sectione Coni effici possit: Sic demonstro.

Esto Parabola quælibet à nobis definita $\alpha\omega$, (ejusque Ordinatim-applicata quælibet $\pi\omega$, cum diametro $\alpha\pi$ angulum $\alpha\pi\omega$ quemcunque faciens; sitque $\alpha\lambda$ latus rectum.) Dico hanc Parabolam talem esse qualis sectione Coni effici posset.

Fiant enim rectæ $AP = PB = \alpha\pi$; sitque angulus APB rectus & (continuata BP) fiat $PS = \alpha\lambda$; & jungatur recta BA, quæ (continuata) concurrat cum recta SV (ipsi PA parallela) in V, ut compleatur triangulum VBS; super quod erigatur circulus diametrum habens BS, qui cum triangulo VBS angulum inclinationis faciat æqualem angulo $\alpha\pi\omega$; eique paralleli circuli alii nu-



mero infiniti supponantur, (diametros habentes in triangulo VBS ipsi BS parallelas) qui conum $VBOS$ compleant (per prop. 5.) per cujus axem incedit VBS Triangulum, (quippe in quo reperiuntur omnium circulorum parallelorum diametri.) Tum erigatur planum APO triangulo VBS rectum, quod igitur secabit circulum SOB secundum rectam PO, quæ (propter angulum etiam APB rectum) perpendicularis erit rectæ BS, per 3 & 4 d 11, (angulumque APO constituet æqualem inclinationi planorum, per 6 d 11, adeoque angulo $\alpha\pi\omega$,)

Planum

Planum igitur APO, conisectionem efficit AO: cumque ipsius diameter AP parallela sit VS opposito cruri trianguli-per-axem; sectio illa erit Parabola, qualem descripsimus prop. 7. (ut inde patet;) hoc est, qualem definit Apollonius prop. 11. lib. 1. Conicorum.

Sed & eidem congruit Parabola proposita, à nobis definita. Nam quadratum PO ($= BP \times PS$) æquatur quadrato $\pi\omega$ ($= \pi\alpha \times \alpha\lambda$,) cum sit (ex constructione) $\pi\alpha = PB$, & $\alpha\lambda = PS$; adeoque & recta $PO = \pi\omega$. Sed & (ex constructione) $AP = \alpha\pi$, & angulus $APO = \alpha\pi\omega$, (ut ostensum est:) congruunt ergo rectæ AP, PO, rectis $\alpha\pi$, $\pi\omega$, (& angulus comprehensus angulo comprehenso:) Atque eadem ratione reliquæ ordinatim-applicatæ DO reliquis $\delta\omega$ congruunt, adeoque & Parabola Parabolæ congruit. Parabola igitur à nobis definita, Parabolæ sectione coni factæ congruit, adeoque talis est qualis sectione coni effici posset. Quod erat primo demonstrandum.

Contra vero, Parabolam sectione Coni factam talem esse qualem nos descripsimus, (nempe quadrata ordinatim-applicatarum habere diametris interceptis proportionalia,) supra demonstratum est prop. 8. & 12.

Eadem igitur est Parabola quæ ab Apollonio (aliisque) & quæ à nobis definitur. Quod ostendisse par erat.

Sed & eadem opera docuimus, *Conum construere, eique datam Parabolam ita aptare, ut data ipsius diameter fiat Diameter-ex-generatione.* Atque etiam Theorematice verum esse, *Parabolæ diametrum quamlibet fieri posse (in aliquo saltem Cono) diametrum-ex-generatione; & quomodo illud fiat.* (quamvis & illud aliis mille modis fieri possit.)

An vero universaliter verum sit, *Datam Parabolam dato Cono ita aptari posse, ut data ipsius diameter fiat diameter-ex-generatione*, est alia disquisitio. Est autem & illud verum, modo datæ diametri ad suas ordinatim-applicatas obliquitas major non sit quam obliquitas Axis assignati Coni ad basin suam. Si secus autem; illud non fiet dummodo solum circulum pro Coni base agnoscimus. Si vero admittatur, ut non modo Circulus, sed & Ellipsis quælibet, pro base Coni reputetur; etiam universaliter illud verum erit, neque determinatione indigebit Theorema. Hoc autem obiter tantum sine Demonstratione moneo; quoniam nec illud est hujus loci, nec mihi animus est ad singulas minutias descendere. Ad reliquas igitur Parabolæ affectiones calculo comprobandas festino.

P R O P. XXII.

Corollaria.

P*Atet ex dictis*; Quod cum sit (ut ostensum est) $p^2 = ld$; erunt, in Parabola, Diameter-intercepta, Ordinatim-applicata, & Latus-Rectum, continue proportionalia.

Adeoque, Datis eorum duobus quibusvis, etiam reliquum (magnitudine) datur. Nempe,

In Parabola:
- Ordinatim-applicata, $p = \sqrt{ld}$.
- ejusque quadratum, $p^2 = ld$.
- Latus Rectum, $l = \frac{p^2}{d}$.
- Diameter-intercepta, $d = \frac{p^2}{l}$.

Patet etiam; Ordinatim-applicatas, prout longius à vertice applicantur, ita semper augeri, (cum ipsarum quadrata sint interceptis diametris, hoc est, distantiis punctorum-applicationis à vertice, proportionalia.)

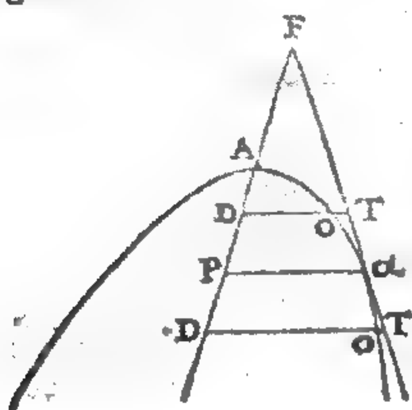
Et propterea, Parabolam ejusmodi curvam esse, quæ per se figuram non comprehendet; cum crura perpetuo magis divaricentur, nec sint unquam (extra punctum verticis) coitura.

PROP. XXIII.

De Recta Parabolam contingente.

SI, sumpto ubivis in Parabolæ diametro puncto P, cui ordinatim-applicetur $P\alpha$, diameter PA extra Parabolam continuetur ut fiat continuatio AF, ipsi AP diametro interceptæ æqualis; recta $F\alpha$ ducta, Parabolam in puncto α continget. Et contra; si Parabolam in α contingat recta αF, diametro productæ occurrens in F; erit AF (continuatio) ipsi AP (diametro-interceptæ) æqualis.

Nam sumpto, in eadem diametro, puncto quovis D, cui ordinatim-applicetur DO, quæ ad rectam $F\alpha$ pertingat in T; Dico punctum T vel idem esse cum puncto α, vel extra Parabolam cadere; hoc est, rectam DT vel æqualem esse rectæ DO (si nempe puncta D, P, coincidant,) vel (si alibi sumatur D) longiorem.



Esto enim (ob commodiorem calculum) $P\alpha = p$, $PA = d$ (ideoque $PF = 2d$,) $PD = a$, (ideoque $DA = d \pm a$, $DF = 2d \pm a$, variatis nempe signis $+$, $-$, prout supponitur punctum D infra vel supra punctum P sumi.)

Erit igitur (propter Parabolam) $PA . DA ::$ $P\alpha q . DOq$. hoc est, $d . d \pm a :: p^2 . \frac{d \pm a}{d} p^2 = DOq$.

Et (propter similia triangula) $PF . DF :: P\alpha . DT$. hoc est, $2d . 2d \pm a :: p . \frac{2d \pm a}{2d} p = DT$. hujusque quadratum $\frac{4d^2 \pm 4da + a^2}{4d^2} p^2 = DTq$.

Est igitur differentia quadratorum $DTq - DOq = \frac{4d^2 \pm 4da + a^2}{4d^2} p^2 - \frac{d \pm a}{d} p^2 = \frac{a^2}{4d^2} p^2$. Quæ quidem vel aliqua est, si puncta P, D, distent, (sitque propterea a quantitas realis;) vel omnino nulla, si coincidant puncta P, D; (evanescente quippe quantitate a, adeoque & ipsius multiplicibus omnibus.) Hoc est, Quadrata DTq, DOq, & propterea eorum latera DT, DO, vel æqualia sunt, si sumatur punctum D idem atque P; vel illud majus est, si alibi sumatur D. Et propterea, cum rectæ αF (quantumvis utrinque productæ) singula puncta ipso α excepto, sint extra parabolam; ea Parabolam in unico puncto α contingit. Quod erat Demonstrandum.

Estque hæc nostra demonstratio multo expeditior, quam quæ ab Apollonio aliisque, (adhibito Cono, variisque lemmatis præmissis) afferuntur.

Si vero propositio hæc non fuisset antehac excogitata, sed à nobis jam quærenda: *Illud Analytice sic fieri posset.*

Supponamus rem quasi jam factam; contingentem αF, diametro productæ occurrere in F: & quærenda sit longitudo rectæ PF.

Retineatur eadem quæ prius figura; eademque symbola, nisi quod pro PF (nondum cognita) substituatur f, adeoque pro DF, $f \pm a$. Erunt igitur (ut prius) $PA . DA :: P\alpha q . DOq = \frac{d \pm a}{d} p^2$. Et $PF . DF :: P\alpha . DT$. hoc est, $f . f \pm a :: p . \frac{f \pm a}{f} p = DT$. Et $\frac{f^2 \pm 2fa + a^2}{f^2} p^2 = DTq$.

Est item (propter tangentem) $DT \geqq DO$ (hoc est, DT æqualis vel major quam DO; illud quidem si D, P, coincidant; hoc, si secus) & $DTq \geqq DOq$, hoc est $\frac{f^2 \pm 2fa + a^2}{f^2} p^2 \geqq \frac{d \pm a}{d} p^2$; & (utrumque multiplicando in df^2 & divi-

dividendo per p^2) erit $df^2 \pm 2dfa + da^2 \gtreqless df^2 \pm f^2 a$: & (auferendo utrinque df^2, atque dividendo per $\pm a$) erit $2df \pm da \gtreqless f^2$.

Denique ponendo DP idem punctum (ut evanescat quantitas a, adeoque & da,) erit $2af = f^2$, hoc est $2d = f$. Quod est ipsum Theorema quod investigandum erat, quodque modo demonstravimus.

Conversa Propositionis propositæ; nempe *Parabolæ tangentem α F diametro PA productæ occursuram, & quidem ita ut abscindat rectam AF ipsi AP æqualem*; ex dictis satis patet, vel inde saltem facile deduci potest.

Atque etiam; *Rectam α F Parabolam in unico puncto contingere.*

Item, *Ab eodem puncto F, atque ad easdem partes, rectam aliam quæ Parabolam contingat duci non posse.*

Et, *Parabolam in eodem puncto α non nisi unicam rectam contingere posse.*

Adeoque *In locum inter curvam αA rectamque contingentem α F, aliam rectam lineam cadere non posse*: (Hoc est, prout ego alibi peculiari tractatu fusius demonstravi, *Angulum qui Contactus dicitur, esse angulum nullius magnitudinis, sive non-Angulum.*)

Verum cum ea non difficulter calculo demonstrari possint (demonstrationibus præcedenti non absimilibus,) ego, partim ut tironibus quo se exerceant relinquam, partim ne aliis tædio sim, eis sigillatim demonstrandis supersedeo.

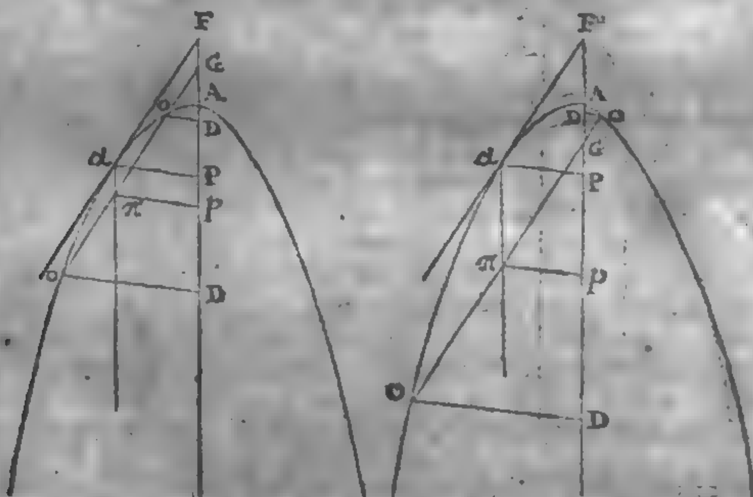
PROP. XXIV.

De Parabolæ Diametris.

SI à puncto quovis α in Parabolæ curva Aα, ducatur recta απ parallela diametro AP: Erit απ sic ducta ejusdem Parabolæ diameter; verticem habens α, & Ordinatim-applicatas πO rectæ αF (Parabolam in vertice α contingenti) parallelas.

Libet hanc *Propositionem primo Analytice examinare*, deinde & Synthetice demonstrare.

Supponamus igitur rem ita esse ut perhibetur: adeoque inscriptam OO, rectæ αF parallelam, atque in π bisectam: sintque rectæ OD, OD, αP, diametro AP,



ordinatim-applicatæ, adeoque invicem parallelæ; quibus etiam parallela ducatur πp, quæ igitur (propter parallelas) bisecabit (ut rectam OO, sic) rectam DD. Denique recta OO (producta si opus) occurrat diametro AP (saltem productæ) in G. (occursuram autem certum est, cum ipsi parallela αF eidem diametro occurrat, puta in F, per præcedentem.) Eruntque (propter parallelas) Pp = απ = FG: & propterea PF = pG.

Tum substitutis (ob commodiorem calculum) idoneis symbolis, esto $P\alpha = p$. $PA = d$. (ideoque per præced. $PF = pG = 2d$.) $Pp = \alpha\pi = FG = g$. (ergo $pA = PA + pP = d + g$.) $pD = q$. (ideoque $DA = pA \pm pD = d + g \pm q$. & $DG = pG \mp pD = 2d \mp q$.)

Erit igitur (propter Parabolam) $PA . DA :: P\alpha q . DOq$. hoc est $d . d + g \pm q :: p^2 . \frac{d + g \pm q}{d} p^2 = DOq$.

Item (propter similia triangula) $PF . P\alpha :: DG . DO$. hoc est $2d . p :: 2d \mp q . \frac{2d \mp q}{2d} p = DO$. Et (sumendo quadrata) $\frac{4d^2 \pm 4dq + q^2}{4d^2} p^2 = DOq = \frac{d + g \pm q}{d} p^2$.

Ergo (utrinque dividendo per p^2 & multiplicando per $4d^2$) $4d^2 \pm 4dq + q^2 = 4d^2 + 4dg \pm 4dq$. hoc est (sublatis utrinque æqualibus) $q^2 = 4dg$. Adeoque inventa est quantitas q, adeoque & puncta D, D, quibus Ordinatim applicantur DO, DO. Vera igitur est propositio.

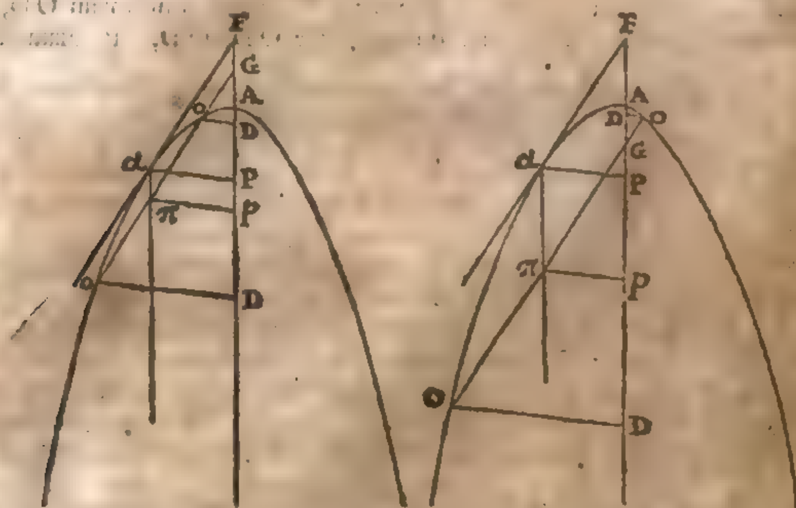
Illud Synthetice sic demonstrabimus, premendo Analyseos vestigia.

Diametro AP ducatur parallela $\alpha\pi$, per cujus punctum quodvis (intra parabolam) π, ducatur recta πG diametro occurrens in G, & parallela tangenti αF occurrenti diametro in F. Dico $\alpha\pi$ ejusdem Parabolæ diametrum esse eique ordinatim poni πG.

Diametro AP ordinatim applicetur αP, eique parallela ducatur πp diametro occurrens in p. Et sunto symbola $P\alpha = p$, $PA = d$, $FG = \alpha\pi = Pp = g$.

Tum sumantur in diametro utrinque à puncto p, æquales rectæ $pD = (\sqrt{4dg} =) 2\sqrt{dg}$. (hoc est, duplum mediæ proportionalis inter AP, $\alpha\pi$, rectas.) atque punctis D, D, ordinatim ponantur DO, DO, rectæ πG occurrentes in O, O; quæ cum parallelæ sint rectæ πp, sicut recta DD (ex constructione) bisecatur in p, erit ideo & OO (propter parallelas) bisecta in π.

Restat ut ostendam rectam illam OO (bisectam in π) Parabolæ inscriptam esse, (ut $\alpha\pi$ recta bisecans sit diameter,) hoc est, puncta OO esse in Parabolæ Curva. Quod sic probatur.



Est $pA = PA + Pp = d + g$. $DA = pA \pm pD = d + g \pm 2\sqrt{dg}$. $pG = PF = 2d$. $DG = pG \mp pD = 2d \mp 2\sqrt{dg}$.

Tum (propter Parabolam) ut PA, ad DA; sic $P\alpha q$. quadratum ordinatim-applicatæ puncto P, ad quadratum ordinatim-applicatæ puncto D: hoc est $d . d + g \pm 2\sqrt{dg} :: p^2 . \frac{d + g \pm 2\sqrt{dg}}{d} p^2$. quod igitur est quadratum ordinatim-applicatæ puncto D.

Sed & tantundem est quadratum rectæ DO. Nam (propter similia triangula)

PF . Pα :: DG . DO. hoc est, $2d . p :: 2d \pm 2\sqrt{dg} . \frac{2d \pm 2\sqrt{dg}}{2d} p =$ DO. Ejusque quadratum DOq $= \frac{4d^2 + 4dg \pm 8d\sqrt{dg}}{4d^2} p^2 = \frac{d + g \pm 2\sqrt{dg}}{d} p^2$.

Est igitur quadratum rectæ DO æquale quadrato ordinatim-applicatæ puncto D; adeoque recta DO ipsi ordinatim-applicatæ æqualis. Sed & puncto D ordinatim-ponitur recta DO (ex constructione,) ergo ordinatim applicata est: punctaque OO propterea sunt in ipsa Parabolæ curva, adeoque OO recta Parabolæ inscripta. Sed & eam (atque eadem ratione ipsi parallelas inscriptas omnes) bisecat recta απ. Est igitur (per def.) απ diameter, eique ordinatim-applicata πO, (ordinatim-inscriptæ semissis.) Quod erat demonstrandum.

Monendum autem hic est, quod cum (tam in Analysi quam in Synthesi) dicimus duarum rectarum DG, alteram quidem æqualem esse pG ∽ pD, hoc est, differentiæ rectarum pG, pD, fieri quidem potest ut quandoque pG (nempe quoties recta OO diametrum AP non transit,) quandoque pD (nempe ubi OO transit AP) major esse: Adeoque pG ∽ pD, nunc per pG — pD, nunc per pD — pG, interpretandum erit. Verum hoc calculum non omnino perturbat; quoniam ea quantitas in operationis progressu quadranda occurrit: quo casu, utrumvis contingat, eadem quadrata prodibunt. Nempe cum sit in Analysi $\frac{2d \pm q}{2d} p =$ DO, sive exponatur $\frac{2d \pm q}{2d} p =$ DO (ut ubi OO non transit AP,) sive $\frac{q \pm 2d}{2d} p =$ DO (ut ubi transit,) utrovis modo erit $\frac{4d^2 + q^2 \pm 4dq}{4d^2} p^2$ = DOq. Et pariter contingit in Demonstratione Synthetica. Quod monuisse sufficit.

Possent hic alia Theoremata multa sigillatim ostendi, puta,

Quodlibet Curvæ Parabolicæ punctum alicujus Diametri verticem esse.

Adeoque *In qualibet Parabola infinitos esse Vertices, atque Diametros infinitas numero.*

Item; *Parabolæ Diametros omnes esse invicem Parallelas.*

Et; *Quamlibet rectam (in eodem plano) cuilibet Parabolæ Diametro parallelam, ejusdem Parabolæ Diametrum etiam esse; eique in uno aliquo, & quidem unico, puncto occurrere.*

Item; *Quamlibet in eodem plano rectam, per aliquod intra Parabolam punctum transeuntem, Diametro non parallelam, in binis punctis Parabolæ occurrere; & alicui Diametro Ordinatim-positam esse.*

Et; *Quæ vel alicui Parabolæ Diametro Ordinatim-posita est, vel Diametrum aliquam quocunque modo secat, vel quæ Parabolam secat (aut ipsi occurrit) in binis punctis; nec illius Parabolæ Diametrum esse, nec ipsius Diametro ulli parallelam.*

Item; *Quæ Parabolæ Diametro alicui in vertice occurrit ordinatim-applicatis parallela, Parabolam in illo puncto contingere.*

Et; *Quæ Parabolam contingit, Diametri per contactus punctum transeuntis Ordinatim-applicatis parallelam esse: adeoque eidem Diametro Ordinatim positam.*

His autem, aliisque consimilibus, sigillatim demonstrandis, non immorandum esse sentio; Cum ea vel in progressu præcedentium Demonstrationum satis jam ostensa sint; vel ex eisdem principiis facile demonstrari possint.

PROP. XXV.

Effectiones Geometricæ.

EX præcedentibus, non erit difficile Geometricas Effectiones colligere. Puta,

Datæ Parabolæ Diametrum invenire. Nam recta, quaslibet duas inscriptas parallelas bisecans, est Diameter.

Item, *Per datum quodvis in eodem plano punctum, rectam ducere quæ sit Parabolæ*

Parabolæ datæ Diameter. Inventa enim (ut prius) una qualibet diametro, recta huic parallela per datum punctum ducta, est Diameter quæsita.

Item, *Parabolæ Axem reperire.* Inscripta nempe recta quæ Diametrum quamlibet ad angulos rectos secet; ea quæ per hujus medium punctum transit Diameter, est Parabolæ Axis.

Item, *Datæ Diametri ordinatim-applicatas positione invenire.* Vel, quod tantundem est, *Angulum inclinationis invenire.* Ductis nempe binis diametro datæ parallelis rectis, utrinque ab illa æqualiter remotis, quæ Parabolam secent; recta sectionum puncta conjungens est datæ diametro ordinatim-applicata, reliquæque omnes huic parallelæ.

Item, *Latus-Rectum invenire datæ in data Parabola Diametro conveniens.* Est enim Latus-rectum, Diametro-interceptæ & Ordinatim-applicatæ tertia continue proportionalis.

Item, *Ad datum datæ diametri punctum ordinatim-applicatam in data Parabola ducere.* Est enim interceptæ-diametro & lateri-recto media proportionalis, Diametro, juxta inclinationis angulum, applicanda.

Item, *Ad datam diametrum, datumque Latus-rectum, Parabolam in dato inclinationis angulo ducere.* Nam positis ad datam Diametrum in dato angulo quotlibet ordinatim-applicatis, curva per earum omnium extremitates æquabiliter ducta est Parabola.

Verum ego harum omnium effectionum demonstrationes omitto; partim ut tædio non sim, partim ut sit quo se exerceant tirones, præsertim cum illæ ex prædictis facile possint elici. Atque eisdem de causis multa alia & Theoremata & Problemata lubens prætereo; cum nobis non sit animus vel singulis minutiis insistendi, vel propositiones citra necessitatem multiplicandi. Quod etiam de sequentibus intelligendum erit.

PROP. XXVI.

De Ellipsi absolute considerata.

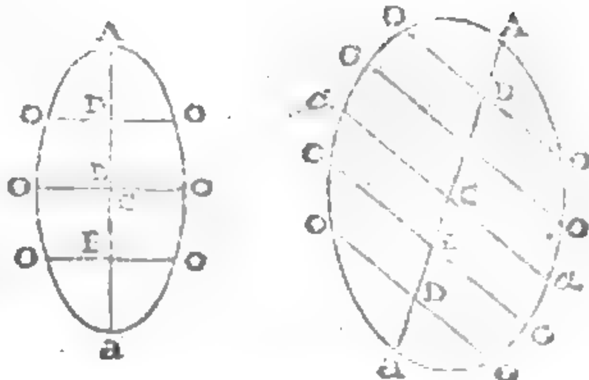
CUm sit in Ellipsi (ut ostensum est, prop. 16.) Quadratum ordinatim-applicatæ $e^2 = ld - \frac{l}{t} d^2$. Licebit jam (ut prius Parabolam, sic) Ellipsin eo charactere insignitam, suo Cono eximere, atque absolute quidem & universaliter contemplari, acsi nullam omnino ad Conum relationem haberet; ut nec circulus (quæ quidem una est Ellipseos species) censeri solet habere.

Ellipsin igitur appello eam (sive lineam curvam in plano descriptam, sive figuram planam ejusmodi curva terminatam,) cujus ordinatim-applicatarum singularum quadrata, æquantur differentiis binorum rectangulorum; quorum quidem Majora sunt interceptis-Diametris, Minora vero earundem quadratis, proportionalia. (Nempe $e^2 = ld - \frac{l}{t} d^2$. Sunt enim rectangula ld, ipsis d diametris interceptis proportionalia, propter communem altitudinem l: ipsa vero $\frac{l}{t} d^2$ diametrorum interceptarum quadratis d^2 proportionalia, propter communem rationem $\frac{l}{t}$.)

Diametrum, Diametros-interceptas, Verticem, Ordinatim-positas, Ordinatim-inscriptas, (sive *Ordinatim-subtensas,*) *Ordinatim-applicatas,* atque *Punctum applicationis*; eodem sensu hic accipio quo supra de Parabola iisdem usus sum.

Rectam

Rectam nota l insignitam, (lineam puta imaginariam, quæ cum interceptis-diametris, continere supponitur rectangula Majora, diametris-interceptis proportionalia,) appello *Latus-Rectum*.



Rectam vero alteram, quæ nota t designatur, (quam quidem supponimus Diametri segmentum esse, à vertice versus concavam Curvæ partem ductam; quæque ita se habet ad latus rectum ut diametrorum-interceptarum quadrata ad rectangula Minora, illis quadratis proportionalia,) *Diametrum transversam* appello; (ut quæ oppositos vertices conjungit, puta A a, ut mox dicetur:) ejusque punctum medium, (quod in ipsa Diametro intra Ellipsin jacere supponimus, nempe intra oppositos vertices,) appello *Centrum*.

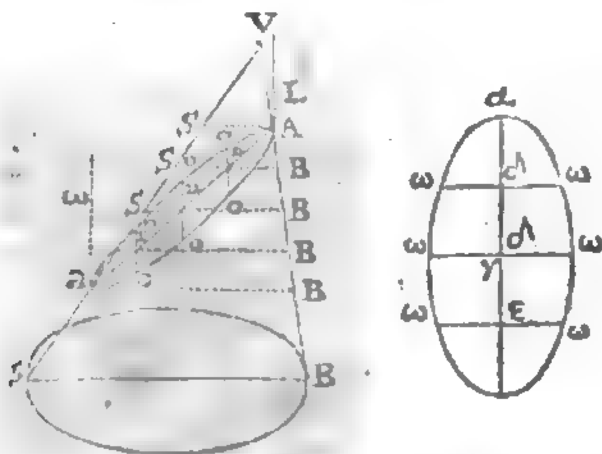
Ellipsin à nobis definitam eandem esse cum ea quam definit Apollonius, (nisi quod nos etiam circulum, seu circuli Peripheriam, eadem voce includamus, quam excludit Apollonius;) eodem fere progressu demonstrari potest, quo supra ostendimus Parabolam nostram eandem esse atque illius.

Nempe, Ellipsi Apollonianæ, Sectione Coni factæ (quæ ab Apollonio describitur p. 13. lib. 1. Con.) universaliter convenire definitionem nostram; jam probatum est prop. 13. & 16.

Ellipsin à nobis definitam quamlibet (modo circulum seu Peripheriam excipias, quam ego sub ea voce comprehendo, contra quam Apollonius,) ita Cono aptari posse ut conditiones eas habeat quas postulat Ellipsis Apolloniana; sic probatur.

Exponatur Ellipsis quælibet à nobis definita, $\alpha\omega$, cujus ordinatim-applicatarum quadrata sint $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$. Dico hanc Cono ita aptari posse ut postulatur.

Ducantur enim rectæ $Aa = t$, $AS = l$, continentes angulum SAa quemcunque acutum, (modo major sit complemento anguli inclinationis in Ellipse exposita, quem faciunt ordinatim-applicatæ cum exposita diametro;) ipsique AS parallela ponatur $aB = Aa = t$, angulum faciens $AaB = SAa$: (saltem tantæ sint longitudinis AS, aB, ut sit $AS \times aB = lt$; modo interim non sint AS, aB, invicem æquales; eo enim casu non Conus, sed Cylindrus prodiret:) Et jungantur rectæ aS, BA, quæ continuatæ coeant in V, complentes triangulum VaB, (si nempe aB major sit quam AS, prout jam supponimus; vel, si secus, triangulum VAS:) quod esto triangulum per axem Coni mox construendi.



Deinde super rectas Aa, aB, duo plana ita erigantur ut communis earum sectio $a\omega$ faciat cum recta aB angulum rectum, cum recta vero Aa angulum æqualem angulo inclinationis Ellipseos propositæ. Hoc enim omnino fieri posse constat: Si enim erigatur in puncto a recta $a\omega$, quæ sit recta plano trianguli,

(adeoque

(adeoque utrosque angulos ω a A, ω a B, rectos faciat per 3 d 11.) circumvolvatur circa rectam a B ut axem, invariato angulo ω a B, donec ad situm plani V a M perveniat, faciatque in plano trianguli angulum ω a A acutum; qui minor erit angulo (acuto, intellige, nisi uterque rectus sit,) inclinationis Ellipseos expositæ, (cum sit, ex constructione, angulus A a B complemento inclinationis major;) necesse est ut in transitu aliquando fecerit angulum, inclinationis angulo æqualem, (factus enim est transitus ab angulo recto, adeoque debito majori, vel saltem æquali, ad angulum debito minorem;) adeoque tunc fuerit in situ debito, ut sit duorum planorum communis sectio qualis imperatur.

In plano autem ω a B sic posito, scribi intelligatur circulus diametrum habens a B, qui sit basis Coni; aliique huic paralleli conum complentes, juxta prop. 5; qui plano A ω a sectus Ellipsin exhibebit, per prop. 7. cujus ordinatim-applicatæ eandem ad Diametrum inclinationem habebunt, quam quæ in Ellipsi exposita, adeoque similiter positæ sunt; eruntque etiam longitudine æquales, ut probari poterit per prop. 13. & 16. Congruunt igitur Ellipsis exposita, & quæ in Cono exhibetur. Adeoque, eadem est Ellipsis à nobis definita (nisi quod nos etiam circulum ea definitione comprehendamus) atque Ellipsis Apollonii. Quod erat demonstrandum.

Sed & eadem opera docuimus, *Conum construere, eique datam Ellipsin ita aptare, ut data Ellipseos Diameter fiat Diameter-ex-generatione.* Atque etiam Theorematice verum esse, *Ellipseos diametrum quamlibet, fieri posse, in aliquo saltem Cono, Diametrum-ex-generatione.*

PROP. XXVII.

De Ellipseos Diametro-transversa & Verticibus-Oppositis.

SI Ellipseos Diameter-intercepta A D intelligatur (à vertice A versus concavam curvæ partem) tanta assumi, ut rectæ quam t diximus sit æqualis, (hoc est, ita se habeat ad latus rectum, ut interceptarum-diametrorum quadrata ad Rectangula quæ diximus Minora) erit & reliquus ipsius terminus D in Ellipseos curva. (Nam si $d=t$, erit $\frac{l}{t}d^2 = \frac{l}{d}d^2 = ld$; ideoque $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2 = ld - ld = 0$. hoc est, Ordinatim-applicata evanescit, puncto nimirum perimetri cum puncto diametri coincidente.)

Unde patet; Quamlibet Ellipseos Diametrum binos habere vertices, (ut quæ in binis punctis perimetro occurrit;) quos *Vertices Oppositos* appellamus. Diameter vero binis illis verticibus terminata, illa est quam *Diametrum-transversam* jam diximus.

Sed & inde liquet, Ellipsin ex earum curvarum numero esse quæ in se recurrunt, adeoque figuram comprehendunt.

Ellipseos autem Diameter-intercepta, diametro-transversa, longior esse non potest; tunc enim $\frac{l}{t}d^2$, quod binorum rectangulorum minus esse supponitur, majus esset quam ld, quod supponitur eorum majus esse. Si autem tale quid supponeretur; pro Ellipsi, prodiret Hyperbola, eandem habens diametrum-transversam, verticem vero eum qui est assumpto (in Ellipseos diametro-transversa) vertex oppositus; quique supponitur Ellipseos diameter intercepta (transversa major) erit aggregatum diametrorum transversæ & interceptæ in Hyperbola. Prout ex Hyperbolæ doctrina, post-tradenda, colligi poterit.

PROP. XXVIII.

Corollaria.

P*Atet ex præmissis*; Cum sit $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$: Horum in Ellipsi quatuor, *Diametri-transversæ*, *Diametri-interceptæ*, *Lateris-Recti*, & *Ordinatim-applicatæ*; datis tribus quibusvis, etiam & reliquum (magnitudine) dari. Nempe (disponendo & resolvendo æquationes) erit.

In Ellipsi

- Ordinatim-applicata, $e = \sqrt{:} ld - \frac{l}{t}d^2 := \sqrt{\frac{td - d^2}{t}l}$.
- Ejusque quadratum, $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2 = \frac{td - d^2}{t}l$.
- Latus rectum, $l = \frac{e^2}{td - d^2}t$.
- Diameter-transversa, $t = \frac{d^2 l}{dl - e^2}$.
- Diameter-intercepta, $d = \frac{1}{2}t \pm \sqrt{:} \frac{1}{4}t^2 - \frac{t}{l}e^2$.

Et propterea, Distantia puncti applicationis à Centro, $c = \sqrt{:} \frac{1}{4}t^2 - \frac{t}{l}e^2$.

Patet etiam; Ut Diameter-transversa ad Diametrum-interceptam, sic esse Rectangula quæ diximus Majora (diametris interceptis proportionalia,) ad Rectangula quæ diximus Minora (earum quadratis proportionalia,) nempe, $t \,.\, d :: ld \,.\, \frac{l}{t}d^2$.

Item; Ut Diameter-transversa ad Latus-rectum, sic quadrata Diametrorum-interceptarum ad Rectangula Minora, (quadratis illis proportionalia.) Nempe $t \,.\, l :: d^2 \,.\, \frac{l}{t}d^2$.

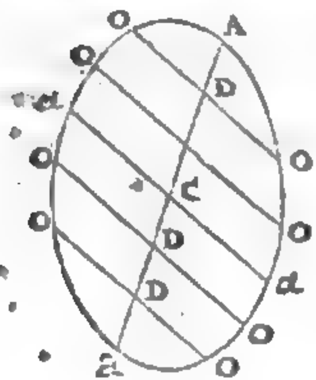
Item; Ut Diameter-transversa, ad interceptam; sic transversæ residuum, ad quartam; quæ, ducta in Latus-rectum, Rectangulum efficit æquale Quadrato Ordinatim-applicatæ. Nempe $t \,.\, d :: t - d \,.\, \frac{t-d}{t}d = \frac{td - d^2}{t}$. Et $\frac{td - d^2}{t}l = e^2$.

Item; Ut Diameter-transversa, ad Latus-rectum; sic Rectangulum segmentorum transversæ, ad Quadratum Ordinatim-applicatæ. Nempe $t \,.\, l :: td - d^2 \,.\, \frac{td - d^2}{t}l = e^2$.

Vel; Ut Rectangulum segmentorum Diametri-transversæ, ad Quadratum Ordinatim-applicatæ; sic esse Diametrum-transversam ad Latus-Rectum. (Unde cujuslibet Ellipseos Latus-Rectum commode reperitur.) Nempe $td - d^2 \,.\, e^2 :: t \,.\, l = \frac{e^2}{td - d^2}t$.

Inde sequitur; Quadrata Ordinatim-applicatarum esse Rectangulis segmentorum Diametri-transversæ proportionalia. Sunt enim ubique ut l ad t.

Adeoque, Omnium ad eandem Diametrum-applicatarum, eam esse maximam quæ diametri-transversæ puncto medio (quod Centrum diximus) applicatur ut C α. (Quoniam nempe omnium rectangulorum ejusdem rectæ segmentis comprehensorum, illud maximum est quod bisegmentis comprehenditur; hoc est, quadratum semissis.) Nempe, ubi $d = \frac{1}{2} t = t - d$, erit $t d - d^2 = \frac{1}{4} t^2$. ideoque $e^2 \left(= \frac{t d - d^2}{t} l\right) = \frac{1}{4} t l$, quadratum Ordinatim-applicatæ maximæ.



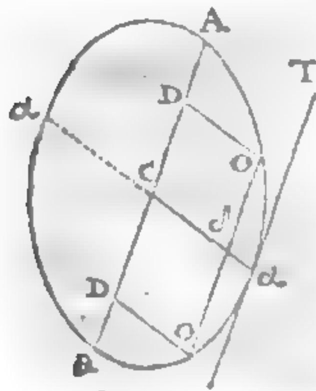
Reliquarum vero Ordinatim-applicatarum quadrata (adeoque & ipsæ Ordinatim-applicatæ) quæ centro propius applicantur sunt remotioribus majora, quæ autem habent applicationum puncta a centro æqualiter remota sunt invicem æqualia. Esto enim distantia puncti applicationis à centro quælibet CD$=c$, ideoque segmenta diametri-transversæ $\frac{1}{2} t + c$, $\frac{1}{2} t - c$; erit eorum rectangulum $\frac{1}{4} t^2 - c^2$ $(= t d - d^2;)$ & $e^2 \left(= \frac{t d - d^2}{t} l\right) = \frac{\frac{1}{4} t^2 - c^2}{t} l$: adeoque prout quantitas c augetur, ordinatim-applicata minuitur (non quidem proportionaliter, minuitur tamen, ut patet;) & contra; omnium vero maxima quæ centro applicatur (ut dictum est,) ubi c evanescit propter coincidentiam punctorum C, D.

Quodque de Ordinatim-Applicatis dictum est, idem & de Ordinatim-inscriptis (utpote applicatarum duplis) intelligendum est; nempe eam esse maximam quæ per centrum ordinatim-inscribitur; & reliquarum quidem centro propiores remotioribus majores; & æqualiter utrinque à centro remotas æquales esse.

PROP. XXIX.

De Ellipseos Diametris conjugatis.

Recta Diametro Parallela, ut α T, per illius quæ diametri-transversæ puncto medio seu centro Ordinatim-applicatur (quæ omnium maxima est, ut ostensum est; estque ad easdem partes unica, ut patet,) extremitatem ducta; Ellipsin in illo puncto (& quidem solo) contingit. (Secus enim non esset illa omnium, versus easdem partes, Ordinatim-applicatarum maxima.)



Omnes autem, huic contingenti parallelæ, (puta OδO) eidem Ellipsi inscriptæ, ab illa (quam diximus) ordinatim-applicata maxima (ad perimetrum utrinque continuata, ut α C α) bisecantur; adeoque & ipsa est (per def.) ejusdem Ellipseos diameter: oppositos vertices habens α α.

Cum enim Ordinatim-applicatæ DO DO sint (propter parallelas) æquales, æqualiter distabunt à Centro applicationum-puncta D D (ut modo ostensum est,) adeoque bisecantur tam D D in C, quam O O in δ: (propter parallelas:) estque $\alpha\delta$ diameter, eique ordinatim-applicantur δ O, C A.

Duas vero hujusmodi (ejusdem Ellipseos) diametros, (puta A a, α α) sibi mutuo ordinatim-positas, *Diametros Conjugatas* dicimus, (quæ se

ſe mutuo biſecant in communi centro C;) punctaque A α, vel a α, *conjugatos vertices* (in Conjugatis quippe diametris repertos) appellamus.

Ellipſin autem binis Diametris Conjugatis, earumque quatuor verticibus ſic inſtructam, poſſumus quidem quaſi pro quatuor ſive Ellipſibus ſive Sectionibus habere, quarum quælibet ſuum habet verticem, ſuamque Diametrum, eique Ordinatim-applicatas & Latus-rectum. Quarum quidem quatuor, binas α A α, α a α, *Oppoſitas* dicas, (ut & A α a, a α A,) quarum nempe vertices ſunt oppoſiti; binas vero α A α, A α a, vel A α a, α a α, (quarum vertices ſunt conjugati, utpote in conjugatis diametris poſiti,) *Conjugatas* dicas.

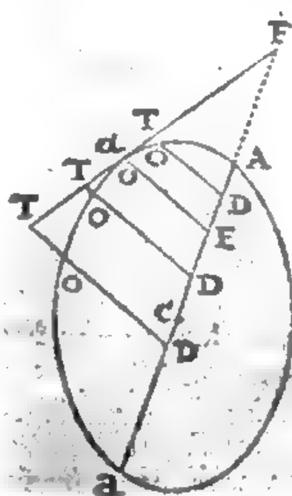
Quamvis enim *Sectionum Oppoſitarum* & *Conjugatarum* nomine, *Hyperbolæ* ut plurimum intelligi ſoleant: nihil tamen impedit quo minus (ut Hyperbolas, ſic) *Ellipſes* Oppoſitas & Conjugatas dicamus: vel ſaltem (ſi id nominis diſpliceat) Ellipſin dicamus *Oppoſito* & *Conjugato* ſitu conſideratam. Id ſaltem intereſt inter quatuor Sectiones Hyperbolicas, totidemque Ellipticas, (conjugatis Diametris accommodatas,) quod hæ quidem (productæ) ſe mutuo continuant, (adeoque Ellipſis tota ad quemvis quatuor verticum referri poterit,) illæ autem non ita. Verum hæc melius fortaſſe percipientur quum deinceps de Hyperbolis Oppoſitis & Conjugatis dictum erit.

Interim notandum eſt, Oppoſitarum ſive Ellipſeωn ſive Verticum (perinde enim eſt utrum dicatur,) Diametrum tranſverſam communem eſſe, & quidem Latera-recta æqualia, (vel, ſi mavis, idem; nos enim de lateris-recti ſitu nullam prorſus conſiderationem habemus, ſed ſolummodo de ipſius magnitudine, neque enim omnino refert vel ubi, vel an omnino ſcribatur aut ſcribi intelligatur,) & quidem eaſdem Ordinatim-applicatas; Diametros-interceptas vero oppoſitas habent, quæ quidem ſimul æquantur diametro-tranſverſæ.

PROP. XXX.

De recta Ellipſin-Contingente.

Recta Ellipſin contingens in conjugatarum Diametrorum alterutrius Vertice, cum reliqua (quantumvis utraque producatur) nunquam concurret, (utpote quæ ipſi parallela eſt, ut modo oſtenſum erat.) Quæ vero Ellipſin contingit recta, alibi quam in conjugato vertice, cum diametro (producta) concurret quidem. Punctum autem concurſus ſic inquiremus.



Supponatur Tangens αF, occurrens in F, productæ diametro E A, cui ordinatim-applicata ſit E α. Supponatur etiam ubivis Ordinatim-applicata D O, Tangenti occurrens in T. Sitque centrum C; & Oppoſiti vertices A a; quorum ſupponatur A puncto E propior, a remotior.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) E $\alpha = e$, E A $= d$, A a $= t$, (ideoque E a $= t - d$, EC $= \frac{1}{2}t - d$,) E F $= f$, E D $= a$, (ideoque D F $= f \pm a$, D A $= d \pm a$, D a $= t - d \mp a$.)

Tum (quia quadrata ordinatim-applicatarum ſunt rectangulis ſegmentorum Diametri-tranſverſæ proportionalia, ut oſtenſum eſt prop. 28.) erit E A × E a . DA × D a :: Eαq . DOq. hoc eſt, $td - d^2 . td - d^2 - a^2 \pm ta \mp 2da :: e^2 . \frac{td - d^2 - a^2 \pm ta \mp 2da}{td - d^2} e^2 =$ D O q.

Item (propter ſimilia triangula) E F . Eα :: D F . D T. hoc eſt, $f . e :: f \pm a . \frac{f \pm a}{f} e =$ DT, ejuſque quadratum $\frac{f^2 + a^2 \pm 2fa}{f^2} e^2 =$ D T q.

 Tum

Tum (propter Tangentem) $DTq \overline{>} DOq$ (nempe æqualia, si DE puncta coincidant; vel, si secus, illud majus,) hoc est, $\frac{f^2 + a^2 \pm 2fa}{f^2} e^2 \overline{>} \frac{td - d^2 - a^2 \pm ta \mp 2da}{td - d^2} e^2$. & (utrinque multiplicando per $\frac{td - d^2}{e^2} f^2$) erit $f^2td - f^2d^2 + tda^2 - d^2a^2 \pm 2ftda \mp 2fd^2a \overline{>} f^2td - f^2d^2 - f^2a^2 \pm f^2ta \mp 2f^2da$. Et (deletis utrinque $f^2td - f^2d^2$, atque dividendo per $\pm a$) erit $\pm tda \mp d^2a + 2ftd - 2fd^2 \overline{>} \mp f^2a + f^2t - 2f^2d$.

Denique, ponendo D E idem esse punctum, (ut evanescat quantitas $a = ED$, adeoque & ipsius multiplicia tda, d^2a, f^2a erit $2ftd - 2fd^2 = f^2t - 2f^2d$. Et (dividendo per $2f$) $td - d^2 = \frac{1}{2}ft - fd$. (hoc est, ▯ AEa = ▯ CEF) vel $\frac{1}{2}t - d . t - d :: d . f$. hoc est, EC . Ea :: EA . EF. vel (alternando) EC . EA :: Ea . EF. Quod erat inquirendum.

Quod Theorema sic inventum hoc est. Si sit Ordinatim-applicata in Ellipsi E*a*, atque ab applicationis puncto E Ellipseos diameter per propiorem verticem A continuetur ad F; sitque, ut distantia puncti-applicationis à Centro EC, ad diametrum interceptam EA, sic residuum transversæ-diametri Ea, ad diametrum-interceptam continuatam EF: recta *a*F Ellipsin in puncto *a* continget.

Demonstratio (si opus) institui poterit repetitis Analyseos vestigiis.

Sed & hinc concludi potest quod modo aliunde ostensum erat; nempe quod *Recta Ellipsin in diametri vertice contingens diametro conjugatæ parallela est, eique nunquam occursura.* Nam, cum sit EC . EA :: Ea . EF. si (propter coincidentiam punctorum E C) prima EC nulla sit (sive nullius magnitudinis,) quarta EF (vel CF) erit infinita (ex utravis parte supponatur diameter produci, sive per A, sive per a, indifferenter enim se Tangens habet ad utrumque verticem propter applicationem in centro,) hoc est, EF *a*F nunquam concurrent (propter infinitam distantiam suppositi puncti concursus F,) adeoque sunt parallelæ.

Patet etiam, *Interceptam-diametrum* EA (inter applicationis punctum & verticem propiorem) *ipsius continuatione* AF (inter verticem illum & tangentis cum diametro concursum,) *minorem esse.* Cum enim sit, EC . Ea = EC + Ca :: EA . EF = EA + AF: Erit etiam (dividendo) EC . Ca :: EA . AF. At EC minor est quam Ca vel CA (pars toto,) ergo & EA minor quam AF.

Sed & (ponendo $CA = \frac{1}{2}t = s$, & $CE = \frac{1}{2}t - d = c$, ideoque $EA = d = s - c$, & $Ea = t - d = s + c$,) erit $EF = \frac{td - d^2}{\frac{1}{2}t - d} = \frac{s^2 - c^2}{c}$, & $CF (= EF + EC) = \frac{s^2}{c}$; hoc est CE . CA :: CA . CF.

Sed & hinc docemur *Rectam aF ducere quæ Ellipsin in dato puncto a contingat.* Nempe, ducta Ordinatim-applicata *a*E, fiat ut EC ad Ea sic EA ad EF. Juncta enim F*a* Ellipsin in *a* contingit.

Item, *A dato extra puncto F rectam ducere Fa quæ Ellipsin contingat.* Nempe, juncta FC, & continuata, (quæ Ellipsi in A a punctis occurrat,) ut habeatur F punctum in diametri Aa continuatione; Quoniam est (ut modo dictum est) EC . Ca = CA :: EA . AF. ideoque FA . AC :: AE . EC; Si dividatur AC in E, sicut dividitur FC in A; & ducatur Ordinatim-applicata E*a*; recta F*a* juncta Ellipsin contingit.

Alia liceret hic Corollaria adjungere, qualia de Parabola innuimus prop. 23. Sed ea brevitatis ergo omittenda judico.

PROP.

PROP. XXXI.

De Ellipseos Diametris.

SI à puncto quovis α in Ellipseos curva $A\alpha$, ducatur ad Centrum C recta αC; erit hæc ejusdem Ellipseos diameter, cujus vertex α, ejusque Ordinatim-applicatæ rectæ ipsi αF, Ellipsin in puncto α contingenti, parallelæ.

Libet hanc propositionem (ut prius prop. 24.) primo Analytice examinare, deinde & Synthetice demonstrare.

Supponamus igitur rem esse ut perhibetur; adeoque inscriptam quamlibet OO tangenti αF parallelam, à recta αC (per contactum & centrum transeunte) bisectam in ε. Sintque rectæ OD, OD, αE, diametro AE ordinatim-applicatæ, adeoque invicem parallelæ; quibus etiam parallela ducatur εe eidem diametro in e occurrens, quæ propterea (ob parallelas) bisecabit (ut OO in ε, sic) DD in e. Denique recta OO, diametro AE, (utrisque si opus est productis,) occurrat in G. (Saltem si parallela sit, ut non possit occurrere; res ipsa jam demonstrata est, Prop. 29.)

Supponemus etiam impræsentiarum, verticum A a (diametri AE,) verticem A propiorem, a remotiorem, Puncto E: Item punctum ε intra puncta αC incidere: rectamque OO diametro AE productæ extra Ellipsin occurrere: Si autem horum alicui contrarium contingat (quod quidem fieri potest,) nihilo tamen minus res succedet, mutatis tantum aliquoties signis $+\,-$, quod operationis progressum neutiquam turbabit.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) $E\alpha = e$, $EA = d$, $Aa = t$, $Ea\,(= t - d) = x$, $EC\,(= \frac{1}{2}t - d) = c$, $eD = q$, $\varepsilon\alpha = \delta$, $\alpha C = \sigma$, $2\sigma - \delta = \xi$, $\varepsilon C\,(= \sigma - \delta) = \gamma$.

Tum (per præced.) $EC.EA :: Ea.EF$. hoc est $c.d :: x.\frac{dx}{c} = EF$. Et (propter parallelas, & similia triangula) $C\alpha.\varepsilon\alpha :: CE.eE$. hoc est $\sigma.\delta :: c.\frac{\delta c}{\sigma} = eE$. Et $C\alpha.C\varepsilon :: E\alpha.e\varepsilon :: EF.eG$. hoc est, $\sigma.\gamma :: e.\frac{\gamma e}{\sigma} = e\varepsilon :: \frac{dx}{c}.\frac{\gamma dx}{\sigma c} = eG$. ideoque $DG\,(= eG \pm eD) = \frac{\gamma dx}{\sigma c} \pm q$. Item $eA\,(= eE + EA) = d + \frac{\delta c}{\sigma}$, & $ea = x - \frac{\delta c}{\sigma}$, ideoque $DA\,(= eA \pm eD) = d + \frac{\delta c}{\sigma} \pm q$, & $Da = x - \frac{\delta c}{\sigma} \mp q$. Et rectangulum $DA \times Da = \frac{\sigma^2 dx - \sigma^2 q^2 \pm \sigma^2 xq \mp \sigma^2 dq \mp 2\sigma\delta cq + \sigma\delta xc - \sigma\delta dc - \delta^2 c^2}{\sigma^2}$ (vel, quia $x - d = 2c$) $= \frac{\sigma^2 dx - \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma^2 cq \mp 2\sigma\delta cq + 2\sigma\delta c^2 - \delta^2 c^2}{\sigma^2}$ (vel, quia $\sigma - \delta = \gamma$, & $2\sigma - \delta = \xi$) $= \frac{\sigma^2 dx - \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\xi c^2}{\sigma^2}$.

Deinde, (quia, propter Ellipsin, Quadrata ordinatim-applicatarum sunt rectangulis segmentorum diametri-transversæ proportionalia) $EA \times Ea = dx.\ DA \times Da :: E\alpha q = e^2.\ DOq = \frac{\sigma^2 dx - \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\xi c^2}{\sigma^2 dx}e^2$.

Item

Item (propter similia) EF . Eα :: DG . DO. hoc est $\frac{dx}{c} . e :: \frac{\gamma dx \pm \sigma c q}{\sigma c} . \frac{\gamma dx \pm \sigma c q}{\sigma dx} e =$ DO. ejusque quadratum $\frac{\gamma^2 d^2 x^2 + \sigma^2 c^2 q^2 \pm 2 \sigma \gamma d x c q}{\sigma^2 d^2 x^2} e^2 . = \text{DOq} = \frac{\sigma^2 dx - \sigma^2 q^2 \pm 2 \sigma \gamma c q + \delta \xi c^2}{\sigma^2 dx} e^2$.

Ideoque (utrinque multiplicando per $\sigma^2 d^2 x^2$ & dividendo per e^2) $\gamma^2 d^2 x^2 + \sigma^2 c^2 q^2 \pm 2 \sigma \gamma d x c q = \sigma^2 d^2 x^2 - \sigma^2 d x q^2 \pm 2 \sigma \gamma d x c q + \delta \xi d x c^2$. Et (delendo utrinque $\pm 2 \sigma \gamma d x c q$, & transponendo) $\sigma^2 c^2 q^2 + \sigma^2 d x q^2 = \sigma^2 d^2 x^2 - \gamma^2 d^2 x^2 + \delta \xi d x c^2$. Et (quia $\sigma^2 - \gamma^2 = \delta \xi$, per 5 e 2) $\sigma^2 c^2 q^2 + \sigma^2 d x q^2 = \delta \xi d^2 x^2 + \delta \xi d x c^2$. Et (dividendo utrinque per $dx + c^2 = \frac{1}{4} t^2$) $\sigma^2 q^2 = \delta \xi d x$. hoc est $\frac{\delta \xi d x}{\sigma^2} = q^2$. Constat ergo propositum.

Illud Synthetice sic demonstratur, (repetitis Analyseos vestigiis.) Ab Ellipseos centro C ducatur recta Cα, atque Ellipsin in puncto α contingat recta αF, diametro cuilibet CA occurrens in F; ipsique parallela quælibet OO rectæ Cα (intra Ellipsin) occurrens in ι, diametroque CA in G; Diametro autem CA ordinatim-applicetur αE, eique parallela ιe, diametro occurrens in e. Eademque maneant symbola quæ prius $e, d, t, x, c, \delta, \sigma, \xi, \gamma$.

Sumantur autem in diametro utrinque à puncto e æquales rectæ eD $= \sqrt{\frac{\delta \xi d x}{\sigma^2}}$; atque ordinatim-ponantur DO, DO, rectæ OO occurrentes in OO. Adeoque bisecantur tam DD in e (per constructionem) quam OO (propter parallelas) in ι.

Dico rectam illam quamlibet OO (à recta Cα bisectam in ι) Ellipsi inscriptam esse; hoc est puncta OO esse in perimetro. Quod sic probatur.

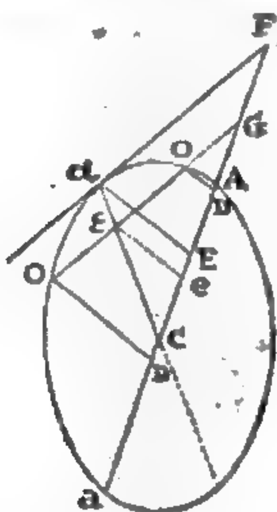
Quoniam sunt (ut in Analysi demonstravimus) EF $= \frac{dx}{c}$, eG $= \frac{\gamma d x}{\sigma c}$, eA $= d + \frac{\delta c}{\sigma}$ & ea $= x - \frac{\delta c}{\sigma}$: Erit DG ($=$ eG $\pm$ eD) $= \frac{\gamma d x}{\sigma c} \pm \sqrt{\frac{\delta \xi d x}{\sigma^2}}$; & DA $= d + \frac{\delta c}{\sigma} \pm \sqrt{\frac{\delta \xi d x}{\sigma^2}}$, & Da $= x - \frac{\delta c}{\sigma} \mp \sqrt{\frac{\delta \xi d x}{\sigma^2}}$; atque horum rectangulum DA $\times$ Da $= \frac{\sigma^2 d x + \delta \xi c^2 - \delta \xi \delta x \pm 2 \gamma c \sqrt{\delta \xi d x}}{\sigma^2}$. (nempe, pro q & q^2 in analysi; substituendo $\frac{\sqrt{\delta \xi d x}}{\sigma}$ & $\frac{\delta \xi d x}{\sigma^2}$.) vel (quia $\sigma^2 - \delta \xi = \gamma^2$ per 5 e 2) erit DA $\times$ Da $= \frac{\gamma^2 d x \pm \delta \xi c^2 \pm 2 \gamma c \sqrt{\delta \xi d x}}{\sigma^2}$.

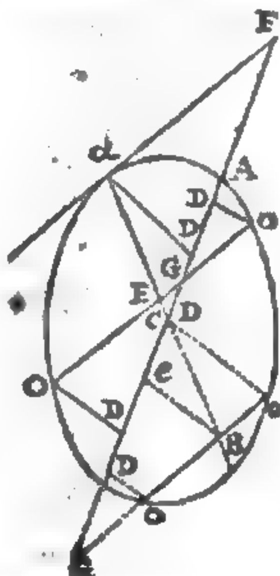
Tum (propter similia triangula) erit EF . Eα :: DG . DO. hoc est, $\frac{dx}{c} . e :: \frac{\gamma d x \pm c \sqrt{\delta \xi d x}}{\sigma c} . \frac{\gamma d x \pm c \sqrt{\delta \xi d x}}{\sigma d x} e =$ DO. ejusque quadratum $\frac{\gamma^2 d^2 x^2 + \delta \xi d x c^2 \pm 2 \gamma d x c \sqrt{\delta \xi d x}}{\sigma^2 d^2 x^2} e^2 = \frac{\gamma^2 d x + \delta \xi c^2 \pm 2 \gamma c \sqrt{\delta \xi d x}}{\sigma^2 d x} e^2 =$ DOq.

Sed & tantundem est quadratum Ordinatim-applicatæ puncto D. Nam (propter Ellipsin) ut rectangulum EA $\times$ Ea, ad rectangulum DA $\times$ Da; sic (Eαq) quadratum Ordinatim-applicatæ in E, ad quadratum ordinatim-applicatæ in puncto D. hoc est $dx . \frac{\gamma^2 d x + \delta \xi c^2 \pm 2 \gamma c \sqrt{\delta \xi d x}}{\sigma^2} :: e^2 . \frac{\gamma^2 d x + \delta \xi c^2 \pm 2 \gamma c \sqrt{\delta \xi d x}}{\sigma^2 d x} e^2$. quod igitur est quadratum ordinatim-applicatæ puncto D, estque (ut modo ostensum est) ipsum DOq.

Et

Et propterea DO, DO, (quæ, ex constructione, sunt punctis D D Ordinatim-positæ) sunt & Ordinatim-applicatis æqualia, adeoque puncta OO, sunt in perimetro; rectaque OO est Ellipsi inscripta: sed & illa (eique parallelæ, eadem ratione,) à recta αC bisecatur, adeoque ordinatim-inscripta est, ejusque semissis ιO diametro αC ordinatim-applicata. Quod erat demonstrandum.





Notandum autem est (tam quoad Analysin quam Synthesin) fieri quandoque posse, (ubi recta OO longius abest à tangente αF) ut punctum G vel intra Ellipsin accidat vel etiam ultra oppositum verticem: Sed nihil hinc continget quod operationis progressum multum perturbet; tantum mutanda forsan erunt aliquoties signa + —, aut aliquæ saltem quantitates occurrent negative interpretandæ. Sed hoc non tanti est, ut eapropter operationem istis casibus accommodandam repetam. Illud autem à quovis vel parum exercitato (sicui id operæ pretium videbitur) facile præstari possit.

Interim non erit incommodum Corollaria quædam hic subjungere, (qualia subjunximus Prop. 14. de Parabola,) puta.

Quodlibet Perimetri Ellipseos punctum alicujus diametri verticem esse.

Adeoque, *In qualibet Ellipsi numero-infinitos esse Vertices, atque Diametros infinitas.*

Item, *Ellipseos diametros omnes in Centro convenire.*

Et, *Rectam quamlibet per centrum transeuntem, Diametrum esse.*

Item, *Quamlibet in eodem plano rectam per aliquod intra Ellipsin punctum transeuntem alicui diametro Ordinatim-positam esse.*

Item, *Quæ diametro alicui in vertice occurrit, ipsius Ordinatim-applicatis parallela, Ellipsin in illo puncto contingere.*

Et, *Quæ Ellipsin contingit, rectam diametro per contactus punctum transeunti Ordinatim-positam esse, ejusque Ordinatim-applicatis parallelam.*

Denique; *Ellipsin, quæ diametros conjugatas æquales atque ad angulos rectos positas habet, Circulum esse.*

Hæc autem, aliaque innumera, vel satis in præcedentibus demonstrantur, vel inde saltem facile demonstrari poterunt.

PROP. XXXII.

Effectiones Geometricæ.

ATque ex dictis satis intelligere licet Geometricam Problematum effectionem. Puta,

Ellipseos Diametrum invenire. Quæ enim duas quaslibet inscriptas parallelas bisecat est diameter.

Ellipseos Centrum invenire. Nempe in duarum quarumlibet diametrorum concursu.

Ellipseos diametrum invenire, quæ per datum punctum transeat. Rectam nempe, quæ datum punctum & centrum conjungit. *Data*

Data in Ellipsi diametro qualibet, diametrum conjugatam invenire. Vel generaliter,

Data inscripta qualibet, diametrum invenire cui illa ordinatim-ponitur. Nempe rectam quæ datam inscriptam aliamque ipsi parallelam bisecat: Vel (si diameter non sit) quæ ipsius punctum medium, & Ellipseos centrum conjungit.

Datæ Ellipseos Axes invenire. Nempe describatur Peripheria Ellipsi concentrica, ipsamque saltem in binis punctis secans: Rectam enim bina puncta proxima conjungentem quæ bisecat diameter, est Axium alter; reliquusque est huic conjugatus.

Nota tamen; *In circulo omnes Diametros Axes esse, & quidem æquales; & conjugatas ipsius diametros omnes esse conjugatos Axes. In aliis autem Ellipsibus quibusvis, non nisi duos Axes reperiri, eosque Conjugatos, sed & inæquales; & quidem conjugatarum-diametrorum omnium maxime inæquales; quare & Diametri-Extremæ dici solent: Sicut e contra,* Diametros-Medias *dicere licet, quæ sunt conjugatæ æquales: Suntque inter extremas mediæ proportionales.*

Datæ Ellipseos ordinatim-applicatas (positione) invenire, quæ datæ ipsius diametro conveniunt. Inventa nempe Diametro conjugata, quæ huic æquidistant rectæ sunt diametro datæ ordinatim-positæ.

Ellipsin ad datam diametrum & datum latus rectum describere, quæ datum habeat inclinationis angulum. Nempe inventis (magnitudine) ad quotlibet diametri puncta Ordinatim-applicatis, (per prop. 28.) applicentur ad sua respective puncta in angulo imperato: Per earum enim extrema puncta, curva æquabiliter ducta, est Ellipsis. Vel etiam (quæ erit in praxi commoda constructio) Descripto Circulo, cujus Diameter sit æqualis diametro quæ est, in Ellipsi, datæ conjugata; Atque inventis quotlibet Ordinatim-applicatis ad illam Circuli Diametrum, (hoc est, quotlibet Sinubus rectis:) Hæ ipsæ, cum Diametro data Ellipseos præscriptum angulum facientes (sic divisa ut dividitur illa Circuli Diameter,) sunt ad respectiva Diametri Ellipseos puncta, Ordinatim-applicatæ.

Atqui ego brevitatis causa (præsertim cum ex dictis facile deduci queant) harum effectionum demonstrationes, aliaque tam Problemata quam Theoremata plurima lubens omitto.

PROP. XXXIII.

De Hyperbola absolute considerata.

CUm sit in Hyperbola (ut ostendimus Prop. 20. inspecto Cond.) Quadratum ordinatim-applicatæ $h^2 = ld + \frac{l}{t}d^2$. Licebit hic (ut Parabolam & Ellipsin supra) Hyperbolam eo charactere insignitam, Cono eximere, atque absolute & universaliter contemplari, acsi nullam ad Conum relationem haberet.

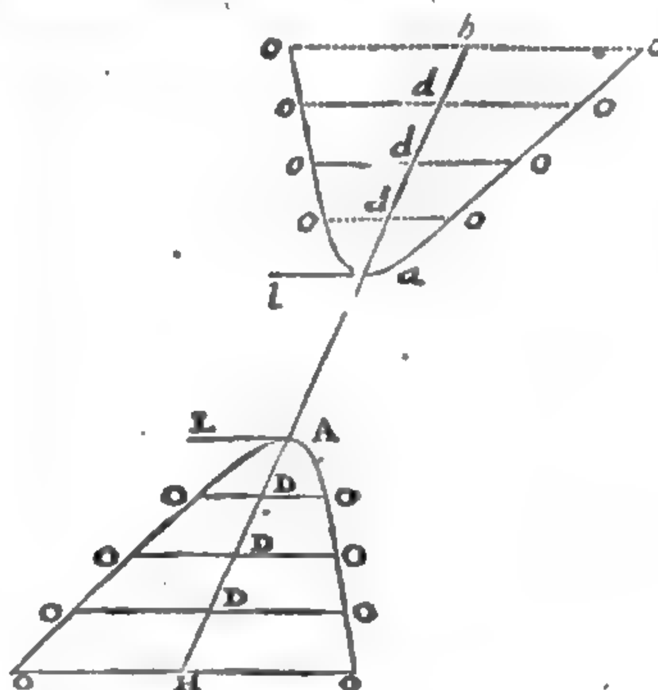
Hyperbolam igitur appello eam (sive lineam curvam in plano descriptam, sive figuram planam ejusmodi curva terminatam,) cujus ordinatim-applicatarum singularum quadrata, æquantur aggregatis binorum rectangulorum; quorum quidem altera sunt interceptis-diametris, altera earum quadratis, proportionalia. (Nempe $h^2 = ld + \frac{l}{t}d^2$. Sunt enim rectangula ld, ipsis d diametris-interceptis proportionalia, propter communem altitudinem l; rectangula vero $\frac{l}{t}d^2$ diametrorum-interceptarum quadratis d^2 sunt proportionalia, propter eandem ubique rationem, puta $t.l :: d^2.\frac{l}{t}d^2$. Utrum vero rectangulorum majus sit, non refert; sed modo hoc, modo illud.)

Diametrum,

Diametrum, *Diametros-interceptas*, *Verticem*, *Ordinatim-positas*, *Ordinatim-inscriptas*, *Ordinatim-applicatas*, atque *Punctum-applicationis*; eodem sensu hic accipio quo iisdem supra de Parabola & Ellipsi usus sum.

Rectam nota l insignitam, (lineam puta imaginariam, quæ cum interceptis diametris, binorum rectangulorum illa continet quæ sunt ipsis diametris-interceptis proportionalia,) appello *Latus-Rectum*.

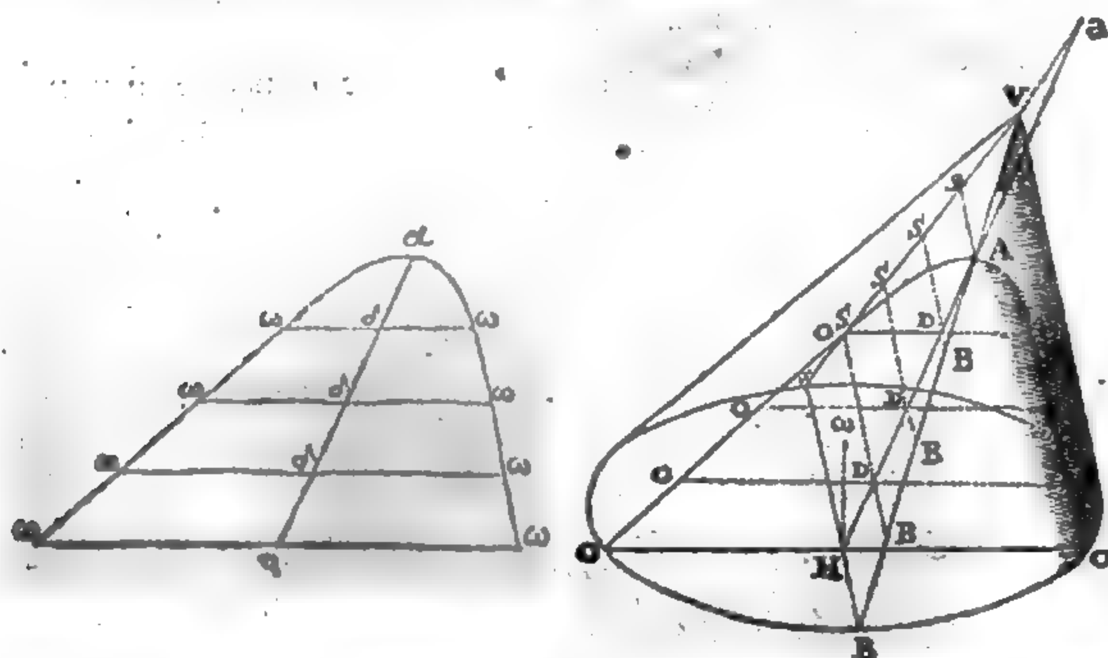
Rectam vero alteram, quæ nota t designatur, (quam quidem supponimus Diametri supra verticem continuationem, versus convexam curvæ partem ductam; quæque ita se habet ad Latus-rectum ut diametrorum-interceptarum quadrata ad binorum Rectangulorum illa quæ quadratis illis sunt proportionalia:) *Diametrum transversam* appello, (ut quæ Oppositis Oppositarum Hyperbolarum vertices conjungit, ut post dicetur;) ejusque punctum medium, (quod quidem extra Hyperbolam jacet, sed inter Hyperbolas Oppositas, ut post patebit) appello *Centrum*.



Hyperbolam à nobis definitam eandem esse cum illa quam definit Apollonius, simili fere progressu ostendemus, atque supra de Parabola & Ellipsi usi sumus prop. 21, & 26.

Hyperbolæ nempe, (qualem definit Apollonius Conic. lib. 1. prop. 12.) Sectione coni factæ, universaliter convenire definitionem à nobis propositam; jam probatum est prop. 17, & 20.

Contra vero, Hyperbolam à nobis descriptam ita Cono aptari posse, ut eas habeat conditiones quas postulat Hyperbola Apolloniana; sic probatur;



Exponatur Hyperbola quælibet à nobis definita aa, cujus Ordinatim-applicatarum quadrata sint $b^2 = ld + \frac{l}{t} d^2$. Dico hanc Cono ita ut postulatur aptari posse.

Ducatur recta a A = t, & (in ejusdem continuatione) AH = d: Atque ad rectam AH ponantur (ad oppositas partes) duæ rectæ invicem parallelæ; AS = l, & HB = d, (saltem tantæ sint longitudinis AS, HB, ut sit AS × HB = ld;) Sitque angulus SAH = AHB quilibet acutus, (modo major sit complemento anguli inclinationis in Hyperbola exposita.) Juncta vero a S producatur ut cum recta BH producta coeat in S; & juncta BA producatur ut occurrat ipsi a S in V; ut compleatur triangulum VBS; quod esto Triangulum-per-axem in Cono construendo.

Deinde super rectis AH, BHS, duo plana ita erigantur, ut communis eorum sectio HO, faciat ad rectam HB angulos rectos, ad rectam vero AH angulum AHO æqualem angulo inclinationis in Hyperbola proposita.

Hoc enim omnino fieri posse constat: Si enim recta quælibet HO perpendiculariter insistens plano Trianguli VBS (adeoque angulos faciens utrosque OHA, OHB, rectos) circumvolvatur circa rectam BHS ut axem (invariato angulo OHB,) donec ad situm plani perveniat in Hω, faciatque in plano trianguli angulum ωHA acutum, qui minor erit angulo inclinationis in Hyperbola, (est enim, ex constructione, angulus AHB istius inclinationis complemento major;) necesse est ut, in transitu, aliquando fecerit angulum inclinationis-angulo æqualem; (factus enim est transitus ab angulo recto, adeoque debito majori, vel saltem æquali, ad angulum debito minorem;) adeoque tunc fuerit in situ debito ut sit duorum planorum prout requiritur, concurrentium communis sectio.

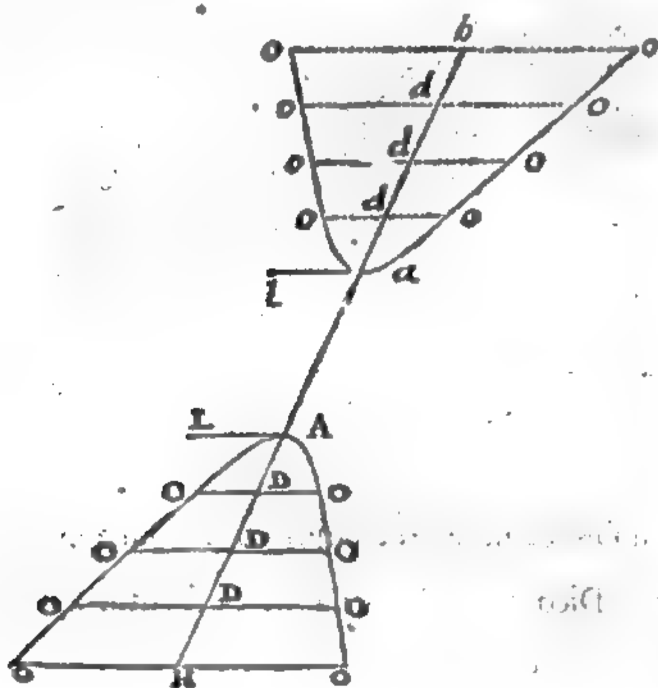
In plano autem BOS sic posito scribi intelligatur circulus, diametrum habens BHS, qui sit basis coni; aliique huic paralleli diametros habentes BDS, conum complentes, (per prop. 5.) qui plano AHO sectus exhibebit Hyperbolam (per prop. 7.) cujus ordinatim-applicatæ omnes (quarum HO est una) ad diametrum AH angulum facient æqualem angulo inclinationis ordinatim-applicatarum in Hyperbola exposita ad diametrum suam; sed & eisdem sunt respective æquales (ut patebit ex demonstratione prop. 17, & 20.) ideoque singulæ singulis congruunt, adeoque & Hyperbola exposita Hyperbolæ sectione coni factæ. Quod erat faciendum. Adeoque Hyperbola à nobis definita eadem est cum ea quam definit Apollonius. Quod erat demonstrandum.

Sed & eadem opera docuimus *Conum construere eique datam Hyperbolam ita aptare, ut data ipsius diameter sit diameter-ex-generatione*: Atque etiam Theorematice verum esse, *Hyperbolæ diametrum quamlibet fieri posse, in aliquo saltem Cono, Diametrum-ex-generatione.*

PROP. XXXIV.

De Diametro transversa, & Hyperbolis oppositis.

SI ad eandem diametrum duæ Hyperbolæ opposito situ ponantur, communem habentes diametrum-transversam, idemque latus rectum; sintque ad illam diametrum ordinatim-applicatæ unius, ordinatim-applicatis alterius parallelæ: dicentur illæ *Hyperbolæ-opposita*; earumque vertices, eandem diametrum-transversam terminantes, *Vertices Oppositi*: Punctumque inter oppositos vertices medium, est utrique Hyperbolæ centrum commune.



Hæ autem Hyperbolæ Opposita, respondent Hyperbolis Oppositorum conorum eodem plano sectorum.

PROP.

PROP. XXXV.

Corollaria.

P*Atet ex dictis*; Cum sit $b^2 = ld + \frac{l}{t}d^2$: Ex horum in Hyperbola quatuor, *Diametro-transversâ*, *Diametro-interceptâ*, *Latere-Recto*, & *Ordinatim-applicatâ*; Datis tribus quibusvis, etiam reliquum (magnitudine) dari. Nempe (disponendo & resolvendo aequationes) erit,

In Hyperbola,

- Ordinatim-applicata, $b = \sqrt{:}\, ld + \frac{l}{t}d^2 : = \sqrt{\frac{td + d^2}{t}\, l}$.
- Ejusque quadratum, $b^2 = ld + \frac{l}{t}d^2 = \frac{td + d^2}{t}\, l$.
- Latus rectum, $l = \frac{b^2}{td + d^2}\, t$.
- Diameter-transversa, $t = \frac{d^2 l}{b^2 - dl}$.
- Diameter-intercepta, $d = \sqrt{:}\, \frac{1}{4}t^2 + \frac{t}{l}b^2 : - \frac{1}{2}t$.

Adeoque; Diametrorum transversae & interceptae aggregatum, $t + d = \sqrt{:}\, \frac{1}{4}t^2 + \frac{t}{l}b^2 : + \frac{1}{2}t$.

Distantia puncti applicationis à Centro, $c = \sqrt{:}\, \frac{1}{4}t^2 + \frac{t}{l}b^2$.

Patet etiam; Ut Diameter-transversa, ad interceptam; sic esse binorum Rectangulorum ea quae diametris interceptis proportionalia, ad Rectangula earum quadratis proportionalia. Nempe, $t . d :: ld . \frac{l}{t}d^2$.

Item; Ut Diameter-transversa ad Latus-rectum; ita quadrata diametrorum-interceptarum ad Rectangula quadratis illis proportionalia. Nempe $t . l :: d^2 . \frac{l}{t}d^2$.

Item; Ut Diameter-transversa, ad interceptam; ita utriusque aggregatum, ad quartam; quae, ducta in Latus-rectum, Rectangulum efficit aequale Quadrato Ordinatim-applicatae. Nempe $t . d :: t + d . \frac{t+d}{t}d = \frac{td + d^2}{t}$. Et $\frac{td + d^2}{t}l = b^2 = ld + \frac{l}{t}d^2$.

Adeoque; Ut Diameter-transversa, ad Latus-rectum; sic Rectangulum sub Diametro-intercepta & aggregato diametrorum transversae & interceptae, ad quadratum Ordinatim-applicatae. Nempe $t . l :: td + d^2 . \frac{td + d^2}{t}l = b^2 = ld + \frac{l}{t}d^2$.

Vel, Ut Rectangulum Diametro intercepta, & aggregato Diametrorum transversae & interceptae comprehensum, ad quadratum Ordinatim-applicatae: sic esse Diametrum-transversam ad Latus-Rectum. (Unde Hyperbolae Latus-Rectum commode reperitur.) Nempe, $td + d^2 . b^2 :: t . l = \frac{b^2}{td + d^2}t$.

Inde sequitur; Quadrata Ordinatim-applicatarum Rectangulis Diametro intercepta & aggregato diametrorum-transversæ & interceptæ comprehensis, esse proportionalia. Sunt enim ubique ut t. ad l.

Adeoque, Prout longius à vertice removetur punctum-applicationis, ita semper augeri Ordinatim-applicatas. Nempe quia sic tam d quam $t+d$ (diameter intercepta, & aggregatum transversæ & interceptæ) augentur, adeoque & eorum rectangula, & propterea quadrata Ordinatim-applicatarum his rectangulis proportionalia, adeoque & ipsæ Ordinatim-applicatæ.

Et propterea; Hyperbolam ex earum linearum numero esse, quæ figuram non claudunt; Cum Ordinatim-applicatæ (à vertice inchoando) perpetuo crescant, adeoque & crescat crurum divaricatio, quæ idcirco nunquam sunt deinceps coitura.

Ideoque & Hyperbolæ diametrum quamlibet non nisi in unico Verticis puncto eidem Hyperbolæ occurrere; Quoniam nempe crescentibus continuo Ordinatim-applicatis Hyperbolæ curva à diametro magis continuo resiliat, nunquam ideo deinceps coitura. Vertices enim Oppositi, quanquam in eadem diametro, non tamen sunt in eadem Hyperbola, sed in Oppositis.

PROP. XXXVI.

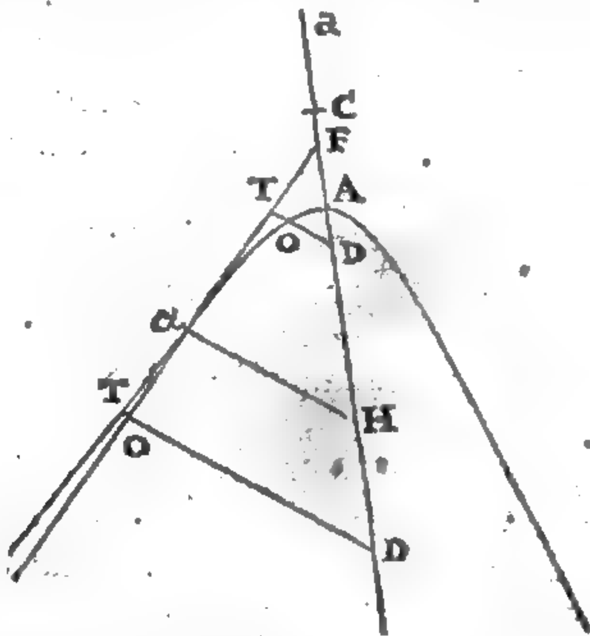
De recta Hyperbolam contingente.

Recta Hyperbolam contingens diametro productæ inter verticem & centrum occurret. Punctum vero concursus sic inquiremus.

Supponatur tangens αF occurrens, in F, diametro HA productæ, eique ordinatim-applicata αH. Supponatur etiam ubivis eidem diametro Ordinatim-applicata DO, tangenti Occurrens in T. Sitque A vertex, C centrum.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) $H\alpha = b$, $HA = d$, $Aa = t$, (ideoque $Ha = t + d$, $HC = \frac{1}{2}t + d$,) $HF = f$, $HD = a$, (ideoque $DF = f \pm a$, $DA = d \pm a$, $Da = t + d \pm a$.)

Tum (quia, propter Hyperbolam, quadrata Ordinatim-applicatarum sunt rectangulis AHa proportionalia, ut modo ostensum est) erit $HA \times Ha . DA \times Da :: H\alpha q . DOq$. hoc est, $td + d^2 . td + d^2 + a^2 \pm ta \pm 2da :: b^2 . \frac{td + d^2 + a^2 \pm ta \pm 2da}{td + d^2} b^2$.



Et (propter similia triangula) $HF . H\alpha :: DF . DT$. hoc est, $f . b :: f \pm a . \frac{f \pm a}{f} b = DT$. ejusque quadratum $\frac{f^2 + a^2 \pm 2fa}{f^2} b^2 = DTq$.

Tum

Tum (propter Tangentem) $DTq \overline{>} DOq$ (nempe æqualia, si DH coincidant; vel, si secus, illud majus;) hoc est, $\frac{f^2 + a^2 \pm 2fa}{f^2} b^2$ $\overline{>} \frac{td + d^2 + a^2 \pm ta \pm 2da}{td + d^2} b^2$. & (utrinque multiplicando per $\frac{td + d^2}{b^2} f^2$,) erit $f^2td + f^2d^2 + tda^2 + d^2a^2 \pm 2ftda \pm 2fd^2a \overline{>} f^2td + f^2d^2 + f^2a^2 \pm f^2ta \pm 2f^2da$. Et (deletis utrinque $f^2td + f^2d^2$,) erit $tda^2 + d^2a^2 \pm 2ftda \pm 2fd^2a \overline{>} f^2a^2 \pm f^2ta \pm 2f^2da$. Et (dividendo per $\pm a$) erit $\pm tda \pm d^2a + 2ftd + 2fd^2 \overline{>} \pm f^2a + f^2t + 2f^2d$.

Denique, ponendo $D\,H$ idem esse punctum, (ut evanescat quantitas a, adeoque & ipsius multiplicia tda, d^2a, f^2a) erit $2ftd + 2fd^2 = f^2t + 2f^2d$. Et (dividendo per $2f$) $td + d^2 = \frac{1}{2}ft + fd$. (hoc est, $\square\, AHa = \square\, CHF$;) vel $\frac{1}{2}t + d . t + d :: d . f = \frac{t + d}{\frac{1}{2}t + d} d$. Hoc est, $HC . Ha :: HA . HF$. Quod erat inquirendum.

Quod Theorema sic inventum, hoc est; Si sit Ordinatim-applicata in Hyperbola $H\alpha$, atque ab applicationis puncto H continuetur diameter HA ad F; sitque ut distantia puncti-applicationis à Centro HC, ad aggregatum diametrorum transversæ & interceptæ Ha; sic diameter intercepta HA, ad eandem continuatam HF: recta αF juncta Hyperbolam in puncto α continget.

Vel sic; si recta αF Hyperbolam contingat in termino ordinatim-applicatæ α; erit, ut distantia puncti applicationis H à centro HC, ad ejusdem distantiam à vertice remotiore Ha; sic distantia à vertice propiori HA, ad distantiam à puncto concursus tangentis & diametri HF.

Demonstratio, si sit opus, institui poterit repetitis Analyseos vestigiis.

Sed & patet, quod, cum sit $HC . Ha :: HA . HF$. hoc est $HC . HC + Ca :: HA . HA + AF$. erit (dividendo) $HC . Ca = CA :: HA . AF$. Adeoque si sumatur (in diametro continuata) $AF = \frac{HA \times AC}{HC}$, habetur punctum F. Sed etiam, cum sit HC major quam CA, (pars toto) erit propterea HA major quam AF: hoc est, *Diameter intercepta, major quam ipsius continuatio ad concursum Tangentis*; (contra quam in Ellipsi ubi minor est, & in Parabola, ubi æqualis; ut ostendimus prop. 23, & 30.)

Item, (ponendo $CA = \frac{1}{2}t = s$, & $CH = CA + AH = s + d = c$, ideoque $HA = c - s$, & $Ha = c + s$) erit $HF = \frac{td + d^2}{\frac{1}{2}t + d} = \frac{c^2 - s^2}{c} = f$, & $CF = c - f = \frac{s^2}{c}$. Hoc est $CH . CA :: CA . CF$.

Atque hinc docemur, *Rectam αF ducere quæ Hyperbolam in dato puncto α contingat.* Sumpta nempe $CF = \frac{CAq}{CH}$, & quidem à C versus A, si contactus requiratur ad Hyperbolam Aα, vel (eadem ratione) à C versus a, si ad Hyperbolam oppositam.

Atque hinc sequitur; *Rectam contingentem Hyperbolæ diametro citra centrum occurrere; puta intra centrum & verticem:* (nam quod ultra verticem sit, patet ex prædictis, cum sit $HC . Ha :: HA . HF$. est enim HC minor quam Ha, ideoque & HA minor quam HF. Quod autem sit citra centrum, patet etiam, quia, ut dictum est, $HC . CA :: HA . AF$, adeoque $HC . HA :: AC . AF$. at HC major est quam HA, ergo AC major quam AF.)

Item, *A quovis diametri puncto F, inter Hyperbolæ verticem & centrum sumpto, duci posse rectam Fα, quæ Hyperbolam contingat.* Quo autem punctum F puncto C propius sit, eo remotius abest & punctum contactus α, & punctum-applicationis huic conveniens H. Quia sit $CF . CA :: CA . CH$.

 Adeoque

Adeoque ſi ſupponamus punctum F ipſi C coincidere, ut diſtantia CF = 0 nulla ſit; erit propterea CH infinita; Hoc eſt, punctum H, (adeoque & punctum α) ſupponendum eſt infinite diſtare, adeoque vel nuſquam vel non niſi in Hyperbola actu infinita reperiri.

Cumque punctum C indifferenter ſe habeat ad utramque Hyperbolarum oppoſitarum, ea quæ ſupponitur Contingens per centrum ducenda, verſus utramvis partem producatur, infinita erit, adeoque Hyperbolarum illarum neutri occurret. Quæ propterea *Aſymptota*, dici ſolet, ut poſt dicetur.

Alia quæ adjungi poſſent corollaria lubens omitto.

PROP. XXXVII.

De Hyperbolæ Diametris.

SI per Hyperbolæ Centrum C, punctumque in curva quodlibet α, tranſeat Cα recta; erit illa ejuſdem Hyperbolæ diameter, verticem habens α, atque ordinatim-applicatas rectæ αF Hyperbolam in α contingenti parallelas.

Libet hanc propoſitionem (ut prius 24, & 31.) Analytice examinare, deinde & Synthetice demonſtrare.

Supponamus igitur rem eſſe ut perhibetur, adeoque inſcriptam quamlibet OO tangenti αF parallelam à recta Cα (per centrum & contactum tranſeunte) biſectam in ν. Sintque rectæ OD, OD, αH, diametro HA ordinatim-applicatæ, & propterea invicem parallelæ; quibus etiam parallela ducatur νh eidem diametro in h occurrens; quæ propterea (propter parallelas) biſecabit, (ut OO in ν, ſic) DD in h. Denique recta OO, (producta ſi opus) diametro HA occurrat in G: Occurſuram enim omnino eſſe patet, quoniam αF ipſi parallela eidem diametro occurrit, per præced.

Supponemus etiam impræſentiarum, occurſus punctum G contingere ſupra verticem A, extra Hyperbolam. Si autem ſecus contingat, (uti fieri poteſt, ſi inſcripta OO remotius à tangente ſumatur, ita ut diametrum tranſeat,) non tamen ſeries operationis variabitur aliter quam vel mutanda aliquando ſigna $+\,-$, vel quantitatem aliquando negative interpretandam fore, adeoque ex parte ſuppoſitioni contraria, intelligendam.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) $H\alpha = b$, $HA = d$, $Aa = t$, $Ha\ (= t + d) = z$, $HC\ (= \frac{1}{2}t + d) = c$, $hD = q$, $\alpha\nu = \delta$, $\alpha C = \sigma$, $\nu C\ (= \sigma + \delta) = \gamma$, $2\sigma + \delta = \zeta$.

Tum (per præced.) $HC . Ha :: HA . HF$. hoc eſt $c . z :: d . \frac{dz}{c} = HF$. Et (propter parallelas, & ſimilia triangula) $C\alpha . \alpha\nu :: CH . Hh$. hoc eſt $\sigma . \delta :: c . \frac{\delta c}{\sigma} = Hh$. Et $C\alpha . C\nu :: H\alpha . h\nu :: HF . hG$. hoc eſt, $\sigma . \gamma :: b . \frac{\gamma b}{\sigma} = h\nu :: \frac{dz}{c} . \frac{\gamma dz}{\sigma c} = hG$. ideoque $DG\ (= hG \pm hD) = \frac{\gamma dz}{\sigma c} \pm q$. Item $hA\ (= AH + Hh) = d + \frac{\delta c}{\sigma}$, & $ha\ (= t + d + \frac{\delta c}{\sigma}) = z + \frac{\delta c}{\sigma}$. ideoque $DA = d + \frac{\delta c}{\sigma} \pm q$, & $Da = z + \frac{\delta c}{\sigma} \pm q$. Et rectangulum $DA \times Da = \frac{\sigma^2 dz + \sigma^2 q^2 \pm \sigma^2 zq \pm \sigma^2 dq \pm 2\sigma\delta cq + \sigma\delta zc + \sigma\delta dc + \delta^2 c^2}{\sigma^2}$ (vel quia $z + d = 2c$) $= \frac{\sigma^2 dz + \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma^2 cq \pm 2\sigma\delta cq + 2\sigma\delta c^2 + \delta^2 c^2}{\sigma^2}$ (vel quia $\sigma + \delta = \gamma$, & $2\sigma + \delta = \zeta$,) $= \frac{\sigma^2 dz + \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\zeta c^2}{\sigma^2} = DA \times Da$.

Deinde

Deinde, (quia, propter Hyperbolam, Quadrata Ordinatim-applicatarum sunt rectangulis diametro intercepta & aggregato diametrorum transversæ & interceptæ comprehensis proportionalia) erit $HA \times Ha = dz$. $DA \times Da :: H\alpha q = b^2$. $DOq = \frac{\sigma^2 dz + \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\zeta c^2}{\sigma^2 dz} b^2$.

Item (propter similia Triangula) $HF . H\alpha :: DG . DO$. hoc est $\frac{dz}{c} . b :: \frac{\gamma dz \pm \sigma cq}{\sigma c} . \frac{\gamma dz \pm \sigma cq}{\sigma dz} b = DO$. ejusque quadratum $\frac{\gamma^2 d^2 z^2 + \sigma^2 c^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma dzcq}{\sigma^2 d^2 z^2} b^2 = DOq = \frac{\sigma^2 dz + \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\zeta c^2}{\sigma^2 dz} b^2$.

Ideoque (utrinque multiplicando per $\sigma^2 d^2 z^2$ & dividendo per b^2,) $\gamma^2 d^2 z^2 + \sigma^2 c^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma dzcq = \sigma^2 d^2 z^2 + \sigma^2 dzq^2 \pm 2\sigma\gamma dzcq + \delta\zeta dzc^2$. Et (delendo utrinque $\pm 2\sigma\gamma dzcq$, atque transponendo) $\sigma^2 c^2 q^2 - \sigma^2 dzq^2 = \delta\zeta dzc^2 - \gamma^2 d^2 z^2 + \sigma^2 d^2 z^2$. Et (quia $\gamma^2 - \sigma^2 = \delta\zeta$, per 6 e 2,) $\sigma^2 c^2 q^2 - \sigma^2 dzq^2 = \delta\zeta dzc^2 + \delta\zeta d^2 z^2$. Et (dividendo utrinque per $c^2 - dz = \frac{1}{4}t^2$) erit $\sigma^2 q^2 = \delta\zeta dz$. hoc est $\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2} = q^2$. Constat ergo propositum.

Illud

Illud Synthetice sic demonstratur, (repetitis Analyseos vestigiis.) A centro C ducatur ad Hyperbolam C α. Atque in puncto α Hyperbolam contingat α F, diametro cuilibet H A occurrens in F; ipsique parallela quælibet O O, eidem diametro H A occurrens in G, & rectæ C α (productæ) in ν. Diametro autem H A ordinatim-applicetur α H, eique parallela ν h, eidem diametro occurrat in h. Eademque quæ prius maneant symbola $b, d, t, z, c, \delta, \sigma, \gamma, \zeta$.

Sumantur autem in diametro utrinque à puncto h æquales rectæ $hD = \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$; atque ordinatim-ponantur D O, D O, rectæ O O occurrentes in O O. Adeoque bisecantur tam D D in h (per constructionem,) quam O O (propter parallelas) in ν.

Dico rectam O O (à recta C α ν bisectam in ν) Hyperbolæ inscriptam esse; hoc est puncta O O esse in ipsa Hyperbolæ curva. Quod sic probatur;

Quoniam sunt (ut in Analysi demonstravimus) $HF = \frac{dz}{c}$, $hG = \frac{\gamma dz}{\sigma c}$, $hA = d + \frac{\delta c}{\sigma}$, & $ha = z + \frac{\delta c}{\sigma}$: Erit $DG\ (= hG \pm hD) = \frac{\gamma dz}{\sigma c} \pm \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$; item $DA\ (= hA \pm hD) = d + \frac{dc}{\sigma} \pm \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$, $Da = z + \frac{dc}{\sigma} \pm \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$, & rectangulum $DA \times Da = \frac{\sigma^2 dz + \delta\zeta c^2 + \delta\zeta dz \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2}$. (nempe pro q^2 & q in analysi, substituendo in synthesi $\frac{\delta\zeta dz}{\sigma}$ & $\sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$.) vel (quia $\sigma^2 + \delta\zeta = \gamma^2$ per 6 e 2) $\frac{\gamma^2 dz + \delta\zeta c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2} = DA \times Da$.

Tum (propter similia triangula) erit HF . Hα :: DG . DO. hoc est, $\frac{dz}{c} . b :: \frac{\gamma dz}{\sigma c} \pm \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}} . \frac{\gamma dz \pm c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma dz} b = DO$. ejusque quadratum $\frac{\gamma^2 d^2 z^2 + \delta\zeta dz c^2 \pm 2\gamma dz c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2 d^2 z^2} b^2 = DOq = \frac{\gamma^2 dz + \delta\zeta c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2 dz} b^2$.

Sed & tantundem est quadratum Ordinatim-applicatæ puncto D. Nam (propter Hyperbolam) ut rectangulum H A × H a, ad rectangulum D A × D a; sic H αq quadratum ordinatim-applicatæ puncto H, ad quartum, quod erit quadratum ordinatim-applicatæ puncto D. hoc est $dz . \frac{\gamma^2 dz + \delta\zeta c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2} :: b^2 . \frac{\gamma^2 dz + \delta\zeta c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2 dz} b^2$. quod æquale est ipsi D O q, ut modo ostendimus.

Et propterea D O, D O, (quæ, ex constructione, sunt punctis D D ordinatim positæ,) sunt & ordinatim-applicatis æquales, adeoque puncta O O sunt in Hyperbolæ curva, rectaque O O est Hyperbolæ inscripta. Sed & illa (eique parallelæ, eadem ratione,) à recta C α ν bisecatur; adeoque ordinatim-inscripta est, ejusque semissis ν O diametro C α ν Ordinatim-applicata. Quod erat demonstrandum.

Notandum autem est (quod & prius monui) fieri quidem posse ut inscripta O O diametrum transeat in G intra hyperbolam. Quod tamen operationis progressum non aliter immutabit quam variando nonnunquam signa + —, aut quantitatem negative interpretandam exhibendo. Ut experienti patebit.

Recta autem illa α C quam Hyperbolæ Diametrum esse ostendimus, iisdem oppositis Hyperbolis convenit quibus & AC; ipsaque α C duplicata erit earundem Diameter-transversa. Sumatur enim in opposita Hyperbola ad = A H, hoc est C d = C H, & ordinatim-applicetur (situ contrario) d o, quæ erit ipsi H α æqualis & parallela (propter æquales diametros interceptas, eandam transversam, idem latus rectum, atque situm parallelum, per prop. 34.) adeoque anguli alterni æquales, nempe C d o = C H α; & propterea (juncta o C) triangula C H α, C d o, similia & æqualia; ideoque (propter angulos κατ' κορυφὴν ad C æquales) erit α C o una

una recta; atque illa quidem in C bisecta; quæ igitur cum ad Oppositas Hyperbolas terminetur, erit illarum transversa-diameter, ejusque medium punctum C earundem centrum.

Unde etiam liquet, *Hyperbolæ Diametros omnes in eodem communi centro convenire.*

Sed & ea omnia Corollaria (ultimo excepto) quæ ad prop. 31. de Ellipsi memorantur; iisdem fere verbis etiam Hyperbolæ conveniunt. Ut non sit opus ea repetere.

PROP. XXXVIII.

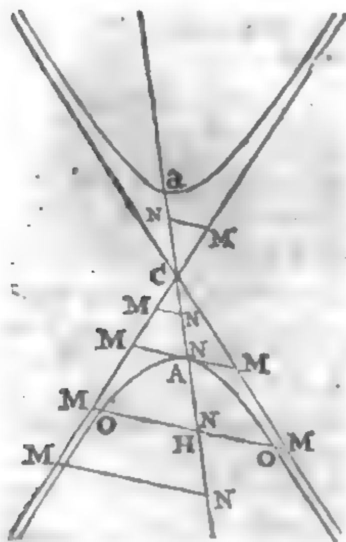
Effectiones Geometricæ.

PRoblematum effectiones quæ de Ellipsi memorantur prop. 32. eædem fere totidem verbis etiam Hyperbolæ conveniunt. Nec opus est ut repetantur.

PROP. XXXIX.

De Hyperbolæ Asymptotis.

SI sumatur in Hyperbolæ diametro (extra centrum C) punctum quodvis N, eique ordinatim-ponatur NM; fiatque $t.l::CNq.NMq.$ (hoc est, ut diameter transversa, ad latus rectum; sic quadratum distantiæ punctorum CN, ad quadratum rectæ NM,) juncta CM erit illius Hyperbolæ *Asymptota*: Nempe quæ (continuata) Hyperbolæ (quantumvis productæ) nunquam occurret, ita tamen continuo propius accedet ut distantia tandem evadat quavis assignata minor.



Nam 1°. Sumpto (intra Hyperbolam AO) diametri puncto quovis H, cui ordinatim-applicetur HO, rectæ CM occurrens in M. Erit (propter similia triangula) CN. NM :: CH. HM. Adeoque $CNq.NMq::(t.l::)\ CHq=c^2.\ HMq=\frac{l}{t}c^2=\frac{c^2}{t}l.$ Sed (propter Hyperbolam) erit $HOq=\frac{c^2-s^2}{t}l$ (ponendo nempe $s=\frac{1}{2}t$, ideoque $d=c-s$, & $d+t=c+s$.) Ergo HOq minus est quam HMq, & recta HO minor quam recta HM, & propterea M erit extra Hyperbolam. Recta igitur CMM (quantumvis producta) Hyperbolæ nunquam occurrit. Quod erat primo demonstrandum.

2°. Cum sit $OM(=HM-HO)=\sqrt{\frac{c^2}{t}l}-\sqrt{\frac{c^2-s^2}{t}l}$; sintque s, l, t, quantitates stabiles, at c variabilis, & quidem tanto major quanto remotius abest punctum H à centro C: Differentia rectarum $\sqrt{\frac{c^2}{t}l}$, $\sqrt{\frac{c^2-s^2}{t}l}$, hoc est, rectarum HM, HO, perpetuo minuetur prout c, hoc est, CH, augetur. Nam in majoribus quadratis æquale augmentum (retenta figuræ specie) minorem postulat lateris productionem quam in quadratis minoribus, (ut notum est.) Ideoque prout longius abest à centro punctum H, adeoque c^2 majus est, (reliquis interim immutatis) ita semper minuetur OM, differentia laterum $\sqrt{\frac{c^2}{t}l}$, $\sqrt{\frac{c^2-s^2}{t}l}$. Et con-

sequenter distantia rectæ CMM ab Hyperbolæ curva AO, continue decrescit. Quod erat secundo demonstrandum.

3°. Sit assignata distantia quælibet quantumvis exigua, puta $2a$; Dico Hyperbolam AO rectamque CM eo produci posse, ut earum distantia minor evadat quam est assignata $2a$. Sumatur enim linea recta aliquanto minor, puta a, cui æqualem esse volumus rectam OM; & quærendum sit punctum H (cui ordinatim-ponenda sit HOM) seu longitudo rectæ CH. Quoniam igitur supponimus $a = OM = \sqrt{\frac{c^2}{t}l} - \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$; erit (transponendo) $\sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l} = \sqrt{\frac{c^2}{t}l} - a$; & (utrinque quadrando) $\frac{c^2 - s^2}{t}l = \frac{c^2}{t}l + a^2 - 2a\sqrt{\frac{c^2}{t}l}$. Et (transponendo, atque reducendo) $2ac\sqrt{\frac{l}{t}} = a^2 + \frac{s^2}{t}l$. Et (quadrando) $\frac{4a^2c^2l}{t} = \frac{a^4t^2 + s^4l^2 + 2a^2s^2lt}{t^2}$. Adeoque (dividendo per $\frac{4a^2l}{t}$) erit $c^2 = \frac{a^4t^2 + s^4l^2 + 2a^2s^2lt}{4a^2lt}$. Habetur ergo quantitas c^2, (cujus radix $c = CH$,) adeoque punctum H, cui si Ordinatim-ponatur HOM, erit $OM = a$, (quod, si opus sit, synthetice demonstrari possit, repetitis Analyseos vestigiis,) adeoque minor quam distantia assignata $2a$. Ideoque distantia continuatæ rectæ CMM, ab Hyperbola continuata AO, tandem minor evadet distantia quavis assignata. Quod erat tertio demonstrandum. Adeoque constat propositum.

Posset & hic ostendi, *Ad eandem Hyperbolam, nonnisi duas Asymptotas (utrinque unam) duci posse; se mutuo in centro secantes.* Alia enim quæcunque in eodem plano recta, vel Hyperbolam secabit, vel ad requisitam appropinquationem non accedet. Ut facile est demonstratu.

Item, *Asymptotas unius Hyperbolæ esse etiam Hyperbolæ oppositæ Asymptotas.* Quod simili fere progressu demonstrabitur ei quo usus sum ad Corollarium prop. 37.

Neque illis tantum binis Hyperbolis Oppositis, sed & binis aliis bisce conjugatis (de quibus post dicetur) eædem conveniunt Asymptotæ, & quidem solæ.

Patet item, quod (*si ab eodem puncto H, ordinatim-applicatæ HO, HO, utrinque continuentur ut Asymptotis occurrant in M,*) *erunt, OM, OM, (utrinque sumptæ) æquales.* Cum enim tam HM, HM, ($\sqrt{\frac{c^2}{t}l}$,) quam HO, HO, ($\sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$) erunt & OM, OM, (HM—HO) æquales.

Item; *Si (ad eandem quamvis Diametrum) Ordinatim ponantur rectæ quotlibet MOHM, (Asymptotis occurrentes in M Hyperbolæ in O, diametro in H,) omnia rectangula MOM (segmentis comprehensa) vel etiam rectangula OMO (sumptis O, O, in utroque crure Hyperbolæ) erunt tam inter se, quam quadrato rectæ AM (ab Asymptota ad verticem ordinatim-positæ) æqualia.* Nam ubicunque in diametro (intra Hyperbolam) sumatur punctum applicationis H; rectangulum MOM, vel OMO, (hoc est, HM—HO, in HM+HO; hoc est, $\sqrt{\frac{c^2}{t}l} - \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$, in $\sqrt{\frac{c^2}{t}l} + \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$;) semper erit $\frac{s^2}{t}l$ (ut multiplicando patebit;) hoc est AMq; est enim (ex hypothesi) $t.l :: CNq.NMq :: CAq\ (= s^2).\ AMq = \frac{s^2}{t}l$.

Asymptota vero, quæ jam dicitur, eadem est quæ ad prop. 36. supponitur *Tangens infinita*, à Centro ducenda, quæ non nisi post infinitam distantiam (hoc est, nunquam,) Hyperbolam continget.

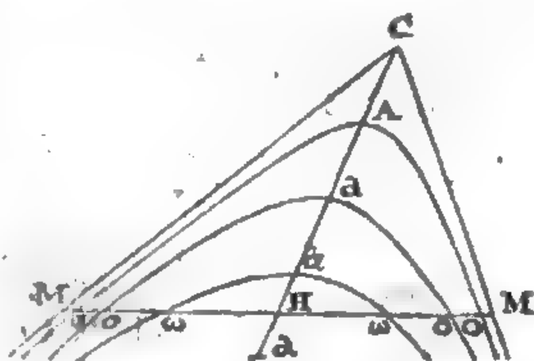
Alia de Asymptotis & Theoremata & Problemata quæ ex jam dictis deduci possent prætereo.

PROP.

PROP. XL.

De Hyperbolis Asymptotis.

HYperbolæ quotlibet ad eandem diametrum (versus easdem partes) ita accommodatæ, ut centrum idem habeant, atque easdem (ad communem diametrum) Ordinatim-positas, vertices autem (in eadem diametro) varios quoslibet, puta A, a, α, (adeoque & varias diametros-transversas;) Si eadem sit in omnibus ratio diametri-transversæ ad suum respective latus-rectum, (puta ratio t ad l in omnibus eadem,) easdem habebunt Asymptotas-rectas, (puta CM, per præced.) Eruntque ipsæ ad invicem *Hyperbolæ Asymptotæ*: Nempe ita ad invicem appropinquabunt, ut earum distantia tandem evadat qualibet assignata minor, (quoniam earum quælibet ita prope ad rectas Asymptotas accedit;) nec tamen invicem occurrent, (quoniam Ordinatim-applicatarum quadrata $h^2 = \frac{t^2 - s^2}{t} l$ minora erunt, cæteris paribus, ubi s major est; adeoque HO major quam Ho, atque hæc major quam Hω.)



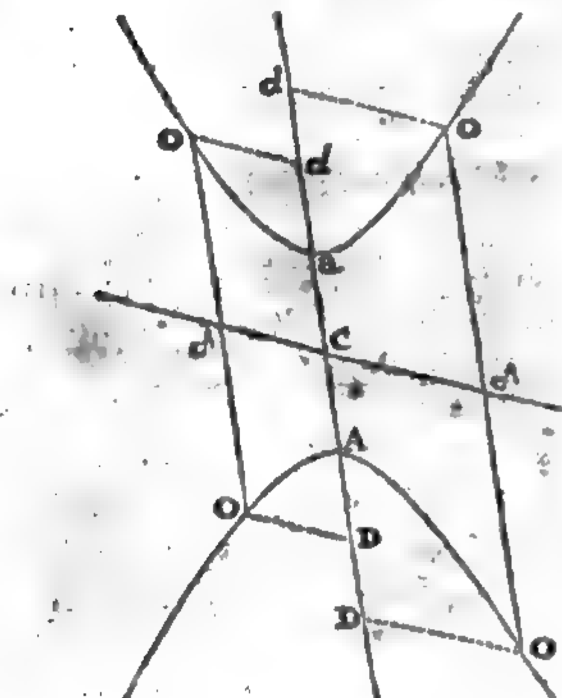
Si vero non sit (in variis ejusmodi Hyperbolis) ratio $\frac{l}{t}$ eadem: Nec easdem habebunt Asymptotas rectas; neque erunt ipsæ Asymptotæ; sed vel se mutuo secabunt, (nempe si Hyperbola quæ majorem habet diametrum-transversam minorem habeat rationem t ad l;) vel (si majorem habeat rationem t ad l) debitam appropinquationem non attingent. Prout ex præmissis non est difficile demonstratu.

Illis autem, quas diximus, *Hyperbolis Asymptotis*, respondent Hyperbolæ totidem ejusdem Coni planis parallelis secti; Quæ quidem quo propius ad verticem Coni accedunt, eo ad Triangulum accedunt propius; donec tandem (in ipso coni vertice,) evanescente diametro transversa, Hyperbola in Triangulum (vel, si placet, Trianguli crura) degeneret; cujus quidem Trianguli crura repræsentant binæ Asymptotæ rectæ.

PROP. XLI.

De Hyperbolæ Diametris Conjugatis.

SI oppositarum Hyperbolarum diametro-transversæ Aa Ordinatim-ponatur recta per centrum δCδ, dicetur illa *Diameter-conjugata*: quæ quidem rectas omnes diametro Aa parallelas, oppositis sectionibus terminatas, puta Oo, bifariam secabit; quæ propterea diametro δδ ordinatim-positæ sunt, quas *Ordinatim-transcriptas* dicere licet.



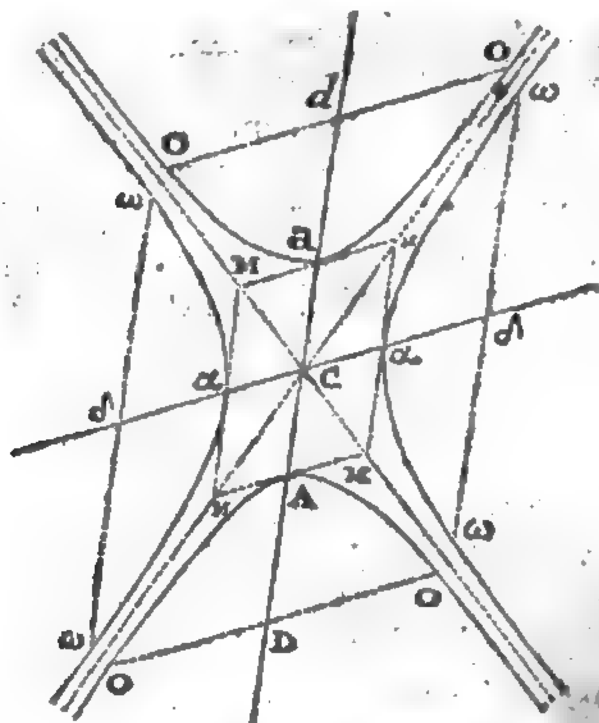
Nam si ordinatim-applicentur OD, od, diametro Aa (versus easdem partes;) erunt illæ (parallelæ parallelis terminatæ, ideoque) æquales; & propterea CD, Cd, etiam æquales erunt (propter communem oppositarum Hyperbolarum diametrum-transversam, & æqualia latera-recta;) ideoque & δO, δo, (propter parallelas) æquales erunt.

Sunt autem rectæ δO, hoc est CD, ea quantitas quam supra diximus $c = s + d = \frac{1}{2}t + d$.

PROP. XLII.

De Conjugatis Hyperbolis.

SI sit Hyperbolarum-Oppositarum transversa-diameter $Aa = t$, (& Latus rectum l;) atque in diametro conjugata $\delta\delta$, sumantur à centro utrinque æquales $C\alpha$, $C\alpha$; sitque tota $\alpha C\alpha = \tau = \sqrt{tl}$ (ut nempe sit $t.\ l :: t^2.\ \tau^2$.) dicetur $\alpha C\alpha$ *transversa-diameter conjugata*: Eaque si describantur Oppositæ Hyperbolæ, vertices habentes α, α, & Ordinatim-applicatas $\delta\omega$ diametro Aa parallelas, Latusque rectum $\lambda = \frac{t^2}{\tau}$, (ut nempe sit $\tau.\ \lambda :: \tau^2.\ t^2$.) dicentur oppositi vertices $\alpha\alpha$ ipsis Aa *vertices conjugati*; atque Hyperbolæ $\alpha\alpha$, ipsis Aa, *Hyperbolæ conjugatæ*; commune cum illis centrum habentes, (ut patet.) Sed & easdem habebunt Asymptotas rectas: ut jam demonstraturus sum.



Nam completo parallelogrammo MM, (cujus latera per conjugatos vertices transeant, sintque conjugatis diametris-transversis parallela, & propterea æqualia;) erunt rectæ CM omnium Asymptotæ; per prop. 39. (Idem accidet, si, sumptis quibusvis CD, Cδ, ipsis CA, Cα, proportionalibus, formetur Parallelogrammum circa idem centrum C, latera habens conjugatis diametris parallela: Omnia enim puncta angularia, in Asymptotis CM reperientur. Puta, si ordinatim-applicatæ, in hac Figura descriptæ, ad Asymptotas usque continuarentur.)

Præter illas autem Asymptotas duas, nulla in eodem plano recta duci potest, quæ (producta) non alicui ex conjugatis Hyperbolis (productis) occurret. Ut ex prædictis facile est demonstratu.

Parallelogrammum autem MM (per quatuor conjugatos vertices transiens) respondet parallelogrammo Ellipsi circumscripto per ipsius conjugatos vertices transeunti.

PROP.

PROP. XLIII.

De Systemate Hyperbolico.

QUatuor illæ, quas diximus, Hyperbolæ conjugatæ, respondent totidem (in Ellipsi) conjugatis sectionibus Ellipticis (de quibus prop. 29. dictum est:) cum hoc tamen (inter alia) discrimine, quod quatuor sectiones Ellipticæ, centrum versus incurvatæ se mutuo continuant; at conjugatæ Hyperbolæ, à centro recurvatæ (partem convexam centrum versus habentes,) neque sibi invicem, neque suis Asymptotis rectis, nisi post infinitam distantiam occurrunt, aut occursuræ supponuntur. Tota vero figura (quod *Systema Hyperbolicum* appellamus) quæ contineri supponitur (aut supponi possit) quatuor convexis Hyperbolis, (sibi mutuo, ut & Asymptotis rectis, post infinitam distantiam concurrentibus,) toti figuræ Ellipticæ respondet.

Quatuor autem illas Hyperbolas conjugatas, infinite continuatas, tandem concursuras; suppono quidem, non quod vel reapse concurrent, vel etiam actu poterunt infinite continuari, (cum actu infinitum ejusmodi dari non possit:) sed quoniam qui alterum supponit supponere debet & reliquum. Multa autem apud Mathematicos supponi quæ actu non existunt, sat notum est; quæ veritatem habent *Consequentiæ* (ut loquuntur) sive Hypotheticam, licet non *Consequentis* sive Absolutam.

Atque hinc est, quod Polygonum regulare infinitorum laterum pro circulo haberi soleat; aliaque ejusmodi innumera: Et quidem universaliter, *Quantitates, quæ ita ad invicem continuo propius accedunt, ut earum (continuatarum) distantia qualibet assignata minor evadat; supponendæ sunt (in infinitum continuatæ) tandem convenire.*

Quod quidem eodem modo demonstrari potest quo 1ª Archimedis *de circuli dimensione*, aliæque passim apud Geometras demonstrari solent. Nempe, si in infinitum continuentur; vel concurrent (quod affirmatur,) vel adhuc distabunt; at hoc est impossibile: Si enim distent, esto ea distantia sive differentia *a* quantumvis exigua, probari autem potest eas propius accedere quam est ea distantia assignata, (hoc enim ponitur;) non igitur distant; conveniunt ergo. Quod erat demonstrandum.

Neque potest quidem hæc demonstratio quovis modo eludi, magis quam illa Archimedis modo memorata, aliæque apud Mathematicos innumeræ.

PROP. XLIV.

Ellipseos & Hyperbolæ comparatio.

PAtet ex Ellipseos & Hyperbolæ doctrina superius tradita; earum ad invicem cognationem magnam esse, Maximum autem inter eas discrimen (unde & reliqua omnia ortum ducunt) hoc est, Quod, *in Ellipsi, diameter transversa atque intercepta super se mutuo replicari supponuntur; in Hyperbola vero, se mutuo continuare.* Adeoque in Ellipsi $Da = Aa - AD = t - d$; in Hyperbola vero $Da = Aa + AD = t + d$. Atque hinc quidem oritur Ellipseos incurvatio versus centrum, & Hyperbolæ recurvatio à centro, aliaque omnia quæ interveniunt discrimina: ut probe attendenti patebit. Adeoque totam fere Ellipseos doctrinam Hyperbolæ accommodavimus (consulto quidem, ut earum cognatio melius percipiatur) totidem fere verbis, mutatis tantum signis $+ -$.

Atque hactenus Parabolæ, Ellipseos, & Hyperbolæ doctrinam, succincte quidem, sed & dilucide tradidimus.

APPENDIX.

Tradidimus, in superioribus, trium illarum (prout vulgo dicuntur) Coni-sectionum, Parabolæ, Ellipseos, *atque* Hyperbolæ, *doctrinam, succincte satis, sed & interim satis (ni fallor) dilucide. Earumque vel omnes vel præcipuas saltem affectiones vel demonstravimus, vel saltem demonstrationum fontes indicavimus; ut inde liceat levi negotio ea omnia deducere, quæ longis ambagibus, atque perplexo variorum Lemmatum & Demonstrationum intricatarum labore, antehac ostendi consueverunt.*

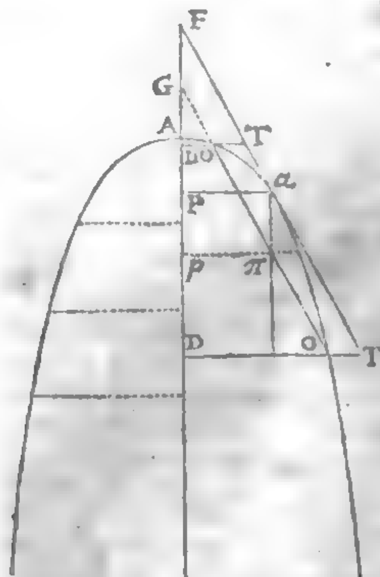
Atque hæc omnia brevi admodum atque succincta methodo tradita sunt; præsertim si omittantur ea omnia (quæ quidem tuto nec incommode omitti posse videantur,) quæ tota parte prima tradidimus; quæ quidem Conum spectant, atque illarum ad conum relationem, cum quibus tamen præsens doctrina (quanquam secus olim creditum est) nullam habet necessariam connexionem; sed simplicius atque universalius tradi & potest & debet.

Sed interim viam simul aperuimus qua Curvarum doctrinam penitius intueri atque ulterius promovere facile possimus: (quod & nos fortasse post aliquando, Deo favente, facturi sumus, si illud necesse videbitur, atque viris doctis Mathematum peritis labores nostros gratos fore perspiciemus.) Interim specimen aliquod libet apponere, de curvis aliis Parabolæ affinibus, quarum Diametri, Ordinatim-applicatæ, Latera-recta, Tangentes, &c. non minus quam in ipsa Parabola reperiantur.

PROP. XLV.

De Paraboloeide Cubicali.

SI Paraboloeides ita constituatur, ut Ordinatim-applicatas habeat in subtriplicata ratione Diametrorum interceptarum; (adeoque illarum Cubos diametris-interceptis proportionales:) *Paraboloeides Cubicale* dici poterit.



Latus-rectum Paraboloeidis cubicalis (puta l,) appello rectam imaginariam, cujus quadratum in diametrum-interceptam ductum, æquatur cubo Ordinatim-applicatæ. Ut sit ubique $p^3 = l^2 d$.

PROP.

PROP. XLVI.

De recta Paraboloeides Cubicale contingente.

SI Paraboloeides Cubicale A α, in puncto quovis α, contingat recta αF, diametro PA occurrens in F, sitque eidem diametro ordinatim-applicata αP: erit recta AF (diametri continuatio) dupla diametri-interceptæ PA: hoc est, diameter continuata PF, tripla diametri PA.

Nam, sumpto ubivis (in eadem diametro) puncto D, cui ordinatim-applicetur DO, tangenti αF occurrens in T: Punctum T (propter tangentem) vel erit idem cum puncto α, (si nempe P, D, coincidant;) vel (si secus) erit T extra curvam: & (propterea) DT $\overline{>}$ DO (nempe æquales, si D, P, coincidant; vel, si secus, DT longior erit.)

Ponamus autem (ob commodiorem calculum) P$\alpha = p$, PA $= d$, PF $= f$, PD $= a$. Erit ergo (per def. præced.) PA . DA :: Pαc . DOc. hoc est $d . d \pm a :: p^3 . \frac{d \pm a}{d} p^3 =$ DOc. Item (propter similia triangula) PF . Pα :: DF . DT. hoc est $f . p :: f \pm a . \frac{f \pm a}{f} p =$ DT. Ejusque cubus $\frac{f^3 \pm 3f^2a + 3fa^2 \pm a^3}{f^3} p^3$ (= DTc) $\overline{>}$ (DOc =) $\frac{d \pm a}{d} p^3$. Et (utrinque multiplicando per $f^3 d$, & dividendo per p^3) erit $f^3 d \pm 3f^2 da + 3fda^2 \pm da^3 \overline{>} f^3 d \pm f^3 a$. Tum (auferendo utrinque $f^3 d$, & dividendo per $\pm a$) erit $3f^2 d \pm 3fda + da^2 \overline{>} f^3$. Denique, ponendo puncta PD coincidere, (ut evanescat quantitas a, adeoque & ipsius multiplicia $\pm 3fda$, $+ da^2$,) erit $3f^2 d = f^3$, hoc est $3d = f$. Quod erat demonstrandum.

PROP. XLVII.

De Paraboloeidis Cubicalis Diametris.

INquirere, *An* in Paraboloeide Cubicali Diametri sint invicem parallelæ: Et cujusvis diametri Ordinatim-applicatæ, sint rectæ in ipsius Vertice contingenti parallelæ.

Inquisitio facile institui poterit ad imitationem illius quæ de Parabola adhibetur ad prop. 24. nisi quod PF, quæ illic dicitur $2d$, hic dicenda est $3d$. Eam nempe Analytice sic instituamus. Supponamus scilicet rem ita esse: Adeoque rectam Fα, quæ paraboloeides Aα in puncto α contingat, diametro PA productæ occurrere in F; eique parallelam OO Paraboloeidi inscriptam, quæ (producta) eidem diametro supra verticem occurrat in G, (adeoque si infra verticem diametro occurrat, tum tam duarum DG, quam duarum DO, de quibus mox dicetur, altera erit quantitas negativa, quod tamen calculum non turbabit;) ipsamque OO recta $\alpha\pi$ (parallela diametro AP) bisectam in π (ut nempe rectæ πO, πO, sint ipsi $\alpha\pi$ ordinatim-applicatæ;) denique diametro AP ordinatim-applicari OD, OD, αP, ipsique parallelam πp eidem diametro occurrere in p: quare & (propter parallelas) Pp $= \alpha\pi =$ FG; & propterea PF $=$ pG: item (propter parallelas) rectam DD bisectam in p, sicut OO bisecatur in π. Quærendum autem est, numcubi reperiri possint puncta D, D; quæ quidem sicubi inveniantur, constabit propositum.

Substitutis igitur idoneis symbolis, esto P$\alpha = p$. PA $= d$. (ideoque, per præced: PF $=$ pG $= 3d$.) Pp $= \alpha\pi =$ FG $= g$. (ergo pA $=$ PA $+$ Pp $= d + g$.) pQ $= q$. (adeoque DA $=$ pA $\pm$ pD $= d + g \pm q$. & DG $=$ pG $\pm$ pD $= 3d \pm q$.)

Erit

Erit igitur (propter Paraboloeides cubicale per prop. 45.) $PA.DA :: P\alpha c. DOc.$ hoc est, $d.\ d+g\pm q :: p^3.\ \frac{d+g\pm q}{d}p^3 = DOc.$

Item (propter similia triangula) $PF.P\alpha :: DG.DO.$ hoc est, $3d.p :: 3d\pm q.\ \frac{3d\pm q}{3d}p = DO.$ Ejusque cubus $\frac{27d^3 \pm 27d^2q + 9dq^2 \pm q^3}{27d^3} = DOc = \frac{d+g\pm q}{d}p^3.$

Ergo (utrinque dividendo per p^3, & multiplicando per $27d^3$) erit $27d^3 \pm 27d^2q + 9dq^2 \pm q^3 = 27d^3 + 27d^2g \pm 27d^2q.$ Et (sublatis utrinque æqualibus) $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g.$ Cujus quidem æquationis radix q, si vel ope Coni-sectionis vel alio quovis modo reperiri poterit, monstrabit quæsita puncta D, D, (alterum quidem supra punctum p, alterum infra;) adeoque propositi veritatem. Intellige, si binæ radices q (sursum & deorsum sumendæ) fuerint invicem æquales.

Analysi peracta, Demonstrationem syntheticam sic liceret instituere.

In Paraboloeide cubicali $A\alpha$, diametro AP, parallela ducatur $\alpha\pi$: per cujus punctum quodvis (intra paraboloeides) π, ducatur recta πG (diametro AP occurrens in G) parallela tangenti αF (quæ eidem diametro occurrit in F.) Erit $\alpha\pi$ ejusdem Paraboloeideos diameter, eique ordinatim posita πG.

Diametro AP ordinatim-applicetur αP, eique parallela ducatur πp (eidem diametro occurrens in p.) Et sumto symbola $P\alpha = p.\ PA = d.\ FG = \alpha\pi = Pp = g.$

Tum sumantur in diametro, utrinque à puncto p, æquales rectæ $pD = pD = q$; utraque nempe tanta, quanta est radix hujus æquationis $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g.$ (Nempe si binæ radices oppositæ, fuerint æquales.) Et punctis D, D, ordinatim ponantur rectæ DO, DO, rectæ πG occurrentes in O, O: quæ cum parallelæ sint rectæ πp, sicut recta DD (ex constructione) bisecatur in p, erit ideo OO (propter parallelas) bisecta in π.

Superest igitur ut ostendatur rectam OO (bisectam in π) Paraboloeidi inscriptam esse, (ut nempe $\alpha\pi$ recta bisecans sit diameter) hoc est, puncta O, O, esse in Paraboloeideos curva; nempe rectas DO, DO, (diametro AP ordinatim-positas, ex constructione,) ordinatim-applicatis (ad eadem diametri puncta) æquales esse, adeoque in curva terminari. Quod sic ostendi posse videatur;

Est $pA = PA + Pp = d+g.\ DA = pA \pm pD = d+g\pm q.\ pG = PF = 3d.\ DG = pG \pm pD = 3d\pm q.$

Tum (propter Paraboloeides cubicale) ut PA, ad DA; sic cubus rectæ $P\alpha$ puncto P ordinatim-applicatæ, ad cubum ordinatim-applicatæ puncto D. hoc est $d.\ d+g\pm q :: p^3.\ \frac{d+g\pm q}{d}p^3.$ qui igitur cubus est ordinatim-applicatæ puncto D.

Sed & tantundem est cubus rectæ DO. Nam (propter similia triangula) $PF. P\alpha :: DG.DO.$ hoc est $3d.p :: 3d\pm q.\ \frac{3d\pm q}{3d}p = DO.$ Ejusque cubus $DOc = \frac{27d^3 \pm 27d^2q + 9dq^2 \pm q^3}{27d^3}p^3$ Vel (pro $9dq^2 \pm q^3$, substituendo $27d^2g$, quæ per constructionem sunt æqualia,) $\frac{27d^3 \pm 27d^2q + 27d^2g}{27d^3}p^3$, vel denique (abbreviando fractionem per $27d^2$) $\frac{d\pm q+g}{d}p^3 = DOc.$ adeoque rectæ DO, DO, ordinatim-applicatæ sunt punctis D, D, ad Paraboloeideos curvam terminatæ in O, O; & propterea recta OO Paraboloeidi inscripta, est ad diametrum $\alpha\pi$ ordinatim-posita. Quod erat demonstrandum.

Hæc autem disquisitio, quanquam prima fronte speciosa videatur; non tamen concludit: eo quod radix q utriusque æquationis, supponitur ejusdem magnitudinis; quod revera non contingit, ut ex Æquationis Cubicæ Resolutione patebit. (De qua plura diximus in Epistola quæ Tractatui meo contra Meibomii Dialogum præfigitur.) Et propterea ejusmodi Parallelæ Diametri in Paraboloeide Cubicali non reperiuntur.

PROP.

PROP. XLVIII.

De Area Paraboloeidis; & Conoeidis Pyramidoeidisve illi accommodati.

UT Archimedes (in lib. de *Quadratura Parabolæ*) ostendit Parabolam (figuram puta linea Parabolica & recta contentam) esse ad Triangulum (super eadem vel æquali base æque-altum) ut 4 ad 3: Sic & demonstrari potest, Paraboloeides cubicale ad Triangulum (intellige, super eadem base æque-altum) esse ut 3 ad 2.

Item, ut Conoeides Parabolicum ad Cylindrum (vel Pyramidoeides Parabolicum ad Prisma) est ut 1 ad 2: Sic demonstrari potest, Conoeides à Paraboloeide Cubicali ortum ad Cylindrum (vel ejusmodi Pyramidoeides ad Prisma) esse ut 3 ad 5.

Hæc autem alibi (Deo volente) inter ejusmodi alia multa aliquando sumus demonstraturi. Atque insuper generalem methodum tradituri, qua Paraboloeidea quælibet ad Quadrata, & eorum Conoeidea seu Pyramidoeidea ad Cylindros aut Prismata reduci possint non minus quam ipsâ Parabola aut Conoeides Parabolicum rectum, (quod & de Conoeidibus & Pyramidoeidibus Ellipticis & Hyperbolicis, sive rectis sive scalenis, intelligendum esse volo:) Quæ nemo, quod sciam, antehac aggressus est.

PROP XLIX.

De Paraboloeidibus aliis.

SI Paraboloeides Ordinatim-applicatas habeat in Diametrorum-interceptarum ratione subquadruplicata, vel subquintuplicata, &c. (in quibus nempe Diametri-interceptæ sunt Ordinatim-applicatarum biquadratis, vel surdesolidis, &c. proportionales:) dici poterit *Paraboloeides Biquadraticale*, vel *Surdesolidale*, &c. (nomine nempe rationi aptato.)

Latus-rectum ejusmodi Paraboloeidibus conveniens, appello rectam imaginariam; cujus, in Biquadraticalibus, Cubus in diametrum-interceptam ductus æquatur Biquadrato Ordinatim-applicatæ; in Supersolidalibus, Biquadratum in diametrum-interceptam ductum æquatur Supersolido Ordinatim-applicatæ: (& similiter in aliis Paraboloeidibus, respectu semper habito ad gradum Paraboloeideos.) Ut sit (prout gradus postulaverit) $p^4 = dl^3$, vel $p^5 = dl^4$, & sic deinceps.

Recta vero AF (diametri continuatio inter verticem & tangentem intercepta) est, in Paraboloeide Biquadraticali tripla, in supersolidali quadrupla, diametri interceptæ PA; (& similiter in aliis:) Hoc est, continuata diameter PF (applicationis puncto & Tangentis concursu intercepta,) est Diametri-interceptæ PA, in Biquadraticali quadrupla, in Supersolidali quintupla; & sic deinceps.

Demonstratio pari modo procedet atque in Paraboloeide Cubicali; aut etiam ipsa Parabola.

Adeo ut jam Paraboloeidis Cubicalis, Biquadraticalis, supersolidalis, aut alius cujusvis, doctrina, non minus cognita habeatur, quam ipsius Parabolæ.

Si tamen, post specimen hoc exhibitum, operæ pretium censebitur rem hanc fusius prosequi, poterit illud à quolibet facillime fieri cui tantum suppetit otii.

PROP. L.

De Elliptoeidibus & Hyperboloeidibus.

De Elliptoeidibus & Hyperboloeidibus (pariter atque Paraboloeidibus) in promptu erat nonnulla adjecisse; nisi quod eorum tractatio aliquanto intricatior esset, adeoque fusius tradenda, quam brevi appendiculo conveniret.

Sufficiat igitur (specimine in Paraboloeidibus exhibito) vel ansam aliis porrexisse, vel id ipsum forsan peculiari tractatu posthac præstiturum esse.

Interim, negotium à me primitus susceptum, me satis præstitisse non diffido.

LAUS DEO.

ARITHMETICA
INFINITORUM,
SIVE
Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaque difficiliora Matheseos Problemata.

Anno 1655 typis edita.

Yy 2

Clarissimo Spectatissimoque Viro
Matheseos Peritissimo,
D. *Gulielmo Oughtredo*,
Ecclesiæ quæ est *Aldeburiæ*, in agro Surriensi, Rectori S.

EN tibi tandem (Vir Clarissime) jam absolutum opus illud cujus spem fecit Propositio ea Cyclometrica, quam sub Paschatis festo Typis excussam tibi dicavi. Quod cum, pro more, ubi in publicum prodeat, alicui dicandum sit, non tam Virum magnum quam magnum Mathematicum quærendum putavi, cui illud offerrem. Adeoque non alii cuiquam quam tibi magis illud deberi facile perspexi; qui & à Mathesi optime meritus es, & cujus scriptis me profecisse lubens agnosco: quippe qui in tua *Clave Mathematicæ*, opere licet non magno, ea breviter simul & perspicue tradidisti, quæ magnis aliorum voluminibus frustra quæsiteмus.

Opus hoc invenies (siquid ego judico) plane novum. Cur enim ita non vocitem nihil video: nec alii credo id inficias ibunt. Quamvis enim non dubitandum sit, quin propositiones aliis cognitæ sparsim immisceantur, (quod necessario faciendum erat, partim ut inde ad alia lux affulgeret, neque videar aliquid comminisci, quod Mathesi jam inventæ atque excultæ nihil habeat affine; partim etiam ne hoc ipsum opus mutilum prodiret & mancum, cum illæ ex principiis nostris ita statim consequantur ut etiamsi alias ignotæ fuissent necesse sit ut hinc statim innotescant; & quidem ex earum illustrioribus plerasque non apud alios prius sciverim exstare quam ad eas methodo hac pervenerim:) cum tamen & nova multa, aliis nec inventa nec cogitata quidem, habeat; atque omnia nova methodo à nobis primitus in Geometriam introducta, tradat; eaque (nisi meis fortasse nimis faveam) perspicuitate qua in abstrusioribus hisce problematis nemo (quod sciam) usus est; Non est cur Novum dubitem appellare.

Nempe inde ortum sumit hæc nostra methodus ubi Cavallerii *Methodus Indivisibilium* desinit. Unde etiam & operi ipsi, ipsique titulo, ansa data est; ut enim ille suam, *Geometriam Indivisibilium*, ita Ego methodum nostram, *Arithmeticam Infinitorum*, nominandam duxi.

Quomodo autem ego huc pervenerim; licet id minus videatur dictu necessarium, cum omnia ea fere methodo scripta sint qua inventa; tamen, quoniam id tibi non ingratum fore judico, istius etiam rei historiam breviter contexam.

Exeunte Anno 1650 incidi in Torricellii scripta Mathematica, (quæ ut per alia negotia licuit, anno sequente 1651, evolvi) ubi inter alia, Cavallerii *Geometriam Indivisibilium* exponit. Cavallerium ipsum nec ad manum habui, & apud Bibliopolas aliquoties frustra quæsivi. Ipsius autem methodus, prout apud Torricellium traditur, mihi quidem eo gratior erat quod nescio quid ejusmodi, ex quo primum fere Mathesin salutaverim, animo obversabatur; quod enim de Circulo apud plerosque obtinet, (qui pro infinitorum laterum polygono haberi solet, adeoque Peripheria pro rectis numero infinitis infinite brevibus;) visum erat mihi, mutatis mutandis, etiam alibi non inutiliter accommodari posse; & quidem eo spectare non pauca quæ apud Euclidem, Apollonium, & præsertim Archimedem passim exstant. Erant autem ea non nisi confusa adhuc apud me cogitata quæ nondum in ordinem redegeram. Neque enim per alia licuit negotia, Mathesi animum ex professo applicare, sed ei saltem horis nonnunquam subcisivis indulgere; priusquam aliunde ad hanc quam jam subeo provinciam vocatus fuerim; quod non ita multo prius contigerat.

Ubi hujusmodi jam obtinuisse methodum persenseram; cogitare apud me cœpi, num non hinc aliquid de Circuli Quadratura, quam summos semper viros exercuisse

dis formari possent; verum eis sigillatim recensendis immorandum esse non duxi, ne nimis divagarer, præsertim cum illud qui fieri possit nemo non ex traditis suo marte perspiciat.

De seriebus autem istis sive auctis sive diminutis non ipsis solum, sed & quæ in earum ratione duplicata, triplicata, aut ulterius multiplicata procedunt, eandem inquisitionem eodem successu continuavi; uti ex iis quæ deinceps sequuntur propositionibus videndum est. Ubi simul numerorum figuratorum, puta triangularium, pyramidalium, &c. (quorum nullus vel exiguus hactenus usus fuerit, & fere ludicrus,) usus insignes ex insperato deteguntur.

Verum ubi de seriebus aliis quæ sint in istarum auctarum vel diminutarum ratione subduplicata, subtriplicata, &c. proxime agendum erat, (quod Circuli, Ellipseos, & Hyperbolæ quadraturam directe quidem & immediate spectabat, & quæ sola jam superfuit difficultas:) videbam illic aquam hærere, neque me ita facile ac in prioribus me extricare potuisse. Re igitur variis modis tentata, nec eo tamen exitu qui votis omnino satisfaceret; eo deventum erat ut crederem rationem illam quæ quærebatur ejusmodi esse ut quæ nec veris numeris, nec quidem radicibus surdis (vulgo dictis) esset explicabilis. Numerorum enim progressiones aliquot inveni inter quarum datos terminos alius erat interponendus, ut rationem quæsitam valerem exprimere. Eas autem progressiones tales esse ut nec Arithmeticæ dici possint (ubi augmenta continua sunt æqualia,) nec Geometricæ (ubi numeri continue multiplicantes sunt æquales,) sed tales quæ continuos multiplicatores habeant Arithmetice proportionales, adeoque magis adhuc sint compositæ quam Geometricæ. Si autem in Geometrica progressione, (ubi continui multiplicatores sunt æquales,) quamvis aliquando fieri possit (verbi gratia, in 1, 4, 16, 64, &c.) ut interpolandi terminis illius medii sint numeris explicabiles; non item in omnibus (puta in 1, 2, 4, 8, &c.) id fieri possit; sed necesse sit ut numerum impossibilem utcunque indicemus, (puta $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, &c.) multo minus sperandum fore judicavi, ut in progressione magis adhuc composita (ubi continui multiplicatores sunt continue vel crescentes vel decrescentes) id semper fieri possit; adeoque alium aliquem notationis modum (quam qui adhuc receptus est) introducendum putavi, quo numerus ille impossibilis indicetur.

Atque hactenus perveneram istius anni 1652 initio, tempore (si memini) quadragesimali; quo tempore nempe, per Academiæ nostræ constitutiones, à publicis prælectionibus feriari permissum est, adeoque privatis disquisitionibus magis vacare.

Dum autem hic hærebam, placuit rem cum aliis quibus familiariter usus sum viris Mathematicis communicare, ut viderem num illi auxilio esse possent in quæsita quantitate designanda. Adeoque ex variis quas apud me conceperam ejusmodi progressionibus, unam selegi, quæ omnium videbatur simplicissima, (ut quæ per numeros integros procedit;) eam nempe quæ jam habetur prop. 192. hujusce tractatus; eamque ad hanc fere formam (non enim omnibus illam iisdem plane verbis, sed eodem tamen sensu proposui) problematice concepi; *Si æquabilem quandam curvam contingat in vertice recta, unde ad curvam ducantur rectæ axi Parallelæ, æqualibus ab invicem distantiis remotæ, quarum prima sit* 1, *secunda* 6, *tertia* 30, *quarta* 140, *quinta* 630, *&c. quanta erit illa quæ interponenda est media inter* 1 *&* 6? Vel etiam Arithmetice, *In serie numerorum* 1, 6, 30, 140, 630, *&c. quæritur terminus medius ipsis* 1 *&* 6 *interponendus*? Fieri autem hos terminos indicabam, ex continua multiplicatione numerorum $1\times4\frac{2}{1}\times4\frac{2}{2}\times4\frac{2}{3}\times4\frac{2}{4}$ *&c.* vel etiam $1\times\frac{6}{1}\times\frac{10}{2}\times\frac{14}{3}\times\frac{18}{4}$ *&c.* quorum tam numeratores quam denominatores sunt Arithmetice proportionales. Problema sic conceptum proposui, mensibus sequentibus, (inter alios) Clarissimis viris & Mathematicis, D. *Setho Wardo* Astronomiæ Professori Saviliano, Collegæ meo meritissimo; *Laurentio Rook*, tunc apud Oxonienses commoranti, post apud Londinenses in Collegio Greshamensi Professori Astronomico; & *Richardo Rawlinson* Collegii Reginalis apud Oxonienses Socio; nescio annon etiam sub eodem tempore, (an aliquanto serius) *Roberto Wood* Socio Collegii Lincolniensis, & *Christophoro Wren* Collegii Omnium-Animarum Socio; (sed & aliis etiam aliquot, quibus nominandis supersedeo:) & quidem detecto iis (ni fallor) omnibus eo ad quem tendebat scopo; nempe, data illa quæ quærebatur quantitate absolutam fore quadraturam Circuli. Non autem vel ego mihi vel etiam eorum quispiam (quibus nec erat obvium responsum, nec

nec vacabat suis postpositis de quæsitis meis admodum esse solicitis,) ex voto satisfecit. Monuit autem eorum aliquis ut *Gregorii a Sancto Vincentio* Opus Geometricum consulerem, (cujus ne nomen quidem antea audiveram,) ut qui magno volumine hujusmodi res quæ ad circuli Quadraturam spectent exposuerit. Huic ego monito obtemperabam; librumque utut tanto erat volumine ut non integrum perlegere vacaverit, pervolvi utcunque; solicitus an inde quæ ad rem nostram facerent reperire possem. Inveni autem aliquando easdem & illi & mihi (quod nihil mirum erat) speculationes obtigisse, licet diversis methodis eo pervenerimus. Exempli gratia, quod appellat ille *plani in planum ductum*, id ipsum est quod nos & hic, & in Tractatu de Conicis Sectionibus (qui huic gemellus est eodem anno 1652 conceptus & primitus formatus,) dicitur, *ductus rectarum omnium unius plani in alterius respectivas rectas*: cur autem ego *ductum plani in planum* non dixerim, in causa erat, quod revera non tam planum in planum (sic enim prodiret plano-planum, quatuor nempe dimensionum, non solidum,) sed latitudo unius in latitudinem alterius, & factum denique in communem altitudinem ducitur; adeoque tres (non quatuor) emergunt dimensiones. Et alia fortasse nonnulla. Ut autem ex suis ne unam vel propositionem vel demonstrationem in nostrum tractatum assumpsi, quam ego antea non inveneram; ita siquæ forsan occurrant utrique communes, non opus esse credidi, ut propterea ex nostris delerem, cum & illud sæpissime contingere sit necesse, ut ubi duo vel plures rem eandem tractandam suscipiant in easdem aliquando incidant speculationes. Verum (utut ille multa habeat acute inventa, methodo à nostra plane aliena) illud quod apud eum maxime quærebam nusquam inveni; neque enim ille vel eousque rem perduxerat, nec etiam circuli quadraturam, quam se invenisse perhibet, omnino attingit, sed ad propositionem nostræ prop. 136. non multum absimilem ubi pervenerat, ratus inde se circuli quadraturam invenisse, non tamen assecutus est; uti in Ἐξετάσει sua ostendit *D. Hugenius*.

Sub ejusdem anni (1652) autumno, Clarissimo Viro *Francisco Schootenio* Matheseos Professori apud Lugduni-Batavos, inter alia, proposui etiam hoc problema, (tecto tamen quo collimabat scopo;) qui, re statim cum Clarissimo Viro *Christiano Hugenio* communicata, rescriptis non ita multo post literis intricatam rei difficultatem (utut primo aspectu facilior visa fuerit) subindicavit, neque interim spem fecit vel sibi vel Dom. *Hugenio* vacaturum fore ut ei ulterius exquirendæ plus operæ impenderent. His eorum omnium responsis, confirmatior factus sum in ea quam pridem conceperam opinione, nempe terminum illum quæsitum neque numerum rationalem esse, neque ex adhuc receptis surdis aliquem; sed nova notatione designandum; & quidem, si libet, ea quam nos ad prop. 190 assignavimus. Si vero (prout verbi gratia $\sqrt{2}$, licet veris numeris exprimi præcise non possit, possit tamen quam proxime, ita) velimus hanc quantitatem veris numeris quam proxime exprimere, (tanta nempe ἀκριβείᾳ quanta quis velit, modo præcisam non velit,) quomodo illud fiat docemus prop. 191. Quomodo illud Geometrice utcunque exhibeatur, ostensum est item propositionibus sequentibus. Adeoque circuli quadraturam eousque prosequuti videmur quantum numerorum natura patitur. Qui vero ulterius rem præstare postulat, perinde est acsi postulet $\sqrt{2}$ veris numeris exprimere: quod iniquum esset postulatum. Non interim ignoro quin possit & aliis etiam modis inexplicabilis illa quantitas characteribus designari, atque ad numeros veris proximos aliis item methodis perveniri, (sicut & de radicibus surdis dici possit,) qua in re non est ut ego viris Mathematicis quicquam præscribam, sed quibus quisque malit uti liberum relinquam.

Absoluta autem circuli quadratura, non opus esse duxi cognata illi alia problemata sigillatim attingere; puta quam habeat rationem diameter ad peripheriam; aut sphæra ad cubum; aut conus vel cylindrus ad pyramidem aut prisma; aliaque similia: nemo enim nescit hæc inde colligere.

Sed neque de quadratura Ellipseos seorsim quicquam dicendum videbatur; quippe quæ junctim cum quadratura circuli traditur.

Hyperbolæ quadraturam quousque fuerim assecutus, prop. 165. ostendimus.

Interim tamen, methodi quam trado filum secutus, inopinato incidi in quæstionem satis mirabilem de mensurandis figuris altera parte terminatis altera in infinitum continuatis. Adeoque quod in una figura solida præstitit Torricellius, id nos in aliis innumeris, tam planis quam solidis faciendum ostendimus, prop. 87.

&

& seq. ad 107. Et simul docemus quo dignoscatur criterio num ejusmodi figuræ propositæ in infinitum continuatæ finitam tandem an. infinitam magnitudinem sint assecuturæ. Quæ quidem & miranda satis, & jucunda simul, videatur speculatio.

Quod autem jam ante tres annos invenerim, cur non citius in publicum dederim; in causa fuit partim quod ego aliis non raro negotiis fuerim avocatus, sed præsertim quod Typographus, aliis edendis occupatior, non nisi serius susceperit & tardius executus sit & hujus & aliorum qui cum hoc prodeunt tractatuum impressionem. Quam vero, dum quæ jam prodeunt sub Prelo erant, placuit (sub æquinoctio verno) quasi in antecessum emittere, propositionem Cyclometricam, (quæ & eam continet, quam ante aliquot annos sub problematis forma, ut supra dictum est, egregiis aliquot viris proposueram,) invenies ex tribus illis quæ hunc tractatum claudunt desumptam esse. Ex eo autem tempore, (mense jam proxime præterito) prodiit Liber *D. Hobbes*; qui jam magna pollicitus in Geometria, & speciatim circuli quadraturam, angulique in data ratione sectionem, aliaque his cognata, Librum tandem suum in publicum emisit, quo se ostendit nec horum quicquam præstitisse, nec quidem præstiturum esse; adeo enim turpissimis paralogismis ubique scatet Liber iste, ut raro aliquando quid sanum invenias, (quod nostro istius *Elencho*, qui & jam sub Prelo est, manifestum fiet;) unde & Authorem non eum esse facile dignoscas à quo hujusmodi mysteria speremus retexenda.

Cæterum vale, Venerande Senex: Et te Deus summe misericors feliciter sospitet, tuaque omnia faxit prospera: ut tandem, post Senium Feliciter & Pie transactum, ærumnosam quam vivimus vitam vita commutes meliori. Quod animitus precatur

Tui Observantissimus

Dabam Oxoniæ
Julii 19. 1655.

JO. WALLIS.

Propositio quam memorat Epistola, præcedens hæc est quæ sequitur.

SPECTATISSIMO VIRO

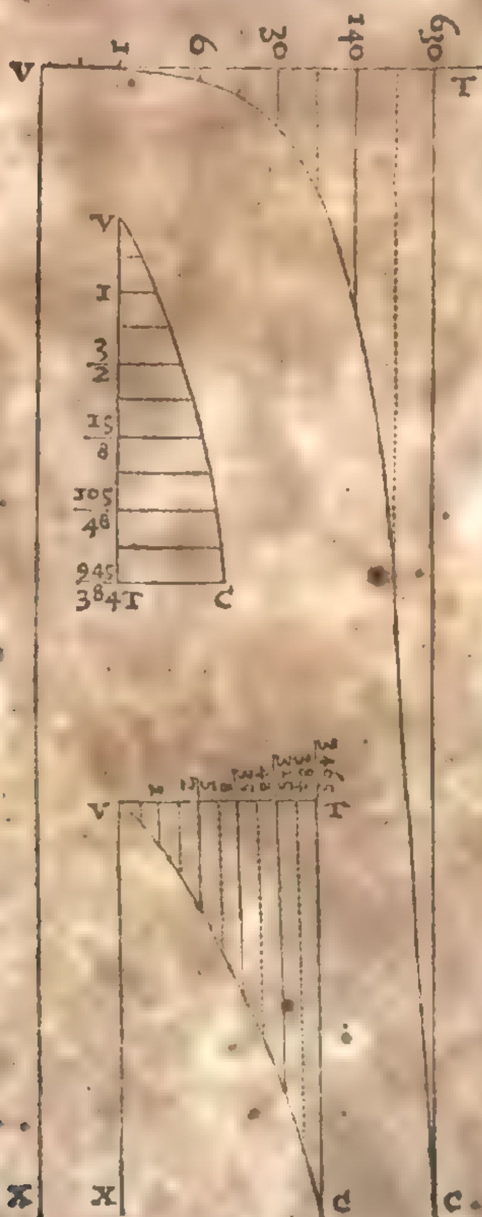
D. GUILIELMO OUGHTREDO,

Matheseos cognitione Celeberrimo,

JOHANNES WALLISIUS

Geom. Prof. Oxon. S.

Quam tibi antehac (Celeberrime Vir) Propositionem, velata facie, & forma Problematica; ut & aliis, quibuscum rem habui, Mathematicis non paucis ante aliquot annos, exhibueram; celato plerumque (nonnullis tamen detecto) in quem dirigebatur scopo: En tandem aperta fronte, forma Theorematica, eloquentem (quam prius subticebat)



Circuli Quadraturam.

Exposita æquabili curva VC, cui occurrat in vertice recta VT, in quotlibet particulas æquales divisa, &c, à singulis divisionum punctis, totidem rectis parallelis ad curvam usque ductis, quarum secunda sit 1, quarta 6, sexta 30, octava 140, &c. Erit, ut earum secunda ad tertiam, sic Semicirculus ad Quadratum Diametri.

Vel, Si sit secunda 1, quarta $1\frac{1}{2}$, sexta $1\frac{7}{8}$, &c. Erit, ut secunda ad tertiam, sic Circulus ad Quadratum Diametri.

Vel, Si sit secunda 1, quarta $2\frac{1}{2}$, sexta $4\frac{3}{8}$, &c. Erit, ut secunda ad tertiam, sic triplum Circuli ad quadruplum Quadrati ex Diametro.

Totum Demonstrationis progressum, ipsamque methodum qua tam ad hanc circuli, quam ad innumeras alias aliorum curvilineorum quadraturas pervenerim, ostendet tractatus quem apud me jam aliquandiu perfectum habeo, & quidem in Typographorum usum exscriptum; quem in publicum daturus sum, quam primum per Typographorum moras licebit, quorum otia per duos integros & quod excurrit annos jamjam exspectavi.

Dabam è Typographeo *Oxoniensi* postridie Paschatis, Anno Domini 1655.

D.

D. GUILIELMI OUGHTREDI,

Ad præcedentem Epiſtolam (poſt Librum editum) Reſponſio. Quo quid ille de hac methodo ſenſerit, innoteſcat.

Venerabili Viro & Amico plurimum Honorando
D. *JOHANNI WALLISIO*
S.

HAud facile dici poteſt (Venerande Vir) quanta cum Voluptate perluſtravi (prout per alia licuit Negotia, per infirmam Valetudinem, per grandem Ætatem & ad finem properantem, agentis annum 82,) Eruditiſſima tua (de pluribus eximiis ſubtilibuſque argumentis) ſcripta, ad me miſſa. Deoque primum, patri luminum, gratias recognoſco debitas, qui tam illuſtri te donavit lumine: Tibique dein Gratulor, etiam cum Admiratione, tantam tum perſpicuitatem, tum perſpicaciam mentis geniique tui; qui novam non tantum inveris ipſe, ſed & aliis aperueris viam, in abditiſſima Artis myſteria penetrandi; Veteribus incognitam, & ne cogitatam quidem. Eoque me majori movent affectu hæc inventa tua, myſteriis plena, quod Honorabilis Eques (ſcientiſſimus ipſe & ſcientiarum patronus) D. *Carolus Cavendiſh*, jam ante annos viginti, monſtravit mihi Chartulam (*Pariſiis* ad ſe miſſam) pauca quidem, ſed egregia quædam nova Theoremata continentem; per *Cavallerii* (credo) methodum excogitata; quæ ego iidem (methodo meis magis conformi) iterato abſolvi, & cum pluribus communicavi; quorum aliqui ex meo ſcripto fecerunt ſibi Apographa, ſed quod ipſe nunc ad manum non habeo. Quod repeto, quia jam tum videre mihi viſus ſum tanquam è longinquo ſuborientem lucem, patefacturam mira; quæ ſupremis hiſce mundi ſeculis humanum genus olim aliquando foret irradiatura. Quam ego lucem, tunc, quaſi à longinquo conſpectam, ſalutabam; nunc, ut in propinquo poſitam, complector; proſperis his initiis effulgentem. Quod Nomen meum, ſcriptis hiſce tuis nunquam emorituris, præfigere dignatus ſis, inſigni tuo favori debeo: qui gloriæ tuæ nihil ultra conferre valeo quam plauſum meum; Preceſque ad Deum, ut velit ille perficere ſic feliciter incepta, ſuæque Gloriæ promovendæ congrua. Quod ex animo precatur,

Tui Amantiſſimus &

Admirator,

Auguſti 17. 1655.

Guilelmus Oughtred.

AD LECTOREM MONITIO.

L*Ectorem hic monendum censui, quod Vir Clarissimus D.* Ismael Bullialdus *in breviculum hunc tractatum amplos scripsit Commentarios, erudito quidem & multorum annorum opere, magno Volumine Anno* 1682 *Parisiis edito, cui nomen fecit* Ad Arithmeticam Infinitorum. *In quo multa eorum quæ sunt hic succincte tradita, exponit ille fusius; plurimaque quæ hic latebant elicit Theoremata, & speculationes scitu non indignas. Ut sicui minus placeat mea succincta brevitas, poterit ille res easdem ibidem ampliatas & solenniori pompa deductas contemplari. Cui Viro Clarissimo a me deberi gratias eo nomine, lubens agnosco. Rem ipsam quod spectat; non video quin hæc nova methodus, (utut de ea primum, quod de rebus novis fieri solet, hæsitaverint nonnulli) sit apud Viros Eruditos jam passim recepta, atque in usum adhibita, ut apprime utilis & compendiosa, sed & satis demonstrativa: Quæque aliquando objecta fuerint, nos alibi diluimus, ut repetitu non sit opus. Tu, Lector, Fruere, & Vale.*

ARITH-

ARITHMETICA INFINITORUM.

SIVE

NOVA METHODUS INQUIRENDI in Curvilineorum Quadraturam, aliaque *Difficiliora Matheseos Problemata.*

PROP. I.
Lemma.

SI proponatur series Quantitatum *Arithmetice-proportionalium* (sive juxta naturalem numerorum consecutionem) continue crescentium, à puncto vel o (ciphra, seu nihilo) inchoatarum, (puta ut o, 1, 2, 3, 4, &c.) propositum sit inquirere, quam habeat rationem earum omnium aggregatum, ad aggregatum totidem maximæ æqualium.

Simplicissimus investigandi modus, in hoc & sequentibus aliquot Problematis, est, rem ipsam aliquousque præstare, & rationes prodeuntes observare atque invicem comparare; ut inductione tandem universalis propositio innotescat.

Est igitur, exempli gratia, $\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$ $\frac{0+1+2=3}{2+2+2=6}=\frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3=6}{3+3+3+3=12}=\frac{1}{2}$. $\frac{0+1+2+3+4=10}{4+4+4+4+4=20}=\frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3+4+5=15}{5+5+5+5+5+5=30}=\frac{1}{2}$. $\frac{0+1+2+3+4+5+6=21}{6+6+6+6+6+6+6=42}=\frac{1}{2}$.

Et pari modo, quantumlibet progrediamur, prodibit semper ratio subdupla. Adeoque ———

PROP. II.
Theorema.

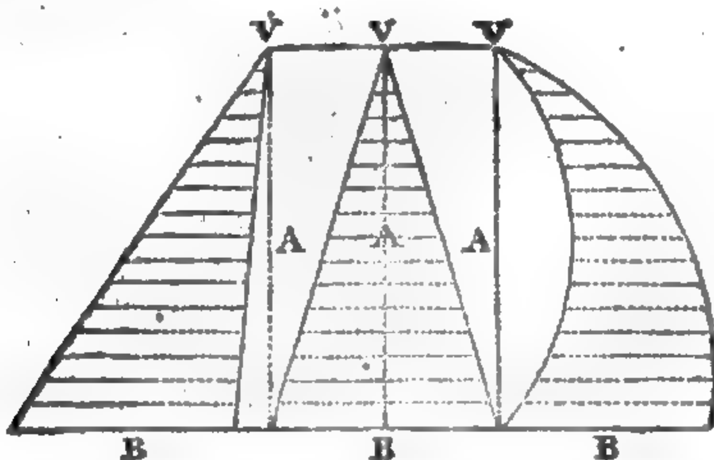
SI sumatur series quantitatum Arithmetice-proportionalium (sive juxta naturalem numerorum consecutionem) continue crescentium, à puncto vel o inchoatarum, & numero quidem vel finitarum vel infinitarum (nulla enim discriminis causa erit,) erit illa ad seriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 2.

Nempe, si primus terminus sit o, secundus 1, (nam si secus, moderatio adhibenda erit,) & ultimus l, erit summa $\frac{l+1}{2}l$ (erit enim, eo casu, numerus terminorum $l+1$.) Vel, (posito numero terminorum m, quantuscunque sit terminus secundus) $\frac{1}{2}ml$.

PROP. III.

Corollarium.

Ergo, *Triangulum ad Parallelogrammum* (*super æquali base, æque altum,*) *est ut* 1 *ad* 2.

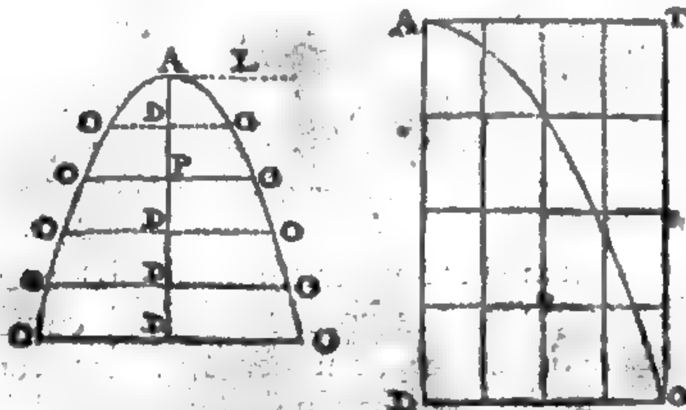


Triangulum enim constat quasi ex infinitis rectis parallelis Arithmetice proportionalibus, à puncto inchoatis, quarum maxima est basis, (ut ostendimus ad pr. 1, & 2. libri nostri de Conicis Sectionibus;) Parallelogrammum autem ex totidem basi æqualibus, (ut patet:) Ergo illud ad hoc est ut 1 ad 2 (per præced.) Quod erat demonstrandum.

PROP. IV.

Corollarium.

Item, *Pyramidoeides vel Conoeides Parabolicum* (*sive erectum sit sive inclinatum,*) *ad Prisma vel Cylindrum* (*super æquali base, æque-altum,*) *est ut* 1 *ad* 2.



Constat enim Pyramidoeides vel Conoeides Parabolicum quasi ex infinitis planis Arithmetice-proportionalibus, à puncto inchoatis, quarum maxima est basis, (ut ostendimus prop. 9. Con. Sect.) Prisma vero vel Cylindrus ex totidem basi æqualibus, (ut patet:) Ergo illud ad hoc ut 1 ad 2, per prop. 2.

PROP. V.

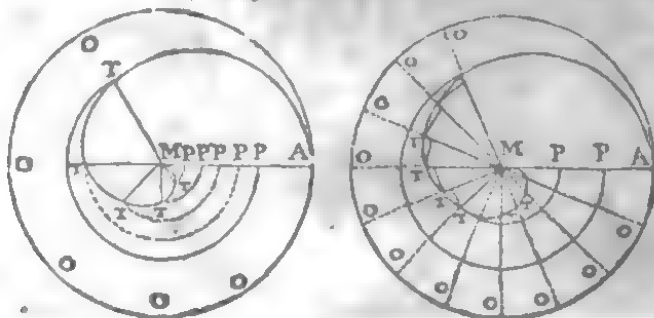
Corollarium.

Item, *Linea Spiralis* (*quam* Spuriam *dicimus*) *quælibet MT* (*à Spiralis Principio exorsa*) *ad correspondentem Peripheriæ arcum conterminum PT* (*à Principio circulationis exorsum,*) *est ut* 1 *ad* 2.

(Per

(Per *Spiralem*, hic intelligo, non ipsam Curvam Archimedeam, sed, *Aggregatum Arcuum, Sectorum similium, numero infinitorum, Spirali Archimedeæ continue inscriptorum, Figuram complentium*; Et sic deinceps, quoties de ipsa linea agitur. Quoties autem de Figura Spirali adjacente agitur; perinde est sive veram curvam Archimedeam intelligas, sive hanc quam *Spuriam* dicimus.)

Esto enim Linea Spiralis (una circulatione facta) MTA, Principium Spiralis M, (quod idem esto & centrum Arcus Peripheriæ, quem Correspondentem voco,) Principium circulationis recta MA, quæ æquabili motu circumducta (manente puncto M) supponitur puncto suo A peripheriam describere AOA. (qui *Circulus primus* vel potius *Circuli primi Peripheria*, dici vel solet vel commode potest,)



dum interim punctum aliquod (in eadem recta circumducta) moveri supponitur (æquabili item motu) ab M ad A, motu suo lineam Spiralem MTA describens: Adeoque recta quælibet MT (à principio spiralis M, ad spiralem ubivis ducta) erit ad rectam MA, ut peripheriæ arcus AO (eodem tempore descriptus) ad peripheriam totam AOA, vel ut angulus AMT ad quatuor rectos: Adeoque & rectæ MT, MT, arcubus AO, AO, proportionales erunt; ut patet.

Tum, ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuos AMT, TMT, &c. æquales invicem facientibus (adeoque Arithmetice proportionalibus,) supponamus (super illis angulis) similes Sectores totidem (saltem uno minus, quia in spacio primo sector inscribi non poterit) figuræ MTM (spirali vera MT & recta TM comprehensæ) inscribi. Sectores illi omnes constituent figuram (ex similibus sectoribus compositam,) ipsa figura MTM (cui inscribitur) minorem: Differentia vero perpetuo minuetur prout sectores illi (eidem MTM figuræ inscripti) plures fuerint, (ut patet,) adeo ut, si sectores illi supponantur numero infiniti, figura sic inscripta ipsi MTM figuræ congruet, (per ea quæ universaliter monuimus ad prop. 2. Con. Sect.) & propterea sectorum illorum omnium arcus ipsi spirali (Spuriæ) MT congruent.

Sunt autem illi similium sectorum arcus (sicut eorum radii) Arithmetice proportionales, nempe ut 0, 1, 2, &c. angulus autem cujuslibet sectoris est ea pars anguli totius AMT quæ sectorum sive spaciorum numero cognominis est; adeoque si sectores supponantur numero infiniti, erit angulus cujuslibet $\frac{1}{\infty}$ (pars infinitesima, seu infinite parva) anguli totius AMT, ita nempe ut omnes simul æquentur toti AMT. (Liceat autem mihi, καταχρηστικῶς forsan, Anguli nomine appellare angulorum etiam aggregatum, quamvis fortasse duos rectos vel æquet vel etiam superet.)

Spiralis igitur nostra MT constare supponitur ex infinitis sectorum arcubus Arithmetice proportionalibus, (subtensis $\frac{1}{\infty}$ anguli AMT,) quorum minimi radius est 0, seu punctum, (nullius magnitudinis,) maximi vero recta MT.

Correspondens autem arcus conterminus PT, ex totidem constat sectorum arcubus maximo æqualibus, ut patet.

Ergo aggregatum illorum (hoc est linea spiralis nostra MT) ad aggregatum horum (hoc est arcum conterminum PT) est ut 1 ad 2. per prop. 2.

PROP. VI.

Corollarium.

ET propterea, *Linea Spiralis (nostra) MA una circulatione facta æquatur semissi peripheriæ circuli primi, AA.*

Nam

Nam arcus conterminus spirali MA, est integra peripheria circuli primi puncto A descripta. Ideoque &c. per prop. 5. quod erat demonstrandum.

PROP. VII.

Corollarium.

ET *Spiralis hæc descripta circulationibus duabus, tribus, quatuor, &c. integris; æquatur semissi peripheriæ circuli secundi, tertii, quarti, &c. bis, ter, quater, &c. sumptæ.*

Nam dum describitur Spiralis MAB (duabus circulationibus facta,) Punctum illud B, peripheriam BB bis describit: & dum describitur spiralis MABC, peripheria CC ter describitur; & peripheria DD quater, dum describitur spiralis MABCD. Et sic deinceps, pro numero circulationum multiplicanda est peripheria contermini circuli, & multipli semissis æquatur spirali interea descriptæ.

PROP. VIII.

Corollarium.

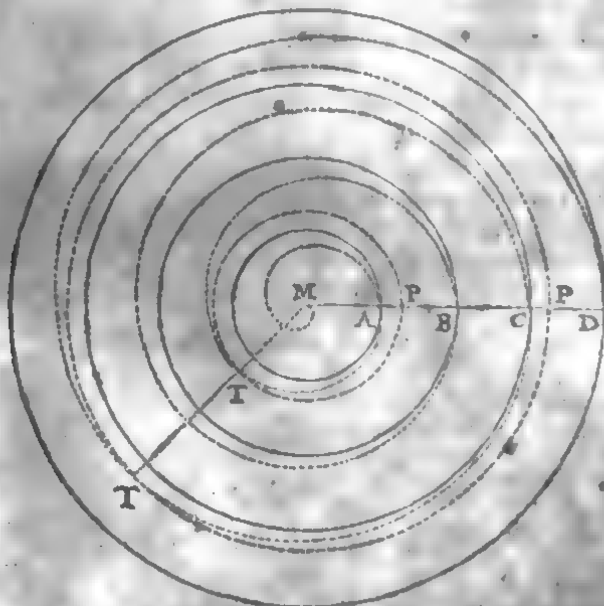
SI *vero Spiralis hæc ultra circulationem primam, sed non duabus integris continuetur, æquabitur semissi tam peripheriæ integri circuli contermini, quam ejusdem continuationis supra circulum integrum.*

Nam interea dum describitur (motu composito) Spiralis MAT, describetur etiam (à puncto P) arcus PPT, nempe tota peripheria PP cum adjuncto additamento PT. Ergo &c. per prop. 5. Quod erat demonstrandum.

PROP. IX.

Corollarium.

ET pariter, *Si spiralis ea continuetur per circulationes duas, tres, quatuor, aut plures integras, cum additamento; æquabitur illa semissi conterminæ peripheriæ integræ, bis, ter, quater, aut sæpius acceptæ (pro numero nempe integrarum circulationum) cum semisse item additamenti.*



Quia nempe dum spiralis illa describitur, toties describitur peripheria contermina integra, atque insuper additamentum: Hoc est, correspondens arcus conterminus continet totidem integros circuli ambitus (quot sunt integræ circulationes) cum additamento. Ideoque constat propositum, per prop. 5.

PROP.

PROP. X.

Corollarium.

ATque insuper, *Lineæ Spirales hæ una, duabus, tribus, quatuor, &c. circulationibus factæ, (puta MA, MAB, MABC, MABCD,) se habent ad invicem ut numerorum Arithmetice-proportionalium quadrata; nempe ut 1, 4, 9, 16, &c. Sive sunt in duplicata ratione rectarum MA, MB, MC, MD, &c.*

Sunt enim rectæ MA, AB, BC, CD, invicem æquales (propter æquabilem progressum puncti mobilis in recta MA, etiam continuata, tantum in una circulatione æquabiliter progredientis quantum in altera;) adeoque tam radii MA, MB, MC, MD, quam Peripheriæ (illis radiis descriptæ) A, B, C, D, sunt ad invicem ut 1, 2, 3, 4. Si igitur sumantur peripheriæ, prima semel, secunda bis, tertia ter, quarta quater, erunt illa multipla, (puta 1A, 2B, 3C, 4D,) ut numeri quadrati 1, 4, 9, 16, sive 1×1, 2×2, 3×3, 4×4. Et propterea etiam horum multiplorum semisses, hoc est (per prop. 5.) spirales MA, MAB, MABC, MABCD.

Vel aliter, Si circuli primi peripheria ponatur $A = p$, erit secundi $B = 2p$, tertii $C = 3p$, quarti $D = 4p$, & sic deinceps; & $1A = 1p$, $2B = 2 \times 2p = 4p$, $3C = 3 \times 3p = 9p$, $4D = 4 \times 4p = 16p$; &c. Et (per prop. 5.) Spirales $MA = \frac{1}{2}p$, $MAB = \frac{2}{2}B = \frac{4}{2}p$, $MABC = \frac{3}{2}C = \frac{9}{2}p$, $MABCD = \frac{4}{2}D = \frac{16}{2}p$, &c. ideoque ad invicem ut 1, 4, 9, 16, &c. hoc est in duplicata ratione rectarum MA, MB, MC, MD, &c. (quæ sunt ad invicem ut 1, 2, 3, 4, &c.) Quod erat demonstrandum.

PROP. XI.

Corollarium.

ET universaliter; *Ejusdem (vel similium) Spiralis segmenta qualibet (à principio Spiralis exorsa) sunt ad invicem in duplicata ratione rectarum conterminarum.*

Cum enim (per constructionem lineæ spiralis) eadem sit ratio rectarum MT, MT, quæ est angulorum PMT, PMT, (anguli voce eo sensu sumpta qui supra innuitur prop. 5.) ratio arcuum PT, PT, (quæ ex duabus illis rationibus componitur,) ut & spiralium MT, MT, (quæ istorum arcuum sunt semisses,) erit duplicata rationis rectarum MT, MT, seu ut MTq, MTq.

Sic v. g. si recta MA (unius circulationis) dicatur $1r$, & peripheria circuli primi (eo radio descripta) $1p$, erit spiralis $MA = \frac{1}{2}p$. Igitur, in una circulatione cum semisse, fiet recta contermina $1\frac{1}{2}r = \frac{3}{2}r$, & peripheria contermini circuli $\frac{3}{2}p$, quæ ducta in $\frac{3}{2}$ (numerum circulationum) fit $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times p = \frac{9}{4}p$: Ejusque semissis $\frac{9}{2 \times 4}p = \frac{9}{8}p$ est spiralis eodem tempore descripta.

Similes *autem appello Spirales, si rectæ MA, MB, MC, &c. in una, æquales sint homologis rectis in altera.*

PROP. XII.

Corollarium.

SI vero *ejusmodi Spiralium dissimilium (puta si MB in una, tanta sit quanta MC in alia) rectæ conterminæ sint æquales; erunt Spiralium illarum segmenta homologis suis rectis (puta MA in una, & MA in altera) reciproce proportionales.*

 Nam

Nam v. g. in prima, erit spiralis M A B (duabus circulationibus descripta) æqualis semissi peripheriæ suæ B, bis sumptæ; & in secunda, Spiralis M A B C (tribus circulationibus descripta) æqualis semissi suæ peripheriæ C ter sumptæ: Cumque supponantur æquales peripheriæ B in prima, & C in secunda, (propter æquales radios; erunt spirales MAB prima, & MABC secunda, ad invicem ut 2 ad 3, (nempe ut peripheria bis sumpta, ad eandem vel æqualem ter sumptam;) hoc est, in reciproca ratione rectarum homologarum M A, M A. Nam recta M A in prima est $\frac{1}{2}$ rectæ M B, & recta M A in secunda est $\frac{1}{3}$ (ejusdem vel æqualis rectæ) M C: sunt igitur M A in secunda ad M A in prima, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel ut $\frac{2}{6}$ ad $\frac{3}{6}$, vel ut 2 ad 3. Ideoque Spiralis prioris segmentum M A B, ad spiralis posterioris segmentum M A B C, ut recta M A in secunda ad rectam M A in prima.

Atque idem similiter ostendetur, quæcunque sit ratio homologarum rectarum in dissimilibus spiralibus.

PROP. XIII.

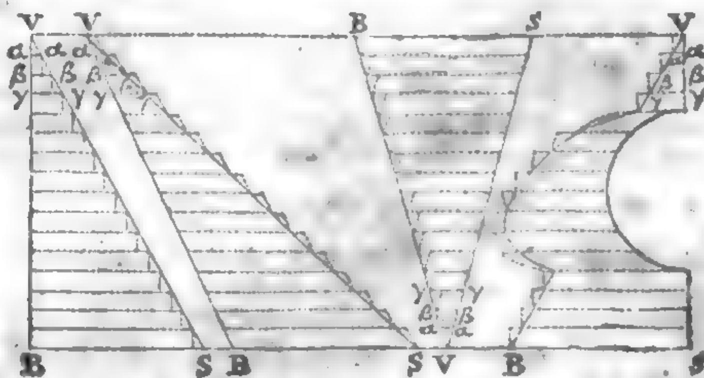
Corollarium.

SI autem *ejusmodi Spiralium dissimilium rectæ conterminæ sint etiam inæquales; erunt illa Spiralium segmenta ad invicem in ea ratione quæ componitur ex duplicata ratione rectarum conterminarum, & reciproca ratione rectarum homologarum.*

Sequitur ex prop. 11. 12.

SCHOLIUM.

Notandum autem est, in propositionibus præcedentibus, quæ de Spirali agunt (quod & in secuturis aliquot facturus sum,) me *Spiralis* appellationem (ne longa circumlocutione toties opus sit,) abusive usum fuisse. Nempe, per *Spiralem*, (quoties ea ad Peripheriam comparatur,) intellectum vellem *Aggregatum omnium arcuum Sectorum similium, numero infinitorum, ex quibus constat figura illa ex infinitis numero Sectoribus Spirali veræ inscripta*; (qua scilicet & nos ad Prop. 5. &c. hujus, & Archimedes ad Prop. 21. &c. lin. Spir. usi sumus:) ut ad prop. 5. innuimus. Quod quidem Aggregatum ipsa linea Spirali proprio sensu sumpta, perpetuo minus est, & maxime quidem circa spiralis initium. Quamvis enim Sectorum illorum numero infinitorum aggregatum, ipsi figuræ lineis recta & Spirali terminatæ, (juxta methodum Indivisibilium) æquale ponatur; non tamen illud de omnium Arcubus cum ipsa linea Spirali (proprie dicta) comparatis obtinebit. Tantundem enim esset, acsi quis, dum infinita numero parallelogramma triangulo inscripta (aut etiam circumscripta) toti triangulo VBS æ-



qualia videat, inde concluderet eorum omnium latera rectæ V S adjacentia (rectæ V B parallela) ipsi V S simul æqualia esse, vel quæ rectæ V B adjacent (ipsi V S parallela) æqualia simul esse toti V B. (Quod siquando verum esse contingat, puta in triangulo isosceli, non tamen id universaliter concludendum erit.) Atque hoc quidem eo potius admonendum duxi, quod viderim etiam viros doctos nonnunquam speciosa ejusmodi verisimilitudine in lapsum proclives esse. Cur autem

autem omissa Spirali linea genuina, spuriam hanc Spiralem peripheriæ comparaverim; causa est, quod huic possim, non autem illi, æqualem peripheriam assignare.

PROP. XIV.

Corollarium.

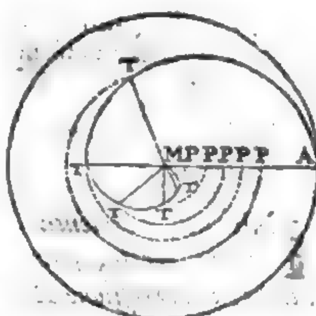
ET propterea etiam *Segmenta Spiralis hujusmodi, à principio Spiralis exorsa, sunt ad rectas conterminas, sicut Parabolæ Diametri interceptæ, ad ordinatim-applicatas.*

Nempe in ratione duplicata, per prop. 11.

PROP. XV.

Coroll.

IDeo *si supponatur Spiralis nostra MTT ita evolvi, ut rectam constituat, & rectæ omnes TM, TM, fiant invicem parallelæ; erit illa, Diameter, hæ vero, ordinatim-applicatæ in Parabola: Contra vero, si supponatur Parabolæ diameter ita in arcus convoluta, ut ordinatim-applicatæ ad idem punctum terminentur; fiet illa, Spiralis; istæ, rectæ conterminæ; hoc denique, principium Spiralis.*



SCHOLIUM.

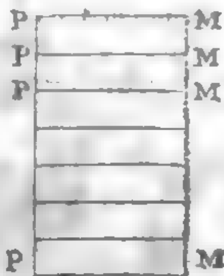
Atque hinc etiam ulterius patet illud quod post prop. 13. indicavimus. Nempe, Spiralem illam nostram ex infinitis similium Sectorum arcubus conflatam, non esse genuinam Spiralem proprie dictam, sed ipsa minorem. Cum enim constet, in Parabola, ordinatim-applicatas, quæ vertici propiores sunt quam ea quæ lateri-recto æquatur, longiores esse quam sunt diametri-interceptæ; adeoque non ita convolvi posse Parabolæ diametrum (dummodo infracta maneat) ut earum ordinatim-applicatarum extremitates in ipso vertice coeant, (quippe quod, quæ jam curvata supponitur, minor esse non possit, quam recta contermina, quæ prius erat ordinatim-applicata:) Necesse est ut vera Spiralis, quæ sic convoluta est, major sit quam ea quæ supponitur ex arcuum aggregato conflari, quam Parabolæ diametro convenire jam ostensum est, quippe quæ est ubique in duplicata ratione rectarum conterminarum.

PROP. XVI.

Corollarium.

PArabola vero sic convoluta (*hoc est, figura Spirali nostræ adjacens*) *est ejusdem Parabolæ evolutæ semissis.*

Etenim v. g. Si supponamus parallelogrammi PM latus PP ita convolvi, ut rectarum omnium PM puncta M in eodem puncto coeant, fiet ex Parallelogrammo (propter radios omnes à communi centro M æquales) circuli sector (qui circulo integro vel minor erit vel major vel æqualis, pro ea ratione quam ad invicem habeant rectæ PP, PM;) qui quidem Sector (hoc est Parallelogrammum convolutum) erit Parallelogrammi (evoluti) Semissis; (propterea quod pro infinitis Parallelogrammis ex quibus Parallelogrammum expositum constare supponitur, fiunt totidem in Sectore triangula easdem & bases & altitudines habentia:) Pari modo, si ita convolvatur Parabola ut dictum est, ut ordinatim-applicatarum (pridem parallelarum) extrema altera in eodem puncto coeant;



 infinita

infinita illa parallelogramma ex quibus constare supponimus planum Parabolæ (per ea quæ diximus ad prop. 2. & 8. Con. Sect.) fient totidem triangula easdem & bases & altitudines (cum illis Parallelogrammis) habentia: & propterea Parabola sic convoluta (hoc est, figura Spiralis,) ipsius evolutæ semissis erit. Notandum interim erit; si velimus ut Ordinatim-applicatæ in Parabola (Parallelogramma illa terminantes) fiant, in Spirali, eæ rectæ quæ Sectores similes terminant (æquales utique angulos habentes:) sumenda esse, in Parabola, continua Parallelogramma, non quidem æque-alta, sed quorum altitudines sint Arithmetice-proportionales, (puta, ut 1, 3, 5, 7, &c.) quo adjacentes Ordinatim-applicatæ sint Arithmetice-proportionales; (quod Spiralis nostræ ratio postulat:) puta, ut 1, 2, 3, 4, &c.

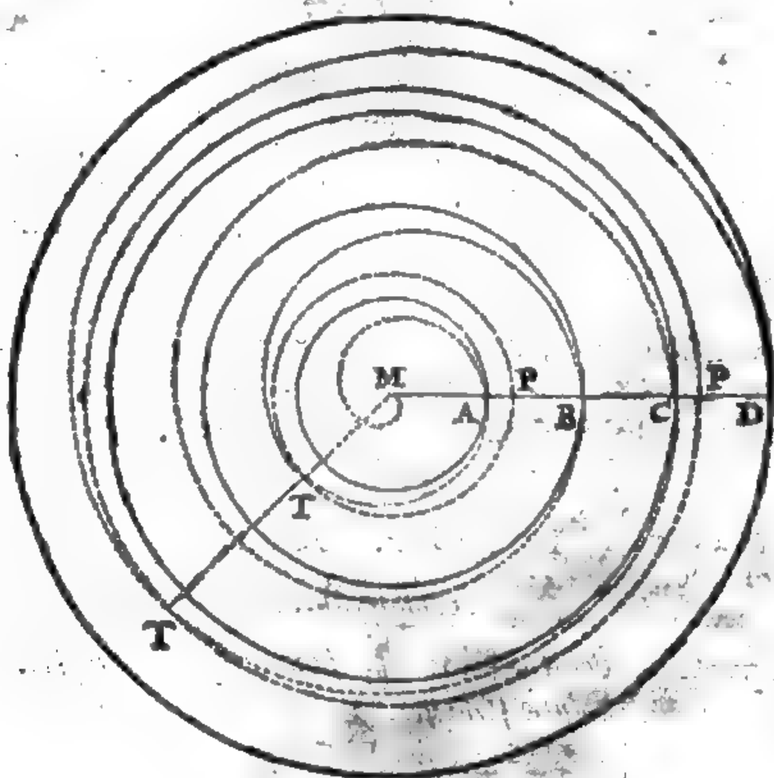
Atque hoc quidem convenit cum iis quæ habet Torricellius Exempl. 8. eorum quæ ipsius tractatui de solido Hyperbolico præmisit; utut à principiis plane diversis petita.

Notandum autem hic porro erit; Sicut ex Parabolæ convolutione hujusmodi, (contracta Diametro in unum punctum) fit Spiralis Archimedea; sic ex aliis Paraboloeidibus (aliisve Trilineis istiusmodi,) simili convolutione fieri posse alia Spiralium genera mille modis variata. Quorum nonnulla post considerabimus.

PROP. XVII.

Corollarium.

INsuper, *Segmenta Spiralis hujusmodi quæ fiunt circulationibus prima, secunda, tertia, quarta, & sic deinceps; sunt inter se ut* 1, 3, 5, 7, *& sic deinceps in progressione Arithmetica.*



Sunt enim (per 10) Spirales MA, MAB, MABC, MABCD, &c. ut 1, 4, 9, 16, &c. ergo segmenta Spiralium MA, AB (= MAB − MA,) BC (= MABC − MAB,) CD (= MABCD − MABC,) &c. ut 1, (4 − 1 =) 3, (9 − 4 =) 5, (16 − 9 =) 7. &c.

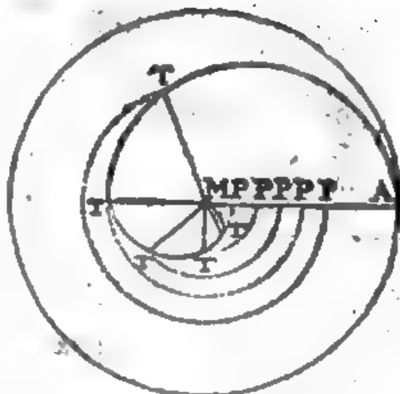
PROP. XVIII.

Corollarium.

ET universaliter, *Ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuos PMT, TMT, &c. æquales invicem facientibus, erunt Spiralis hujusmodi segmenta continue intercepta,* (*MT, TT, &c.*) *ut* 1, 3, 5, 7, *&c.*

Cum

Cum enim (propter æquales angulos) ipsæ rectæ MT, MT, &c. sint ut 1, 2, 3, 4, &c. (per constructionem Spiralis:) & propterea Spirales MT, MT, &c. (istis rectis contermin-næ) sint in rectarum ratione duplicata (per prop. 11.) nempe ut 1, 4, 9, 16, &c. erunt ipsa segmenta continua, MT, TT, &c. ut 1, 4−1, 9−4, 16−9, Quod erat demonstrandum.



SCHOLIUM.

Tota hæc de longitudine lineæ Spiralis doctrina, continuis quatuordecim propositionibus jam tradita, est, apud Archimedem in libro de lineis Spiralibus, penitus omissa: Nescio an ab alio quopiam ex recentioribus tradita fuerit.

PROP. XIX.

Lemma.

SI proponatur series Quantitatum in *duplicata* ratione Arithmetice-proportionalium, (sive juxta seriem numerorum quadraticorum,) continue crescentium, à puncto vel o inchoatarum, (puta ut 0, 1, 4, 9, &c.) propositum sit inquirere, quam habeat illa rationem ad seriem totidem maximæ æqualium?

Fiat investigatio per modum inductionis, (ut in prop. 1.) eritque

$$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}. \qquad \frac{0+1+4=5}{4+4+4=12}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{12}.$$

$$\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36}=\tfrac{7}{18}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{18}. \qquad \frac{0+1+4+9+16=30}{16+16+16+16+16=80}=\tfrac{3}{8}=\tfrac{9}{24}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{24}.$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150}=\tfrac{11}{30}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{30}.$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252}=\tfrac{13}{36}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{36}.$$ Et sic deinceps.

Ratio proveniens est ubique major quam subtripla, seu $\frac{1}{3}$. Excessus autem perpetuo decrescit prout numerus terminorum augetur; puta $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}, \frac{1}{36}$, &c. aucto nimirum fractionis denominatore, sive consequente rationis, in singulis locis numero senario, (ut patet,) ut sit rationis provenientis excessus supra subtriplum, ea quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post o. Adeoque ———

PROP. XX.

Theorema.

SI proponatur series quantitatum in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium (sive juxta seriem numerorum quadraticorum) continue crescentium, à puncto vel o inchoatarum; ratio quam habet illa ad seriem totidem maximæ æqualium, subtriplam superabit; eritque excessus, ea ratio quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post o; sive, quam habet radix quadratica termini primi post o, ad sextuplum radicis quadraticæ termini maximi.

Puta (si terminus post o primus ponatur 1, & ultimi latus l,) $\frac{l+1}{3}l^2 + \frac{l+1}{6l}l^2$.

Vel (posito numero seu multitudine terminorum, m, & ultimi latere l,) $\frac{m}{3}l^2 + \frac{m}{6m-6}l^2$.

Patet ex Prop. præced.

Cum autem crescente numero terminorum, excessus ille supra subtriplum ita continuo minuatur, ut tandem quolibet assignabili minor evadat, (ut patet;) si in infinitum procedatur, prorsus evaniturus est. Adeoque ———

PROP. XXI.

Theorema.

SI proponatur series infinita Quantitatum in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium, (sive juxta seriem numerorum quadraticorum,) continue crescentium, à puncto seu o inchoatarum; erit illa ad seriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 3.

Patet ex præced.

PROP. XXII.

Corollarium.

IDeoque *Conus vel Pyramis ad Cylindrum vel Prisma (super eadem vel æquali base æque altum) est ut* 1 *ad* 3.

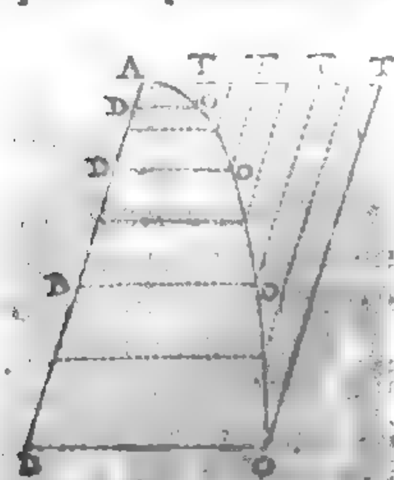
Constare enim supponimus tam Conum quam Pyramidem ex infinitis planis similibus & parallelis, in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium constitutis, quorum minimum supponitur Punctum, maximum vero basis; (per ea quæ diximus ad Prop. 6. Con. Sect.) Cylindrus autem vel Prisma, ex totidem maximo æqualibus (ut patet:) Ratio igitur est ut 1 ad 3. per præced.

PROP. XXIII.

Corollarium.

ITem *Complementum Semi-parabolæ, (intellige figuram* AOT *quæ cum ipsa semi-parabola complet Parallelogrammum,) est ad Parallelogrammum* TD *(super eadem vel æquali base æque-altum) ut* 1 *ad* 3. (*Et consequenter, ipsa semi-parabola est ad idem Parallelogrammum, ut* 2 *ad* 3.)

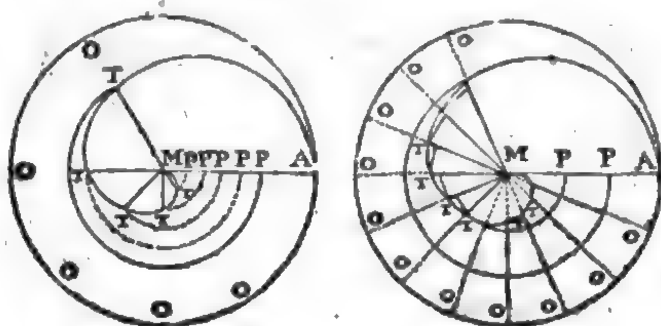
Esto enim Figuræ AOT vertex A, diameter AT, basis TO, eique parallelæ quotlibet (basem inter & verticem) TO, TO, &c. Quoniam sunt (per prop. 21. Con. Sect.) rectæ DO, DO, &c. in subduplicata ratione rectarum AD, AD, &c. Erunt è contra ipsæ AD, AD, &c. hoc est TO, TO, &c. in ratione duplicata ipsarum DO, DO, &c. hoc est AT, AT, &c. Tota igitur figura AOT (constans ex infinitis numero rectis TO, TO, &c. in duplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Arithmetice proportionalium) erit ad Parallelogrammum æque altum TD (constans ex totidem rectis ipsi TO maximæ æqualibus) ut 1 ad 3. per prop. 21. (Quod erat ostendendum.) Et consequenter, semiparabola AOD (parallelogrammi residuum) ad idem Parallelogrammum, ut 2 ad 3.



PROP.

PROP. XXIV.
Corollarium.

ITem, *Figura MTM, quæ Spirali MT (à principio Spiralis M exorsa) & recta MT contermina continetur; est ad Sectorem correspondentem PMT; ut 1 ad 3.*



Nam (ut diximus ad Prop. 5.) constare supponimus Figuram illam MTM ex infinitis Sectoribus similibus, quorum radii sunt Arithmetice-proportionales, adeoque Sectores ipsi in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium (quippe suorum laterum;) Sectorem autem PMT ex totidem Sectoribus maximo æqualibus: Eritque propterea Figura illa ad hanc, ut 1 ad 3. per prop. 21.

Sectoris autem nomine hic appello etiam Sectorum quotlibet aggregatum, licet semi-circulum. (aut quidem circulum integrum) æquet vel etiam superet; (sicut & de Anguli appellatione supra monuimus, ad Prop. 5.)

PROP. XXV.
Corollarium.

ET propterea, *Figura MTA quæ Spiralis circulatione prima describitur, æquatur trienti circuli primi, AA.*

Nam correspondens Sector conterminus est ipse circulus integer AA, circuli primi radio MA eodem tempore descriptus.

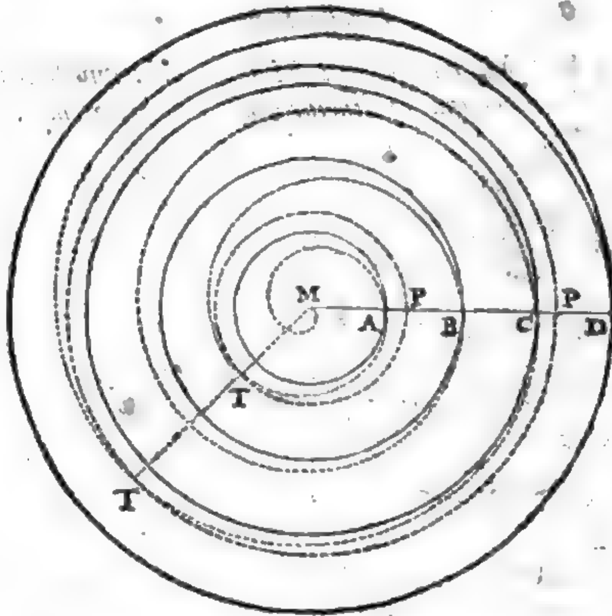
PROP. XXVI.
Corollarium.

QUÆ vero *figura describitur integris circulationibus prima & secunda; prima, secunda & tertia; prima, secunda, tertia, & quarta; & sic deinceps: (qualibet parte toties repetita, quoties circulando describitur:) æquatur trienti circuli secundi, tertii, quarti, &c. bis, ter, quater, &c. (juxta numerum circulationum) sumpti.*

Nam dum describitur Spiralis MAB (duabus circulationibus facta) à puncto mobili ab M ad B (in recta circumducta MB) promoto; & simul figura plana à recta (sic continue crescente) circumducta: Eodem tempore describitur (à recta tota MB circumducta) circulus secundus bis. Adeoque quot partibus continue crescentibus (in ratione duplicata Arithmetice proportionalium) constat figura illa Spirali terminata, totidem maximæ æqualibus constabit circulus ille bis descriptus Quare figura sic descripta Spirali adjacens, erit ad circulum conterminum BB bis sumptum ut 1 ad 3. per prop. 24.

Et pariter figura Spiralis, quæ circulationibus prima, secunda & tertia describitur, erit ad circulum tertium ter sumptum, ut 1 ad 3. Et quæ describitur circulationibus

lationibus prima, secunda, tertia, & quarta, ad circulum quartum quater sumptum, item ut 1 ad 3. Et sic deinceps.



Notandum hic, quod tota figura Spiralis, prima circulatione descripta, in secunda circulatione repetitur; & quæ describitur secunda, repetitur in tertia; & sic deinceps. Adeoque v. g. in quatuor circulationibus, figura prima (quæ intra Spiralem primam, prima circulatione descriptam, continetur) quater, secunda (quæ inter Spiralem primam & secundam jacet) ter, tertia (quæ inter Spiralem secundam & tertiam jacet) bis, quarta semel describitur: ideoque figura prima quater, secunda ter, tertia bis, & quarta semel sumptæ simul æquantur trienti circuli quarti quater sumpti, nempe juxta numerum circulationum. Et pariter de quotvis circulationibus judicandum est, habita semper numeri circulationum consideratione.

PROP. XXVII.

Corollarium.

SI autem *Spiralis ultra circulationem primam sed non duabus integris continuetur, figura Spiralis sic descripta (bis sumpto quod bis describitur) æquabitur trienti tam integri circuli contermini, quam ejusdem continuationis supra circulum integrum.*

Nam interea dum describitur figura Spiralis M A T M, describitur etiam figura circularis aucta P P T M; nempe circulus integer P P, cum adjuncto etiam sectore P M T.

PROP. XXVIII.

Corollarium.

ET pariter, *si Spiralis continuetur per circulationes duas, tres, quatuor, aut plures integras, cum additamento; figura Spiralis sic descripta (repetita toties qualibet parte quoties describitur,) æquabitur trienti tam integri circuli contermini bis, ter, quater, aut sæpius sumpti (pro numero nempe integrarum circulationum,) quam etiam additamenti sive sectoris adjuncti.*

Quia nempe dum figura illa Spiralis (à circumducta recta crescente) describitur, toties describitur, (à recta circumducta æquabili) circulus conterminus, atque insuper additamentum.

PROP. XXIX.

Corollarium.

ATque insuper, *Figuræ Spirales, quæ prima, quæ prima & secunda, quæ prima, secunda & tertia, quæ prima, secunda, tertia & quarta, (& sic deinceps) circulationibus describuntur, (puta MAM, MABM, MABCM, MABCDM, &c.) se habent ad invicem ut numerorum Arithmetice proportionalium cubi, 1, 8, 27, 64, &c. sive in triplicata ratione rectarum MA, MB, MC, MD, &c.*

Sunt enim rectæ MA, MB, MC, MD, &c. ut 1, 2, 3, 4, &c. (ut sæpius dictum est,) ideoque circuli primus, secundus, tertius, quartus, &c. (his radiis descripti) ut 1, 4, 9, 16, &c. (nempe in duplicata ratione radiorum;) adeoque si ponatur circulus primus $A = 1c$, erit secundus $B = 4c$, tertius $C = 9c$, quartus $D = 16c$, &c. & propterea si sumatur primus semel, secundus bis, tertius ter, quartus quater, &c. erunt $1A = 1c$, $2B = 2 \times 4c = 8c$, $3C = 3 \times 9c = 27c$, $4D = 4 \times 16c = 64c$, &c. adeoque ad invicem ut numeri cubici 1, 8, 27, 64, &c. quapropter & horum trientes $\frac{1}{3}c$, $\frac{8}{3}c$, $\frac{27}{3}c$, $\frac{64}{3}c$, &c. hoc est, (per prop. 25, 26.) figuræ spirales MAM, MABM, MABCM, MABCDM, &c. sunt etiam inter se ut numeri cubici 1, 8, 27, 64, &c.

PROP. XXX.

Corollarium.

ET Universaliter, *Figuræ Spirales (à Spiralis principio exorsæ, & eadem vel simili linea Spirali terminatæ) sunt ad invicem in triplicata ratione rectarum conterminarum.*

Cum enim (per constructionem lineæ spiralis) eadem sit ratio rectarum MT, MT, quæ est angulorum PMT, PMT, (sumpta *Anguli* voce, eo sensu quo supra prop. 5. ut & *sectoris* voce, eo sensu quo supra prop. 24.) sectorum PMT, PMT, ad invicem ratio (quæ componitur ex ratione angulorum & duplicata ratione radiorum,) est rectarum MT, MT, ad invicem, ratio triplicata: Et propterea eadem erit etiam ad invicem ratio figurarum spiralium MTM, MTM, quæ illorum Sectorum sunt trientes. per pr. 24. *In Figura Prop. 24.*

Sic v. g. si recta MA (unius circulationis) dicatur $1r$, & circulus eo radio descriptus dicatur $1c$; figura spiralis eodem tempore descripta erit $\frac{1}{3}c$. Igitur in una circulatione cum semisse fiet recta contermina $1\frac{1}{2}r = \frac{3}{2}r$; circulus conterminus $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times c = \frac{9}{4}c$, qui ductus in $\frac{3}{2}$ (numerum circulationum) fit $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times c = \frac{27}{8}c$, ejusque triens $\frac{9}{8}c$, est figura spiralis quæ & circulatione integra & insuper semisse describitur. Et similiter in quantacunque circulatione.

PROP. XXXI.

Corollarium.

SI vero *ejusmodi figuræ Spirales, lineis Spiralibus dissimilibus, & rectis æqualibus terminentur: (puta si MB in una Spirali, tanta sit, quanta MC in alia:) erunt figuræ illæ Spirales homologis suis rectis (puta MA in una, & MA in altera) reciproce-proportionales.*

Nam in prima erit figura MABM (duabus circulationibus descripta) æqualis trienti circuli sui B bis sumpti; Et in secunda, figura MABCM (tribus circulationibus descripta) æqualis trienti circuli sui C ter sumpti. (per prop. 29, 30.) cumque supponantur æquales circuli B in prima & C in secunda (propter æquales radios,) erunt figuræ spirales MABM prima, & MABCM secunda, ad invi-

cem, ut 2 ad 3, nempe ut circulus bis sumptus ad eundem vel æqualem ter sumptum;) hoc est, in reciproca ratione rectarum homologarum MA, MA. Nam MA in prima est $\frac{1}{2}$ rectæ MB, & MA in secunda $\frac{1}{3}$ (æqualis rectæ) MC; sunt igitur MA in secunda, ad MA in prima, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel $\frac{2}{6}$ ad $\frac{3}{6}$, vel 2 ad 3. Ideoque Figura MABM in spirali prima, ad figuram MABCM in spirali secunda, ut recta MA in secunda ad rectam MA in prima.

Atque idem similiter ostendetur, quæcunque sit ratio homologarum rectarum in dissimilibus spiralibus.

PROP. XXXII.

Corollarium.

SI autem *ejusmodi figuræ Spirales, lineis Spiralibus dissimilibus, & rectis item inæqualibus terminentur; erunt illæ ad invicem in ratione quæ componitur ex triplicata ratione rectarum terminantium, & reciproca ratione rectarum homologarum.*

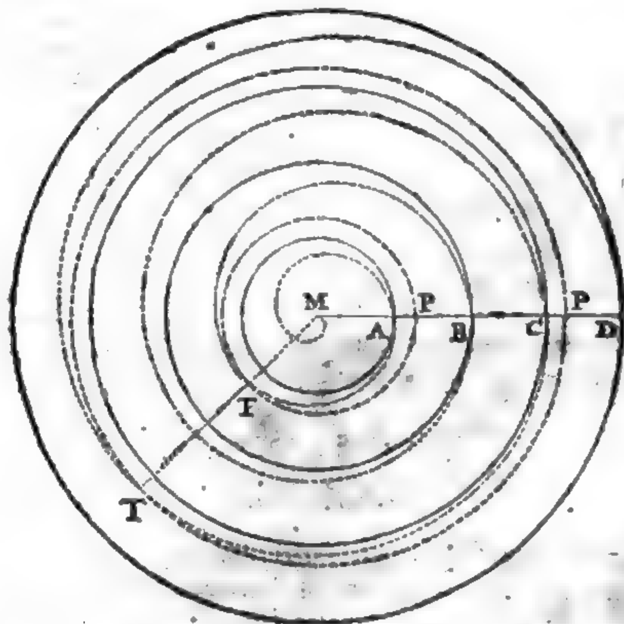
Sequitur ex Prop. 30, 31.

PROP. XXXIII.

Corollarium.

PORRO, *Figuræ Spirales, quæ circulationibus prima, secunda, tertia, quarta, &c. describuntur, sunt ad invicem, ut* 1, 7, 19, 37, 61, *&c. nempe ut differentiæ numerorum cubicorum, quorum latera sunt Arithmetice proportionalia.*

Nam (per pr. 29.) quæ prima, quæ prima & secunda, quæ prima secunda & tertia, quæ prima secunda tertia & quarta, &c. describuntur: sunt ut 1, 8, 27, 64, 125, &c. ergo, quæ prima, quæ secunda, quæ tertia, quæ quarta, &c. describuntur,



sunt ut 1, 8 − 1, 27 − 8, 64 − 27, 125 − 64, &c. hoc est, ut 1, 7, 19, 37, 61, &c. nempe ut differentiæ numerorum cubicorum continue proximorum; Quarum quidem differentiarum excessus, sive differentiarum differentiæ, sunt Arithmetice proportionales: Nam $1 + 6 = 7$. $7 + 12 = 19$. $19 + 18 = 37$. $37 + 24 = 61$. &c.

PROP. XXXIV.

Corollarium.

ET universaliter, *Ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuos PMT, TMT, &c. æquales invicem facientibus; figuræ Spirales continuæ, his rectis interpositæ sunt ad invicem, ut* 1, 7, 19, 37, 61, *&c.*

Nam (per prop. 30.) Figuræ spirales à principio ad has lineas continuatæ sunt ut 1, 8, 27, 64, 125, &c. Ergo Figuræ invicem continue sequentes his rectis terminatæ sunt ut 1, $8-1=7$, $27-8=19$, $64-27=37$, $125-64=61$. &c. Vel ut $\frac{1}{3}c$, $\frac{7}{3}c$, $\frac{19}{3}c$, $\frac{37}{3}c$, $\frac{61}{3}c$, &c.

PROP. XXXV.

Corollarium.

DEnique *Figuræ Spiralis portiones, quæ in singulis circulationibus de novo describuntur, (præter illud quod in præcedente circulatione descriptum fuerat,) nempe, quod intra Spiralem primam continetur, quod inter primam & secundam, quod inter secundam & tertiam, quod inter tertiam & quartam, &c. sunt ad invicem ut* 1, 6, 12, 18, 24, *&c. (addendo semper, post locum secundum, numerum senarium;) Nempe ut differentiæ differentiarum numerorum cubicorum.*

Sequitur ex 33. Quia 1, $7-1$, $19-7$, $37-19$, $61-37$, &c. sunt ut 1, 6, 12, 18, 24, &c.

SCHOLIUM.

Hæc autem de area figuræ Spiralis doctrina, continuis duodecim propositionibus jam tradita, consona est illis quæ tradit Archimedes circa finem libri de *Lineis Spiralibus*. Libet autem id ipsum paulo ulterius prosequi.

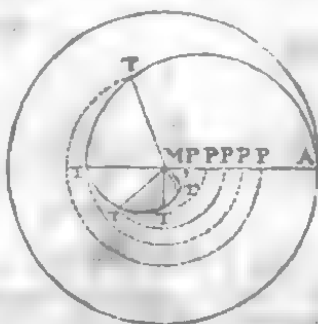
PROP. XXXVI.

Corollarium.

C*Omplementum figuræ Spiralis (quod nempe cum ipsa sectorem conterminum complet) est ad sectorem conterminum, ut* 2 *ad* 3.

Sequitur hoc quidem ex prop. 24. Sed id ipsum aliter ostendemus hoc modo.

Constare supponamus figuram PMTT (complementum figuræ spiralis MTTM) ex infinitis numero arcubus PT, PT, &c. qui quidem sunt in duplicata ratione rectarum MP, MP, Arithmetice proportionalium, (ut ostendimus ad prop. 11.) sector autem conterminus MPT, ex totidem constabit arcubus, ipsis MP, MP, proportionalibus, adeoque Arithmetice proportionalibus, (ut patet:)



Est autem series ejusmodi, (in duplicata ratione Arithmetice proportionalium,) $\frac{1}{3}$ seriei æqualium, (per prop. 21.) & series Arithmetice proportionalium $\frac{1}{2}$ ejusdem seriei æqualium (per prop. 2.) Ergo illa ad hanc (hoc est, complementum figuræ Spiralis ad Sectorem) ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, hoc est, ut 2 ad 3.

PROP. XXXVII.

Corollarium.

ET speciatim; ***Complementum figuræ Spiralis una circulatione descriptæ, est ad circulum primum (ipsi conterminum) ut 2 ad 3.***

Nam constabit complementum illud ex infinitis arcubus PT, in ratione duplicata rectarum MP Arithmetice-proportionalium (sive ut 0, 1, 4, 9, &c.) quorum maximus est integra peripheria A; constat autem circulus ille integer ex totidem peripheriis Arithmetice-proportionalibus, ut 0, 1, 2, 3, &c. quarum etiam maxima est eadem peripheria A: Ideoque Complementum illud, ad hunc circulum, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, hoc est, ut 2 ad 3.

PROP. XXXVIII.

Corollarium.

SPatia vero quæ figuris Spiralibus in singulis circulationibus desunt ad suos respective circulos complendos; sunt ut 2, 5, 8, 11, 14, &c. Arithmetice proportionales.

Cum enim (posito circulo primo c) erunt (per prop. 29 & 33) figuræ spirales circulatione prima descripta $\frac{1}{3}c$, secunda $\frac{7}{3}c$, tertia $\frac{19}{3}c$, quarta $\frac{37}{3}c$, &c. circuli autem contermini primus $1c$, secundus $4c$, tertius $9c$, quartus $16c$, &c. erit excessus circulorum, supra figuras Spirales conterminas, primi $\frac{2}{3}c$, secundi $\frac{5}{3}c$, tertii $\frac{8}{3}c$, quarti $\frac{11}{3}c$, &c. Nam $1c - \frac{1}{3}c = \frac{2}{3}c$. $4c - \frac{7}{3}c = \frac{5}{3}c$. $9c - \frac{19}{3}c = \frac{8}{3}c$. $16c - \frac{37}{3}c = \frac{11}{3}c$, &c.

SCHOLIUM.

Et quidem facile esset complures propositiones alias hisce similes adjungere, tam de ipsis figuris Spiralibus quam earum complementis; tam quæ circulationibus integris describuntur, quam intermediis. Sed ex dictis facile poterit quilibet eas, si opus videbitur, supplere, ut non necesse sit diutius hic morari. Et metuo ne jamjam nimius fuerim. Adjungam tamen unum aut alterum ex dictis Corollarium, (in eorum gratiam, qui dubitant, an possibile sit figuram aliquam rectilineam circulo æqualem esse:) Nempe ———

PAtet ex dictis; *Circulo cuilibet figuram aliquam rectilineam æqualem esse.*

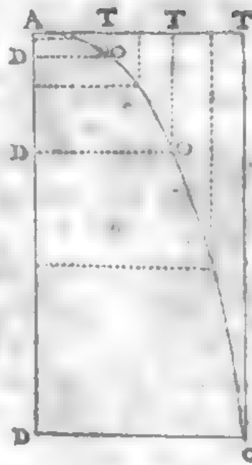
Cum enim patet (ex pr. 25.) circulo cuilibet figuram aliquam Spiralem æqualem esse; & (ex prop. 16.) cuilibet figuræ Spirali aliquam Parabolam; & denique (ex pr. 23.) cuilibet Parabolæ aliquam figuram rectilineam; sequitur & cuilibet circulo figuram aliquam rectilineam æqualem esse.

Non sunt igitur vel rectilineum & circulus, vel linea recta & curva, quantitates adeo inter se heterogeneæ, quin & invicem rite comparari, & quidem invicem æquales esse possint: Quanquam fieri possit ut circuli diameter & perimeter eousque sint irrationales, ut nec veris numeris, nec etiam ullo adhuc in usum recepto notationis modo, earum ad invicem ratio exprimi possit.

POrro: Ex jam traditis innotescit etiam methodus ***Rectam Parabolicæ (vel etiam Paraboloeidicæ) æqualem quam proxime, inveniendi.***

Si enim, quæ semiparabolam rectam in vertice contingat recta AT, in quotlibet æquales particulas divisa; (quarum quælibet dicatur a atque numerus omnium n;) & in singularum particularum terminis ad tangentem illam totidem ordinatim-applicentur rectæ, (Parabolæ diametro propterea parallelæ, & facientes

ad



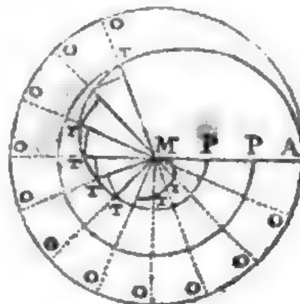
ad Tangentem angulos rectos,) T O, T O, &c. quarum minima dicatur 1; erunt illæ ad invicem per prop. 23. ut numeri quadratici 1, 4, 9, 16, &c. & earum differentiæ ut 1, 3, 5, 7, &c. numeri impares deinceps ab unitate; (quarum differentiarum maxima erit $2n-1$.) Rectæ parallelarum illarum terminos (in linea Parabolica constitutos) connectentes, (quæ erunt propterea ipsi Parabolæ deinceps inscriptæ,) erunt ut $\sqrt{:a^2+1}$. $\sqrt{:a^2+9}$. $\sqrt{:a^2+25}$. $\sqrt{:a^2+49}$, &c. (quippe quarum quadrata per 47 e 1. æquantur quadratis tam particularum a, quam differentiarum inter proximas quasque parallelas, hoc est, numerorum imparium.) Quæ quidem rectæ (Parabolæ inscriptæ) quo plures fuerint, eo propius ad parabolicæ mensuram accedet earum omnium aggregatum; ita tamen ut ex omnibus sic aggregata recta sit ipsa parabolica minor.

Sin velit aliquis rectam justa majorem (ut constet intra quos cancellos determinare possit parabolicæ longitudinem;) neque difficilis erit hæc investigatio, tangentium ope perficienda.

Si vero curva A O O, non supponatur Parabola, sed Paraboloeides Cubicale, Biquadraticale, &c. Idem processus erit, mutatis mutandis, atque in Parabola. Sumendæ enim pro parallelarum differentiis, non 1, 3, 5, 7, &c. differentiæ numerorum Quadraticorum; sed 1, 7, 19, 37, &c. differentiæ numerorum cubicorum; vel 1, 15, 65, 175, &c. differentiæ numerorum Biquadraticorum; &c. prout Paraboloeideos cujusque natura postulet; adeoque inscriptæ erunt $\sqrt{:a^2+1}$. $\sqrt{:a^2+49}$, &c. vel $\sqrt{:a^2+1}$. $\sqrt{:a^2+225}$, &c. & sic deinceps. Ut ex inferius tradendis pr. 45. patebit.

EAdem fere methodo, *Invenietur recta Spirali genuinæ quam-proxime æqualis.*

Si enim (per ea quæ dicta sunt prop. 5.) supponatur inscribi figuræ Spirali alia ex quotlibet sectoribus similibus conflata: Erunt (propter Spiralem) tam sectorum arcus, quam horum sinus sive recti sive versi, ut & radii, Arithmetice proportionales. Radiorum autem continuum augmentum dicatur a. Si igitur à sectoris cujusvis arcus initio ad radium per ipsius terminum ductum demitti supponatur perpendicularis, erit illa illius arcus sinus rectus, cujus quadratum simul cum quadrato sinus versi communi augmento a aucti, æquabitur quadrato rectæ Spirali inscriptæ: (per 47 e 1.) Sinus autem versus ille dicatur v, & totius circuli sui diameter d; erit igitur quadratum sinus recti (ex ductu sinus versi v in diametri residuum $d-v$ factum) $vd-v^2$; & quadratum sinus versi communi augmento aucti (nempe $v+a$) erit $v^2+2va+a^2$; & propterea quadratum inscriptæ (ex his conflatum) $vd+2va+a^2$. Cum autem (propter æquales similium Sectorum angulos) eadem sit ubique sinus versi ad diametrum ratio, esto ea quam habet 1 ad m (quæ ratio major minorve reputanda erit prout singulorum sectorum anguli majores minoresve fuerint:) Adeoque cum sit $1 . m :: v . d$, erit $d=vm$: & propterea quadratum rectæ Spirali inscriptæ $vd+2va+a^2=vvm+2va+a^2$. Denique, cum sint similium illorum sectorum deinceps positorum arcus, adeoque & sinus versi, Arithmetice proportionales, (ab o inchoati,) dicantur illi 0, 1, 2, 3, &c. Erunt ergo inscriptæ illæ $\sqrt{:0m+0a+a^2}$. $\sqrt{:1m+2a+a^2}$ $\sqrt{:4m+4a+a^2}$. $\sqrt{:9m+6a+a^2}$. $\sqrt{:16m+8a+a^2}$. & sic deinceps. Quo autem plures supponantur eidem figuræ Spirali sectores inscribi, eo propius ad lineam Spiralem accedet rectarum sic inscriptarum aggregatum: quod tamen vera Spirali perpetuo minus erit.



Si autem harum inscriptarum prima omittatur, & illius vice post ultimam subjungatur

jungatur quæ proxime erat inſecutura, (quod tantundem eſt atque pro figura ex ſectoribus inſcripta, circumſcriptam ſubſtituere,) atque tandem addatur a; habebitur ex omnibus aggregata recta quæ vera ſpirali major erit; ſed quæ ad juſtam eo propius accedet quo plures ſupponantur Sectores adſcribi.

PROP. XXXIX.

Lemma.

SI proponatur ſeries quantitatum in *Triplicata* ratione Arithmetice-proportionalium, (ſive juxta ſeriem numerorum Cubicorum,) continue creſcentium, à puncto vel o inchoatarum, (puta ut 0, 1, 8, 27, 64, &c.) propoſitum ſit inquirere quam habeat illa rationem ad ſeriem totidem maximæ æqualium?

Fiat inveſtigatio per modum inductionis (ut in prop. 1. & 19.) Eritque

$$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}. \qquad \frac{0+1+8=9}{8+8+8=24}=\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$$

$$\frac{0+1+8+27=36}{27+27+27+27=108}=\frac{4}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}. \qquad \frac{0+1+8+27+64=100}{64+64+64+64+64=320}=\frac{5}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}.$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125=225}{125+125+125+125+125+125=750}=\frac{6}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}.$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125+216=441}{216+216+216+216+216+216+216=1512}=\frac{7}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}.$$

Et ſic deinceps.

Ratio proveniens eſt ubique major quam ſubquadrupla, ſeu $\frac{1}{4}$. Exceſſus autem perpetuo decreſcit prout numerus terminorum augetur, puta $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{20}, \frac{1}{24}$, &c. aucto nimirum fractionis denominatore, ſive conſequente rationis, in ſingulis locis, numero quaternario, (ut patet;) ut ſit rationis provenientis exceſſus ſupra ſubquadruplam, ea quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum poſt o. Adeoque ——

PROP. XL.

Theorema.

SI proponatur ſeries quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice-proportionalium (ſive juxta ſeriem numerorum cubicorum) continue creſcentium, à puncto vel o inchoatarum; ratio, quam habet illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ſubquadruplam ſuperabit; eritque exceſſus, ea ratio quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum poſt o; ſive, quam habet radix cubica termini primi poſt o, ad quadruplum radicis cubicæ termini maximi.

Puta $\frac{l+1}{4}l^3+\frac{l+1}{4l}l^3$ vel $\frac{m}{4}l^3+\frac{m}{4l}l^3=\frac{1}{4}ml^3+\frac{1}{4}ml^2$.

Patet ex præcedente.

Cum autem, creſcente numero terminorum, exceſſus ille ſupra rationem ſubquadruplam ita continuo minuatur, ut tandem quolibet aſſignabili minor evadat, (ut patet;) ſi in infinitum procedatur, prorſus evaniturus eſt. Adeoque ——

PROP. XLI.

Theorema.

SI proponatur ſeries infinita quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice-proportionalium (ſive juxta ſeriem numerorum cubicorum) continue

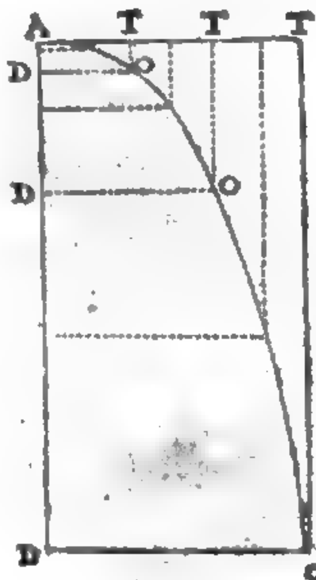
continue crescentium, à puncto seu o inchoatarum; erit illa ad seriem totidem maximæ æqualium, ut 1, ad 4.

Patet ex præcedente.

PROP. XLII.

Corollarium.

IDeoque, *Complementum semi-paraboloeidis cubicalis, AOT, est ad Parallelogrammum TD* (*super eadem vel æquali base æque altum,*) *ut* 1 *ad* 4. (*Et, consequenter, ipsum semiparaboloeides ad idem Parallelogrammum, ut* 3 *ad* 4.)



Esto enim Semiparaboloeidis cubicalis AOD, (cujus diameter AD, ordinatim applicatæ DO, DO, &c.) complementum AOT (cujus diameter AT, ordinatim-applicatæ TO, TO, &c.) Quoniam igitur (per pr. 45. Con. Sect.) rectæ DO, DO, &c. vel ipsis æquales AT, AT, &c. sunt in subtriplicata ratione rectarum AD, AD, &c. vel ipsis æqualium TO, TO, &c. Erunt è contra ipsæ TO, TO, &c. in triplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Tota igitur figura AOT (constans ex infinitis rectis TO, TO, &c. in triplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Arithmetice-proportionalium;) erit ad Parallelogrammum TD, per præced. (constans ex totidem ipsi TO maximæ æqualibus,) ut 1 ad 4. (Quod erat ostendendum.) Et consequenter, Semiparaboloeides AOD (parallelogrammi residuum) ad idem parallelogrammum ut 3 ad 4.

PROP. XLIII.

Lemma.

PAri methodo invenietur ratio seriei infinitæ quantitatum in ratione quadruplicata, quintuplicata, sextuplicata, &c. Arithmetice proportionalium, à puncto seu o inchoatarum, ad seriem totidem maximæ æqualium. Nempe in Quadruplicata, erit ut 1 ad 5: in Quintuplicata, ut 1 ad 6: in Sextuplicata, ut 1 ad 7. Et sic deinceps.

Facto enim experimento patebit rationes inductione repertas ad has continue propius accedere, ita ut differentia tandem evadat quavis assignabili minor; adeoque in infinitum continuata evanescet.

Operosas demonstrationes lineares non adjungo; quas tamen, siquis postulet, poterit ille (modo vacet) tales exquirere figurarum inscriptione & circumscriptione, vel etiam alias præstandas; (quales habet *Archimedes* pr. 10, & 11, *de lin. spiral.*) ostendendo, quod ratio neque major neque minor est quam assignata. At mihi sufficere videntur illæ quas produxi, Cavallerii *Methodum Indivisibilium* (quoniam eam invenio à Geometris jam esse receptam,) secutus.

Nota tamen eas quibus usus sum demonstrationes, potius figuras inscribendas imitari, cum supponant primum terminum o. Si quis vero figuras circumscribendas imitari mallet, fieri quidem & illud potest, modo primus terminus ponatur 1.

Notandum etiam, rationes inductione quærendas, in seriebus illis quarum processus est in Arithmetice proportionalium ratione quadruplicata (& sequentibus) magis implicatas esse quam præcedentium.

Puta in Biquadratis $\frac{l+1}{5}l^4 + \frac{l+1}{10l}3l^4 + \frac{l+1}{30l^2}l^4 + \frac{-l-1}{30l^3}l^4$. Vel $\frac{m}{5}l^4 + \frac{3m}{10l}l^4 + \frac{m}{30l^2}l^4 - \frac{m}{30l^3}l^4 = \frac{1}{5}ml^4 + \frac{3}{10}ml^3 + \frac{1}{30}ml^2 - \frac{1}{30}ml$. (posito nempe termino primo o, secundo 1, latere maximo l, numero terminorum $m = l+1$.)

In

In Supersolidis autem $\frac{l+1}{6} l^5 + \frac{l+1}{3l} l^5 + \frac{l+1}{12 l^2} l^5 + \frac{-l-1}{12 l^3} l^5$. Vel $\frac{m}{6} l^5 + \frac{m}{3l} l^5 + \frac{m}{12 l^2} l^5 - \frac{m}{12 l^3} l^5 = \frac{1}{6} m l^5 + \frac{1}{3} m l^4 + \frac{1}{12} m l^3 - \frac{1}{12} m l^2$.

In Sextanis, seu Cuborum Quadratis, $\frac{l+1}{7} l^6 + \frac{5l+5}{14} l^6 + \frac{l+1}{7} l^6 - \frac{l+1}{7} l^6 - \frac{l+1}{42} l^6 + \frac{l+1}{42} l$. Vel $\frac{1}{7} m l^6 + \frac{5}{14} m l^5 + \frac{1}{7} m l^4 - \frac{1}{7} m l^3 - \frac{1}{42} m l^2 + \frac{1}{42} m l$. Et pariter in sequentibus: ut ad prop. 182. docebitur.

Sed (quod nobis hic sufficit) ad debitam rationem ita continue magis accedunt, ut tandem differentia evadat quavis assignabili minor.

SCHOLIUM.

Si quis autem cupiat rationes hujusmodi, utut intricatas, quæ sequentibus seriebus finitis quibuscunque conveniat, (puta in septuplicata, octuplicata, &c. ratione Arithmetice proportionalium) invenire: quomodo illud fiat infra dicetur in Schol. prop. 182.

PROP. XLIV.

Theorema.

IDeoque Si intelligatur series infinita quantitatum, à puncto seu o inchoatarum, & continue crescentium pro ratione vel Arithmetice-proportionalium, (quam seriem Lateralium sive *Primanorum* appello,) vel eorum quadratorum, cuborum, biquadratorum, &c. (quam appello seriem *Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum*, &c.) Erit totius seriei ratio, ad seriem totidem maximæ æqualium, ea quæ sequitur in hac Tabella. Nempe

Æqualium	$\frac{1}{1}$	Vel ut 1 ad	1
Primanorum	$\frac{1}{2}$		2
Secundanorum	$\frac{1}{3}$		3
Tertianorum	$\frac{1}{4}$		4
Quartanorum	$\frac{1}{5}$		5
Quintanorum	$\frac{1}{6}$		6
Sextanorum	$\frac{1}{7}$		7
Septimanorum	$\frac{1}{8}$		8
Octavanorum	$\frac{1}{9}$		9
Nonanorum	$\frac{1}{10}$		10
Decimanorum	$\frac{1}{11}$		11

Et sic deinceps. Ita ut fractionum Denominatores, sive Consequentes rationum, sint ab unitate Arithmetice-proportionales; communis autem sive Numerator sive Antecedens 1.

PROP. XLV.

Corollarium.

HInc discimus methodum inveniendi aream complementi Parabolæ, & Paraboloeideos Cubicalis, Biquadraticalis, Surdesolidalis, aut superioris cujuslibet potestatis; & consequenter, etiam aream Parabolæ, aut Paraboloeideos cujuscunque potestatis. Quod ostendere pollicitus sum ad prop. 48. Con. Sect.

Nempe, cum complementum Parabolæ (vel Semiparabolæ) sit series secundanorum, (ut diximus ad prop. 23;) complementum Paraboloeidis cubicalis (vel semiparaboloeidis,) series Tertianorum, (ut diximus ad prop. 42;) atque (eadem

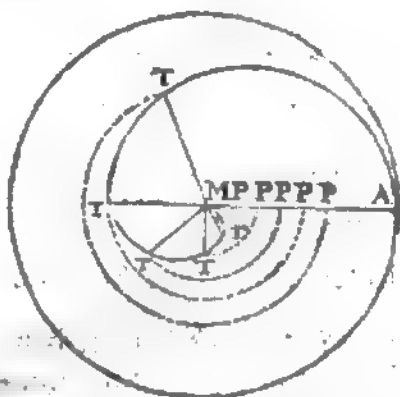
ratione)

ratione) complementum Paraboloeidis Biquadraticalis, series Quartanorum; complementum Paraboloeidis surfolidalis, series Quintanorum; & sic deinceps: Erit horum ratio ad Parallelogrammum circumscriptum, (seriem nempe totidem maximo æqualium,) ea quæ est 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, 1 ad 6, & sic deinceps: juxta tabellam propositionis præcedentis. Et consequenter, ipsa Parabola, Paraboloeides Cubicale, Biquadraticale, Surdesolidale, &c. (quæ nempe cum suis complementis æquantur Parallelogrammis circumscriptis,) sunt ad Parallelogrammum circumscriptum, ut 2 ad 3, 3 ad 4, 4 ad 5, 5 ad 6, &c.

SCHOLIUM.

Et hoc quidem pacto licebit innumeris figuris curvilineis æquales rectilineas constituere. Quodque in sola Parabola (summa cum admiratione) præstitit Archimedes (& post illum alii;) id nos in Paraboloeide cujuscunque potestatis jam præstitimus.

Quæ autem de Parabolis & Paraboloeidibus hucusque tradita sunt, aut mox tradenda, possunt etiam Spiralibus facillimo negotio accommodari. Si enim supponamus rectam M T continue augeri, non quidem in eadem ratione cum angulo P M T, (ut in Spirali Archimedea,) sed in ejusdem ratione duplicata, triplicata, quadruplicata, &c. vel subduplicata, subtriplicata, subquadruplicata, &c. vel etiam subduplicatæ triplicata, quadruplicata, &c. subtriplicatæ duplicata, quadruplicata, &c. aut alias utcunque composita: orientur alia atque alia Spiralium genera: quarum tamen ad peripheriam vel arcum (eo sensu quo dictum est in Schol. prop. 13. & 15.) ratio non minus innotescet, (ut & figurarum adjacentium ratio ad circulum vel sectorem,) quam in illa Archimedea. Exempli gratia. *Si augeatur recta MT in duplicata ratione anguli P MT; erit linea Spiralis (a principio inchoata) MT, ad arcum conterminum PT, ut 1 ad 3;* (quippe erit Spiralis illa, series Secundanorum; arcus autem, series Æqualium:) *Et Figura adjacens erit ad conterminum Sectorem, ut 1 ad 5;* (nempe ut series Quartanorum ad seriem Æqualium:) *Et similiter, si crescat recta MT in anguli MPT ratione Triplicata, Quadruplicata, &c. Erit Spiralis (sensu quo supra) ad conterminum Arcum, ut 1 ad 4, 5, &c. & Figura adjacens ad sectorem conterminum, ut 1 ad 7, 9, &c.* Item, *si crescant rectæ MT in angulorum P MT ratione Subduplicata, Subtriplicata, &c. erunt Spirales (sensu quo dictum est) seu crescentium arcuum similium Aggregata, ad conterminos Arcus (ex totidem æqualibus conflatos,) ut 1 ad* $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, *&c. Et Figura adjacens ad Sectorem conterminum, ut 1 ad* $1\frac{2}{2}$, $1\frac{2}{3}$, *&c. Hoc est; illic, ut 2 ad 3, 3 ad 4, &c. hic ut, 2 ad 4, 3 ad 5, &c.* Et sic alibi; quæcunque fuerit ratio multiplicata, vel submultiplicata, vel ex his utcunque composita. Quæ omnia eodem modo (mutatis mutandis) demonstrabuntur, quo prop. 5, 24, &c. (adhibitis saltem in auxilium propositionibus aliquot sequentibus.) Atque hinc quidem Spiralium doctrina in immensum augeri possit. Cum autem id suo quilibet Marte per jam dicta satis possit intelligere, neque nobis sit animus labore supervacaneo hæc ulterius amplianda: sufficiat id in transitu monuisse.



Sed & hinc etiam facilis esset transitus ad Spirales non tantum in plano, sed in solido descriptas, puta in superficiebus Coni & Sphæræ, sive etiam conoeidium & sphæroeidium, rite considerandas; &, ad Spirales aut Circulos in Cylindro comparandas: Figuras item illis adjacentes, ad figuras adjacentes hisce. Adhibitis tamen iis, quæ de seriebus auctis & diminutis infra secuturæ sunt, propositionibus. Hæc autem omnia, ne nimius sim, intacta prætereunda judico: Cum ea quilibet, ex iis quæ hic tradita sunt vel infra tradenda, facile possit deducere.

MONITUM.

Monendum denique hic porro duxi; In horum Editione prima, irrepsisse (sive mea sive typographi incuria) Mendum quoddam Numerale. (4, 5, 6, perperam scriptis pro 5, 7, 9.) Quod occasionem dedit Cl. Viro *Stephano de Angelis* (dum

non animadverterit, merum fuisse vel Calami vel Calculi lapsum, non ex Demonstrationis vitio ortum,) censendi (in suo *de Spiralibus* Tractatu) non recte procedere hanc meam de Spiralibus doctrinam. Verum ubi restitutus fuerit Calculus debitus, Demonstrationi conformis; statim perspiceret, omnia, quæ in adversum objecerat, sponte sua concidere; (& quidem, quod audio, aliis id monentibus, etiam me tacente, dudum perspexit:) Sed & totam illam de Spiralibus Doctrinam, quam ille fusius exponit (& erudite;) hoc uno Scholio summatim traditam esse; Et quidem universalius, utut hoc ille non statim animadverterit; Quod in causa fuit, cur aliquanto plura exempla jam enumeraverim (quam prius,) eadem generali methodo comprehensa, atque eodem plane modo (vi prop. 44, 54, 64,) demonstranda. Quæ non eo dicta sunt, ut inventis ejus derogatum eam; (neque enim illi vitio dandum est, quod ego ei in eadem re præiverim:) sed ut appareat, quam Corollariorum ferax sit hæc nostra Methodus generalis; cum vel Scholium unum (ubi particulatim exponatur,) materiam subministret justo Volumini. Et quidem totam illam de Paraboloeidibus doctrinam, propositionibus aliquammultis præcedentibus, & subsequentibus aliquammultis, traditam; hoc uno Scholio volebam Spiralibus Spatiis accommodare, (quæ ex convolutis Paraboloeidibus oriuntur;) potius quam totidem vel etiam pluribus propositionibus eadem de Spiralibus repetere, quæ de Paraboloeidibus dicta fuerant: tum, ne nimis excurrere viderer; tum, quia non esset cuiquam difficile illud facere qui ad præcedentia satis attenderit. Quod quidem eousque verum est, ut non modo istiusmodi Spatiorum Spiralium rationem ad Sectorem conterminum exhibere valeamus; sed & Spiralem sic assignare, ut spatium adjacens, ad Sectorem conterminum, rationem (minoris ad majus, numeris explicabilem,) datam habeat. Esto utique ratio sic data, ut 1 ad a. Et ponantur rectæ MT, MT, &c. (quæ continuos angulos AMT, TMT, &c. invicem æquales faciant,) ab o continue crescentes secundum Seriem cujus Index sit $\frac{a-1}{2}$. Dico, Spatium hoc Spirale (à principio exorsum, & quousque libet continuatum,) ad Sectorem conterminum, esse ut 1 ad a. Cum enim Radii (similium Sectorum) sint Series cujus Index est $\frac{a-1}{2}$; Sectores ipsi (utpote in Radiorum suorum ratione duplicata,) sunt Series Indicem habens $a-1$: Quæ itaque ad Seriem totidem maximo æqualium, (hoc est, Spatium Spirale, ad Sectorem conterminum circumscriptum,) est, ut 1 ad a (seriei Indicem unitate auctum,) per prop. 64. Quod erat faciendum. Puta, sit Ratio data, 1 ad 2; adeoque $\frac{a-1}{2}=\frac{1}{2}$: Ergo, rectæ MT, sunt Series *Subsecundanorum*. Sit ratio data, 1 ad 5; adeoque $\frac{a-1}{2}=2$: Ergo, MT, Series *Secundanorum*. Sit ratio data, 1 ad 3; adeoque $\frac{a-1}{2}=1$: Ergo, MT, Series *Primanorum*; (quæ est Spiralis Archimedea.) Sit data ratio, 2 ad 3, hoc est 1 ad $\frac{3}{2}$; adeoque $\frac{a-1}{2}=\frac{1}{4}$: Ergo, MT, Series *Subquartanorum*. Sit data ratio, 1 ad 4; adeoque $\frac{a-1}{2}=\frac{3}{2}$: Ergo, MT, Series *Radicum Quadraticarum Tertianorum*. Et similiter alibi, quæcunque fuerit sic data ratio. Ipsam vero Curvam *Spiralem* Archimedeam, Curvæ *Parabolicæ* æqualem esse; à me alibi demonstratum est; in Tractatu de *Curvarum* Εὐθύνσει, Tractatui de Cycloide subjuncto. Et quidem pari methodo etiam alias *Spirales*, *Paraboloeidum* curvis æquales ostendere, non est difficile. Sed neque difficile esset ostendere (nisi quod nolim hic nimium excurrere,) Quænam *Spiralis cuinam Paraboloeidi respondeat*. Nempe, ut Parabolæ Apollonianæ respondet Spiralis Archimedea; (quippe, Curvæ Semiparabolæ cujus basis æquetur maximæ rectarum MT, & Axis Aggregato arcuum similium inscriptorum, numero æqualium; hoc est, semissi arcus contermini PT; æqualis est Curva Spiralis; & Figura Figuræ dimidia:) Sic, si ponantur MT (similium Sectorum Radii) crescentes in Ratione Secundanorum (hoc est,

est, ut Numeri Quadratici ;) Spirali huic respondebit Paraboloeides Semicubicale ; cujus itaque curvæ æquabitur, non modo Semiparaboloeideos curva (cujus basis æquetur rectarum M T maximæ, & Axis aggregato arcuum similium Sectorum inscriptorum, numero infinitorum, seu Trienti arcus contermini ;) sed & Recta linea (quam istius Semiparaboloeidis Semicubicalis curvæ æqualem ostendimus, in dicto de Εὐθύνσει Tractatu ;) Figura vero Spirali adjacens ; dimidia figuræ adjacentis Semiparaboloeidi. Et similiter alibi.

PROP. XLVI.

Lemma.

I*Tem* (*per prop.* 44.) Data ratione quam habet series una, cujuslibet potestatis, (ad seriem æqualium ;) reperitur ratio quam habet alia series alterius cujusvis potestatis, (ad seriem item æqualium :) inveniendo nempe homologum terminum progressionis Arithmeticæ.

Ut, si Quadratorum sive Secundanorum series sit $\frac{1}{3}$ seriei æqualium ; erit series Lateralium sive Primanorum $\frac{1}{2}$ seriei æqualium : Quia, ut series Primanorum media est inter seriem Æqualium & seriem Secundanorum, sic 2 (consequens rationis quæsitæ Primanorum) est media Arithmetica inter 1 & 3 (consequentes rationum Æqualium & Secundanorum.) Sic cum Cuborum sive Tertianorum ratio sit $\frac{1}{4}$ sive 1 ad 4, inter quam seriem & seriem æqualium, duarum potestatum series interjiciuntur ; quærendæ sunt duæ mediæ Arithmeticæ inter 1 & 4, puta 2 & 3, quarum illa Primanis, hæc Secundanis convenit. Et sic in cæteris.

Et similiter, si quærenda sit ratio superioris potestatis seriei conveniens ; id reperitur progressionem continuando ad terminum quæsitum usque : Ut, si series Quartanorum rationem habeat, ad seriem æqualium, eam quæ est 1 ad 5 sive $\frac{1}{5}$; series Sextanorum habebit rationem 1 ad 7 : quia in progressione Arithmetica ubi terminus (post unitatem) quartus est 5, terminus sextus erit 7, & pariter in reliquis.

PROP. XLVII.

Lemma.

ATque hæc regula non minus valebit si exponatur series quantitatum quarumlibet (non quidem juxta seriem Primanorum, sed) juxta quamvis aliam Tabellæ seriem, & de illarum Quadratis, Cubis, &c. inquiratur.

Verbi gratia. Si intelligatur ejusmodi series quantitatum quarumlibet secundum seriem Secundanorum (quibus assignatur in Tabella ratio 1 ad 3) dispositarum : harum Quadratis conveniet ratio 1 ad 5 ; (quia 1, 3, 5, sunt Arithmetice-proportionales ; & Cubis conveniet ratio 1 ad 7 ; & sic deinceps ; quia 1, 3, 5, 7, &c. sunt Arithmetice-proportionales, prout Unitas, Radix, Quadratum, Cubus, &c. sunt potestates proxime sequentes & Geometrice proportionales.

Nec hoc aliud est, quam quod habetur in Tabella ; nam si quantitates assumptæ sint series Secundanorum, cujus ratio est $\frac{1}{3}$; earum quadrata erunt series Quartanorum, cujus ratio $\frac{1}{5}$; & earundem cubi erunt series Sextanorum, cujus ratio $\frac{1}{7}$; &c. ut dictum est.

PROP. XLVIII.

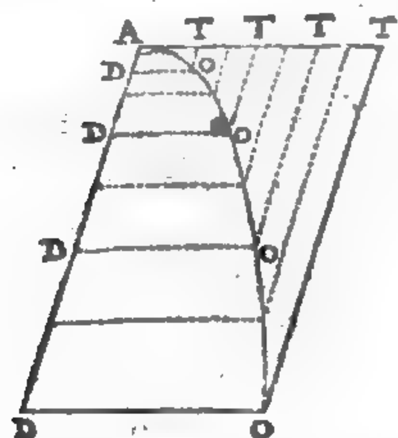
Corollarium.

ET consequenter, *Conoeides vel Pyramidoeides complemento Semi-parabolæ* (*circa ipsius diametrum*) *aptandum, est ad Cylindrum vel Prisma super æquali basi æque altum, ut* 1 *ad* 5.

Nempe si complementum semi-parabolæ rectæ, A O T, manente recta A T,

 circum-

circumvolvatur, ut describatur Conoeides rectum: vel, universaliter, si (juxta methodum à nobis indicatam prop. 5, 6, 9. Con. Sect.) diametro vel axi A T, ordinatim-applicentur circuli, vel similia quævis plana, quorum vel radii vel rectæ similiter positæ rationem eandem habeant inter se quam rectæ T O, T O, &c. ut compleatur Conoeides vel Pyramidoeides sive rectum sive inclinatum: dico illud Conoeides vel Pyramidoeides esse ad Cylindrum vel Prisma super eadem basi æque altum ut 1 ad 5. Nam, cum rectæ omnes T O, T O, &c. sint series Secundanorum, (quibus convenit ratio 1 ad 3;) similia quælibet plana super has rectas similiter constituta, erunt inter se ut harum rectarum quadrata; sive in duplicata ratione rectarum T O, T O. Atque ratio seriei rectarum illarum conveniens (seriei quippe secundanorum,) est 1 ad 3; ergo seriei planorum conveniet ratio 1 ad 5: quia nempe 1, 3, 5, sunt Arithmetice-proportionales: (prout Unitas, Radix, & Quadratum sunt Geometrice-proportionalia.) Et quidem, si rectæ T O, T O, &c. sint series Secundanorum; earum quadrata (vel plana quadratis proportionalia) erunt series Quartanorum; cui in Tabella convenit ratio 1 ad 5.



PROP. XLIX.

Corollarium.

ET similiter; *Si complemento semiparaboloeidis cubicalis aptetur (circa ipsius Diametrum) Conoeides vel Pyramidoeides; erit hoc ad Cylindrum vel Prisma (super eadem vel æquali base æque altum,) ut 1 ad 7.*

Nam, cum rectæ T O, T O, &c. (in complemento Semiparaboloeidis Cubicalis,) sint series Tertianorum, quibus in Tabella convenit ratio 1 ad 4; horum quadratorum (vel planorum quadratis proportionalium) seriei conveniet ratio 1 ad 7; quia 1, 4, 7, sunt Arithmetice-proportionales. Vel etiam, quia plana sunt series Sextanorum, quibus in Tabella assignatur ratio 1 ad 7.

PROP. L.

Corollarium.

ET pariter; *si semiparaboloeidium aliorum (puta Biquadraticalium, Supersolidalium, &c.) complementis aptetur (circa eorum diametros) Conoeides vel Pyramidoeides aliquod; habebit illud ad Cylindrum vel Prisma (super æquali base æque altum) rationem notam (puta 1 ad 9, 1 ad 11, &c.)*

Cum enim complementorum illorum rectæ sint series Quartanorum, Quintanorum, &c. adeoque rationes in Tabella assignatas habeant 1 ad 5, 1 ad 6, &c. series Quadratorum (vel planorum quadratis proportionalium) rationem habebunt 1 ad 9, 1 ad 11, &c. quia 1, 5, 9, vel 1, 6, 11, &c. sunt Arithmetice-proportionales. Vel etiam, quia si rectæ sint series Quartanorum, Quintanorum, &c. plana similia ad has rectas similiter posita, erunt series Octavanorum, Decimanorum, &c. quibus convenit ratio 1 ad 9, 1 ad 11, &c.

SCHOLIUM.

Atque hoc pacto figurarum solidarum superficiebus curvis comprehensarum ingens multitudo reduci possunt ad alias superficiebus planis comprehensas; & corpora non modo conica (quod docuerunt veteres,) sed & alia quamplurima conoeidica, ad cylindrum reduci. Quod nescio an quispiam alius antehac ostenderit.

PROP.

PROP. LI.

Lemma.

J*Uxta eandem regulam* (*prop.* 46, 47.) Si exponatur series quantitatum quarumlibet, juxta quamlibet Tabellæ seriem; de illarum radicibus quadraticis, cubicis, &c. aut quibusvis intermediis potestatibus, pariter inquirendum erit.

Exempli gratia; si exponantur infinita numero Quadrata (vel quælibet plana similia) juxta seriem Quartanorum; (cui assignatur, in Tabella, ratio 1 ad 5:) series laterum (vel rectarum in illis similiter positarum) rationem habebit (ad seriem æqualium) 1 ad 3: quia 1, 3, 5, sunt Arithmetice-proportionalia: vel etiam, quia ubi plana sunt series Quartanorum, eorum latera erunt series secundanorum, quibus assignatur in Tabella ratio 1 ad 3.

Sic, si exponantur cubi numero infiniti (vel quælibet similia solida) juxta seriem sextanorum, quibus in Tabella congruit ratio 1 ad 7; eorum lateribus cubicis (vel rectis in his similiter positis) conveniet ratio 1 ad 3; & horum laterum quadratis (vel planis in cubis illis similiter positis) ratio 1 ad 5; quia duarum mediarum Arithmeticarum inter 1 & 7, minor est 3, major 5, (sunt enim 1, 3, 5, 7, Arithmetice-proportionalia: duas autem medias Arithmeticas interpono inter 1 & 7; quia totidem supponimus medias Geometricas inter unitatem & cubum, nempe Latus & Quadratum; sunt enim Unitas, Latus, Quadratum, Cubus, Geometrice proportionalia. Et quidem si Cubi sint series sextanorum, Latera erunt series secundanorum, & laterum Quadrata, series quartanorum; quibus in Tabella conveniunt rationes 1 ad 3, 1 ad 5.

Si vero quantitates expositæ in eadem serie sextanorum, essent Quadrata (vel plana quælibet similia,) eorum lateribus conveniret ratio 1 ad 4. Quia inter 1 & 7 media Arithmetica est 4; sicut inter Unitatem & Quadratum media Geometrica est Radix vel Latus. Et quidem si Quadrata sint series sextanorum, eorum Latera erunt series tertianorum; quibus in Tabella convenit ratio 1 ad 4.

PROP. LII.

Corollarium.

ET propterea; *Ex cognitis rationibus quas habent Conoeidea & Pyramidoeidea, prop.* 48, 49, 50. *memorata, ad Cylindrum vel Prisma,* (*super æquali base æque altum;*) *cognoscentur rationes quas habent plana illa unde construuntur, ad Parallelogrammum circumscriptum. Nempe complementum Semiparabolæ ut* 1 *ad* 3: *complementa Semiparaboloeidis Cubicalis, Biquadraticalis, Supersolidalis, &c. ut* 1 *ad* 4, 1 *ad* 5, 1 *ad* 6, *&c.*

Si enim Conoeidea vel Pyramidoeidea illa cognoscantur esse series Quartanorum, Sextanorum, Octavanorum, Decimanorum; &c. eisque convenire rationes 1 ad 5, 1 ad 7, 1 ad 9, 1 ad 11, &c. Eorum lateribus (quæ propterea sunt series Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, Quintanorum, &c.) convenient rationes 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, 1 ad 6, &c. Quia 1, 3, 5, item 1, 4, 7, item 1, 5, 9, item 1, 6, 11, &c. sunt Arithmetice-proportionales.

PROP. LIII.

Lemma.

HIs intellectis; patet aditus ad investigationem rationum quas (ad seriem maximæ æqualium) habere dicantur ejusmodi series Radicum Quadraticarum, Cubicarum, Biquadraticarum, &c. numerorum sive quantitatum Arithmetice-proportionalium, à puncto vel o inchoata-

inchoatarum; (puta $\sqrt{}0, \sqrt{}1, \sqrt{}2, \sqrt{}3$, &c. $\sqrt{c}\,0, \sqrt{c}\,1, \sqrt{c}\,2, \sqrt{c}\,3$, &c. $\sqrt{qq}\,0, \sqrt{qq}\,1, \sqrt{qq}\,2, \sqrt{qq}\,3$, &c.) Quas appello series Subſecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c.

Exempli gratia. Si exponantur ejuſmodi infinita numero Quadrata Arithmetice-proportionalia, ſive juxta ſeriem Primanorum; quibus in Tabella aſſignatur ratio 1 ad 2: Eorum Lateribus, (hoc eſt, ſeriei ſubſecundanorum) conveniet ratio 1 ad $1\frac{1}{2}$ (ſive 2 ad 3;) quia 1, $1\frac{1}{2}$, 2, ſunt Arithmetice-proportionalia.

Item, ſi ſupponantur ejuſmodi infiniti Cubi Arithmetice-proportionales, ſive juxta ſeriem Primanorum; quibus convenit in Tabella, ratio 1 ad 2: Illorum radicibus cubicis, (hoc eſt ſeriei ſubtertianorum) conveniet ratio 1 ad $1\frac{1}{3}$ (vel 3 ad 4:) & harum radicum quadratis, ratio 1 ad $1\frac{2}{3}$ (vel 3 ad 5:) Quia ſcilicet 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, 2. ſunt Arithmetice-proportionalia; ſicut Unitas, radix, quadratum, & cubus, ſunt Geometrice-proportionalia.

Et pari modo, ſi infinita Biquadrata, Superſolida, &c. conſtituta intelligantur juxta ſeriem Primanorum, quibus convenit ratio 1 ad 2; eorum radicibus Biquadraticis, Superſolidalibus, &c. convenient rationes 4 ad 5, 5 ad 6, &c. vel 1 ad $1\frac{1}{4}$, 1 ad $1\frac{1}{5}$ &c. quia nempe 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$, 2; item 1, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{2}{5}$, $1\frac{3}{5}$, $1\frac{4}{5}$, 2; &c. ſunt Arithmetice-proportionalia. Adeoque ——

PROP. LIV.

Theorema.

SI intelligatur ſeries infinita quantitatum, à puncto ſeu 0 inchoatarum, & continue creſcentium pro ratione Radicum quadraticarum, cubicarum, biquadraticarum, &c. numerorum Arithmetice-proportionalium; (quam appello ſeriem *Subſecundanorum*, *Subtertianorum*, *Subquartanorum*, *&c.*) Erit totius ratio ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ea quæ ſequitur in hac Tabella: Nempe

Subſecundanorum	$\frac{2}{3}$	Vel, ut 1 ad	$1\frac{1}{2}$.
Subtertianorum	$\frac{3}{4}$		$1\frac{1}{3}$.
Subquartanorum	$\frac{4}{5}$		$1\frac{1}{4}$.
Subquintanorum	$\frac{5}{6}$		$1\frac{1}{5}$.
Subſextanorum	$\frac{6}{7}$		$1\frac{1}{6}$.
Subteptimanorum	$\frac{7}{8}$		$1\frac{1}{7}$.
Suboctavanorum	$\frac{8}{9}$		$1\frac{1}{8}$.
Subnonanorum	$\frac{9}{10}$		$1\frac{1}{9}$.
Subdecimanorum	$\frac{10}{11}$		$1\frac{1}{10}$.

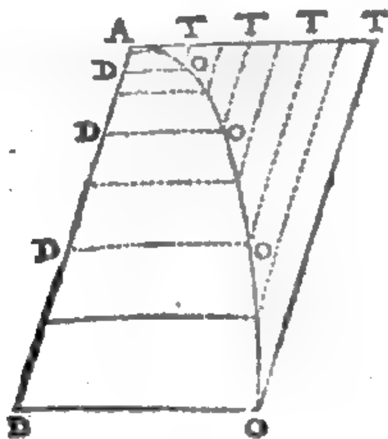
Et ſic deinceps.

Patet ex præcedente.

PROP. LV.

Corollarium.

ERgo, *Planum ſemi-parabolæ (vel etiam Parabolæ) eſt ad Parallelogrammum circumſcriptum, ut 2 ad 3. (Et conſequenter ipſius complementum eſt ad idem Parallelogrammum ut 1 ad 3.)*

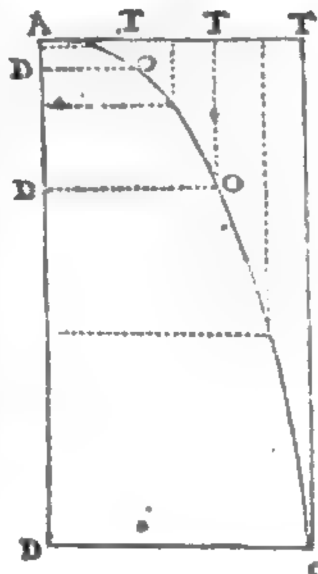


Eſt enim Planum Semiparabolæ (aut etiam Parabolæ) ſeries infinita ſubſecundanorum (per 8 prop. Con. Sect.) Parallelogrammum autem ſeries totidem maximo æqualium: Ergo illud ad hoc ut 1 ad $1\frac{1}{2}$, vel ut 2 ad 3. (&, conſequenter, ipſius complementum, nempe Parallelogrammi reſiduum, ut 1 ad 3.)

PROP.

PROP. LVI.
Corollarium.

ITem, *Planum Semi-paraboloeidis (vel etiam Paraboloeidis) cubicalis, est ad Parallelogrammum circumscriptum, ut* 3 *ad* 4. (*& consequenter, ipsius Complementum, est ad idem Parallelogrammum, ut* 1 *ad* 4.)



Cum enim (per 45. Prop. Con. Sect.) ordinatim-applicatæ in Paraboloeide cubicali sint in subtriplicata ratione diametrorum (sive distantiarum à vertice,) erit planum ex illis omnibus conflatum series subtertianorum; quæ se habet ad seriem totidem maximo æqualium, (hoc est, ad Parallelogrammum circumscriptum,) ut 1 ad $1\frac{1}{3}$, sive ut 3 ad 4. (Et consequenter, ipsius complementum, nempe parallelogrammi residuum, est ad idem Parallelogrammum, ut 1 ad 4.)

PROP. LVII.
Corollarium.

EOdem modo, *Planum Semi-paraboloeidis (vel Paraboloeidis) Biquadraticalis, Supersolidalis, aut superioris cujusvis potestatis, ratio ad Parallelogrammum circumscriptum nota erit; puta ut* 4 *ad* 5, 5 *ad* 6, *&c.* (*Et consequenter, ipsorum etiam complementa ad eadem Parallelogramma rationem notam habebunt; puta ut* 1 *ad* 5, 1 *ad* 6, *&c.*)

Sunt enim illa plana series subquartanorum, subquintanorum, &c. ideoque, ad series Æqualium, ut 4 ad 5, 5 ad 6; &c. &, consequenter, eorum complementa (quæ quidem sunt series Quartanorum, Quintanorum, &c.) ut 1 ad 5, 1 ad 6, &c.

SCHOLIUM.

Adeoque & per hanc etiam Tabellam, licet Parabolarum, & Paraboloeidium cubicalis, biquadraticalis, aut superioris cujuslibet potestatis, & eorundem etiam Complementorum, aream invenire: quod pollicitus sum ad Prop. 48. Con. Sect. & supra præstiti ad Prop. 45. hujus.

PROP. LVIII.
Lemma.

TAndem, *ope ejusdem Regulæ* (*prop.* 46.) Si proponatur ejusmodi series infinita quantitatum, à puncto vel o inchoatarum, & continue crescentium, pro ratione Potestatis (non simplicis tantum cujusvis, sed &) compositæ: ratio quam habet illa ad seriem totidem maximæ æqualium, investigatur. Puta Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. Subsecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c. aut etiam Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Vel Radices Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c. Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. aut Subsecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c. Aut etiam Series aliæ quocunque modo compositæ.

Exempli gratia. Cum series subtertianorum (puta $\sqrt{c}\,0$, $\sqrt{c}\,1$, $\sqrt{c}\,2$, $\sqrt{c}\,3$, &c.) rationem habeant (ad seriem totidem maximæ æqualium) eam quæ est 3 ad 4, seu 1 ad $1\frac{1}{3}$: Eorum quadrata (quæ eadem sunt & radices cubicæ secundanorum, puta $\sqrt{c}\,0$, $\sqrt{c}\,1$, $\sqrt{c}\,4$, $\sqrt{c}\,9$, &c.) rationem habebunt ad totidem maximæ æqualia,

æqualia, eam quæ eſt 1 ad $1\frac{2}{3}$, vel 3 ad 5. Quia nempe 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, vel $\frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$, ſunt Arithmetice proportionalia.

Pariter, ſeriei ſubquartanorum cubi, vel (quod tantundem eſt) radices biquadraticæ ſeriei cuborum vel tertianorum; rationem habebunt ad ſeriem Æqualium, ut 4 ad 7. Cum enim ſeries ſubquartanorum rationem habeat in Tabella 1 ad $1\frac{1}{4}$, vel 4 ad 5: eorum cubi rationem habebunt (ad ſeriem totidem maximo æqualium) ut 1 ad $1\frac{3}{4}$, vel 4 ad 7. Quia nempe 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$, vel $\frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}$, ſunt Arithmetice-proportionalia, ſicut Unitas, Radix, Quadratum, Cubus, &c. ſunt Geometrice-proportionalia.

Et ſimiliter in poteſtatibus magis adhuc compoſitis; puta Radices quadraticæ cuborum ſeriei ſubquintanorum. Nam ſeriei ſubquintanorum convenit ratio 1 ad $1\frac{1}{5}$, vel 5 ad 6; ergo eorum cubis conveniet ratio 1 ad $1\frac{3}{5}$ vel 5 ad 8, (quia nempe 1, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{2}{5}$, $1\frac{3}{5}$, vel $\frac{5}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}$, ſunt Arithmetice-proportionalia;) & eorum Radicibus quadratis, ratio 1 ad $1\frac{3}{10}$, vel 10 ad 13, (quia nempe $1\frac{3}{10}$ eſt medium Arithmeticum inter 1 ad $1\frac{3}{5}$, ſunt enim 1, $1\frac{3}{10}$, $1\frac{6}{10}$ $(=1\frac{3}{5})$ vel $\frac{10}{10}, \frac{13}{10}, \frac{16}{10} (=\frac{8}{5})$ Arithmetice proportionalia;) Vel etiam cum radices Quadraticæ ſubquintanorum ſint ſeries ſubdecimanorum; cui convenit ratio 10 ad 11, vel 1 ad $1\frac{1}{10}$: Harum radicum Cubi rationem habebunt eam quæ eſt 10 ad 13, vel 1 ad $1\frac{3}{10}$: Quia 1, $1\frac{1}{10}$, $1\frac{2}{10}$, $1\frac{3}{10}$, vel $\frac{10}{10}, \frac{11}{10}, \frac{12}{10}, \frac{13}{10}$, ſunt quatuor termini Arithmetice proportionales.

Atque eodem modo, in ſeriebus aliarum Poteſtatum utcunque compoſitarum, earundem ratio ad ſeriem æqualium inveſtigabitur. Adeoque ——

PROP. LIX.

Theorema.

SI intelligatur ſeries infinita quantitatum, à puncto ſeu o inchoatarum, & continue creſcentium pro ratione poteſtatis cujuſvis ex ſimplicibus (prop. 44 & 54 memoratis) compoſitæ; erit totius ratio ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ea quæ ſequitur in hac Tabella. Nempe

	Seriei										
	Æqualium	Primanorum	Secundanorum	Tertianorum	Quartanorum	Quintanorum	Sextanorum	Septimanorum	Octavanorum	Nonanorum	Decimanorum
	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$
Radices Quadraticæ	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{12}$
Cubicæ	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{13}$
Biquadrat.	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{4}{14}$
Superſolidæ	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{15}$
Sextanæ	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{6}{16}$
Septimanæ	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{17}$
Octavanæ	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{8}{14}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{8}{18}$
Nonanæ	$\frac{9}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{17}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{9}{19}$
Decimanæ	$\frac{10}{10}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{10}{17}$	$\frac{10}{18}$	$\frac{10}{19}$	$\frac{10}{20}$

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps.

PROP. LX.

Corollarium.

ERgo, *Conoeidea & Pyramidoeidea Parabolica & Paraboloeidica; quæ nempe Parabolæ, Paraboloeidi cubicali, biquadraticali, superfolidali, &c. aptantur; sunt ad Cylindrum & prisma circumscriptum, (vel aliud quodvis super æquali base æque altum,) ut 2 ad 4, 3 ad 5, 4 ad 6, 5 ad 7, &c.*

Cum enim Parabolæ, & Paraboloeidium illorum plana sint series rectarum in ratione subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum, subquintanorum, &c. sive ut radices quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ, supersolidæ, &c. Primanorum: Conoeidea & Pyramidoeidea sic aptata, sunt series planorum in duplicata ratione istarum rectarum; & propterea, ut radices quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ, supersolidæ, &c. Secundanorum: quibus in tabella assignantur rationes illæ 2 ad 4, 3 ad 5, 4 ad 6, 5 ad 7, &c.

PROP. LXI.

Corollarium.

SEd & hinc innotescit methodus quadrandi non modo Parabolam sed & Paraboloeidea omnia, (eorumque complementa,) non modo ea quorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem simplicis alicujus potestatis, (de quibus dictum est prop. 55, 56, 57, item prop. 23, 45.) Sed & juxta rationem potestatis cujusvis ex simplicibus compositæ. Puta; si ordinatim-applicatæ sint in diametrorum ratione duplicatæ subtriplicata, subquintuplicata, subseptuplicata, &c. vel triplicatæ subquadruplicata, subquintuplicata, &c. rationem habebunt ad Parallelogrammum circumscriptum eam quam habent 3 ad 5, 5 ad 7, 7 ad 9, &c. 4 ad 7, 5 ad 8, &c. Et eorum complementa (quorum ordinatim-applicatæ erunt propterea in suarum diametrorum ratione subduplicatæ triplicata, quintuplicata, septuplicata, &c. item subtriplicatæ quadruplicata, quintuplicata, &c.) rationem habebunt 2 ad 5, 2 ad 7, 2 ad 9, &c. 3 ad 7, 3 ad 8, &c. Et similiter in cæteris: juxta tenorem præcedentis Tabellæ, prop. 59.*

Nam si ordinatim applicatæ sint in diametrorum suarum ratione duplicatæ subtriplicata, erit planum illud series rectarum quæ se habent ad invicem ut quadrata radicum cubicarum, (vel radices cubicæ quadratorum) numerorum Arithmetice-proportionalium, sive ut radices cubicæ secundanorum; quibus in Tabella convenit ratio 3 ad 5.

Et hujus complementum ordinatim-applicatas habebit in diametrorum suarum ratione subduplicatæ triplicata, (quod tali argumento probabitur, quo usus sum ad Prop. 23.) & propterea planum illud erit series radicum quadraticarum Cuborum sive Tertianorum; quibus assignatur in Tabella ratio 2 ad 5.

Et pariter de aliis judicandum.

SCHOLIUM.

Atque hoc pacto aliæ adhuc figuræ curvilineæ (præter eas quas innuimus ad Prop. 45, & 57.) ad æquales rectilineas reducuntur. Nempe omnia cujuscunque generis Paraboloeidea, & eorum complementa.

PROP. LXII.

Corollarium.

Atque exinde etiam patet methodus ad æqualia Cylindros & Prismata reducendi Conoeidea & Pyramidoeidea omnia Parabolica & Paraboloeidica, (non modo qualia memorantur prop. 60, ubi planorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem simplicis alicujus potestatis, sed &) etiam quæ aptantur ejusmodi Paraboloeidibus, (qualia memorantur prop. 61.) quorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem seriei alicujus potestatis compositæ.

Exempli gratia. Si Paraboloeidis ordinatim applicatæ sint in diametrorum ratione subtriplicatæ-duplicata, (vel subtriplicata duplicatæ,) erit istius planum rectarum series infinita in ratione radicum cubicarum secundanorum: & propterea Conoeides vel Pyramidoeides erit series totidem planorum in earundem rectarum ratione duplicata, ideoque radicum cubicarum Quartanorum; & propterea (juxta tabellam Prop. 59.) ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum, ut 3 ad 7.

Item, si Paraboloeidis ordinatim applicatæ sint in diametrorum ratione subquadruplicatæ triplicata; erunt plana Conoeidis vel Pyramidoeidis, in earundem diametrorum ratione subquadruplicatæ-sextuplicata, (sive, quod tantundem valet, subduplicatæ-triplicata,) ideoque Conoeides vel Pyramidoeides illud (ex istorum planorum serie conflatum) ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum, ut 4 ad 10, vel 2 ad 5.

Et pariter in aliis juxta tenorem Tabellæ.

PROP. LXIII.

Corollarium.

Eodem modo; Eorundem Semi-Paraboloeidium complementis aptata Conoeidea & Pyramidoeidea, ad æqualia Cylindros & Prismata reducuntur.

Exempli gratia. Si Semi-paraboloeidis complementum ordinatim applicatas habeat in diametrorum ratione subduplicatæ triplicata, erit planum illud rectarum series infinita in ratione radicum quadraticarum Cuborum sive Tertianorum, & proinde Conoeides vel Pyramidoeides huic aptatum, erit series totidem Planorum in earundem rectarum ratione duplicata, adeoque in diametrorum ratione subduplicatæ-sextuplicata (seu, quod tantundem valet, in diametrorum ratione triplicata:) erit igitur ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum, ut 2 ad 8, vel 1 ad 4.

Item, si semi-paraboloeidis Complementum ordinatim-applicatas habeat in diametrorum ratione subtriplicatæ-quadruplicata; erunt plana Conoeidis vel Pyramidoeidis in earundem diametrorum ratione subtriplicatæ-octuplicata; & propterea ut radices cubicæ octavanorum; adeoque Conoeides vel Pyramidoeides illud, ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum, ut 3 ad 11.

Et pariter de aliis judicandum est juxta Tabellam præmissam.

SCHOLIUM.

Docuimus igitur, quo modo Parabolæ & Paraboloeidea omnia cujuscunque generis, & eorum Complementa, ad Parallelogramma: Et eorundem Conoeidea & Pyramidoeidea ad Cylindros & Prismata; reduci possunt. Adeoque innumera Problemata solvimus quæ nemo (quantum scio) antea susceperit, nedum exsequutus est.

Placet autem adhuc ex Tabellis omnibus præcedentibus (Prop. 44, 54, 59.) hoc universale Theorema colligere, (quod quidem convenit cum Regula Prop. 46.) Nempe ——

PROP.

PROP. LXIV.

Theorema.

SI intelligatur series infinita quantitatum, à puncto seu o inchoatarum, & continue crescentium pro ratione cujuscunque potestatis, sive simplicis sive ex simplicibus compositæ; erit totius ratio, ad seriem totidem maximæ æqualium, ea quæ est Unitatis ad Indicem istius potestatis unitate auctum.

Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. (sive potestatis Lateralis, Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c.) Indices statuo 1, 2, 3, 4, &c. subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum, &c. (sive Radicum quadraticarum, cubicarum, biquadraticarum, &c. Primanorum, sive Arithmetice-proportionalium) Indices statuo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. Potestatis cujusvis compositæ indicem facio ex componentium indicibus compositum! Puta Secundanorum Cubi (vel Tertianorum Quadrata) indicem habent $6 = 2 \times 3$: Subsecundanorum Radices cubicæ (vel subtertianorum Radices Quadraticæ) indicem habent $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$: Cubi Radicum quadraticarum Quintanorum, indicem habebunt $\frac{15}{2} = 3 \times \frac{1}{2} \times 5$.

Rationes autem his potestatibus (in Tabellis) assignatæ, sunt hujusmodi. Puta, Primanis, Secundanis, Tertianis, Quartanis, &c. 1 ad 2, 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, &c. hoc est 1 ad $1 + 1$, 1 ad $2 + 1$, 1 ad $3 + 1$, 1 ad $4 + 1$, &c. Subsecundanis, Subtertianis, Subquartanis, &c. 2 ad 3, 3 ad 4, 4 ad 5, &c. vel 1 ad $1\frac{1}{2}$, 1 ad $1\frac{1}{3}$, 1 ad $1\frac{1}{4}$, &c. hoc est 1 ad $\frac{1}{2} + 1$, 1 ad $\frac{1}{3} + 1$, 1 ad $\frac{1}{4} + 1$, &c. Tertianorum Quadratis (sive Sextanis) 1 ad 7, hoc est, 1 ad $6 + 1$. Tertianorum Radicibus Quadraticis 2 ad 5, sive 1 ad $\frac{5}{2}$, hoc est 1 ad $\frac{3}{2} + 1$. Subsecundanorum radicibus cubicis (sive Subsextanis) 6 ad 7, sive 1 ad $\frac{7}{6}$, hoc est 1 ad $\frac{1}{6} + 1$. Cubis radicum quadraticarum Quintanorum, (sive Quindecimanorum radicibus quadraticis,) 2 ad 17, sive 1 ad $\frac{17}{2}$, hoc est 1 ad $\frac{15}{2} + 1$. (Et sic de cæteris.) Quod affirmat Theorema. Sin Index supponatur irrationalis, puta $\sqrt{3}$; erit ratio, ut 1 ad $1 + \sqrt{3}$. &c.

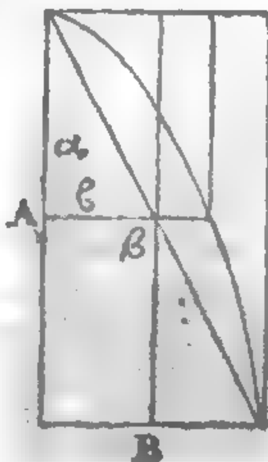
PROP. LXV.

Theorema.

EX cognita ratione quam habet quælibet series ad seriem Æqualium, cognoscitur ratio quam habet quælibet ad quamlibet aliam.

Exempli gratia. Parabola ad triangulum, (hoc est series subsecundanorum ad seriem primanorum,) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel ut 4 ad 3. Semi-parabolæ complementum ad Triangulum, vel etiam Conus ad Conoeides Parabolicum, (hoc est series Secundanorum ad seriem Primanorum,) ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel ut 2 ad 3. Semi-parabola ad suum complementum, (hoc est series Subsecundanorum ad seriem Secundanorum,) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{3}$, vel ut 2 ad 1. Sic Parabola ad Paraboloeides cubicale, ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{4}$, vel ut 8 ad 9: Et Conoeides illius ad Conoeides hujus, ut $\frac{2}{4}$ ad $\frac{3}{5}$, vel ut 5 ad 6. Paraboloeides cubicale ad Biquadraticale, ut $\frac{3}{4}$ ad $\frac{4}{5}$, vel ut 15 ad 16: Et Conoeides illius ad Conoeides hujus, ut $\frac{3}{5}$ ad $\frac{4}{6}$, vel ut 9, ad 10. Et sic in aliis.

Intellige; si easdem vel æquales habeant & bases & altitudines (aut saltem reciprocatas:) Nam si diversas habeant vel bases vel altitudines vel utrasque, ratio seriei unius ad aliam, componitur ex rationibus & basium & altitudinum & ea quæ est serierum propria. Puta si Parabolæ basis B altitudo A, Trianguli basis ϐ altitudo α; erit Parabola illa ad Triangulum, ut $\frac{2}{3}$ A B ad $\frac{1}{2}$ αϐ, vel 4 A B ad 3 αϐ, & pariter in cæteris. Item, si Trianguli basis B, altitudo A; & Parabolæ basis β, altitudo α, erit Parabola ad Triangulum ut $\frac{2}{3}$ αβ ad $\frac{1}{2}$ A B, vel 4 αβ ad 3 A B.



Demonstratio patet. Cum enim Parabola A B sit $\frac{2}{3}$ Parallelogrammi A B; & Triangulum αϐ sit $\frac{1}{2}$ Parallelogrammi αϐ, erit illa ad hoc ut $\frac{2}{3}$ A B ad $\frac{1}{2}$ αϐ. Et similiter in aliis.

PROP. LXVI.

Theorema.

EX cognita quantitate seriei alicujus integræ, cognoscitur quantitas ejusdem obtruncatæ.

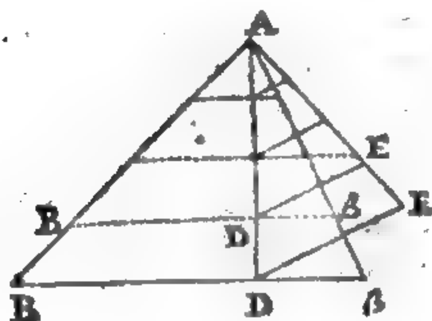
Puta, Si A B Triangulum sit $\frac{1}{2}$ A B Parallelogrammi; & $\alpha\beta$ Triangulum, $\frac{1}{2}\alpha\beta$ Parallelogrammi: erit residuum Trapezium, $\frac{1}{2}$ A B — $\frac{1}{2}\alpha\beta$. Item A B Parabola $\frac{2}{3}$ A B parallelogrammi circumscripti; & $\alpha\beta$ parabola $\frac{2}{3}\alpha\beta$ parallelogrammi circumscripti: erit residuum, $\frac{2}{3}$ A B — $\frac{2}{3}\alpha\beta$. Et pariter in aliis.

Fig. præced.

PROP. LXVII.

Corollarium.

SI Triangulum rectis quotlibet secetur basi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, (portiones æquè altas abscindentibus;) abscissa Triangula (verticem inter & rectas secantes,) sunt ut 1, 4, 9, 16, &c. numeri quadrati. Spatia vero rectis illis interjecta, ut 1, 3, 5, 7, &c. Arithmetice-proportionales.

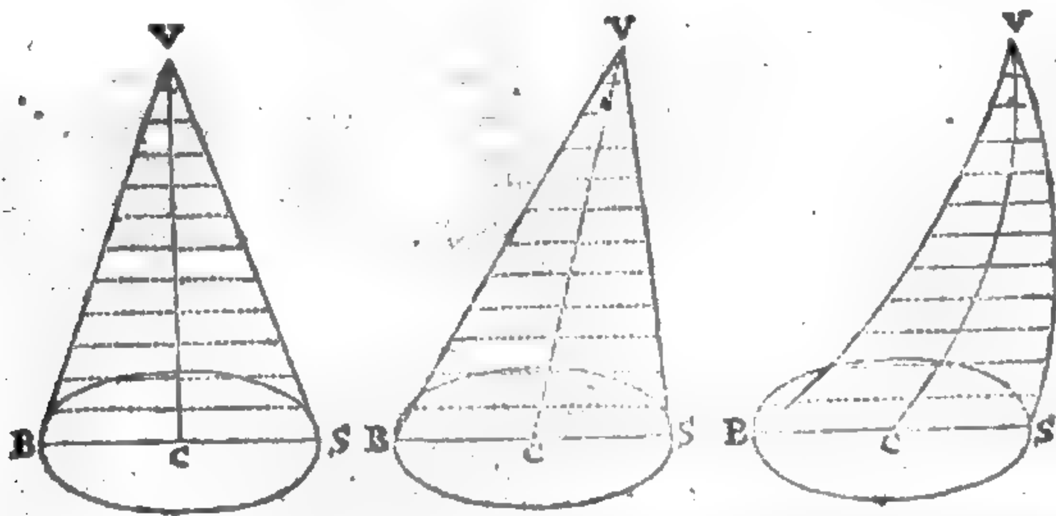


Quia Triangulorum abscissorum tam altitudines quam bases sunt Arithmetice-proportionales: ergo plana in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium, sive ut numeri quadrati, 1, 4, 9, 16, &c. Et propterea, spatia interjecta, 1, 3 = 4 — 1, 5 = 9 — 4, 7 = 16 — 9, &c.

PROP. LXVIII.

Corollarium.

SI conus planis quotlibet secetur basi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, (portiones æque-altas abscindentibus,) abscissi coni (verticem inter & plana secantia) sunt ut 1, 8, 27, 64, &c. numeri cubici. Portiones vero interjectæ, ut 1, 7, 19, 37, &c. differentiæ numerorum cubicorum, (& similiter in Pyramide.)



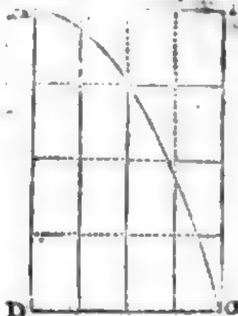
Quia cum conorum abscissorum altitudines sint Arithmetice-proportionales, & proptérea etiam basium diametri; adeoque bases in earundem ratione duplicata; erit ratio conorum (quæ ex altitudinum & basium rationibus componitur) in ratione altitudinum triplicata, seu ut 1, 8, 27, 64, &c. Et propterea portiones interjectæ, ut 1, 7 = 8 — 1, 19 = 27 — 8, 37 = 64 — 27, &c.

PROP.

PROP. LXIX.

Corollarium.

SI Parabola rectis quotlibet secetur (basi parallelis & æqualiter ab invicem remotis, portiones æque-altas abscindentibus,) erunt abscissæ Parabolæ (verticem inter & rectas secantes,) ut 1 √ 1, 2 √ 2, 3 √ 3, 4 √ 4, &c. vel ut √ 1, √ 8, √ 27, √ 64, &c. radices quadraticæ numerorum cubicorum. Spatia vero interjecta, ut earum radicum differentiæ.

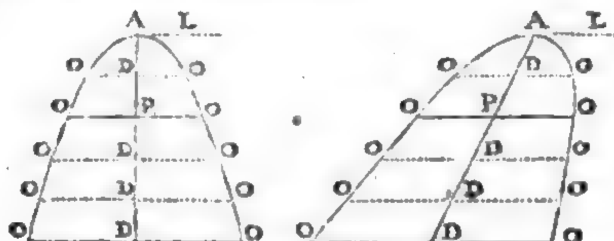


Sunt enim bases (quippe Ordinatim-applicatæ in Parabola) in altitudinum ratione subduplicata.

PROP. LXX.

Corollarium.

SI Conoeides Parabolicum planis quotlibet secetur (basi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, portiones abscindentibus æque-altas,) erunt Conoidea sic abscissa (verticem inter & plana secantia) ut 1, 4, 9, 16, &c. numeri quadrati: Et portiones interjectæ, ut 1, 3, 5, 7, &c. Arithmetice-proportionales. (Et similiter in Pyramidoeide.)



Nempe, ut de Triangulo dictum est Prop. 67. sunt enim conoeidium abscissorum bases in ratione duplicata semidiametrorum, hoc est ordinatim-applicatarum in Parabola; & propterea, altitudinibus proportionales.

PROP. LXXI.

Corollarium.

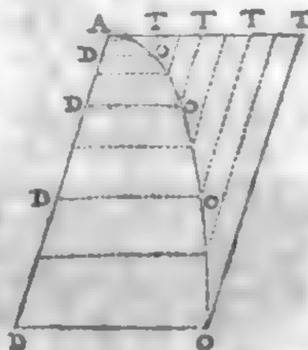
SI complementum semiparabolæ rectis quotlibet secetur (complementi basi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, portiones abscindentibus æque-altas,) erunt complementa sic abscissa (verticem inter & rectas secantes,) ut 1, 8, 27, 64, &c. numeri cubici: Et portiones interjectæ, ut 1, 7, 19, 37, &c. numerorum cubicorum differentiæ.

Nempe ut supra de Cono dictum est, Prop. 68. sunt enim bases, hoc est, complementorum ordinatim applicatæ, in altitudinum ratione duplicata.

PROP. LXXII.

Corollarium.

SI Conoeides etiam semiparabolæ complemento aptatum, planis quotlibet secetur (basi parallelis, & ab invicem æqualiter remotis, portiones abscindentibus æque-altas,) erunt abscissa conoeidea (verticem inter & plana secantia,) ut 1, 32, 243, 1024, &c. numeri supersolidi: Et portiones interjectæ, ut 1, 31, 211, 781, &c. numerorum supersolidorum differentiæ. (Et similiter in Pyramidoeide.)



 Sunt

Sunt enim bases conoeidium abscissorum, in duplicata ratione semidiametrorum suarum, ideoque in quadruplicata ratione altitudinum, (sunt enim ipsæ semidiametri basium, seu ordinatim-applicatæ in semiparabolæ complemento, in duplicata ratione altitudinum.) Et propterea figuræ solidæ abscissæ, in altitudinum ratione quintuplicata; quippe quæ componitur ex rationibus basium & altitudinum.

SCHOLIUM.

Et similiter de aliis ejusmodi figuris (sive planis sive solidis) eo modo sectis, judicandum erit: respectu semper habito ad gradum seu potestatem illius seriei quo pertinent.

PROP. LXXIII.

Theorema.

SI duæ quælibet series (aut etiam plures) invicem respective-multiplicentur, (nempe primus terminus unius in primum alterius, secundus in secundum, &c.) prodibit ejusmodi alia series; quæ indicem habebit ex multiplicatarum indicibus aggregatum; rationem autem, ad seriem terminorum ipsius maximo æqualium, eam quam Tabellæ præcedentes (vel etiam Propositio 64) indicabunt.

Exempli gratia. Si series Quadratorum vel Secundanorum (cujus index 2) respective multiplicetur in seriem Cuborum vel Tertianorum (cujus index 3,) prodibit series Quintanorum (cujus index $5 = 2 + 3$:) quæ propterea rationem habebit, ad seriem maximo Æqualium, eam quam habet 1 ad $6 = 5 + 1$. Puta si respective multiplicetur Series Secundanorum in seriem Tertianorum prodibit series Quint.

$0a$,	$1a$,	$4a$,	$9a$,	$16a$,	&c.
$0b$,	$1b$,	$8b$,	$27b$,	$64b$,	&c.
$0ab$,	$1ab$,	$32ab$,	$243ab$,	$1024ab$,	&c.

Item, si series Secundanorum (cujus index 2) respective multiplicetur in seriem Subtertianorum (cujus index $\frac{1}{3}$,) erit producta series, Radices-cubicæ Septimanorum (cujus index est $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$;) quæ est ad seriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad $\frac{10}{3} = \frac{7}{3} + 1$, vel ut 3 ad 10. Puta si respective multiplicetur.

Series $0a$, $1a$, $4a$, $9a$, &c.
in seriem $\sqrt[3]{0b}$, $\sqrt[3]{1b}$, $\sqrt[3]{2b}$, $\sqrt[3]{3b}$, &c.

hoc est series $\sqrt[3]{0a^3}$, $\sqrt[3]{1a^3}$, $\sqrt[3]{64a^3}$, $\sqrt[3]{729a^3}$, &c.
in seriem $\sqrt[3]{0b}$, $\sqrt[3]{1b}$, $\sqrt[3]{2b}$, $\sqrt[3]{3b}$, &c.

prodibit series $\sqrt[3]{0a^3b}$, $\sqrt[3]{1a^3b}$, $\sqrt[3]{128a^3b}$, $\sqrt[3]{2187a^3b}$, &c.

Item, si series Subsecundanorum (cujus index $\frac{1}{2}$) respective multiplicetur in seriem Subquintanorum (cujus index $\frac{1}{5}$,) erit producta series Radices-Decimanæ Septimanorum, (cujus index $\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$:) & propterea rationem habebit, ad seriem maximæ æqualium, eam quam habet 1 ad $\frac{17}{10} = \frac{7}{10} + 1$, vel 10 ad 17. Puta si respective multiplicetur.

Series $\sqrt[2]{0a}$, $\sqrt[2]{1a}$, $\sqrt[2]{2a}$, $\sqrt[2]{3a}$, &c.
in seriem $\sqrt[5]{0b}$, $\sqrt[5]{1b}$, $\sqrt[5]{2b}$, $\sqrt[5]{3b}$, &c.

hoc est, series $\sqrt[10]{0a^5}$, $\sqrt[10]{1a^5}$, $\sqrt[10]{32a^5}$, $\sqrt[10]{243a^5}$, &c.
in seriem $\sqrt[10]{0b^2}$, $\sqrt[10]{1b^2}$, $\sqrt[10]{4b^2}$, $\sqrt[10]{9b^2}$, &c.

prodibit series $\sqrt[10]{0a^5b^2}$, $\sqrt[10]{1a^5b^2}$, $\sqrt[10]{128a^5b^2}$, $\sqrt[10]{2187a^5b^2}$, &c.

Et similiter in aliis ejusmodi multiplicationibus continget.

PROP.

PROP. LXXIV.

Corollarium.

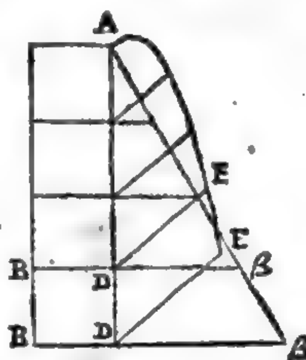
IDeoque, *Ubi Aggregatum Indicum serierum invicem respective-multiplicatarum idem est, ibi & idem erit Index seriei productæ.*

Exempli gratia. Si series Tertianorum in seriem Tertianorum, vel series Secundanorum in seriem Quartanorum, vel series Primanorum in seriem Quintanorum, vel series Æqualium in seriem Sextanorum, respective multiplicetur; Prodibit series Sextanorum. Quia nempe in singulis aggregatum indicum est 6, (nam $3+3=2+4=1+5=0+6=6$.) Et similiter in aliis.

PROP. LXXV.

Corollarium.

SI *ADB Parallelogrammi rectæ omnes DB, in Dβ rectas Trianguli ADβ (æque-alti) respective-ducantur; rectangula producta erunt Series Primanorum, (qualia sunt plana cunei Parabolici, prop. 11. Con. Sect.) pro quibus si substituantur totidem Quadrata (vel quævis aliæ figuræ planæ similes) illis æqualia, constituetur Pyramidoeides Parabolicum: Et eorum Quadratorum (vel figurarum similium) latera, vel mediæ proportionales inter rectas sic multiplicatas, DE, constituent Parabolam, vel Semiparabolam.*



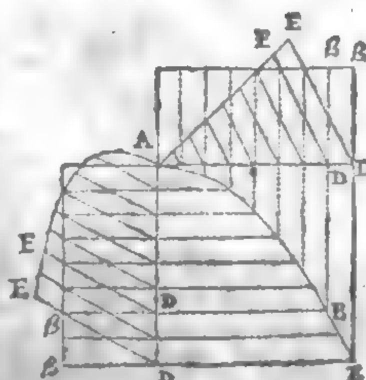
(Intellige, si plana illa, vel mediæ proportionales, quæ sic emergunt, supponantur ad rectam aliquam ita ordinatim-posita, ut figurarum constituendarum natura postulat. Quod & deinceps aliquoties intelligendum erit.)

Nam, cum rectæ Parallelogrammi, sint series Æqualium, (cujus index 0;) & rectæ Trianguli, series Primanorum, (cujus index 1:) producetur, multiplicando, series item Primanorum (quia $0+1=1$,) qualia sunt plana cunei Parabolici, & Pyramidoeidis Parabolici, (per Prop. 9, 11. Con. Sect.) & mediæ proportionales (seu latera similium planorum) erunt series Subsecundanorum, (quippe ut Radices quadraticæ Primanorum,) quales sunt parabolarum rectæ per Prop. 8. Con. Sect.

PROP. LXXVI.

Corollarium.

SI *ADβ Parallelogrammi rectæ βD in rectas DB semiparabolæ æque-altæ ADB respective ducantur, rectangula producta erunt Series Subsecundanorum; & mediæ proportionales, Series Subquartanorum, (quales sunt rectæ Paraboloeidis Biquadratici DE.)*



Hoc est, Series Æqualium (cujus index 0) in Seriem Subsecundanorum (cujus index $\frac{1}{2}$) respective ducta efficiet Seriem item Subsecundanorum, (quia $\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$,) & mediæ proportionales (quippe subsecundanorum radices quadraticæ) erunt Series subquartanorum.

PROP.

PROP. LXXVII.

Corollarium.

Fig. praeced. *SI ADβ Parallelogrammi rectæ Dβ in rectas DB Complementi Semiparabolæ respective-ducantur; rectangula producta erunt Series Secundanorum: mediæ autem proportionales, Series Primanorum, (Triangulum constituentium, ADE.)*

Nempe, Series Æqualium in Seriem Secundanorum sic ducta, dat Seriem etiam Secundanorum, (quia $0+2=2$,) eorumque radices quadraticæ sunt Series Primanorum.

PROP. LXXVIII.

Corollarium.

SI Trianguli rectæ DB respective ducantur in rectas semiparabolæ Dβ, rectangula producta erunt Series radicum quadraticarum Tertianorum, & mediæ proportionales, radices Biquadraticæ Tertianorum, DE.

Nempe, Series primanorum in Seriem subsecundanorum sic ducta, dabit Seriem radicum quadraticarum Tertianorum, (quia $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,) quarum radices quadraticæ, sunt radices biquadraticæ Tertianorum.

PROP. LXXIX.

Corollarium.

SI Trianguli rectæ DB respective ducantur in rectas Complementi semiparabolæ Dβ; producta rectangula sunt Series Tertianorum (quia $1+2=3$.) Et mediæ proportionales, radices quadraticæ Tertianorum, DE.

Demonstratur ut præcedentes.

PROP. LXXX.

Corollarium.

SI rectæ Complementi semiparabolæ in rectas semiparabolæ respective ducantur; rectangula producta erunt Series radicum quadraticarum Quintanorum (quia $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$;) & mediæ proportionales, Series radicum biquadraticarum Quintanorum. Ut patet.

SCHOLIUM.

Et pari modo de figuris sive planis sive solidis, quæ ex ejusmodi multiplicatione provenient, judicandum erit. Ut si trianguli unius rectæ in rectas Trianguli alterius (sive similis sive dissimilis, modo æque-alti,) respective ducantur, fiet Pyramis; mediæ vero proportionales constituent etiam Triangulum. Semiparabolæ unius rectæ in rectas alterius respective ductæ, efficient Pyramidoeides Parabolicum; mediæ autem proportionales semiparabolam. Et sic de cæteris.

PROP.

PROP. LXXXI.

Theorema.

SI unius Seriei termini omnes per terminos alterius Seriei respectivè dividantur, quotientes erunt Series alia, cujus index reperitur subducendo indicem Seriei Dividentis ex indice Seriei Divisæ, quod restat enim est index Seriei divisione provenientis, sive Quotientis: Ratio autem quam habitura est Series sic producta, ad Seriem totidem terminorum ipsius maximo æqualium, ea erit quam Tabellæ præcedentes (vel propositio 64) indicant.

Exempli gratia. Si Series Biquadratorum vel Quartanorum (cujus index 4) dividatur per Seriem Cuborum vel Tertianorum (cujus index 3,) Quotientes erunt Series Lateralium seu Primanorum, cujus index $1 = 4 - 3$.

Tert.	Quart.	Prim.
0c)	0qq	(0l
1c)	1qq	(1l
8c)	16qq	(2l
27c)	81qq	(3l
&c.	&c.	&c.

Si Series tertianorum dividatur per Seriem primanorum, proveniet Series secundanorum, cujus index $2 = 3 - 1$.

Et si Series secundanorum per Seriem secundanorum dividatur, proveniet Series æqualium, cujus index $0 = 2 - 2$. Et sic de cæteris.

Prim.	Tert.	Secund.
0l)	0c	(0q
1l)	1c	(1q
2l)	8c	(4q
3l)	27c	(9q
	&c.	

Demonstratio patet ex Prop. 73. Quia nempe Series Tertianorum in Seriem Primanorum respectivè ducta efficiet Seriem Quartanorum. Et Series primanorum in Seriem secundanorum sic ducta efficiet Seriem tertianorum. Et Series secundanorum in Seriem æqualium sic ducta, producet Seriem secundanorum. Et sic in reliquis omnibus. Quod enim Multiplicatione conficitur, id Divisione resolvitur.

Sec.	Sec.	Æqual.
0q)	0q	(1
1q)	1q	(1
4q)	4q	(1
9q)	9q	(1
	&c.	

PROP. LXXXII.

Corollarium.

IDeoque, *ubi idem est gradum sive indicum excessus Seriei Dividendæ supra Seriem Dividentis, idem erit Seriei Quotientum index.*

Exempli gratia. Si Series Sextanorum per Seriem Quartanorum, vel Series Quintanorum per Seriem Tertianorum, vel Series Quartanorum per Seriem Secundanorum, vel Series Tertianorum, per Seriem Primanorum, vel Series Secundanorum per Seriem Æqualium, dividatur; proveniet Series Secundanorum. Quia nempe in singulis Series Divisa Seriem Dividentem duobus gradibus superat; est enim $6 - 4 = 5 - 3 = 4 - 2 = 3 - 1 = 2 - 0 = 2$) Ideoque (per præced.) idem Seriei provenientis Index. Et pariter in aliis.

PROP. LXXXIII.

Corollarium.

S*I Pyramis (series nempe Secundanorum) ad Triangulum (æque-altum) respectivè applicetur, (nempe Plana illius ad Rectas hujus,) prodibit Triangulum;* (*quia nempe* $2 - 1 = 1$.) *Si vero applicetur ad complementum semi-parabolæ, prodibit Parallelogrammum;* (*quia* $2 - 2 = 0$.) *Si ad semi-parabolam, planum prodiens erit series Radicum quadraticarum Tertianorum;*

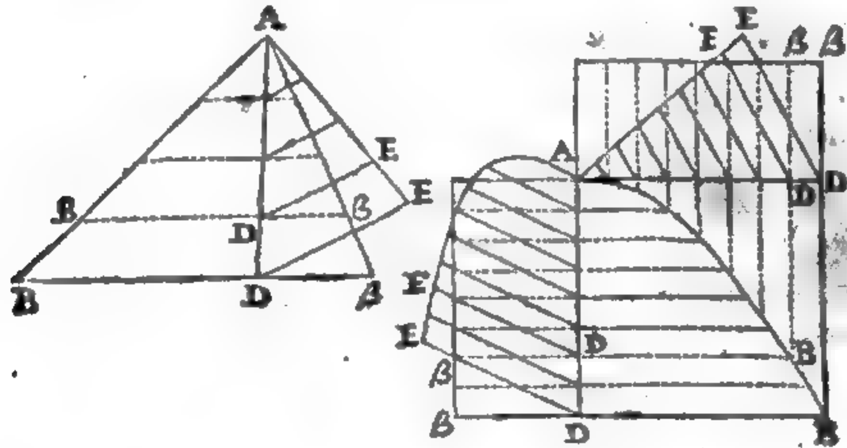
rum; (quia $2-\frac{1}{3}=1\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$.) Si ad seriem Æqualium, prodibit complementum semiparabolæ; (quia $2-0=2$.) Et sic in aliis.

Patet ex Prop. 81.

PROP. LXXXIV.

Corollarium.

VEL, si respectivis rectis Trianguli primi ABD & secundi ADE, sumantur tertiæ proportionales; prodibit Triangulum tertium ADβ: Si



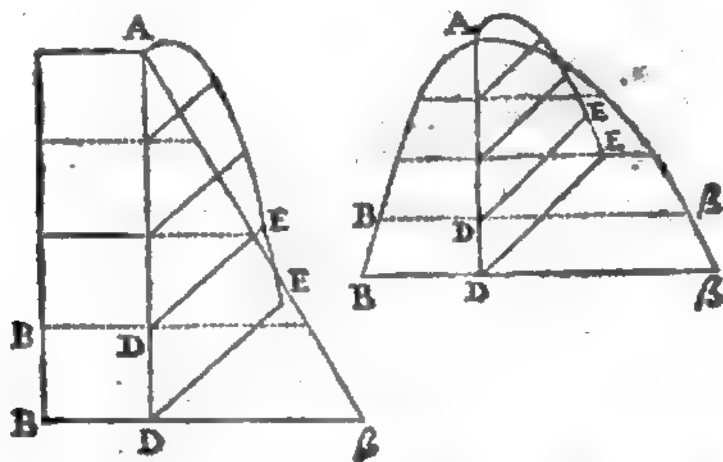
respectivis rectis complementi semiparabolæ ADB, & Trianguli ADE, prodibit parallelogrammum ADβ: Si vero Parallelogrammi ADβ & Trianguli ADE, prodibit complementum semiparabolæ ADB.

Sequitur ex præcedente. Quadrata enim rectarum in Triangulo constituunt Pyramidem. Et similiter in reliquis. Ostenditur autem pars prima in figura priori; secunda & tertia in posteriori.

PROP. LXXXV.

Corollarium.

SI Pyramidoeides Parabolicum (series nempe Primanorum) ad Triangulum (æque-altum) respective applicetur: prodibit Parallelogrammum; (quia $1-1=0$.) Si ad Parallelogrammum, prodibit Triangulum;



(quia $1-0=1$.) Si ad semiparabolam, prodibit semiparabola; (quia $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.) Si ad semiparaboloeides cubicale, planum prodiens constabit ex secundanorum Radicibus Cubicis; (quia $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.) Et pariter in aliis ejusmodi applicationibus.

Patet ex Prop. 81.

PROP. LXXXVI.

Corollarium.

SImiliter. *Si respectivis rectis Trianguli A D β, & Semiparabolæ A D E, sumantur tertiæ proportionales, prodibit Parallelogrammum A D B : si respectivis rectis Parallelogrammi A B D, & Semiparabolæ A D E, prodibit Triangulum A D β : si respectivis rectis semiparabolæ primæ A D B, & secundæ A D E, prodibit semiparabola tertia A D β : & sic in aliis.*

Sequitur ex præcedente. Quadrata enim rectarum in semiparabola, constituent Pyramidoeides Parabolicum. Ostenditur, in fig. præced.

SCHOLIUM.

Et pari modo de aliis figurarum solidarum ad Planas applicationibus respectivis judicium fiet. Sufficit paucas exempli causa indicasse, ad quarum imitationem fieri possunt innumeræ aliæ.

PROP. LXXXVII.

Theorema.

SI proponatur series quælibet prædictarum per aliam superioris gradus seu potestatis dividenda, nulla jam memoratarum series prodire poterit, (cum index potestatis superioris ex indice potestatis inferioris, major quippe ex minore, auferri non possit :) sed aliusmodi plane Series, cujus nempe termini sunt reciproce proportionales homologis terminis alterius Seriei, quæ indicem habet æqualem excessui indicis Seriei dividentis supra indicem Seriei divisæ.

Series autem sic provenientes, Series *Reciprocæ* appellantor, habeantque Indices negativos.

Exempli gratia. Si series Secundanorum dividenda sit per seriem Tertianorum, vel series Primanorum, per seriem Secundanorum, vel series Æqualium per seriem Primanorum, (ubi series dividens est uno gradu superior serie dividenda, adeoque index seriei dividentis unitate major quam index seriei divisæ, puta $3-2=2-1=1-0=1$:) termini seriei oriundæ erunt reciproce-proportionales homologis terminis seriei Primanorum. Puta si respective dividatur

series	$0a^2$,	$1a^2$,	$4a^2$,	$9a^2$,	$16a^2$,	&c.
per seriem	$0a^3$,	$1a^3$,	$8a^3$,	$27a^3$,	$64a^3$,	&c.
vel series	$0a$,	$1a$,	$2a$,	$3a$,	$4a$,	&c.
per seriem	$0a^2$,	$1a^2$,	$4a^2$,	$9a^2$,	$16a^2$,	&c.
vel series	1,	1,	1,	1,	1,	&c.
per seriem	$0a$,	$1a$,	$2a$,	$3a$,	$4a$,	&c.

prodibit series $\frac{1}{0a}, \frac{1}{1a}, \frac{1}{2a}, \frac{1}{3a}, \frac{1}{4a}$, &c.

cujus seriei termini sunt reciproce proportionales homologis terminis seriei primanorum $\frac{0a}{1}, \frac{1a}{1}, \frac{2a}{1}, \frac{3a}{1}, \frac{4a}{1}$, &c. ut patet. Nempe $\frac{1}{2a} . \frac{1}{3a} :: \frac{3a}{1} . \frac{2a}{1}$. Et sic ubique.

Eodem modo si series primanorum dividenda sit per seriem tertianorum ; vel

 (quod

(quod tantundem valet) series Æqualium per seriem Secundanorum; erit series proveniens seriei Secundanorum reciproce proportionalis. Puta

$$\frac{1}{0a^2},\ \frac{1}{1a^2},\ \frac{1}{4a^2},\ \frac{1}{9a^2},\ \frac{1}{16a^2},\ \&c.$$

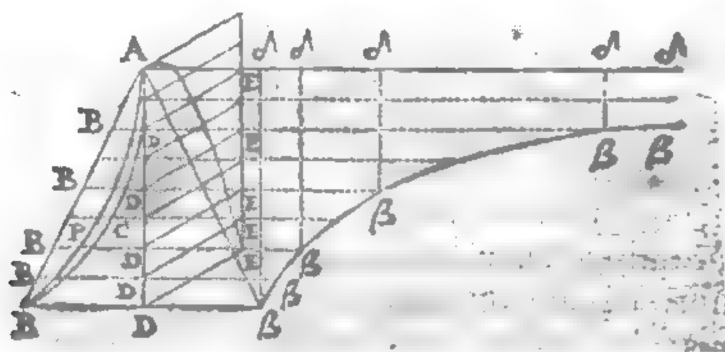
Et pari modo in omnibus ejusmodi divisionibus continget.

PROP. LXXXVIII.

Corollarium.

SI infinita numero plana (parallela) Parallelepipedi, ad totidem rectas Trianguli (æque-alti) applicentur; (vel si respectivis rectis Trianguli, & Parallelogrammi, sumantur tertiæ proportionales;) series rectarum provenientium erit reciproca seriei Primanorum, quæ quidem rectæ sunt suis à vertice distantiis (vel, si placet, diametris interceptis,) reciproce-proportionales.

Esto enim Parallelepipedum, cujus infinita plana æquentur quadratis totidem rectarum Parallelogrammi ADE, quæ si applicentur ad rectas Trianguli ADB, prodibunt rectæ (rectis trianguli & Parallelogrammi tertiæ proportionales) figu-



ram ADβ mixtam constituentes, quæ reciproce proportionales erunt tam homologis rectis Trianguli (quia nempe cum illis constituunt rectangula æqualia,) quam Diametris interceptis, seu distantiis à vertice, quæ (propter similia Triangula abscissa) sunt illis trianguli rectis proportionales.

PROP. LXXXIX.

Corollarium.

IDem continget, si Plana Pyramidis (quadratis rectarum Trianguli ADE æqualia) applicentur ad totidem Rectas Complementi Semiparaboloeidis Cubicalis ADBC.

Patet ex Prop. 87. Nam (ut in Prop. præced.) series primanorum ex quibus conflatur Triangulum, est uno gradu superior, quam series Æqualium ex quibus constat Parallelepipedum: Sic (in hac Prop.) series Tertianorum in complemento semiparaboloeidis cubicalis est uno gradu superior quam series secundanorum ex quibus constat Pyramis. Utrobique igitur provenit series seriei Primanorum reciproca.

PROP. XC.

Corollarium.

IDem continget, si Plana Pyramidoeidis Parabolici (hoc est, series Primanorum,) æqualia quadratis rectarum semiparabolæ ADE respective applicentur ad rectas complementi semiparabolæ ADBP. (Seriem nempe Secundanorum.)

Nam & hic index seriei dividentis unitate superat indicem seriei dividendæ.

PROP. XCI.

Corollarium.

F*Igura plana ex serie rectarum Primanis reciproce proportionalium constanda, est interminabilis. Quod & similiter verum est de omnibus seriebus Reciprocis.*

Cum enim primus terminus in serie Primanorum sit o, primus terminus in serie reciproca erit ∞ vel infinitus: (sicut, in divisione, si divisor sit o, quotiens erit infinitus.) Adeoque recta A δ, & curva $\beta\beta$, non nisi post infinitam distantiam (hoc est, nunquam,) concurrent.

Pari ratione neque concurrent (nisi post infinitam distantiam) eadem curva $\beta\beta$ & recta A D (quantumvis utraque continuetur;) non prius enim evanescet distantia D β quam facta fuerit infinita recta D B. Et propterea ——

PROP. XCII.

Corollarium.

C*Urva $\beta\beta$ duas habet Asymptotas rectas $A\delta$, AD. Quod & de aliis ejusmodi Curvis rectarum series reciprocas terminantibus, verum est.*

Nempe ita perpetuo propius accedunt ad curvam rectæ, ut tandem earum distantia sit quavis assignabili minor, (ut ex dictis facile est probatu,) neque tamen unquam concurrent, ut jam ostensum est. Atque idem de aliis ejusmodi curvis pariter ostendi poterit.

PROP. XCIII.

Corollarium.

R*Ectæ ($D\beta$, $D\beta$, &c.) Primanis reciproce proportionales ab infinita ($A\delta = \infty$) continue decrescunt, (eadem ratione qua respectivæ rectæ DB, DB, in serie primanorum à puncto $A = o$ continue crescunt,) donec pervenitur ad minimam, (sicut in serie primanorum pervenitur ad maximam.) Quod verum est & in aliis seriebus reciprocis.*

Patet, propter proportionem reciprocam.

PROP. XCIV.

Corollarium.

I*N Figura $AD\beta\beta$, (ex primanorum reciprocis) Parallelogramma inscripta $AD\beta$, $AD\beta$, &c. sunt invicem æqualia.*

Habent enim bases & altitudines reciprocas per Prop. 88.

PROP. XCV.

Corollarium.

ET propterea, *Ipsa curva $\beta\beta$ est Hyperbola; cujus centrum A, Asymptotæ AD, $A\delta$.*

Per Prop. 12. lib. 2. Apollonii.

PROP. XCVI.

Corollarium.

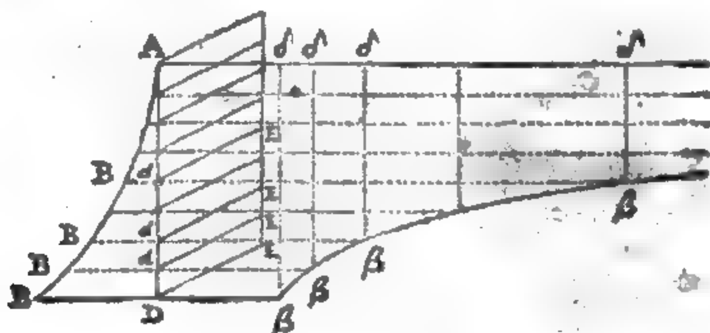
S*I chorda musica AD varie dividatur in punctis DD, &c. sonos edet proportionales rectis $D\beta$, $D\beta$, &c.*

Nam (per principia Musica) eadem chorda (æquabilis & æqualiter tensa) sonos edit longitudinibus reciproce proportionales. Ideoque si chordæ sint ut AD, AD, &c. soni erunt ut Dβ, Dβ, &c. per Prop. 88.

PROP. XCVII.

Corollarium.

SI plana Parallelepipedi (quippe series æqualium) æqualia quadratis rectarum Parallelogrammi ADE ad respectivas rectas Complementi Semiparabolæ ADB (seriem scil. Secundanorum) applicentur; prodibit series rectarum Secundanis reciproce proportionalium: Ex quibus si supponatur conflari figura plana ADβ, erit ea interminabilis; & curva illas terminans duas habebit Asymptotas rectas AD, Aδ.



Probatur eodem modo quo propositiones aliquot præcedentes de serie reciproca seriei Primanorum.

PROP. XCVIII.

Corollarium.

IDem continget, si plana Pyramidis sic applicentur ad rectas complementi semi-paraboloeidis Biquadraticalis; vel plana Pyramidoeidis Parabolici ad rectas Complementi Paraboloeidis Cubicalis.

Nam & istic index seriei dividentis binario superat indicem seriei dividendæ.

PROP. XCIX.

Corollarium.

IN ejusmodi serie Secundanis reciproca, rectæ Dβ, dβ, &c. sunt in reciproca rationis Diametrorum (vel distantiarum à vertice) ratione duplicata, (sive ut dAq, DAq, &c.)

Quia nempe reciproce-proportionales sunt rectis DB, dB, &c. quæ sunt in diametrorum AD, Ad, &c. rationis directæ ratione duplicata. Puta dAq . DAq :: dB . DB :: Dβ . dβ. Ergo $\frac{dAq}{DAq} = \frac{D\beta}{d\beta}$.

PROP. C.

Corollarium.

IN Figura plana (AD$\beta\beta$) ex serie rectarum Secundanis reciprocarum conflata, inscripta Parallelogramma (ADβ, Adβ,) sunt interceptis diametris (DA, dA,) reciproce proportionalia.

Sunt enim (per 23. e6) ut DA×Dβ ad dA×dβ. Est autem (per præced.)

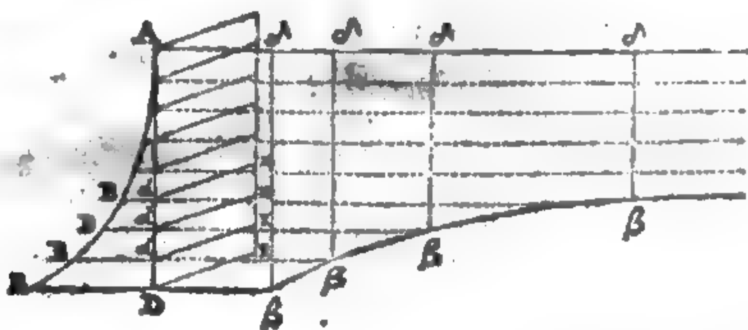
dβ

$d\beta = \frac{DAq}{dAq} D\beta$. Et $dA \times d\beta = \frac{DAq}{dA} D\beta$. Ergo & $DA \times D\beta . dA \times d\beta = \frac{DAq}{dA} D\beta$ :: $dA \times DA \times D\beta . DAq \times D\beta :: dA . DA$.

PROP. CI.

Corollarium.

SI vero figura plana (ADββ) sit ex serie rectarum Tertianis reciprocarum conflata ; (quæ nempe sint rectis complementi Paraboloeidis cubicalis ADB, & Parallelogrammi ADE, tertiæ proportionales ;) erunt rectæ illæ (Dβ, dβ, &c.) in reciprocæ rationis Diametrorum (DA, dA, &c.) ratione triplicata (scil. ut dAc, DAc, &c.) Et Parallelogramma inscripta (ADβ, Adβ, &c.) in reciprocæ rationis diametrorum ratione duplicata, (sive ut dAq, DAq, &c.)



Est enim (ex constructione) $D\beta . d\beta :: dB . DB :: dAc . DAc$. Et propterea etiam $d\beta = \frac{DAc}{dAc} D\beta$. Ergo Parallelogramma $AD\beta . Ad\beta :: DA \times D\beta . dA \times d\beta = \frac{dA \times DAc}{dAc} D\beta = \frac{DAc}{dAq} D\beta :: dAq \times DA \times D\beta . DAc \times D\beta :: dAq . DAq$. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Atque eodem modo de aliis ejusmodi figuris planis ex qualibet rectarum *serie reciproca* conflatis judicandum erit ; ut & de Parallelogrammis (sive rectangulis sive obliquangulis, prout situs figuræ postulat,) ipsis inscriptis.

Quod ad Aream autem attinet istarum figurarum ex seriebus reciprocis constantium ; quærenda est illa eodem fere modo quo supra in seriebus directis. Ubi autem series directæ indices habent 1, 2, 3, &c. ut quæ supra seriem Æqualium tot gradibus ascendunt ; habebunt hæ quidem (illis reciprocæ) suos indices contrarios negativos $-1, -2, -3$, &c. tanquam tot gradibus infra seriem Æqualium descendentes. Prout autem illæ ab 0 ciphra vel Nihilo continuo crescunt, hæ contra ab ∞ Infinito continue decrescunt ; atque ut illic terminus maximus, hic minimus, seriem claudit : (quæ tamen & pro arbitrio continuanda supponitur, quousque libet illic crescendo, hic decrescendo.) Adeoque, ut illic figura Circumscripta (parallelogrammum puta vel prisma) sive series totidem terminorum Maximo æqualium ; hic, figura Inscripta, sive series totidem terminorum Minimo æqualium, habenda est pro communi mensura ad quam facienda est comparatio ; utrobique ad illum terminum respectu habito qui seriem claudit.

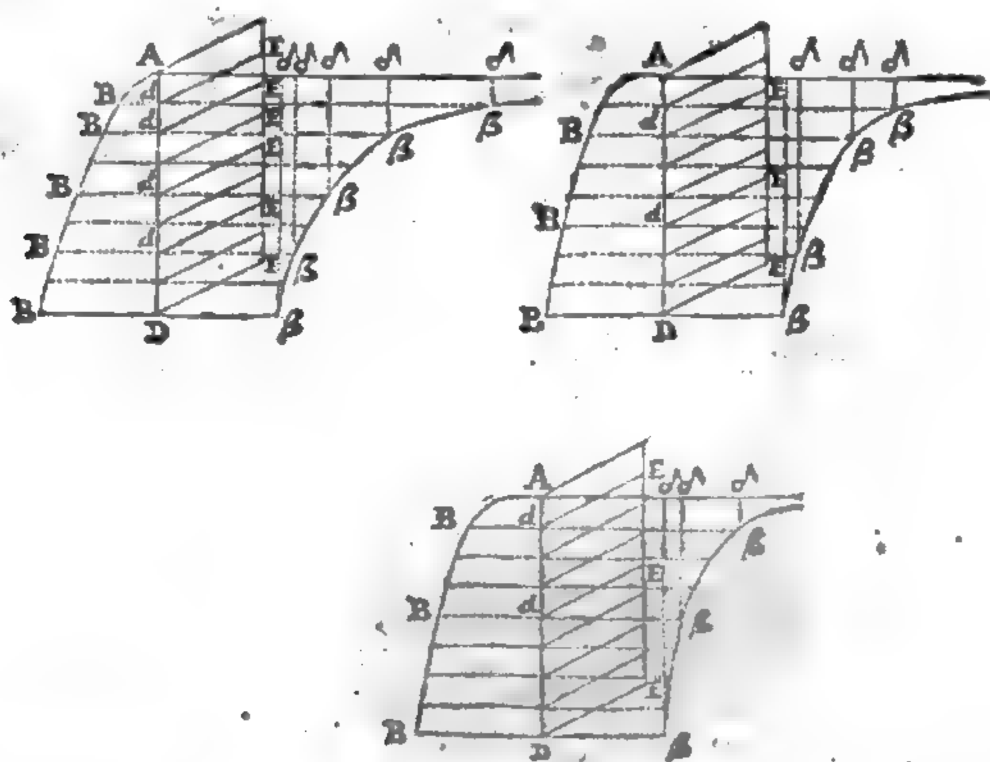
Neque interim mirum cuiquam videatur (ut ut fortassis inexspectatum,) si figuræ interminatæ rationem ad datam aliam terminatam inquiram. Quamvis enim hujusmodi figuræ ADβ (ut ut ex parte Dβ ad libitum terminatæ, uti modo in his scholiis dictum est,) supponantur ex parte δβ in infinitum continuatæ (per Prop. 91.) non tamen propterea vel nullam vel semper infinitam rationem habituræ sunt ad datam figuram terminatam, puta ad parallelogrammum æque altum super eadem basi Dβ descriptum. Quod eo quidem facilius assensum obtinere posse videatur, cum id ipsum in una quadam figura solida (quam *Hyperbolicam acutam infinitam* vocat) jam ostenderit Torricellius Sed neque semper

ſemper rationem habituræ ſunt finitam, ſed aliquando vel infinitam, vel etiam (ſi id ſine ſolœciſmo dici poſſit) majorem quam infinitam. Nempe, ſi eadem ratione abbreviantur rectæ $\delta\beta$, qua prolongantur rectæ $d\beta$, erit ea ratio infinita; ubi nempe prolongatio unius æquipollet abbreviationi alterius, (& propterea figuræ infinitæ continuatæ ratio ex utraque compoſita æquipollet figuræ alicui æquabiliter in infinitum continuandæ:) Si vero minori ratione abbreviantur rectæ $\delta\beta$ quam prolongantur $D\beta$, futura eſt ratio pluſquam infinita; tunc enim prolongatio harum præpollet (ſeu pluſquam æquipollet) illarum abbreviationi: Si autem majori ratione decreſcunt rectæ $\delta\beta$ quam creſcunt rectæ $D\beta$, præpollet earum decrementum incremento harum; adeoque futura eſt ratio finita, minor ſiquidem quam infinita. (Et quidem ſecundum hoc κριτήριον, non modo de figuris hiſce quas jam tractamus, ſed de aliis etiam quibuſvis interminabilibus, ſive planis ſive ſolidis, ad terminatas aliquas comparatis, judicandum erit: quæ, credo, ſpeculatio non videbitur injucunda.) Quæ autem futura eſt in ſingulis ratio, ſequentibus aliquot propoſitionibus (regulam Prop. 64 ſecuti) indicabimus.

PROP. CII.

Theorema.

SI figura $AD\beta\beta$ verticem habeat $A\delta$ infinitum, & perpetuo latitudine decreſcat ad baſin uſque $D\beta$, ſecundum ſeriem aliquam reciprocam ſeriei cuilibet directæ (earum puta quæ prop. 59. memorantur,) quæ indicem habeat minorem quam 1; habebit illa ad parallelogrammum ſuper eadem baſi æque-altum rationem finitam; eam nempe quam habet 1 ad iſtius ſeriei reciprocæ indicem unitate auctum.



Exempli gratia; ſunto ſeries directæ ſubſecundanorum, ſubtertianorum, ſubquartanorum, &c. quarum, indices $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. (unitate minores;) ſeries his reciprocæ indices habebunt $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, &c. (Nam ſi ſupponatur ſeries æqualium, cujus index 0, per illas dividi, ſeries diviſione provenientes habebunt indices $0-\frac{1}{2}$, $0-\frac{1}{3}$, $0-\frac{1}{4}$, &c. hoc eſt $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, &c. (per prop. 81.) quibus ſi (juxta regulam Prop. 64.) addatur 1, fient $-\frac{1}{2}+1$, $-\frac{1}{3}+1$, $-\frac{1}{4}+1$, &c. hoc eſt, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. & propterea ratio totius figuræ ad parallelogrammum inſcriptum (ſuper eadem baſe æque-altum,) ut 1 ad $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. vel ut 2 ad 1, 3 ad 2, 4 ad 3, &c.

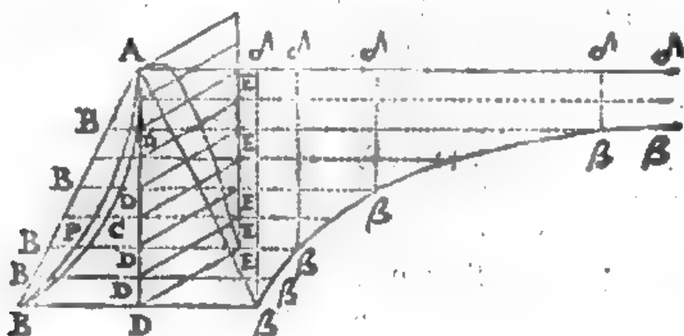
Et pari modo, ſi ſumatur ſeries reciproca ſeriei radicum cubicarum ſecundanorum, vel radicum biquadraticarum ſecundanorum, aut tertianorum, vel radicum ſuperſolidarum ſecundanorum, tertianorum, aut quartanorum, (quarum indices

dices sunt $\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5},$) aut alii cuivis seriei, cujus index est unitate minor. Quia reciprocarum serierum indices negativi his contrarii (puta $-\frac{2}{3}, -\frac{2}{4}$, &c.) additione unitatis fient affirmativi, adeoque ratio quam habet 1 ad indices illos sic auctos, erit ratio finita; quippe numeri positivi ad positivum.

PROP. CIII.

Theorema.

SI vero ejusmodi Figura $AD\beta\beta$ sic continue decrescat juxta seriem quæ sit reciproca directæ indicem habenti unitati æqualem (nempe seriei Primanorum;) habebit illa ad Parallelogrammum inscriptum rationem infinitam: eam nempe quæ est 1 ad 0.

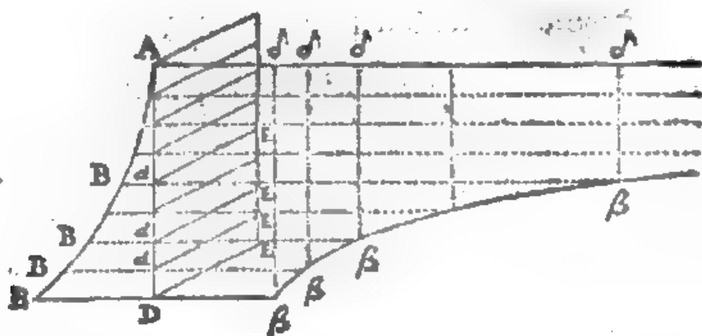


Cum enim series primanorum indicem habeat 1, series huic reciproca indicem habebit -1, ideoque (per Prop. 64.) ratio proveniens erit 1 ad $-1+1$. hoc est 1 ad 0.

PROP. CIV.

Theorema.

SI denique ejusmodi Figura $AD\beta\beta$, sic continue decrescat juxta seriem quæ sit reciproca directæ indicem habenti unitate majorem; habebit illa ad Parallelogrammum inscriptum rationem plusquam infinitam: qualem nempe habere supponatur numerus positivus ad numerum negativum, sive minorem nihilo. Nempe eam, quam habet 1 ad indicem unitate auctum.



Puta cum indices seriei Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. sint 2, 3, 4, &c. (unitate majores,) indices serierum illis reciprocarum erunt -2, -3, -4, &c. qui quamvis unitate augeantur (juxta Prop. 64.) manebunt tamen negativi, puta $-2+1=-1$, $-3+1=-2$, $-4+1=-3$, &c. & propterea ratio quam habet 1 ad indices illos sic auctos, puta 1 ad -1, 1 ad -2, 1 ad -3, &c. major erit quam infinita, sive 1 ad 0; quia nempe rationum consequentes sunt minores quam 0.

Atque idem continget, si sumatur reciproca seriei radicum Quadraticarum Tertianorum, Quartanorum, Quintanorum, &c. (cujus indices sunt $\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}$, &c.) vel radicum Cubicarum Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. (cujus indices sunt $\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}$, &c.) aut cuivis denique seriei cujus index est unitate major. Ut patet.

PROP. CV.

Theorema.

SI ejusmodi figura $AD\beta\beta$ verticem habens $A\delta$ infinitum & basin $D\beta$ determinatam, rationem habeat ad inscriptum Parallelogrammum $AD\beta\delta$ majorem quam infinitam; eadem figura $AD\beta\beta$ verticem habens AD infinitum & basin $\delta\beta$ determinatam, rationem habebit ad inscriptum Parallelogrammum $A\delta\beta D$ minorem quam infinitam (finitam nempe:) Et contra, si situ illo considerata rationem habeat minorem quam infinitam; situ hoc habebit rationem majorem quam infinitam: Si denique in situ uno rationem habeat simpliciter infinitam (puta neque majorem neque minorem,) etiam & situ altero habebit rationem simpliciter infinitam.

Nam verbi gratia, in serie Secundanis reciproca, cum sint (per Prop. 99.) rectæ $D\beta$, $D\beta$, in diametrorum AD, AD, ratione reciprocæ duplicata: erunt è converso rectæ AD, AD, hoc est $\delta\beta$, $\delta\beta$, in rectarum $D\beta$, $D\beta$, hoc est, diametrorum $A\delta$, $A\delta$, ratione reciprocæ subduplicata; adeoque ipsæ $\delta\beta$, $\delta\beta$, &c. sunt series Subsecundanis reciproca. Et contra. Atque (cum idem etiam in aliis ejusmodi seriebus contingat,) patet propositum per Prop. 102, & 104.

In serie vero primanis reciproca; cum (per Prop. 88.) rectæ $D\beta$, $D\beta$, sint diametris AD, AD, reciproce proportionales; erunt etiam rectæ $\delta\beta$, $\delta\beta$ diametris suis $A\delta$, $A\delta$, reciproce proportionales, ipsæque $\delta\beta$, $\delta\beta$, series item primanis reciproca. Constat ergo propositum per Prop. 103.

PROP. CVI.

Theorema.

SI series aliqua reciproca per seriem aliam (sive reciprocam sive directam) multiplicetur aut dividatur, vel etiam aliam multiplicet aut dividat; eædem leges observandæ sunt quæ in seriebus directis prop. 73 & 81.

Exempli gratia. Si series Secundanis reciproca (puta $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}$, &c.) cujus index -2 respective multiplicetur in seriem Tertianis reciprocam (puta $\frac{1}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}$, &c.) cujus index est -3; prodibit series Subquintanis reciproca ($\frac{1}{1}, \frac{1}{32}, \frac{1}{243}$, &c.) cujus index $-5 = -2 -3$ ut patet.

Item si series Tertianis reciproca ($\frac{1}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}$, &c.) cujus index -3; respective multiplicetur per seriem Secundanorum (1, 4, 9, &c.) cujus index 2; prodibit series $\frac{1}{1}, \frac{4}{8}, \frac{9}{27}$, &c. hoc est $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, &c. Primanis reciproca, cujus index $-1 = -3 + 2$.

Item si series Subsecundanis reciproca ($\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$, &c.) cujus index $-\frac{1}{2}$; respective multiplicetur in seriem Secundanorum (1, 4, 9, &c.) cujus index 2; prodibit series ($\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{3}}$, &c. vel $\frac{1}{1}\sqrt{1}, \frac{4}{2}\sqrt{2}, \frac{9}{3}\sqrt{3}$, &c. vel $1\sqrt{1}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{3}$, &c. vel $\sqrt{1}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$, &c.) radicum quadraticarum cuborum seu tertianorum, cujus index $\frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + 2$.

$\frac{1}{1}$)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1} = 1$
$\frac{1}{4}$)	$\frac{1}{2}$	($\frac{4}{2} = 2$
$\frac{1}{9}$)	$\frac{1}{3}$	($\frac{9}{3} = 3$
	&c.	

$\frac{1}{1}$)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$
$\frac{1}{2}$)	$\frac{1}{4}$	($\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$)	$\frac{1}{9}$	($\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
	&c.	

Porro, si series Secundanis reciproca, cujus index -2, dividat seriem Primanis reciprocam, cujus index -1; prodibit series Primanorum, cujus index $1 = -1 + 2$, nempe -1 minus -2.

$\frac{1}{1}$)	1	(1
$\frac{1}{2}$)	4	(8
$\frac{1}{3}$)	9	(27
	&c.	

Item si series Primanis reciproca, cujus index -1, dividat seriem secundanis reciprocam, cujus

jus index -2; prodibit series Primanis reciproca, cujus index $-1 = -2 + 1$; nempe -2 minus -1.

Item, si series Primanis reciproca, cujus index -1, dividat seriem Secundanorum, cujus index 2; prodibit series Tertianorum, cujus index $3 = 2 + 1$, nempe 2 minus -1.

1)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1}$
4)	$\frac{1}{2}$	($\frac{1}{8}$
9)	$\frac{1}{3}$	($\frac{1}{27}$
	&c.	

Item si seriem Primanis reciprocam, cujus index -1, dividat series Secundanorum, cujus index 2; prodibit series Tertianis reciproca, cujus index $-3 = -1 - 2$, nempe -1 minus 2.

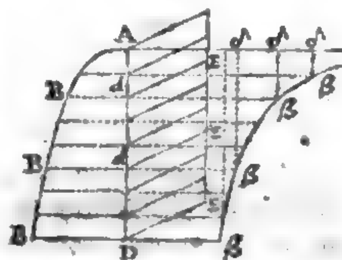
Atque idem continget, in aliis quibusvis hujusmodi seriebus. Adeoque constat propositum.

PROP. CVII.

Corollarium.

ET propterea; *Si ad hujusmodi figuram $AD\beta\delta$, (ex una parte in infinitum productam) juxta quamcunque seriem reciprocam, aptetur (eo modo quo 9 Prop. Con. Sect. & alibi supra ostendi;) Pyramidoeides vel Conoeides inversum, (seu potius Calatoeides:) habebit illud ad Cylindrum aut Prisma inscriptum, (super eadem basi æque-altum) eam rationem, sive finitam sive infinitam sive plusquam infinitam, quam præcedentia Theoremata docebunt.*

Puta, si planum sit rectarum series Subtertianis reciproca, cujus index $-\frac{1}{3}$, adeoque ratio quam habet ad parallelogrammum inscriptum (per Prop. 64, & 102) ut 1 ad $\frac{2}{3}$ $(= -\frac{1}{3} + 1)$ hoc est, ut 3 ad 2: solidum ex totidem planis constans in rectarum earum ratione duplicata, erit series Quadratis subtertianorum reciproca, cujus index (per Prop. 106.) $-\frac{2}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$, vel $-\frac{1}{3}$ plus $-\frac{1}{3}$, & ratio illius solidi ad inscriptum cylindrum vel prisma (super eadem basi æque-altum) ut 1 ad $\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} + 1$, vel ut 3 ad 1 utrobique ratio finita. Per prop. 64 & 102.



Si planum, sit series Subsecundanis reciproca, cujus index $-\frac{1}{2}$, adeoque ratio ipsius ad Parallelogrammum inscriptum ut 1 ad $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1$, vel ut 2 ad 1: (per Prop. 102,) solidum ex totidem planis in rectarum ratione duplicata constans, erit series Quadratis Subsecundanorum reciproca, vel (quod tantundem valet) series Primanis reciproca, cujus index $-\frac{2}{2}$, vel $-1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ Ideoque ratio hujus solidi ad Cylindrum vel Prisma (super eadem basi æque-altum) ut 1 ad $-1 + 1 = 0$. (per Prop. 103.) Nempe illic ratio finita, hic simpliciter infinita.

Si planum sit series Quadratis Subtertianorum reciproca, cujus index $-\frac{2}{3}$, ejusque ratio ad Parallelogrammum inscriptum ut 1 ad $\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} + 1$, vel ut 3 ad 1. (per Prop. 102.) solidum ex planis totidem in rectarum illarum duplicata ratione constans, erit series Biquadratis Subtertianorum reciproca, cujus index $-\frac{4}{3} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}$, & propterea ratio ipsius ad inscriptum Cylindrum vel Prisma super eadem basi æque-altum, ut 1 ad $-\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$, vel ut 3 ad -1 (per Prop. 104.) Nempe illic ratio finita, hic plusquam infinita.

Si planum sit series Primanis reciproca, cujus index -1, adeoque ratio quam habet ad Parallelogrammum inscriptum ut 1 ad $-1 + 1 = 0$: (per Prop. 103.) Solidum ex planis in rectarum illarum ratione duplicata constans, erit series Quadratis Primanorum (hoc est, Secundanis) reciproca, cujus index -2, & propterea

 ratio

ratio ipsius ad Cylindrum vel Prisma super eadem basi æque-altum, ut 1 ad $-2+1$, seu ut 1 ad -1. (per Prop. 104.) Nempe illic ratio simpliciter infinita, hic plusquam infinita.

Si planum sit series Secundanis reciproca, cujus index -2, adeoque ratio quam habet ad Parallelogrammum inscriptum ut 1 ad $-2+1=-1$. Solidum ex totidem planis in rectarum illarum ratione duplicata constans, erit series Quadratis Secundanorum, hoc est Quartanis, reciproca, cujus index $-4=-2-2$; ejusque ratio ad Cylindrum vel Prisma debite inscriptum, ut 1 ad $-4+1=-3$: (per Prop. 104.) Nempe utrobique ratio plusquam infinita.

SCHOLIUM.

Atque ita problema illud (ingeniosum quidem, & non paucis mirandum,) quod Torricellius in una figura solida præstitit, (puta, *Solido Hyperbolico Acuto* in infinitum continuato, æqualem cylindrum constituere) nos in aliis innumeris figuris tam planis quam solidis (præcedentibus sex propositionibus continuis) præstitimus. Puta, *Figuris innumeris specie differentibus, tam planis quam solidis, interminatis, æquales figuras terminatas* (vel saltem, quod tantundem valet, in cognita ratione constitutas) *exhibere.*

Consultius fortassis esset, (si tantum aucupandæ famæ operam darem,) celata methodo qua huc perventum est, paucas aliquot particulares propositiones (tanquam admirandum quidpiam aut stupendum) demonstrationibus apagogicis ostendisse. Quod veteres olim non raro fecisse, plane suspicor; qui illud sæpius sibi videntur proposuisse, ut ipsos alii admirentur potius quam intelligant; saltem ut illis eorum effatis assensum coacti præbeant, potius quam ut genuinam problematis investigationem intelligant. Atque hinc factum esse credo, quod eorum Analytice (quam quidem ipsos habuisse ex multis ipsius, in demonstrationibus eorum non paucis, vestigiis satis liquet) posteros fere penitus latuerit; (exigua enim plane pars illa est quæ apud Diophantum exstat, si ad egregia illa quo ipsi pervenerunt inventa comparetur:) Ut necesse habuerint præsentis ævi mathematici (*Vieta*, *Oughtredus*, *Harriotus*, *Ghetaldus*, *Cavallerius*, *Torricellius*, *Cartesius*, aliique magni viri,) vel novam excogitare, vel antiquam saltem (conclamatam plane & penitus ignoratam) de novo resuscitare; quod quidem eo successu præstiterunt, ut nostram nunc dierum Analyticen, veterum istam, tanta superstitione celatam, æquare saltem vel superare potius nullus dubitem.

Verum ego mallem libere philosophando, fontes ipsos aperire, ut eadem opera possit lector & propositionum demonstrationes & methodum qua istuc pervenerim perspicere; unde & ipse possit proprio marte ejusmodi alias innumeras investigare, quas ego (ne tædio sim) lubens prætereo, contentus eo digitum intendisse, unde alii alia nostris similia pro libitu depromant.

Licuisset quidem & præmissis multa subjungere, & multa passim interpolare, quæ ex principiis jam traditis facile deduci possent. Verum cum ea, quæ jam tradidi, mihi videantur abunde sufficere, ut & ipsa perspicue satis intelligantur, & perfectam satis *serierum* (tam simplicium quam compositarum & utrisque Reciprocarum) tractationem videantur continere: ad series *Conjunctas* (sive ad Binomiorum sive Apotomarum formam) explicandas, festinandum sentio.

PROP. CVIII.

Theorema.

SI series Æqualium serie Primanorum respective mulctetur (puta, si primus terminus hujus à primo illius auferatur, secundus à secundo, &c.) Residua erunt semissis totius: sin ita augeatur; Aggregatorum series erit expositæ seriei Æqualium sesquialtera.

Intellige, si Æqualium & Primanorum terminus ultimus idem sit vel æqualis: (Quod & in sequentibus aliquoties intelligendum erit:) sin fuerint inæquales, non tamen erit difficile rationes provenientes invenire; quod monuisse sufficiat, cum id quilibet suo marte præstare poterit.

Sit

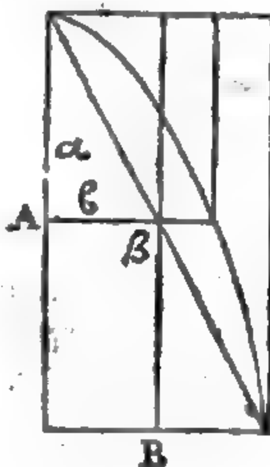
Sit verbi gratia terminus æqualium quilibet & primanorum maximus R; ejusque pars infinite parva dicatur $a = \frac{R}{\infty}$; numerus terminorum, omnium (vel figuræ altitudo) A: si termini

	$R - 0a$	$R + 0a$
	$R - 1a$	$R + 1a$
	$R - 2a$	$R + 2a$
	$R - 3a$	$R + 3a$
	&c.	&c.
continuentur in infinitum usque ad	$R - R$	$R + R$
erit Residuorum & Aggregatorum summa	$AR - \frac{1}{2}AR$	$AR + \frac{1}{2}AR$

Nam omnium Æqualium aggregatum erit AR (ut patet;) Primanorum aggregatum ejusdem semissis $\frac{1}{2}AR$, (per Prop. 2.) Ergo $AR - \frac{1}{2}AR = \frac{1}{2}AR$, & $AR + \frac{1}{2}AR = \frac{3}{2}AR$. Nempe seriei Æqualium (AR) illud est $\frac{1}{2}$, hoc $\frac{3}{2}$: prout affirmatur. Hoc est, erit illud ad seriem Æqualium ut $\frac{1}{2}$ ad 1, vel ut 1 ad 2: hoc autem, ut $\frac{3}{2}$ ad 1, vel ut 1 ad $\frac{2}{3}$, vel 3 ad 2.

PROP. CIX.
Corollarium.

Ergo, *Si Parallelogrammo auferatur Triangulum (super eadem vel æquali base æque-altum,) Residuum (quod quidem & ipsum erit Triangulum inversum) erit Parallelogrammi semissis: Sin addatur Triangulum, erit aggregatum (nempe Trapezium) sesquialterum.*



Patet ex præcedenti; est enim Parallelogrammum series Æqualium; Triangulum, series Primanorum.

PROP. CX.
Corollarium.

Item, *Cylindrus Parabolice excavatus, est pleni semissis. (Quod idem verum est de Prismate analogice excavato.)*

Nempe si ex Cylindro (serie nempe Æqualium) eximatur Conoeides Parabolicum (super eadem base æque altum) quod quidem est series Primanorum (per Prop. 4, vel 60.) quod reliquum est erit semissis totius per Prop. 108.
Atque idem accidet si Prismati eximatur Pyramidoeides Parabolicum.

PROP. CXI.
Theorema.

Si Series Æqualium mulctetur serie Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Residua erunt totius duo Trientes, tres Quadrantes, quatuor Quintantes, &c. Sin ita augeatur, erunt Aggregata ejusdem Sesquitertium, Sesquiquartum, Sesquiquintum, &c.

Nempe si Termini	$R^2 \mp 0a^2$	$R^3 \mp 0a^3$	$R^4 \mp 0a^4$
	$R^2 \mp 1a^2$	$R^3 \mp 1a^3$	$R^4 \mp 1a^4$
	$R^2 \mp 4a^2$	$R^3 \mp 8a^3$	$R^4 \mp 16a^4$
	$R^2 \mp 9a^2$	$R^3 \mp 27a^3$	$R^4 \mp 81a^4$
	&c.	&c.	&c.
continuentur usque ad	$R^2 \mp R^2$	$R^3 \mp R^3$	$R^4 \mp R^4$
erunt summæ (per Prop. 44.)	$AR^2 \mp \frac{1}{3}AR^2$	$AR^3 \mp \frac{1}{4}AR^3$	$AR^4 \mp \frac{1}{5}AR^4$
Hoc est, Residuorum summa	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.	$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.	$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ &c.
Aggregatorum summa	$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.	$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.	$1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ &c.

PROP. CXII.

Corollarium.

ERgo, *si Parallelogrammo auferatur complementum Semi-parabolæ, Semi-paraboloeidis cubicalis, biquadraticalis, &c. Residuum (puta Semi-parabola, Semi-paraboloeides cubicale, biquadraticale, &c.) erit* $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, *&c. totius Parallelogrammi: sin eidem Parallelogrammo ejusmodi complementum addatur, erit aggregatum* $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, *&c. ejusdem Parallelogrammi.*

Patet ex præcedente.

PROP. CXIII.

Corollarium.

ITem, *Cylindrus Conice excavatus, (vel Prisma Pyramidice,) continet integri duos trientes. Et similiter de aliis excavationibus (mutatis mutandis) fiet judicium.*

Patet ex Prop. 111. subducta quippe serie secundanorum, ex serie æqualium.

PROP. CXIV.

Theorema.

SI Series æqualium mulctetur serie subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum, &c. Residua erunt totius Triens, Quadrans, Quintans, &c. Sin ita augeatur, erunt Aggregata ejusdem quinque Trientes, septem Quadrantes, novem Quintantes, &c. vel, duplum minus Triente, Quadrante, Quintante, &c.

Nempe si termini.	$\sqrt{R} \mp \sqrt{0a}$	$\sqrt[3]{R} \mp \sqrt[3]{0a}$	$\sqrt[4]{R} \mp \sqrt[4]{0a}$
	$\sqrt{R} \mp \sqrt{1a}$	$\sqrt[3]{R} \mp \sqrt[3]{1a}$	$\sqrt[4]{R} \mp \sqrt[4]{1a}$
	$\sqrt{R} \mp \sqrt{2a}$	$\sqrt[3]{R} \mp \sqrt[3]{2a}$	$\sqrt[4]{R} \mp \sqrt[4]{2a}$
	$\sqrt{R} \mp \sqrt{3a}$	$\sqrt[3]{R} \mp \sqrt[3]{3a}$	$\sqrt[4]{R} \mp \sqrt[4]{3a}$
	&c.	&c.	&c.
Continuentur ad	$\sqrt{R} \mp \sqrt{R}$	$\sqrt[3]{R} \mp \sqrt[3]{R}$	$\sqrt[4]{R} \mp \sqrt[4]{R}$
Erunt summæ (per prop. 54.)	$A\sqrt{R} \mp \frac{2}{3}A\sqrt{R}$.	$A\sqrt[3]{R} \mp \frac{3}{4}A\sqrt[3]{R}$.	$A\sqrt[4]{R} \mp \frac{4}{5}A\sqrt[4]{R}$
Hoc est Residuorum summa	$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$
Aggregatorum summa	$1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$	$1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$	$1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$

PROP. CXV.

Corollarium.

ERgo, *Si Parallelogrammo auferatur Parabola, Paraboloeides Cubicale, Biquadraticale, &c. Residuum erit totius Triens, Quadrans, Quintans, &c. Sin addatur, erit Aggregatum Parallelogrammi duplum minus Triente, Quadrante, Quintante, &c.*

Sequitur ex præced.

PROP. CXVI.

Theorema.

PAri modo judicandum erit in seriebus aliis seriei æqualium subducendis vel addendis; quarum quantitas innotescit ex prop. 59. vel 64.

Puta

Puta si termini	$\sqrt{R^3} \mp \sqrt{0a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \mp \sqrt[3]{0a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \mp \sqrt[3]{0a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \mp \sqrt{1a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \mp \sqrt[3]{1a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \mp \sqrt[3]{1a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \mp \sqrt{8a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \mp \sqrt[3]{4a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \mp \sqrt[3]{16a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \mp \sqrt{27a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \mp \sqrt[3]{9a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \mp \sqrt[3]{81a^4}$.
	&c. ad	&c. ad	&c. ad
continuentur ad	$\sqrt{R^3} \mp \sqrt{R^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \mp \sqrt[3]{R^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \mp \sqrt[3]{R^4}$.
erit summa	$A\sqrt{R^3} \mp \frac{2}{5} A\sqrt{R^3}$	$A\sqrt[3]{R^2} \mp \frac{3}{5} A\sqrt[3]{R^2}$	$A\sqrt[3]{R^4} \mp \frac{3}{7} A\sqrt[3]{R^4}$.
Hoc est, Residua	$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$	$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$	$1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$
Aggregata	$1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$	$1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$	$1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$

Et similiter (mutatis mutandis) in aliis quibuscunque.

PROP. CXVII.

Theorema.

SI exponatur series Æqualium mulctata serie Primanorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Placet autem pro notis 1 *a*, 2 *a*, 3 *a*, &c. (in præcedentibus propositionibus usurpatis) jam substituere *a*, *b*, *c*, &c. quo melius operationis processus perspiciatur.

	Seriei	Quadrata.	Cubi
	$R - 0$	$R^2 - 0R + 00$.	$R^3 - 0R^2 + 00R - 000$
	$R - a$	$R^2 - 2aR + a^2$	$R^3 - 3aR^2 + 3a^2R - a^3$
	$R - b$	$R^2 - 2bR + b^2$	$R^3 - 3bR^2 + 3b^2R - b^3$
	$R - c$	$R^2 - 2cR + c^2$	$R^3 - 3cR^2 + 3c^2R - c^2$
	&c. ad	&c. ad	&c. ad
	$R - R$	$R^2 - 2RR + R^2$	$R^3 - 3RR^2 + 3R^2R - R^3$
	$AR - \frac{1}{2}AR$	$AR^2 - \frac{2}{2}AR^2 + \frac{1}{3}AR^2$	$AR^3 - \frac{3}{2}AR^3 + \frac{3}{3}AR^3 - \frac{1}{4}AR^3$
nempe	$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	$1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
vel	$\frac{1}{2}$	$\frac{1 \times 2}{2 \times 3}$	$\frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4}$

Et sic deinceps, continue multiplicando numeros Arithmetice-proportionales, (prout potestatis gradus postulat) ab 1 & 2, unitate continue crescentes.

Et quidem nihil sunt quam totidem series Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. inversæ.

PROP. CXVIII.

Theorema.

SI exponatur series Æqualium mulctata serie Secundanorum: Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium rationem habebunt cognitam. Nempe

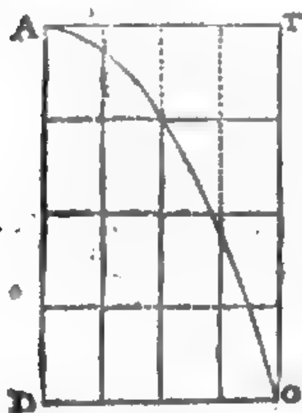
	Seriei	Quadrata	Cubi
	$R^2 - 00$	$R^4 - 00R^2 + 00$	$R^6 - 00R^4 + 00R^2 - 00$
	$R^2 - a^2$	$R^4 - 2a^2R^2 + a^4$	$R^6 - 3a^2R^4 + 3a^4R^2 - a^6$
	$R^2 - b^2$	$R^4 - 2b^2R^2 + b^4$	$R^6 - 3b^2R^4 + 3b^4R^2 - b^6$
	$R^2 - c^2$	$R^4 - 2c^2R^2 + c^4$	$R^6 - 3c^2R^4 + 3c^4R^2 - c^6$
	&c. ad	&c. usque ad	&c. usque ad
	$R^2 - R^2$	$R^4 - 2R^2R^2 + R^4$	$R^6 - 3R^2R^4 + 3R^4R^2 - R^6$
summa	$AR^2 - \frac{1}{3}AR^2$	$AR^4 - \frac{2}{3}AR^4 + \frac{1}{5}AR^4$	$AR^6 - \frac{3}{3}AR^6 + \frac{3}{5}AR^6 - \frac{1}{7}AR^6$
nempe	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	$1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$	$1 - \frac{3}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{48}{105}$
vel	$\frac{2}{3}$	$\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$	$\frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}$

Et

Et sic deinceps, continue multiplicando numeros Arithmetice-proportionales (quousque gradus potestatis postulat) à 2 & 3 continue binario crescentes.

PROP. CXIX.
Corollarium.

ET propterea, *Conoeides (vel Pyramidoeides) Semiparabolæ (aut etiam Parabolæ) circa ipsius ordinatim-applicatam aptatum, erit ad Cylindrum (vel Prisma) ejusdem basis & altitudinis, ut* 8 *ad* 15.



Nempe ut Quadrata residuorum seriei Æqualium mulctatæ serie Secundanorum, (ad totidem maximo æqualium.) Nam si volvendo Semiparabolam ADO circa ipsius ordinatim-applicatam DO, ut axem (vel etiam alias, ut Prop. 9. Con. Sect. diximus,) formetur Conoeides (vel Pyramidoeides) cujus vertex O: erunt plana illa Conoeides (vel Pyramidoeides) constituentia, ut Quadrata seriei Æqualium serie Secundanorum mulctatæ: (Nam rectæ in Semiparabola ADO diametro AD parallelæ, sunt residuæ Æqualium ablatis Secundanis, in complemento ATO repertis, ut patet ex dictis Prop. 23.) Ideoque ad totidem maximo æqualia (hoc est, Cylindrum vel Prisma,) ut 8 ad 15 per præcedentia.

SCHOLIUM.

Et pari modo de Conoeidibus vel Pyramidoeidibus ad Paraboloeidis cujusvis ordinatim applicatam aptatis, judicum fiet, ope sequentium propositionum. Puta in Paraboloeide Cubicali ratio erit ut 9 ad 14; in Biquadratica, ut 32 ad 45; in Supersolidali, ut 25 ad 33, &c. ut in tab. Prop. 126.

PROP. CXX.
Corollarium.

DEinde, *Si infinita series Æqualium mulctata serie Primanorum, in eandem seriem Æqualium eadem serie Primanorum auctam, respective ducatur: Rectangulorum (vel Quadratorum aut etiam similium quarumvis figurarum, ipsis æqualium, aut quidem proportionalium) Aggregatum, ad Aggregatum totidem maximo Æqualium, rationem habebit cognitam.*

Atque idem accidet, si Quadrata seriei mulctatæ ducantur in Quadrata seriei auctæ; & Cubi illius in Cubos hujus; & sic deinceps.

Nempe eædem prodibunt rationes quæ in Prop. 118. Nam

$$\begin{array}{rll} & R-a & Q:R-a:=R^2-2aR+a^2 \\ \text{in} & R+a & Q:R+a:=R^2+2aR+a^2 \\ \text{facit} & R^2-a^2 & R^4-2a^2R^2+a^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & C:R-a:=R^3-3aR^2+3a^2R-a^3 \\ \text{in} & C:R+a:=R^3+3aR^2+3a^2R+a^3 \\ \text{facit} & R^6-3a^2R^4+3a^4R^2-a^6 \\ & \&c. \end{array}$$

& sic in singulis terminis cujusvis potestatis; ut multiplicando patebit.

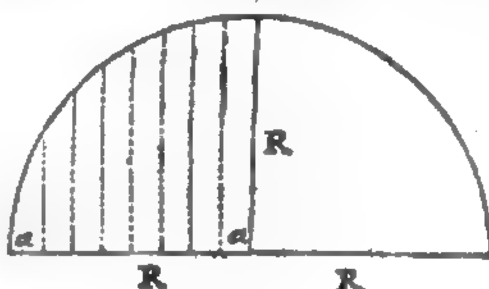
PROP.

PROP. CXXI.

Corollarium.

Ideoque, *Circulus ad Quadratum Diametri, (vel etiam Ellipsis quælibet ad Parallelogrammum sibi circumscriptum,) eam habet rationem, quam habent Radices Quadraticæ universales Residuorum seriei infinitæ Æqualium serie Secundanorum mulctatæ, ad seriem illam Æqualium.*

Nam si circuli Radius ponatur R, (cujus pars infinite parva $\frac{R}{\infty} = a$,) eique insistant Perpendiculares sive sinus recti numero infiniti Quadrantem circuli complentes; erunt illæ Perpendiculares mediæ proportionales inter Diametri Segmenta, (ut notum est;) hoc est,



inter $R+0$, $R+1a$, $R+2a$, $R+3a$, &c.
& $R-0$, $R-1a$, $R-2a$, $R-3a$, &c.
Quorum Rectangula, R^2-00, R^2-1a^2, R^2-4a^2, R^2-9a^2, &c.
Ipsæq; mediæ proportionales $\sqrt{:}R^2-00$. $\sqrt{:}R^2-1a^2$. $\sqrt{:}R^2-4a^2$, $\sqrt{:}R^2-9a^2$, &c.

Quam igitur rationem habet harum radicum universalium Aggregatum, ad totidem maximæ (Radio scil.) æqualium, eam habet Quadrans Circuli (ex illis constans) ad Quadratum Radii (constans ex his;) Adeoque & circulus integer ad quadratum Diametri. Quod erat ostendendum.

Atque idem de qualibet Ellipsi (mutatis mutandis) facile ostendetur; cum ipsius etiam ordinatim-applicatæ sint mediis proportionalibus (inter diametri tranversæ segmenta) Proportionales, & quidem nonnunquam æquales, ut ex Conicorum doctrina notum est.

SCHOLIUM.

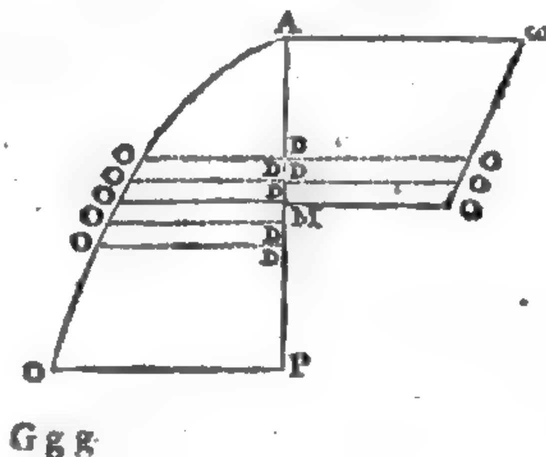
Ratio autem quam innuit hæc propositio, (Circuli nempe ad Quadratum Diametri,) ea est, quam habet Unitas ad numerum intermedium inter 1 & $\frac{4}{3}$ in secunda serie Transversa Tabellæ Prop. 127. Quomodo autem invenietur numerus ille (vel alius quivis istius seriei numeris interponendus) deinceps inquirendum erit.

PROP. CXXII.

Corollarium.

Et proinde, *si supponamus infinitas numero rectas Semiparabolæ cujusvis, in ejusdem continuationis æque-altæ & situ inverso positæ rectas, respective duci; quod provenit solidum ex infinitis illis Rectangulis conflatum, (aut ex Quadratis quæ rectangulis illis sint æqualia,) erit ad Parallelepipedum super eadem base æque-altum, ut Circulus ad Quadratum Diametri. (Et quidem mediæ proportionales erunt in subduplicata ratione ordinatim-applicatarum in Circulo vel Ellipsi.)*

Semiparabolam quamlibet APO, secet recta MO (basi parallela) in duo segmenta æque-alta; & Recta MO dicatur $\sqrt{R}$. Erunt reliquæ ordinatim-applicatæ in segmento superiori ascendendo, $\sqrt{:}R-a$. $\sqrt{:}R-2a$. $\sqrt{:}R-3a$. &c. Et in segmento inferiori descendendo, $\sqrt{:}R+a$. $\sqrt{:}R+2a$. $\sqrt{:}R+3a$. &c. (propter quadrata ordinatim-applicatarum in Parabola, Arithme-



tice-proportionalia.) Ideoque si supponamus semiparabolam ita sectam sic in se replicari, ut punctum F puncto A congruat, totumque segmentum MPO transferatur in situm MAα, (ut ordinatim-applicatæ inferioris segmenti ordinatim-applicatis superioris inverse respondeant) Rectangula, ODo, ODo, &c. erunt $\sqrt{:R^2 - o}$. $\sqrt{:R^2 - a^2}$. $\sqrt{:R^2 - 4a^2}$. $\sqrt{:R^2 - 9a^2}$, &c. ut multiplicatione patebit.

$$\frac{\sqrt{:R - o.}}{\sqrt{:R + o.}} \quad \frac{\sqrt{:R - a.}}{\sqrt{:R + a.}} \quad \frac{\sqrt{:R - 2a.}}{\sqrt{:R + 2a.}} \quad \frac{\sqrt{:R - 3a.}}{\sqrt{:R + 3a.}}$$

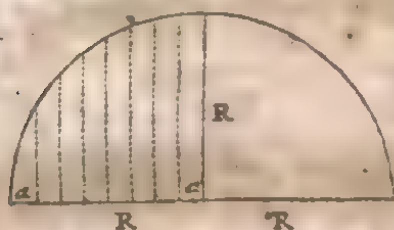
$$\sqrt{:R^2 - o.} \quad \sqrt{:R^2 - a^2.} \quad \sqrt{:R^2 - 4a^2.} \quad \sqrt{:R^2 - 9a^2}, \text{ \&c.}$$

Horum igitur omnium aggregatum, ad maximum ($\sqrt{:R^2 - o:} = \sqrt{R^2} = R$) toties positum, (hoc est, solidum propositum ad Parallelepipedum ejusdem basis & altitudinis,) ut Circulus ad Quadratum Diametri per præced. Et propterea etiam mediæ proportionales erunt in subduplicata ratione ordinatim-applicatarum in circulo vel ellipsi, ut patet.

PROP. CXXIII.

Corollarium.

ITem, *Sphæra (vel Sphæroeides aut etiam Pyramidoeides Ellipticum,) ad Cylindrum (vel Prisma) circumscriptum; est ut series infinita æqualium mulctata serie secundanorum, ad seriem totidem maximo æqualium. Hoc est ut 2 ad 3.*



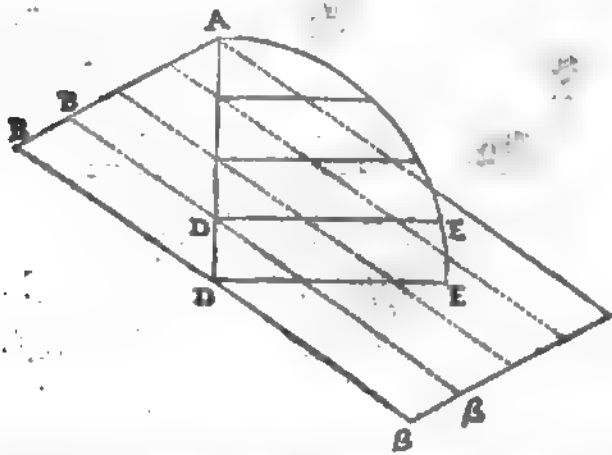
Sequitur ex Prop. 121. Nam si mediæ proportionales inter diametri segmenta, quadrantem circuli (vel ellipseos) complentes, jam fieri supponantur totidem aliorum circulorum invicem parallelorum radii, semissem Sphæræ (vel Sphæroeideos) complentium, (vel similium quorumvis planorum rectæ similiter positæ semi-pyramidoeides Ellipticum constituentium;) erunt hi circuli (vel plana) in duplicata ratione Radiorum suorum (sive rectarum similiter positarum:) Hoc est, ut $R^2 - o$. $R^2 - a^2$. $R^2 - 4a^2$. $R^2 - 9a^2$, &c. (sunt enim rectæ illæ $\sqrt{:R^2 - o}$. $\sqrt{:R^2 - a^2}$. $\sqrt{:R^2 - 4a^2}$. $\sqrt{:R^2 - 9a^2}$, &c. per Prop. 121.) Ideoque horum omnium aggregatum, ad aggregatum omnium maximo æqualium ut 2 ad 3. per Prop. 118.

PROP. CXXIV.

Corollarium.

ITem, *si Trianguli ADB rectæ respective ducantur in rectas Trapezii ADβ (æque-alti, atque cum ipso Triangulo Parallelogrammum complentis;) quæ prodeunt rectangula erunt æqualia totidem similibus planis Conoeideos (vel Pyramidoeideos) Elliptici: Et mediæ proportionales DE, DE, &c. Erunt ordinatim applicatæ in (Circulo, vel saltem) Ellipsi.*

Demon-



Demonstratio facile patet ex dictis ad Prop. 121. & 123. Nam segmenta rectæ Bβ in hac figura tantundem valent atque segmenta Diametri in illa figura.

Si autem tam rectæ AD, DB, sint æquales, quam rectæ AD, DE, ad invicem perpendiculares, erunt ipsæ DE, DE, ordinatim-applicatæ in circulo; sin minus, saltem in Ellipsi. Portio autem sive circuli sive Ellipseos AE, major est aut minor quam Quadrans, prout DB major est aut minor quam Dβ.

PROP. CXXV.

Theorema.

SI exponatur series Æqualium mulctata serie Tertianorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Nempe,

	Seriei	Quadrata	Cubi.
	$R^3 - 000$	$R^6 - 00\,R^3 + 00$	$R^9 - 00\,R^6 + 00\,R^3 - 00$
	$R^3 - a^3$	$R^6 - 2a^3R^3 + a^6$	$R^9 - 3a^3R^6 + 3a^6R^3 - a^9$
	$R^3 - b^3$	$R^6 - 2b^3R^3 + b^6$	$R^9 - 3b^3R^6 + 3b^6R^3 - b^9$
	$R^3 - c^3$	$R^6 - 2c^3R^3 + c^6$	$R^9 - 3c^3R^5 + 3c^6R^3 - c^9$
	&c. ad	&c. usque ad	&c. usque ad
	$R^3 - R^3$	$R^6 - 2R^3R^3 + R^6$	$R^9 - 3R^3R^6 + 3R^6R^3 - R^9$
summa	$AR^3 - \frac{1}{4}AR^3$	$AR^6 - \frac{2}{4}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6$	$AR^9 - \frac{3}{4}AR^9 + \frac{3}{7}AR^9 - \frac{1}{10}AR^9$
nempe	$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$1 - \frac{2}{4} + \frac{1}{7} = \frac{18}{28}$	$1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{7} - \frac{1}{10} = \frac{162}{280}$
vel	$\frac{3}{4}$	$\frac{3\times6}{4\times7}$	$\frac{3\times6\times9}{4\times7\times10}$

Et sic deinceps, continue multiplicando numeros Arithmetice proportionales (quousque cujuslibet potestatis gradus postulat) à 3 & 4, ternario continue crescentes.

PROP. CXXVI.

Theorema.

PAri modo, Si exponatur series Æqualium mulctata serie Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. $1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{9} = \frac{32}{45}$. $1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{9} - \frac{1}{13} = \frac{384}{585}$. $1 - \frac{4}{5} + \frac{6}{9} - \frac{4}{13} + \frac{1}{17} = \frac{6144}{9945}$.

vel $\frac{4}{5}$ $\frac{4\times8}{5\times9}$ $\frac{4\times8\times12}{5\times9\times13}$ $\frac{4\times8\times12\times16}{5\times9\times13\times17}$

Item $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. $1 - \frac{2}{6} + \frac{1}{11} = \frac{50}{66}$. $1 - \frac{3}{6} + \frac{3}{11} - \frac{1}{16} = \frac{750}{1056}$. $1 - \frac{4}{6} + \frac{6}{11} - \frac{4}{16} + \frac{1}{21} = \frac{15000}{22176}$

vel $\frac{5}{6}$ $\frac{5\times10}{6\times11}$ $\frac{5\times10\times15}{6\times11\times16}$ $\frac{5\times10\times15\times20}{6\times11\times16\times21}$

Et sic in aliis quibuslibet; nempe continue multiplicando numeros Arithmetice proportionales (quousque gradus postulat) à 4 & 5, vel 5 & 6, vel 6 & 7, &c. quaternario, vel quinario, vel senario, &c. (secundum indicem seriei subductæ) continue crescentes. Prout inductione patebit. Ad hunc modum,

Ratio quam habent ad seriem maximo æqualium

Seriei Æqualium mulctatæ serie	Residua.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.	Superfolida.	
Primanorum	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}$.	$\frac{2}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{24}$.	$\frac{6}{24}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{120}$.	$\frac{24}{120}\times\frac{5}{6}=\frac{120}{720}$.	Et sic deinceps.
Secundanorum	$\frac{2}{3}$.	$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$.	$\frac{8}{15}\times\frac{6}{7}=\frac{48}{105}$.	$\frac{48}{105}\times\frac{8}{9}=\frac{384}{945}$.	[illegible] $\times\frac{10}{11}=\frac{3840}{10395}$.	
Tertianorum	$\frac{3}{4}$.	$\frac{3}{4}\times\frac{6}{7}=\frac{18}{28}$.	$\frac{18}{28}\times\frac{9}{10}=\frac{162}{280}$.	$\frac{162}{280}\times\frac{12}{13}=\frac{1944}{3640}$.	$\frac{1944}{3640}\times\frac{15}{16}=\frac{29160}{58240}$.	
Quartanorum	$\frac{4}{5}$.	$\frac{4}{5}\times\frac{8}{9}=\frac{32}{45}$.	$\frac{32}{45}\times\frac{12}{13}=\frac{384}{585}$.	$\frac{384}{585}\times\frac{16}{17}=\frac{6144}{9945}$.	$\frac{6144}{9945}\times\frac{20}{21}=\frac{122880}{208845}$.	
Quintanorum	$\frac{5}{6}$.	$\frac{5}{6}\times\frac{10}{11}=\frac{50}{66}$.	$\frac{50}{66}\times\frac{15}{16}=\frac{750}{1056}$.	$\frac{750}{1056}\times\frac{20}{21}=\frac{15000}{22176}$.	$\frac{15000}{22176}\times\frac{25}{26}=\frac{375000}{576576}$.	

Et sic deinceps.

Nempe, si index seriei ablatæ ponatur a; rationem habebunt, ad seriem maximo Æqualium, ipsa

Residua. Quadrata. Cubi.

quam habent $\frac{a}{a+1} \cdot \frac{a}{a+1}\times\frac{2a}{2a+1} \cdot \frac{a}{a+1}\times\frac{2a}{2a+1}\times\frac{3a}{3a+1}$. &c. ad unitatem.

vel $\frac{a}{a+1} \cdot \frac{2a^2}{2a^2+3a+1} \cdot \frac{6a^3}{6a^3+11a^2+6a+1}$. &c.

Vel quam habet Unitas ad $\frac{a+1}{a} \cdot \frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{2a} \cdot \frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{2a}\times\frac{3a+1}{3a}$. &c.

vel $\frac{a+1}{a} \cdot \frac{2a^2+3a+1}{2a^2} \cdot \frac{6a^3+11a^2+6a+1}{6a^3}$. &c.

Atque hoc idem valebit si ablata series sit series Radicum.

Verbi gratia. Si à serie Æqualium auferatur series Subsecundanorum cujus index $\frac{1}{2}$. Nam si ponatur $a=\frac{1}{2}$. Erit $\frac{a+1}{a}=3$. Et $\frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{2a}=3\times2=6$. Et $\frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{a}\times\frac{3a+1}{3a}=3\times2\times1\frac{2}{3}=10$. &c. Sunt autem, in ejusmodi ablationibus, Residua, Quadrata, Cubi, &c. ad seriem maximo æqualium; ut 1 ad 3. 6. 10. &c.

Similiter, si auferatur series Subquartanorum, cujus index $\frac{1}{4}$; & ponatur $a=\frac{1}{4}$. Erit $\frac{a+1}{a}=5$. $\frac{2a+1}{2a}=3$. $\frac{3a+1}{3a}=2\frac{1}{3}$. $\frac{4a+1}{4a}=2$. &c. Et $5\times3=15$. $15\times2\frac{1}{3}=35$. $35\times2=70$. &c. Sunt autem, in ejusmodi Sublationibus, Residua, quadrata, cubi, biquadrata, &c. ut 1 ad 5, 15, 35, 70, &c. Et pariter in ejusmodi aliis, ut infra etiam ulterius patebit.

Interim placet propositiones aliquot præcedentes in Tabellam conjicere, propositioni sequenti subjungendam. Nempe ——

PROP.

PROP. CXXVII.

Theorema.

SI exponatur (infinita) series æqualium mulctata serie (analoga) Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. Residua ipsa, eorumque Quadrata, Cubi, &c. Eam rationem habebunt ad expositam seriem æqualium; quam habet Unitas ad numeros in subjecta Tabella indicatos. Nempe ——

Seriei Æqualium mulctatæ serie

	Resid.	Q	Cubi	Biq.	Superf.	Sext.
Primanorum	$\frac{2}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{24}{6}$	$\frac{120}{24}$	$\frac{720}{120}$	$\frac{5040}{720}$
Secundanorum	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{105}{48}$	$\frac{945}{384}$	$\frac{10395}{3840}$	$\frac{135135}{46080}$
Tertianorum	$\frac{4}{3}$	$\frac{28}{18}$	$\frac{280}{162}$	$\frac{3640}{1944}$	$\frac{58240}{29160}$	$\frac{1106560}{524880}$
Quartanorum	$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{585}{384}$	$\frac{9945}{6144}$	$\frac{208845}{122880}$	$\frac{5221125}{2949120}$
Quintanorum	$\frac{6}{5}$	$\frac{66}{50}$	$\frac{1056}{750}$	$\frac{22176}{15000}$	$\frac{576576}{375000}$	$\frac{17873856}{11250000}$
Sextanorum	$\frac{7}{6}$	$\frac{91}{72}$	$\frac{1729}{1296}$	$\frac{43225}{31104}$	$\frac{1339975}{933120}$	$\frac{49579075}{33592320}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

Sequitur ex præced.

SCHOLIUM.

Verum quo pacto investigabitur, quam habeant rationem serierum illarum Apotomarum Radices Quadraticæ, Cubicæ, &c. ad seriem totidem earum maximæ æqualium: Hic labor, hoc opus est. Nihil enim aliud deest ad Circuli & Ellipseos quadraturam. Ut ex Prop. 121. jam patet, & ex propositionibus aliquot secuturis ulterius patebit.

PROP. CXXVIII.

Theorema.

SI exponatur series Æqualium mulctata serie Subsecundanorum: Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{R}-\sqrt{a}$	$R-2\sqrt{aR}+a$	$R\sqrt{R}-3R\sqrt{a}+3a\sqrt{R}-a\sqrt{a}$
$\sqrt{R}-\sqrt{b}$	$R-2\sqrt{bR}+b$	$R\sqrt{R}-3R\sqrt{b}+3b\sqrt{R}-b\sqrt{b}$
$\sqrt{R}-\sqrt{c}$	$R-2\sqrt{cR}+c$	$R\sqrt{R}-3R\sqrt{c}+3c\sqrt{R}-c\sqrt{c}$
&c. ad	&c. ad	&c. usque ad
$\sqrt{R}-\sqrt{R}$	$R-2\sqrt{RR}+R$	$R\sqrt{R}-3R\sqrt{R}+3R\sqrt{R}-R\sqrt{R}$
$A\sqrt{R}-\frac{2}{3}A\sqrt{R}$	$AR-\frac{4}{3}AR+\frac{1}{2}AR$	$AR\sqrt{R}-\frac{6}{3}AR\sqrt{R}+\frac{3}{2}AR\sqrt{R}-\frac{2}{5}AR\sqrt{R}$
$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$	$1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$	$1-\frac{6}{3}+\frac{3}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$
$\frac{1}{1+2}$	$\frac{1}{1+2+3}$	$\frac{1}{1+2+3+4}$

Et sic deinceps; nempe eam rationem quam habet 1 ad numeros triangulares, sive aggregata numerorum Arithmetice-proportionalium (quousque gradus potestatis postulat) ab 1 continue unitate crescentium.

PROP. CXXIX.

Corollarium.

ET propterea, *Conoeides* (*vel Pyramidoeides*) *Complemento Semiparabolæ circa ipsius Ordinatim-applicatam, est ad Cylindrum* (*vel Prisma*) *ejusdem basis & altitudinis, ut* 1 *ad* 6.

Fig. prop. 119. Nempe ut Quadrata residuorum seriei Æqualium mulctatæ serie Subsecundanorum, ad totidem maximo æqualium. Cum enim in Semiparabolæ complemento AOT, rectæ ipsius diametro AT parallelæ, sint residua Æqualium demptis Subsecundanis (ordinatim-applicatis in semi-parabola AOD;) si volvendo complementum illud AOT circa ipsam OT ut axem (vel etiam alias, ut alibi dictum est,) formetur Conoeides, (aut etiam Pyramidoeides analogum,) cujus vertex O; circuli sic volvendo descripti (vel similia plana similiter posita) erunt in rectarum illarum (ipsi AT parallelarum) ratione duplicata. Hoc est, ut quadrata Residuorum seriei Æqualium sublatis Secundanis; ideoque ut 1 ad 6 per præced.

SCHOLIUM.

Et pariter judicandum erit de Conoeidibus & Pyramidoeidibus complementi Semiparaboloeidis cujusvis circa ipsius ordinatim-applicatam aptatis, juxta propositiones sequentes: Nempe, mutatis mutandis, prout Semiparaboloeidis gradus postulaverit. Puta in semiparaboloeide Cubicali, ut 1 ad 10; in Biquadraticali, ut 1 ad 15; in Supersolidali, 1 ad 21. &c. juxta tabellam Prop. 131.

PROP. CXXX.

Theorema.

SI exponatur series Æqualium mulctata serie Subtertianorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{^3}R - \sqrt{^3}a$	$\sqrt{^3}R^2 - 2\sqrt{^3}aR + \sqrt{^3}a^2$	$\sqrt{^3}R^3 - 3\sqrt{^3}aR^2 + 3\sqrt{^3}a^2R - \sqrt{^3}a^3$
$\sqrt{^3}R - \sqrt{^3}b$	$\sqrt{^3}R^2 - 2\sqrt{^3}bR + \sqrt{^3}b^2$	$\sqrt{^3}R^3 - 3\sqrt{^3}bR^2 + 3\sqrt{^3}b^2R - \sqrt{^3}b^3$
$\sqrt{^3}R - \sqrt{^3}c$	$\sqrt{^3}R^2 - 2\sqrt{^3}cR + \sqrt{^3}c^2$	$\sqrt{^3}R^3 - 3\sqrt{^3}cR^2 + 3\sqrt{^3}c^2R - \sqrt{^3}c^3$
&c. ad	&c. ad	&c. usque ad
$\sqrt{^3}R - \sqrt{^3}R$	$\sqrt{^3}R^2 - 2\sqrt{^3}RR + \sqrt{^3}R^2$	$\sqrt{^3}R^3 - 3\sqrt{^3}RR^2 + 3\sqrt{^3}R^2R - \sqrt{^3}R^3$
$A\sqrt{^3}R - \frac{3}{4}A\sqrt{^3}R$	$A\sqrt{^3}R^2 - \frac{6}{4}A\sqrt{^3}R^2 + \frac{3}{5}A\sqrt{^3}R^2$	$AR - \frac{9}{4}AR + \frac{9}{5}AR - \frac{1}{2}AR$
$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$1 - \frac{6}{4} + \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$	$1 - \frac{9}{4} + \frac{9}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$
$\frac{1}{1+3=4}$	$\frac{1}{4+6=10}$	$\frac{1}{10+10=20}$

Et sic deinceps; continue addendo numeros triangulares seu aggregata numerorum Arithmetice-proportionalium, ut habeatur consequens rationis cujus antecedens est 1.

PROP. CXXXI.

Theorema.

P*Ari modo*, Si exponatur series Æqualium mulctata serie Subquartanorum, Subquintanorum, &c. Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Nam ut in Subductione seriei Subsecundanorum, consequentes rationum fiunt continua additione numerorum Arithmetice-proportionalium, $1+2=3$. $1+2+3=3+3=6$. $1+2+3+4=6+4=10$. $1+2+3+4+5=10+5=15$. $1+2+3+4+5+6=15+6=21$. &c. Ita in Subductione Subtertianorum consequentes rationum fiunt continua additione numerorum illorum

rum (1, 3, 6, 10, 15, 21, &c.) in Subductione Subsecundanorum modo inventorum; nempe $1+3=4$. $4+6=10$. $10+10=20$. $20+15=35$. $35+21=56$. &c. vel $1+1+2=1+3=4$. $4+1+2+3=1+3+6=10$. $10+1+2+3+4=1+3+6+10=20$. $20+1+2+3+4+5=1+3+6+10+15=35$. $35+1+2+3+4+5+6=1+3+6+10+15+21=56$. &c. Deinde ex numerorum jam inventorum (1, 4, 10, 20, 35, 56, &c.) continua additione, fiunt consequentes rationum in Subductione seriei Subquartanorum, (nempe $1+4=5$. $5+10=15$. $15+20=35$. $35+56=91$. &c.) Et ex horum iterum continua additione, fiunt consequentes rationum in Subductione seriei proximæ (Subquintanorum;) Et sic deinceps; ad hunc modum.

Seriei æqualium mulctatæ serie	Ratio quam habent ad seriem maximo æqualium					
	Residua.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.	Supersolida.	Sextana.
Primanor.	$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4+1}=\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{5+1}=\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{6+1}=\frac{1}{7}$.
Subsecun.	$\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{6+4}=\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{10+5}=\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{15+6}=\frac{1}{21}$.	$\frac{1}{21+7}=\frac{1}{28}$.
Subtertia.	$\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4+6}=\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}$.	$\frac{1}{20+15}=\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{35+21}=\frac{1}{56}$.	$\frac{1}{56+28}=\frac{1}{84}$.
Subquart.	$\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{5+10}=\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{15+20}=\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{35+35}=\frac{1}{70}$.	$\frac{1}{70+56}=\frac{1}{126}$.	$\frac{1}{126+84}=\frac{1}{210}$.
Subquint.	$\frac{1}{1+5}=\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{6+15}=\frac{1}{21}$.	$\frac{1}{21+35}=\frac{1}{56}$.	$\frac{1}{56+70}=\frac{1}{126}$.	$\frac{1}{126+126}=\frac{1}{252}$.	$\frac{1}{252+210}=\frac{1}{462}$.
Subsext.	$\frac{1}{1+6}=\frac{1}{7}$.	$\frac{1}{7+21}=\frac{1}{28}$.	$\frac{1}{28+56}=\frac{1}{84}$.	$\frac{1}{84+126}=\frac{1}{210}$.	$\frac{1}{210+252}=\frac{1}{462}$.	$\frac{1}{462+462}=\frac{1}{924}$.

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

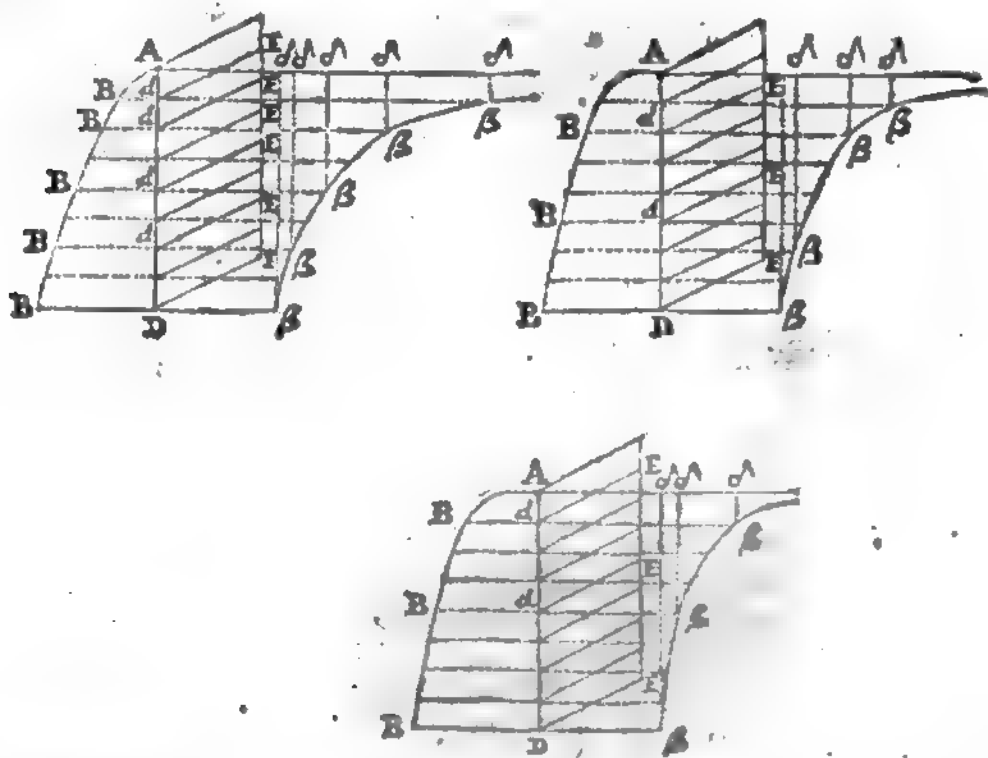
SCHO-

ſemper rationem habituræ ſunt finitam, ſed aliquando vel infinitam, vel etiam (ſi id ſine ſolœciſmo dici poſſit) majorem quam infinitam. Nempe, ſi eadem ratione abbreviantur rectæ $\delta\beta$, qua prolongantur rectæ $d\beta$, erit ea ratio infinita; ubi nempe prolongatio unius æquipollet abbreviationi alterius, (& propterea figuræ infinitæ continuatæ ratio ex utraque compoſita æquipollet figuræ alicui æquabiliter in infinitum continuandæ:) Si vero minori ratione abbreviantur rectæ $\delta\beta$ quam prolongantur $D\beta$, futura eſt ratio pluſquam infinita; tunc enim prolongatio harum præpollet (ſeu pluſquam æquipollet) illarum abbreviationi: Si autem majori ratione decreſcunt rectæ $\delta\beta$ quam creſcunt rectæ $D\beta$, præpollet earum decrementum incremento harum; adeoque futura eſt ratio finita, minor ſiquidem quam infinita. (Et quidem ſecundum hoc κριτήριον, non modo de figuris hiſce quas jam tractamus, ſed de aliis etiam quibuſvis interminabilibus, ſive planis ſive ſolidis, ad terminatas aliquas comparatis, judicandum erit: quæ, credo, ſpeculatio non videbitur injucunda.) Quæ autem futura eſt in ſingulis ratio, ſequentibus aliquot propoſitionibus (regulam Prop. 64 ſecuti) indicabimus.

PROP. CII.

Theorema.

SI figura $AD\beta\beta$ verticem habeat $A\delta$ infinitum, & perpetuo latitudine decreſcat ad baſin uſque $D\beta$, ſecundum ſeriem aliquam reciprocam ſeriei cuilibet directæ (earum puta quæ prop. 59. memorantur,) quæ indicem habeat minorem quam 1; habebit illa ad parallelogrammum ſuper eadem baſi æque-altum rationem finitam; eam nempe quam habet 1 ad iſtius ſeriei reciprocæ indicem unitate auctum.



Exempli gratia; ſunto ſeries directæ ſubſecundanorum, ſubtertianorum, ſubquartanorum, &c. quarum, indices $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. (unitate minores;) ſeries his reciprocæ indices habebunt $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, &c. (Nam ſi ſupponatur ſeries æqualium, cujus index 0, per illas dividi, ſeries diviſione provenientes habebunt indices $0-\frac{1}{2}$, $0-\frac{1}{3}$, $0-\frac{1}{4}$, &c. hoc eſt $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, &c. (per prop. 81.) quibus ſi (juxta regulam Prop. 64.) addatur 1, fient $-\frac{1}{2}+1$, $-\frac{1}{3}+1$, $-\frac{1}{4}+1$, &c. hoc eſt, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. & propterea ratio totius figuræ ad parallelogrammum inſcriptum (ſuper eadem baſe æque-altum,) ut 1 ad $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. vel ut 2 ad 1, 3 ad 2, 4 ad 3, &c.

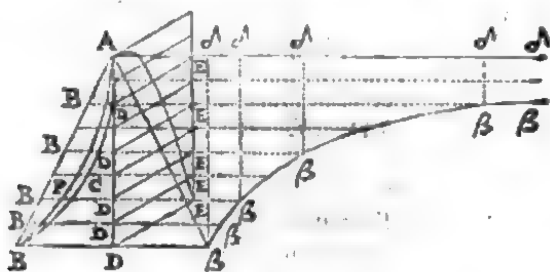
Et pari modo, ſi ſumatur ſeries reciproca ſeriei radicum cubicarum ſecundanorum, vel radicum biquadraticarum ſecundanorum, aut tertianorum, vel radicum ſuperſolidarum ſecundanorum, tertianorum, aut quartanorum, (quarum indices

dices sunt $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$,) aut alii cuivis seriei, cujus index est unitate minor. Quia reciprocarum serierum indices negativi his contrarii (puta $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, &c.) additione unitatis fient affirmativi, adeoque ratio quam habet 1 ad indices illos sic auctos, erit ratio finita; quippe numeri positivi ad positivum.

PROP. CIII.

Theorema.

SI vero ejusmodi Figura A D β β sic continue decrescat juxta seriem quæ sit reciproca directæ indicem habenti unitati æqualem (nempe seriei Primanorum;) habebit illa ad Parallelogrammum inscriptum rationem infinitam: eam nempe quæ est 1 ad 0.

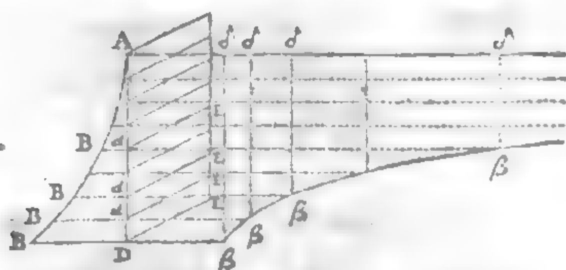


Cum enim series primanorum indicem habeat 1, series huic reciproca indicem habebit -1, ideoque (per Prop. 64.) ratio proveniens erit 1 ad $-1+1$. hoc est 1 ad 0.

PROP. CIV.

Theorema.

SI denique ejusmodi Figura A D β β, sic continue decrescat juxta seriem quæ sit reciproca directæ indicem habenti unitate majorem; habebit illa ad Parallelogrammum inscriptum rationem plusquam infinitam: qualem nempe habere supponatur numerus positivus ad numerum negativum, sive minorem nihilo. Nempe eam, quam habet 1 ad indicem unitate auctum.



Puta cum indices seriei Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. sint 2, 3, 4, &c. (unitate majores,) indices serierum illis reciprocarum erunt -2, -3, -4, &c. qui quamvis unitate augeantur (juxta Prop. 64.) manebunt tamen negativi, puta $-2+1=-1$, $-3+1=-2$, $-4+1=-3$, &c. & propterea ratio quam habet 1 ad indices illos sic auctos, puta 1 ad -1, 1 ad -2, 1 ad -3, &c. major erit quam infinita, sive 1 ad 0; quia nempe rationum consequentes sunt minores quam 0.

Atque idem continget, si sumatur reciproca seriei radicum Quadraticarum Tertianorum, Quartanorum, Quintanorum, &c. (cujus indices sunt $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c.) vel radicum Cubicarum Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. (cujus indices sunt $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$, &c.) aut cuivis denique seriei cujus index est unitate major. Ut patet.

PROP. CV.
Theorema.

SI ejusmodi figura $^{*}AD\beta\beta$ verticem habens $A\delta$ infinitum & basin $D\beta$ determinatam, rationem habeat ad inscriptum Parallelogrammum $AD\beta\delta$ majorem quam infinitam; eadem figura $AD\beta\beta$ verticem habens AD infinitum & basin $\delta\beta$ determinatam, rationem habebit ad inscriptum Parallelogrammum $A\delta\beta D$ minorem quam infinitam (finitam nempe:) Et contra, si situ illo considerata rationem habeat minorem quam infinitam; situ hoc habebit rationem majorem quam infinitam: Si denique in situ uno rationem habeat simpliciter infinitam (puta neque majorem neque minorem,) etiam & situ altero habebit rationem simpliciter infinitam.

Nam verbi gratia, in serie Secundanis reciproca, cum sint (per Prop. 99.) rectæ $D\beta$, $D\beta$, in diametrorum AD, AD, ratione reciprocæ duplicata: erunt è converso rectæ AD, AD, hoc est $\delta\beta$, $\delta\beta$, in rectarum $D\beta$, $D\beta$, hoc est, diametrorum $A\delta$, $A\delta$, ratione reciprocæ-subduplicata; adeoque ipsæ $\delta\beta$, $\delta\beta$, &c. sunt series Subsecundanis reciproca. Et contra. Atque (cum idem etiam in aliis ejusmodi seriebus contingat,) patet propositum per Prop. 102, & 104.

In serie vero primanis reciproca; cum (per Prop. 88.) rectæ $D\beta$, $D\beta$, sint diametris AD, AD, reciproce proportionales; erunt etiam rectæ $\delta\beta$, $\delta\beta$ diametris suis $A\delta$, $A\delta$, reciproce proportionales, ipsæque $\delta\beta$, $\delta\beta$, series item primanis reciproca. Constat ergo propositum per Prop. 103.

PROP. CVI.
Theorema.

SI series aliqua reciproca per seriem aliam (sive reciprocam sive directam) multiplicetur aut dividatur, vel etiam aliam multiplicet aut dividat; eædem leges observandæ sunt quæ in seriebus directis prop. 73 & 81.

Exempli gratia. Si series Secundanis reciproca (puta $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}$, &c.) cujus index -2 respective multiplicetur in seriem Tertianis reciprocam (puta $\frac{1}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}$, &c.) cujus index est -3; prodibit series Subquintanis reciproca ($\frac{1}{1}, \frac{1}{32}, \frac{1}{243}$, &c.) cujus index $-5 = -2 - 3$ ut patet.

Item si series Tertianis reciproca ($\frac{1}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}$, &c.) cujus index -3; respective multiplicetur per seriem Secundanorum (1, 4, 9, &c.) cujus index 2; prodibit series $\frac{1}{1}, \frac{4}{8}, \frac{9}{27}$, &c. hoc est $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, &c. Primanis reciproca, cujus index $-1 = -3 + 2$.

Item si series Subsecundanis reciproca ($\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$, &c.) cujus index $-\frac{1}{2}$; respective multiplicetur in seriem Secundanorum (1, 4, 9, &c.) cujus index 2; prodibit series ($\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{3}}$, &c. vel $\frac{1}{1}\sqrt{1}, \frac{4}{2}\sqrt{2}, \frac{9}{3}\sqrt{3}$, &c. vel $1\sqrt{1}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{3}$, &c. vel $\sqrt{1}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$, &c.) radicum quadraticarum cuborum seu tertianorum, cujus index $\frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + 2$.

$\frac{1}{1}$)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1} = 1$
$\frac{1}{4}$)	$\frac{2}{2}$	($\frac{4}{2} = 2$
$\frac{1}{9}$)	$\frac{3}{3}$	($\frac{9}{3} = 3$
	&c.	

$\frac{1}{1}$)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$
$\frac{1}{2}$)	$\frac{1}{4}$	($\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$)	$\frac{1}{9}$	($\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
	&c.	

Porro, si series Secundanis reciproca, cujus index -2, dividat seriem Primanis reciprocam, cujus index -1; prodibit series Primanorum, cujus index $1 = -1 + 2$, nempe -1 minus -2.

$\frac{1}{1}$)	1	(1
$\frac{1}{2}$)	4	(8
$\frac{1}{3}$)	9	(27
	&c.	

Item si series Primanis reciproca, cujus index -1, dividat seriem secundanis reciprocam, cujus

jus index -2; prodibit series Primanis reciproca, cujus index $-1=-2+1$; nempe -2 minus -1.

Item, si series Primanis reciproca, cujus index -1, dividat seriem Secundanorum, cujus index 2; prodibit series Tertianorum, cujus index $3=2+1$, nempe 2 minus -1.

1)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1}$
4)	$\frac{1}{2}$	($\frac{1}{8}$
9)	$\frac{1}{3}$	($\frac{1}{27}$
	&c.	

Item si seriem Primanis reciprocam, cujus index -1, dividat series Secundanorum, cujus index 2; prodibit series Tertianis reciproca, cujus index $-3=-1-2$, nempe -1 minus 2.

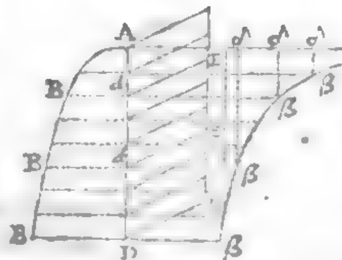
Atque idem continget, in aliis quibusvis hujusmodi seriebus. Adeoque constat propositum.

PROP. CVII.

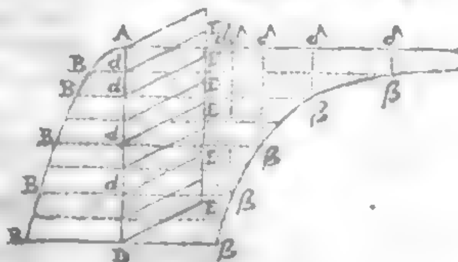
Corollarium.

ET propterea; *Si ad hujusmodi figuram* $AD\beta\delta$, *(ex una parte in infinitum productam) juxta quamcunque seriem reciprocam, aptetur (eo modo quo 9 Prop. Con. Sect. & alibi supra ostendi;) Pyramidoeides vel Conoeides inversum, (seu potius Calatoeides:) habebit illud ad Cylindrum aut Prisma inscriptum (super eadem basi æque-altum) eam rationem, sive finitam sive infinitam sive plusquam infinitam, quam præcedentia Theoremata docebunt.*

Puta, si planum sit rectarum series Subtertianis reciproca, cujus index $-\frac{1}{3}$, adeoque ratio quam habet ad parallelogrammum inscriptum (per Prop. 64, & 102) ut 1 ad $\frac{2}{3}$ $(=-\frac{1}{3}+1)$ hoc est, ut 3 ad 2: solidum ex totidem planis constans in rectarum earum ratione duplicata, erit series Quadratis subtertianorum reciproca, cujus index (per Prop. 106.) $-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$, vel $-\frac{1}{3}$ plus $-\frac{1}{3}$, & ratio illius solidi ad inscriptum cylindrum vel prisma (super eadem basi æque-altum) ut 1 ad $\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}+1$, vel ut 3 ad 1 utrobique ratio finita. Per prop. 64 & 102.



Si planum, sit series Subsecundanis reciproca, cujus index $-\frac{1}{2}$, adeoque ratio ipsius ad Parallelogrammum inscriptum ut 1 ad $\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+1$, vel ut 2 ad 1: (per Prop. 102.) solidum ex totidem planis in rectarum ratione duplicata constans, erit series Quadratis Subsecundanorum reciproca, vel (quod tantundem valet) series Primanis reciproca, cujus index $-\frac{2}{2}$, vel $-1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$ Ideoque ratio hujus solidi ad Cylindrum vel Prisma (super eadem basi æque-altum) ut 1 ad $-1+1=0$. (per Prop. 103.) Nempe illic ratio finita, hic simpliciter infinita.



Si planum sit series Quadratis Subtertianorum reciproca, cujus index $-\frac{2}{3}$, ejusque ratio ad Parallelogrammum inscriptum ut 1 ad $\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}+1$, vel ut 3 ad 1. (per Prop. 102.) solidum ex planis totidem in rectarum illarum duplicata ratione constans, erit series Biquadratis Subtertianorum reciproca, cujus index $-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}$, & propterea ratio ipsius ad inscriptum Cylindrum vel Prisma super eadem basi æque-altum, ut 1 ad $-\frac{4}{3}+1=-\frac{1}{3}$, vel ut 3 ad -1 (per Prop. 104.) Nempe illic ratio finita, hic plusquam infinita.

Si planum sit series Primanis reciproca, cujus index -1, adeoque ratio quam habet ad Parallelogrammum inscriptum ut 1 ad $-1+1=0$: (per Prop. 103.) Solidum ex planis in rectarum illarum ratione duplicata constans, erit series Quadratis Primanorum (hoc est, Secundanis) reciproca, cujus index -2, & propterea

ratio

ratio ipsius ad Cylindrum vel Prisma super eadem basi æque-altum, ut 1 ad $-2+1$, seu ut 1 ad -1. (per Prop. 104.) Nempe illic ratio simpliciter infinita, hic plusquam infinita.

Si planum sit series Secundanis reciproca, cujus index -2, adeoque ratio quam habet ad Parallelogrammum inscriptum ut 1 ad $-2+1=-1$. Solidum ex totidem planis in rectarum illarum ratione duplicata constans, erit series Quadratis Secundanorum, hoc est Quartanis, reciproca, cujus index $-4=-2-2$; ejusque ratio ad Cylindrum vel Prisma debite inscriptum, ut 1 ad $-4+1=-3$. (per Prop. 104.) Nempe utrobique ratio plusquam infinita.

SCHOLIUM.

Atque ita problema illud (ingeniosum quidem, & non paucis mirandum,) quod Torricellius in una figura solida præstitit, (puta, *Solido Hyperbolico Acuto* in infinitum continuato, æqualem cylindrum constituere) nos in aliis innumeris figuris tam planis quam solidis (præcedentibus sex propositionibus continuis) præstitimus. Puta, *Figuris innumeris specie differentibus, tam planis quam solidis, interminatis, æquales figuras terminatas* (vel saltem, quod tantundem valet, in cognita ratione constitutas) *exhibere*.

Consultius fortassis esset, (si tantum aucupandæ famæ operam darem,) celata methodo qua huc perventum est, paucas aliquot particulares propositiones (tanquam admirandum quidpiam aut stupendum) demonstrationibus apagogicis ostendisse. Quod veteres olim non raro fecisse, plane suspicor; qui illud sæpius sibi videntur proposuisse, ut ipsos alii admirentur potius quam intelligant; saltem ut illis eorum effatis assensum coacti præbeant, potius quam ut genuinam problematis investigationem intelligant. Atque hinc factum esse credo, quod eorum Analytice (quam quidem ipsos habuisse ex multis ipsius, in demonstrationibus eorum non paucis, vestigiis satis liquet) posteros fere penitus latuerit; (exigua enim plane pars illa est quæ apud Diophantum exstat, si ad egregia illa quo ipsi pervenerunt inventa comparetur:) Ut necesse habuerint præsentis ævi mathematici (*Vieta*, *Oughtredus*, *Harriotus*, *Ghetaldus*, *Cavallerius*, *Torricellius*, *Cartesius*, aliique magni viri,) vel novam excogitare, vel antiquam saltem (conclamatam plane & penitus ignoratam) de novo resuscitare; quod quidem eo successu præstiterunt, ut nostram nunc dierum Analyticen, veterum istam, tanta superstitione celatam, æquare saltem vel superare potius nullus dubitem.

Verum ego mallem libere philosophando, fontes ipsos aperire, ut eadem opera possit lector & propositionum demonstrationes & methodum qua istuc pervenerim persentiscere; unde & ipse possit proprio marte ejusmodi alias innumeras investigare, quas ego (ne tædio sim) lubens prætereo, contentus eo digitum intendisse, unde alii alia nostris similia pro libitu depromant.

Licuisset quidem & præmissis multa subjungere, & multa passim interpolare, quæ ex principiis jam traditis facile deduci possent. Verum cum ea, quæ jam tradidi, mihi videantur abunde sufficere, ut & ipsa perspicue satis intelligantur, & perfectam satis *serierum* (tam simplicium quam compositarum & utrisque Reciprocarum) tractationem videantur continere: ad series *Conjunctas* (sive ad Binomiorum sive Apotomarum formam) explicandas, festinandum sentio.

PROP. CVIII.

Theorema.

SI series Æqualium serie Primanorum respective mulctetur (puta, si primus terminus hujus à primo illius auferatur, secundus à secundo, &c.) Residua erunt semissis totius: sin ita augeatur; Aggregatorum series erit expositæ seriei Æqualium sesquialtera.

Intellige, si Æqualium & Primanorum terminus ultimus idem sit vel æqualis: (Quod & in sequentibus aliquoties intelligendum erit:) sin fuerint inæquales, non tamen erit difficile rationes provenientes invenire; quod monuisse sufficiat, cum id quilibet suo marte præstare poterit.

Sit

Sit verbi gratia terminus æqualium quilibet & primanorum maximus R; ejusque pars infinite parva dicatur $a = \frac{R}{\infty}$; numerus terminorum, omnium (vel figuræ altitudo) A: si termini

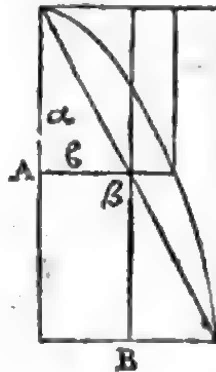
$$\left\{\begin{array}{l} R - 0a \\ R - 1a \\ R - 2a \\ R - 3a \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} R + 0a \\ R + 1a \\ R + 2a \\ R + 3a \end{array}$$

	&c.	&c.
continuentur in infinitum usque ad	$R - R$	$R + R$
erit Residuorum & Aggregatorum summa	$AR - \frac{1}{2}AR$	$AR + \frac{1}{2}AR$

Nam omnium Æqualium aggregatum erit AR (ut patet;) Primanorum aggregatum ejusdem semissis $\frac{1}{2}AR$, (per Prop. 2.) Ergo $AR - \frac{1}{2}AR = \frac{1}{2}AR$, & $AR + \frac{1}{2}AR = \frac{3}{2}AR$. Nempe seriei Æqualium (AR) illud est $\frac{1}{2}$, hoc $\frac{3}{2}$: prout affirmatur. Hoc est, erit illud ad seriem Æqualium ut $\frac{1}{2}$ ad 1, vel ut 1 ad 2: hoc autem, ut $\frac{3}{2}$ ad 1, vel ut 1 ad $\frac{2}{3}$, vel 3 ad 2.

PROP. CIX.
Corollarium.

ERgo, *Si Parallelogrammo auferatur Triangulum (super eadem vel æquali base æque-altum,) Residuum (quod quidem & ipsum erit Triangulum inversum) erit Parallelogrammi semissis: Sin addatur Triangulum, erit aggregatum (nempe Trapezium) sesquialterum.*



Patet ex præcedenti; est enim Parallelogrammum series Æqualium; Triangulum, series Primanorum.

PROP. CX.
Corollarium.

ITem, *Cylindrus Parabolice excavatus, est pleni semissis. (Quod idem verum est de Prismate analogice excavato.)*

Nempe si ex Cylindro (serie nempe Æqualium) eximatur Conoeides Parabolicum (super eadem base æque altum) quod quidem est series Primanorum (per Prop. 4, vel 60.) quod reliquum est erit semissis totius per Prop. 108.

Atque idem accidet si Prismati eximatur Pyramidoeides Parabolicum.

PROP. CXI.
Theorema.

SI Series Æqualium mulctetur serie Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Residua erunt totius duo Trientes, tres Quadrantes, quatuor Quintantes, &c. Sin ita augeatur, erunt Aggregata ejusdem Sesquitertium, Sesquiquartum, Sesquiquintum, &c.

Nempe si Termini

$$\left\{\begin{array}{l} R^2 \mp 0a^2 \\ R^2 \mp 1a^2 \\ R^2 \mp 4a^2 \\ R^2 \mp 9a^2 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} R^3 \mp 0a^3 \\ R^3 \mp 1a^3 \\ R^3 \mp 8a^3 \\ R^3 \mp 27a^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} R^4 \mp 0a^4 \\ R^4 \mp 1a^4 \\ R^4 \mp 16a^4 \\ R^4 \mp 81a^4 \end{array}$$

	&c.	&c.	&c.
continuentur usque ad	$R^2 \mp R^2$	$R^3 \mp R^3$	$R^4 \mp R^4$
erunt summæ (per Prop. 44.)	$AR^2 \mp \frac{1}{3}AR^2$	$AR^3 \mp \frac{1}{4}AR^3$	$AR^4 \mp \frac{1}{5}AR^4$
Hoc est, Residuorum summa	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.	$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.	$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ &c.
Aggregatorum summa	$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.	$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.	$1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ &c.

PROP. CXII.

Corollarium.

ERgo, *si Parallelogrammo auferatur complementum Semi-parabolæ, Semi-paraboloeidis cubicalis, biquadraticalis, &c. Residuum (puta Semi-parabola, Semi-paraboloeides cubicale, biquadraticale, &c.) erit* $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, *&c. totius Parallelogrammi: sin eidem Parallelogrammo ejusmodi complementum addatur, erit aggregatum* $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, *&c. ejusdem Parallelogrammi.*

Patet ex præcedente.

PROP. CXIII.

Corollarium.

ITem, *Cylindrus Conice excavatus, (vel Prisma Pyramidice,) continet integri duos trientes. Et similiter de aliis excavationibus (mutatis mutandis) fiet judicium.*

Patet ex Prop. 111. subducta quippe serie secundanorum, ex serie æqualium.

PROP. CXIV.

Theorema.

SI Series æqualium mulctetur serie subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum, &c. Residua erunt totius Triens, Quadrans, Quintans, &c. Sin ita augeatur, erunt Aggregata ejusdem quinque Trientes, septem Quadrantes, novem Quintantes, &c. vel, duplum minus Triente, Quadrante, Quintante, &c.

Nempe si termini.	$\sqrt{R} \mp \sqrt{0a}$	$\sqrt[3]{R} \mp \sqrt[3]{0a}$	$\sqrt[4]{R} \mp \sqrt[4]{0a}$
	$\sqrt{R} \mp \sqrt{1a}$	$\sqrt[3]{R} \mp \sqrt[3]{1a}$	$\sqrt[4]{R} \mp \sqrt[4]{1a}$
	$\sqrt{R} \mp \sqrt{2a}$	$\sqrt[3]{R} \mp \sqrt[3]{2a}$	$\sqrt[4]{R} \mp \sqrt[4]{2a}$
	$\sqrt{R} \mp \sqrt{3a}$	$\sqrt[3]{R} \mp \sqrt[3]{3a}$	$\sqrt[4]{R} \mp \sqrt[4]{3a}$
	&c.	&c.	&c.
Continuentur ad	$\sqrt{R} \mp \sqrt{R}$	$\sqrt[3]{R} \mp \sqrt[3]{R}$	$\sqrt[4]{R} \mp \sqrt[4]{R}$
Erunt summæ (per prop. 54.)	$A\sqrt{R} \mp \frac{2}{3}A\sqrt{R}$.	$A\sqrt[3]{R} \mp \frac{3}{4}A\sqrt[3]{R}$.	$A\sqrt[4]{R} \mp \frac{4}{5}A\sqrt[4]{R}$
Hoc est Residuorum summa	$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$
Aggregatorum summa	$1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$	$1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$	$1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$

PROP. CXV.

Corollarium.

ERgo, *Si Parallelogrammo auferatur Parabola, Paraboloeides Cubicale, Biquadraticale, &c. Residuum erit totius Triens, Quadrans, Quintans, &c. Sin addatur, erit Aggregatum Parallelogrammi duplum minus Triente, Quadrante, Quintante, &c.*

Sequitur ex præced.

PROP. CXVI.

Theorema.

PAri modo judicandum erit in seriebus aliis seriei æqualium subducendis vel addendis; quarum quantitas innotescit ex prop. 59. vel 64.

Puta

Puta si termini	$\sqrt{R^3} \mp \sqrt{0a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \mp \sqrt[3]{0a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \mp \sqrt[3]{0a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \mp \sqrt{1a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \mp \sqrt[3]{1a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \mp \sqrt[3]{1a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \mp \sqrt{8a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \mp \sqrt[3]{4a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \mp \sqrt[3]{16a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \mp \sqrt{27a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \mp \sqrt[3]{9a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \mp \sqrt[3]{81a^4}$.
	&c. ad	&c. ad	&c. ad
continuentur ad	$\sqrt{R^3} \mp \sqrt{R^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \mp \sqrt[3]{R^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \mp \sqrt[3]{R^4}$.
erit summa	$A\sqrt{R^3} \mp \frac{2}{5} A\sqrt{R^3}$	$A\sqrt[3]{R^2} \mp \frac{3}{5} A\sqrt[3]{R^2}$	$A\sqrt[3]{R^4} \mp \frac{3}{7} A\sqrt[3]{R^4}$.
Hoc est, Residua	$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$	$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$	$1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$
Aggregata	$1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$	$1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$	$1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$

Et similiter (mutatis mutandis) in aliis quibuscunque.

PROP. CXVII.

Theorema.

SI exponatur series Æqualium mulctata serie Primanorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Placet autem pro notis $1a$, $2a$, $3a$, &c. (in præcedentibus propositionibus usurpatis) jam substituere a, b, c, &c. quo melius operationis processus perspiciatur.

Seriei	Quadrata.	Cubi
$R - 0$	$R^2 - 0\ R + 00$.	$R^3 - 0\ R^2 + 00R - 000$
$R - a$	$R^2 - 2aR + a^2$	$R^3 - 3aR^2 + 3a^2R - a^3$
$R - b$	$R^2 - 2bR + b^2$	$R^3 - 3bR^2 + 3b^2R - b^3$
$R - c$	$R^2 - 2cR + c^2$	$R^3 - 3cR^2 + 3c^2R - c^3$
&c. ad	&c. ad	&c. ad
$R - R$	$R^2 - 2RR + R^2$	$R^3 - 3RR^2 + 3R^2R - R^3$
$AR - \frac{1}{2}AR$	$AR^2 - \frac{2}{2}AR^2 + \frac{1}{3}AR^2$	$AR^3 - \frac{3}{2}AR^3 + \frac{3}{3}AR^3 - \frac{1}{4}AR^3$
nempe $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	$1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
vel $\frac{1}{2}$	$\frac{1 \times 2}{2 \times 3}$	$\frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4}$

Et sic deinceps, continue multiplicando numeros Arithmetice-proportionales, (prout potestatis gradus postulat) ab 1 & 2, unitate continue crescentes.

Et quidem nihil sunt quam totidem series Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. inversæ.

PROP. CXVIII.

Theorema.

SI exponatur series Æqualium mulctata serie Secundanorum: Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium rationem habebunt cognitam. Nempe

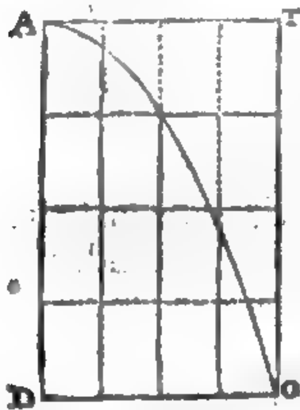
	Seriei	Quadrata	Cubi
	$R^2 - 00$	$R^4 - 00R^2 + 00$	$R^6 - 00R^4 + 00R^2 - 00$
	$R^2 - a^2$	$R^4 - 2a^2R^2 + a^4$	$R^6 - 3a^2R^4 + 3a^4R^2 - a^6$
	$R^2 - b^2$	$R^4 - 2b^2R^2 + b^4$	$R^6 - 3b^2R^4 + 3b^4R^2 - b^6$
	$R^2 - c^2$	$R^4 - 2c^2R^2 + c^4$	$R^6 - 3c^2R^4 + 3c^4R^2 - c^6$
	&c. ad	&c. usque ad	&c. usque ad
	$R^2 - R^2$	$R^4 - 2R^2R^2 + R^4$	$R^6 - 3R^2R^4 + 3R^4R^2 - R^6$
summa	$AR^2 - \frac{1}{3}AR^2$	$AR^4 - \frac{2}{3}AR^4 + \frac{1}{5}AR^4$	$AR^6 - \frac{3}{3}AR^6 + \frac{3}{5}AR^6 - \frac{1}{7}AR^6$
nempe	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	$1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$	$1 - \frac{3}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{48}{105}$
vel	$\frac{2}{3}$	$\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$	$\frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}$

Et

Et sic deinceps, continue multiplicando numeros Arithmetice-proportionales (quousque gradus potestatis postulat) à 2 & 3 continue binario crescentes.

PROP. CXIX.
Corollarium.

ET propterea, *Conoeides (vel Pyramidoeides) Semiparabolæ (aut etiam Parabolæ) circa ipsius ordinatim-applicatam aptatum, erit ad Cylindrum (vel Prisma) ejusdem basis & altitudinis, ut* 8 *ad* 15.



Nempe ut Quadrata residuorum seriei Æqualium mulctatæ serie Secundanorum, (ad totidem maximo æqualium.) Nam si volvendo Semiparabolam A D O circa ipsius ordinatim-applicatam D O, ut axem (vel etiam alias, ut Prop. 9. Con. Sect. diximus,) formetur Conoeides (vel Pyramidoeides) cujus vertex O: erunt plana illa Conoeides (vel Pyramidoeides) constituentia, ut Quadrata seriei Æqualium serie Secundanorum mulctatæ: (Nam rectæ in Semiparabola A D O diametro A D parallelæ, sunt residuæ Æqualium ablatis Secundanis, in complemento A T O repertis, ut patet ex dictis Prop. 23.) Ideoque ad totidem maximo æqualia (hoc est, Cylindrum vel Prisma,) ut 8 ad 15 per præcedentia.

SCHOLIUM.

Et pari modo de Conoeidibus vel Pyramidoeidibus ad Paraboloeidis cujusvis ordinatim applicatam aptatis, judicium fiet, ope sequentium propositionum. Puta in Paraboloeide Cubicali ratio erit ut 9 ad 14; in Biquadraticali, ut 32 ad 45; in Supersolidali, ut 25 ad 33, &c. ut in tab. Prop. 126.

PROP. CXX.
Corollarium.

DEinde, *Si infinita series Æqualium mulctata serie Primanorum, in eandem seriem Æqualium eadem serie Primanorum auctam, respective ducatur: Rectangulorum (vel Quadratorum aut etiam similium quarumvis figurarum, ipsis æqualium, aut quidem proportionalium) Aggregatum, ad Aggregatum totidem maximo Æqualium, rationem habebit cognitam.*

Atque idem accidet, si Quadrata seriei mulctatæ ducantur in Quadrata seriei auctæ; & Cubi illius in Cubos hujus; & sic deinceps.

Nempe eædem prodibunt rationes quæ in Prop. 118. Nam

$$\begin{array}{rll} & R-a & Q:R-a:=R^2-2aR+a^2 \\ \text{in} & R+a & Q:R+a:=R^2+2aR+a^2 \\ \hline \text{facit} & R^2-a^2 & R^4-2a^2R^2+a^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & C:R-a:=R^3-3aR^2+3a^2R-a^3 \\ \text{in} & C:R+a:=R^3+3aR^2+3a^2R+a^3 \\ \hline \text{facit} & R^6-3a^2R^4+3a^4R^2-a^6 \end{array}$$

&c.

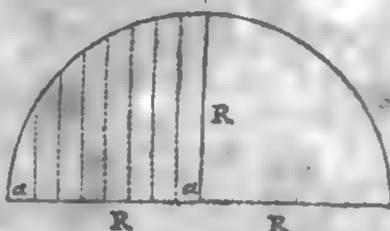
& sic in singulis terminis cujusvis potestatis; ut multiplicando patebit.

PROP.

PROP. CXXI.
Corollarium.

IDeoque, *Circulus ad Quadratum Diametri*, (*vel etiam Ellipsis quaelibet ad Parallelogrammum sibi circumscriptum*,) *eam habet rationem, quam habent Radices Quadraticae universales Residuorum seriei infinitae Aequalium serie Secundanorum mulctatae, ad seriem illam Aequalium.*

Nam si circuli Radius ponatur R, (cujus pars infinite parva $\frac{R}{\infty} = a$,) eique insistant Perpendiculares sive sinus recti numero infiniti Quadrantem circuli complentes; erunt illae Perpendiculares mediae proportionales inter Diametri Segmenta, (ut notum est;) hoc est.



inter R + o, R + 1a, R + 2a, R + 3a, &c.
& R − o, R − 1a, R − 2a, R − 3a, &c.
Quorum Rectangula, $R^2 - oo$, $R^2 - 1a^2$, $R^2 - 4a^2$, $R^2 - 9a^2$, &c.
Ipsaeq; mediae proportionales $\surd{:}R^2 - oo$. $\surd{:}R^2 - 1a^2$. $\surd{:}R^2 - 4a^2$, $\surd{:}R^2 - 9a^2$, &c.

Quam igitur rationem habet harum radicum universalium Aggregatum, ad totidem maximae (Radio scil.) aequalium, eam habet Quadrans Circuli (ex illis constans) ad Quadratum Radii (constans ex his;) Adeoque & circulus integer ad quadratum Diametri. Quod erat ostendendum.

Atque idem de qualibet Ellipsi (mutatis mutandis) facile ostendetur; cum ipsius etiam ordinatim-applicatae sint mediis proportionalibus (inter diametri tranversae segmenta) Proportionales, & quidem nonnunquam aequales, ut ex Conicorum doctrina notum est.

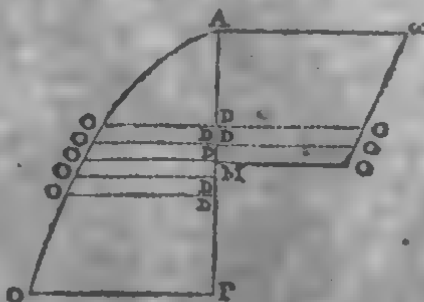
SCHOLIUM.

Ratio autem quam innuit haec propositio, (Circuli nempe ad Quadratum Diametri,) ea est, quam habet Unitas ad numerum intermedium inter 1 & $\frac{3}{2}$ in secunda serie Transversa Tabellae Prop. 127. Quomodo autem invenietur numerus ille (vel alius quivis istius seriei numeris interponendus) deinceps inquirendum erit.

PROP. CXXII.
Corollarium.

ET proinde, *si supponamus infinitas numero rectas Semiparabolae cujusvis in ejusdem continuationis aeque-altae & situ inverso positae rectas, respective duci; quod provenit solidum ex infinitis illis Rectangulis conflatum,* (*aut ex Quadratis quae rectangulis illis sint aequalia*,) *erit ad Parallelepipedum super eadem base aeque-altum, ut Circulus ad Quadratum Diametri.* (*Et quidem mediae proportionales erunt in subduplicata ratione ordinatim-applicatarum in Circulo vel Ellipsi.*)

Semiparabolam quamlibet APO, secet recta MO (basi parallela) in duo segmenta aeque-alta; & Recta MO dicatur $\surd R$. Erunt reliquae ordinatim-applicatae in segmento superiori ascendendo, $\surd{:}R - a$. $\surd{:}R - 2a$. $\surd{:}R - 3a$. &c.. Et in segmento inferiori descendendo, $\surd{:}R + a$. $\surd{:}R + 2a$. $\surd{:}R + 3a$. &c. (propter quadrata ordinatim-applicatarum in Parabola, Arithme-



tice-proportionalia.) Ideoque si supponamus semiparabolam ita sectam sic in se replicari, ut punctum P puncto A congruat, totumque segmentum MPO transferatur in situm MAα, (ut ordinatim-applicatæ inferioris segmenti ordinatim-applicatis superioris inverse respondeant) Rectangula, ODo, ODo, &c. erunt $\sqrt{:R^2 - 0}$. $\sqrt{:R^2 - a^2}$. $\sqrt{:R^2 - 4a^2}$. $\sqrt{:R^2 - 9a^2}$, &c. ut multiplicatione patebit.

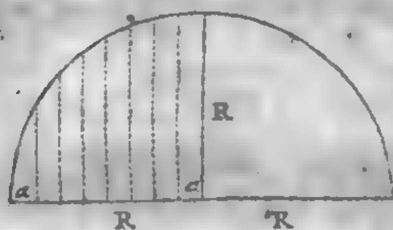
$$\begin{array}{cccc}
\sqrt{:R - 0}. & \sqrt{:R - a}. & \sqrt{:R - 2a}. & \sqrt{:R - 3a}. \\
\sqrt{:R + 0}. & \sqrt{:R + a}. & \sqrt{:R + 2a}. & \sqrt{:R + 3a}. \\
\hline
\sqrt{:R^2 - 0}. & \sqrt{:R^2 - a^2}. & \sqrt{:R^2 - 4a^2}. & \sqrt{:R^2 - 9a^2}, \&c.
\end{array}$$

Horum igitur omnium aggregatum, ad maximum ($\sqrt{:R^2 - 0} := \sqrt{R^2} = R$) toties positum, (hoc est, solidum propositum ad Parallelepipedum ejusdem basis & altitudinis,) ut Circulus ad Quadratum Diametri per præced. Et propterea etiam mediæ proportionales erunt in subduplicata ratione ordinatim-applicatarum in circulo vel ellipsi, ut patet.

PROP. CXXIII.

Corollarium.

ITem, *Sphæra* (*vel Sphæroeides aut etiam Pyramidoeides Ellipticum,*) *ad Cylindrum* (*vel Prisma*) *circumscriptum; est ut series infinita æqualium mulctata serie secundanorum, ad seriem totidem maximo æqualium. Hoc est ut 2 ad 3.*



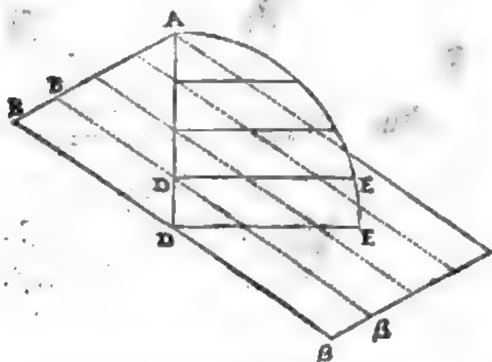
Sequitur ex Prop. 121. Nam si mediæ proportionales inter diametri segmenta, quadrantem circuli (vel ellipseos) complentes, jam fieri supponantur totidem aliorum circulorum invicem parallelorum radii, semissem Sphæræ (vel Sphæroeideos) complentium, (vel similium quorumvis planorum rectæ similiter positæ semi-pyramidoeides Ellipticum constituentium;) erunt hi circuli (vel plana) in duplicata ratione Radiorum suorum (sive rectarum similiter positarum:) Hoc est, ut $R^2 - 0$. $R^2 - a^2$. $R^2 - 4a^2$. $R^2 - 9a^2$, &c. (sunt enim rectæ illæ $\sqrt{:R^2 - 0}$. $\sqrt{:R^2 - a^2}$. $\sqrt{:R^2 - 4a^2}$. $\sqrt{:R^2 - 9a^2}$, &c. per Prop. 121.) Ideoque horum omnium aggregatum, ad aggregatum omnium maximo æqualium ut 2 ad 3. per Prop. 118.

PROP. CXXIV.

Corollarium.

ITem, *si Trianguli ADB rectæ respective ducantur in rectas Trapezii ADβ (æque-alti, atque cum ipso Triangulo Parallelogrammum complentis;) quæ prodeunt rectangula erunt æqualia totidem similibus planis Conoeideos (vel Pyramidoeideos) Elliptici: Et mediæ proportionales DE, DE, &c. Erunt ordinatim applicatæ in (Circulo, vel saltem) Ellipsi.*

Demon-



Demonstratio facile patet ex dictis ad Prop. 121. & 123. Nam segmenta rectæ Bβ in hac figura tantundem valent atque segmenta Diametri in illa figura.

Si autem tam rectæ AD, DB, sint æquales, quam rectæ AD, DE, ad invicem perpendiculares, erunt ipsæ DE, DE, ordinatim-applicatæ in circulo; sin minus, saltem in Ellipsi. Portio autem sive circuli sive Ellipseos AE, major est aut minor quam Quadrans, prout DB major est aut minor quam Dβ.

PROP. CXXV.

Theorema.

SI exponatur series Æqualium mulctata serie Tertianorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Nempe,

	Seriei	Quadrata	Cubi.
	$R^3 - 000$	$R^6 - 00\,R^3 + 00$	$R^9 - 00\,R^6 + 00\,R^3 - 00$
	$R^3 - a^3$	$R^6 - 2a^3 R^3 + a^6$	$R^9 - 3a^3 R^6 + 3a^6 R^3 - a^9$
	$R^3 - b^3$	$R^6 - 2b^3 R^3 + b^6$	$R^9 - 3b^3 R^6 + 3b^6 R^3 - b^9$
	$R^3 - c^3$	$R^6 - 2c^3 R^3 + c^6$	$R^9 - 3c^3 R^6 + 3c^6 R^3 - c^9$
	&c. ad	&c. usque ad	&c. usque ad
	$R^3 - R^3$	$R^6 - 2R^3 R^3 + R^6$	$R^9 - 3R^3 R^6 + 3R^6 R^3 - R^9$
summa	$AR^3 - \frac{1}{4}AR^3$	$AR^6 - \frac{2}{4}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6$	$AR^9 - \frac{3}{4}AR^9 + \frac{3}{7}AR^9 - \frac{1}{10}AR^9$
nempe	$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$1 - \frac{2}{4} + \frac{1}{7} = \frac{18}{28}$	$1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{7} - \frac{1}{10} = \frac{162}{280}$
vel	$\frac{3}{4}$	$\frac{3 \times 6}{4 \times 7}$	$\frac{3 \times 6 \times 9}{4 \times 7 \times 10}$

Et sic deinceps, continue multiplicando numeros Arithmeticè proportionales (quousque cujuslibet potestatis gradus postulat) à 3 & 4, ternario continue crescentes.

PROP. CXXVI.

Theorema.

P*Ari modo*, Si exponatur series Æqualium mulctata serie Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. $1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{9} = \frac{32}{45}$. $1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{9} - \frac{1}{13} = \frac{384}{585}$. $1 - \frac{4}{5} + \frac{6}{9} - \frac{4}{13} + \frac{1}{17} = \frac{6144}{9945}$.

vel $\frac{4}{5}$ $\frac{4 \times 8}{5 \times 9}$ $\frac{4 \times 8 \times 12}{5 \times 9 \times 13}$ $\frac{4 \times 8 \times 12 \times 16}{5 \times 9 \times 13 \times 17}$

Item $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. $1 - \frac{2}{6} + \frac{1}{11} = \frac{50}{66}$. $1 - \frac{3}{6} + \frac{3}{11} - \frac{1}{16} = \frac{750}{1056}$. $1 - \frac{4}{6} + \frac{6}{11} - \frac{4}{16} + \frac{1}{21} = \frac{15000}{22176}$

vel $\frac{5}{6}$ $\frac{5 \times 10}{6 \times 11}$ $\frac{5 \times 10 \times 15}{6 \times 11 \times 16}$ $\frac{5 \times 10 \times 15 \times 20}{6 \times 11 \times 16 \times 21}$

Et sic in aliis quibuslibet; nempe continue multiplicando numeros Arithmeticè proportionales (quousque gradus postulat) à 4 & 5, vel 5 & 6, vel 6 & 7, &c. quaternario, vel quinario, vel senario, &c. (secundum indicem seriei subductæ) continue crescentes. Prout inductione patebit. Ad hunc modum,

Ratio quam habent ad seriem maximo æqualium

Seriei Æqualium multatæ serie	Residua.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.	Superſolida.
Primanorum	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.	$\frac{2}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{24}$.	$\frac{6}{24}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{120}$.	$\frac{24}{120}\times\frac{5}{6}=\frac{120}{720}$.
Secundanorum	$\frac{2}{3}$.	$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$.	$\frac{8}{15}\times\frac{6}{7}=\frac{48}{105}$.	$\frac{48}{105}\times\frac{8}{9}=\frac{384}{945}$.	$\frac{384}{945}\times\frac{10}{11}=\frac{3840}{10395}$.
Tertianorum	$\frac{3}{4}$.	$\frac{3}{4}\times\frac{6}{7}=\frac{18}{28}$.	$\frac{18}{28}\times\frac{9}{10}=\frac{162}{280}$.	$\frac{162}{280}\times\frac{12}{13}=\frac{1944}{3640}$.	$\frac{1944}{3640}\times\frac{15}{16}=\frac{29160}{58240}$.
Quartanorum	$\frac{4}{5}$.	$\frac{4}{5}\times\frac{8}{9}=\frac{32}{45}$.	$\frac{32}{45}\times\frac{12}{13}=\frac{384}{585}$.	$\frac{384}{585}\times\frac{16}{17}=\frac{6144}{9945}$.	$\frac{6144}{9945}\times\frac{20}{21}=\frac{122880}{208845}$.
Quintanorum	$\frac{5}{6}$.	$\frac{5}{6}\times\frac{10}{11}=\frac{50}{66}$.	$\frac{50}{66}\times\frac{15}{16}=\frac{750}{1056}$.	$\frac{750}{1056}\times\frac{20}{21}=\frac{15000}{22176}$.	$\frac{15000}{22176}\times\frac{25}{26}=\frac{375000}{576576}$.

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps.

Nempe, ſi index ſeriei ablatæ ponatur a; rationem habebunt, ad ſeriem maximo Æqualium, ipſa

Residua. Quadrata. Cubi.

quam habent $\frac{a}{a+1}$. $\frac{a}{a+1}\times\frac{2a}{2a+1}$. $\frac{a}{a+1}\times\frac{2a}{2a+1}\times\frac{3a}{3a+1}$. &c. ad unitatem.

vel $\frac{a}{a+1}$. $\frac{2a^2}{2a^2+3a+1}$. $\frac{6a^3}{6a^3+11a^2+6a+1}$. &c.

Vel quam habet Unitas ad $\frac{a+1}{a}$. $\frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{2a}$. $\frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{2a}\times\frac{3a+1}{3a}$. &c.

vel $\frac{a+1}{a}$. $\frac{2a^2+3a+1}{2a^2}$. $\frac{6a^3+11a^2+6a+1}{6a^3}$. &c.

Atque hoc idem valebit ſi ablata ſeries ſit ſeries Radicum.

Verbi gratia. Si à ſerie Æqualium auferatur ſeries Subſecundanorum cujus index $\frac{1}{2}$. Nam ſi ponatur $a=\frac{1}{2}$. Erit $\frac{a+1}{a}=3$. Et $\frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{2a}=3\times2=6$. Et $\frac{a+1}{a}\times\frac{2a+1}{a}\times\frac{3a+1}{3a}=3\times2\times1\frac{2}{3}=10$. &c. Sunt autem, in ejuſmodi ablationibus, Reſidua, Quadrata, Cubi, &c. ad ſeriem maximo æqualium; ut 1 ad 3. 6. 10. &c.

Similiter, ſi auferatur ſeries Subquartanorum, cujus index $\frac{1}{4}$; & ponatur $a=\frac{1}{4}$. Erit $\frac{a+1}{a}=5$. $\frac{2a+1}{2a}=3$. $\frac{3a+1}{3a}=2\frac{1}{3}$. $\frac{4a+1}{4a}=2$. &c. Et $5\times3=15$. $15\times2\frac{1}{3}=35$. $35\times2=70$. &c. Sunt autem, in ejuſmodi Sublationibus, Reſidua, quadrata, cubi, biquadrata, &c. ut 1 ad 5, 15, 35, 70, &c. Et pariter in ejuſmodi aliis, ut infra etiam ulterius patebit.

Interim placet propoſitiones aliquot præcedentes in Tabellam conjicere, propoſitioni ſequenti ſubjungendam. Nempe ———

PROP.

PROP. CXXVII.

Theorema.

SI exponatur (infinita) series æqualium mulctata serie (analoga) Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. Residua ipsa, eorumque Quadrata, Cubi, &c. Eam rationem habebunt ad expositam seriem æqualium; quam habet Unitas ad numeros in subjecta Tabella indicatos. Nempe ——

Seriei Æqualium mulctatæ serie

	Resid.	Q.	Cubi	Biq.	Superf.	Sext.
Primanorum	$\frac{2}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{24}{6}$	$\frac{120}{24}$	$\frac{720}{120}$	$\frac{5040}{720}$
Secundanorum	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{105}{48}$	$\frac{945}{384}$	$\frac{10395}{3840}$	$\frac{135135}{46080}$
Tertianorum	$\frac{4}{3}$	$\frac{28}{18}$	$\frac{280}{162}$	$\frac{3640}{1944}$	$\frac{58240}{29160}$	$\frac{1106560}{524880}$
Quartanorum	$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{585}{384}$	$\frac{9945}{6144}$	$\frac{208845}{122880}$	$\frac{5221125}{2949120}$
Quintanorum	$\frac{6}{5}$	$\frac{66}{50}$	$\frac{1056}{750}$	$\frac{22176}{15000}$	$\frac{576576}{375000}$	$\frac{17873856}{11250000}$
Sextanorum	$\frac{7}{6}$	$\frac{91}{72}$	$\frac{1729}{1296}$	$\frac{43225}{31104}$	$\frac{1339975}{933120}$	$\frac{49579075}{33592320}$

Et sic deinceps. (*right margin:* Et sic deinceps.)

Sequitur ex præced.

SCHOLIUM.

Verum quo pacto investigabitur, quam habeant rationem serierum illarum Apotomarum Radices Quadraticæ, Cubicæ, &c. ad seriem totidem earum maximæ æqualium: Hic labor, hoc opus est. Nihil enim aliud deest ad Circuli & Ellipseos quadraturam. Ut ex Prop. 121. jam patet, & ex propositionibus aliquot secuturis ulterius patebit.

PROP. CXXVIII.

Theorema.

SI exponatur series Æqualium mulctata serie Subsecundanorum: Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{R}-\sqrt{a}$	$R-2\sqrt{aR}+a$	$R\sqrt{R}-3R\sqrt{a}+3a\sqrt{R}-a\sqrt{a}$
$\sqrt{R}-\sqrt{b}$	$R-2\sqrt{bR}+b$	$R\sqrt{R}-3R\sqrt{b}+3b\sqrt{R}-b\sqrt{b}$
$\sqrt{R}-\sqrt{c}$	$R-2\sqrt{cR}+c$	$R\sqrt{R}-3R\sqrt{c}+3c\sqrt{R}-c\sqrt{c}$
&c. ad	&c. ad	&c. usque ad
$\sqrt{R}-\sqrt{R}$	$R-2\sqrt{RR}+R$	$R\sqrt{R}-3R\sqrt{R}+3R\sqrt{R}-R\sqrt{R}$
$A\sqrt{R}-\frac{2}{3}A\sqrt{R}$	$AR-\frac{4}{3}AR+\frac{1}{2}AR$	$AR\sqrt{R}-\frac{6}{3}AR\sqrt{R}+\frac{3}{2}AR\sqrt{R}-\frac{2}{5}AR\sqrt{R}$
$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$	$1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$	$1-\frac{6}{3}+\frac{3}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$
$\frac{1}{1+2}$	$\frac{1}{1+2+3}$	$\frac{1}{1+2+3+4}$

Et sic deinceps; nempe eam rationem quam habet 1 ad numeros triangulares, sive aggregata numerorum Arithmetice-proportionalium (quousque gradus potestatis postulat) ab 1 continue unitate crescentium.

rum (1, 3, 6, 10, 15, 21, &c.) in Subductione Subsecundanorum modo inventorum; nempe $1+3=4.\ 4+6=10.\ 10+10=20.\ 20+15=35.\ 35+21=56.$ &c. vel $1+1+2=1+3=4.\ 4+1+2+3=1+3+6=10.\ 10+1+2+3+4=1+3+6+10=20.\ 20+1+2+3+4+5=1+3+6+10+15=35.\ 35+1+2+3+4+5+6=1+3+6+10+15+21=56.$ &c. Deinde ex numerorum jam inventorum (1, 4, 10, 20, 35, 56, &c.) continua additione, fiunt consequentes rationum in Subductione seriei Subquartanorum, (nempe $1+4=5.\ 5+10=15.\ 15+20=35.\ 35+56=91.$ &c.) Et ex horum iterum continua additione, fiunt consequentes rationum in Subductione seriei proximæ (Subquintanorum;) Et sic deinceps; ad hunc modum.

Seriei æqualium mulctatæ serie	Ratio quam habent ad seriem maximo æqualium					
	Residua.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.	Supersolida.	Sextana.
Primanor.	$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4+1}=\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{5+1}=\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{6+1}=\frac{1}{7}$.
Subsecun.	$\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{6+4}=\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{10+5}=\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{15+6}=\frac{1}{21}$.	$\frac{1}{21+7}=\frac{1}{28}$.
Subtertia.	$\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4+6}=\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}$.	$\frac{1}{20+15}=\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{35+21}=\frac{1}{56}$.	$\frac{1}{56+28}=\frac{1}{84}$.
Subquart.	$\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{5+10}=\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{15+20}=\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{35+35}=\frac{1}{70}$.	$\frac{1}{70+56}=\frac{1}{126}$.	$\frac{1}{126+84}=\frac{1}{210}$.
Subquint.	$\frac{1}{1+5}=\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{6+15}=\frac{1}{21}$.	$\frac{1}{21+35}=\frac{1}{56}$.	$\frac{1}{56+70}=\frac{1}{126}$.	$\frac{1}{126+126}=\frac{1}{252}$.	$\frac{1}{252+210}=\frac{1}{462}$.
Subsext.	$\frac{1}{1+6}=\frac{1}{7}$.	$\frac{1}{7+21}=\frac{1}{28}$.	$\frac{1}{28+56}=\frac{1}{84}$.	$\frac{1}{84+126}=\frac{1}{210}$.	$\frac{1}{210+252}=\frac{1}{462}$.	$\frac{1}{462+462}=\frac{1}{924}$.

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

SCHO-

SCHOLIUM.

Atque hic obiter incidimus in numerorum Figuratorum (ut dici solent) speculationem insperatam. Sunt enim numeri omnes (tam hujus quam sequentis Tabellæ) hujusmodi additione facti, Figurati; puta Laterales, Triangulares, Pyramidales, &c. Quod, cum sit cuivis obvium, monuisse sufficiat.

Patet etiam, (in utraque Tabella,) series numerorum sic inventorum transversas easdem plane esse atque erectas.

Ex dictis autem licet propositionum aliquot præcedentium summam (nempe de serie æqualium serie radicum mulctata) in unam Tabellam conjicere quam sequenti propositioni subjungam. Nempe ——

PROP. CXXXII.

Theorema.

SI exponatur infinita series æqualium mulctata analoga serie Primanorum (vel si libet, Subprimanorum, quod tantundem valet,) Subsecundanorum, Subtertianorum, &c. Residua ipsa, eorumque Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. eam rationem habebunt ad congruam seriem æqualium, quam habet Unitas ad numeros in subjecta Tabella indicatos. Nempe

Seriei Æqualium mulctatæ serie	Æqualia.	Residua.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrat.	Supersol.	Sextana.	Septimana.	Octavana.	Nonana.	Decimana.
Nulla	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Subprimanorum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Subsecundanorum	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
Subtertianorum	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
Subquartanorum	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
Subquintanorum	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
Subsextanorum	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
Subseptimanorum	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
Suboctavanorum	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
Subnonanorum	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378
Subdecimanorum	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756

Et sic deinceps. (right side)

Et sic deinceps.

Sequitur ex præcedente. Numerus autem Tabellæ quilibet intermedius est aggregatum ex duobus sibi proximis altero sursum altero ad dextram positis.

Notandum etiam est, eundem prodire rationis consequentem in residuorum Quadratis si auferantur Subtertiana, & in Cubis si auferantur Subsecundana; item in Sextanis si auferantur Subseptimana, & in Septimanis si auferantur Subsextana; & sic ubique, reciprocatis quasi potestatibus, ut ex inspecta tabella patet.

Sed

Sed & etiam alias idem aliquando accidit, puta in Superſolidis ſi auferantur Subprimana, & in ipſis Reſiduis ſi auferantur Subquintana, ſed & in Quadratis ſi auferantur Subſecundana; Item in Nonanis ſi auferantur Subprimana, & in ipſis Reſiduis ſi auferantur Subnonana, ſed & in Cubis ſi auferantur Subſecundana, & Quadratis ſi auferantur Subtertiana: Item in Octavanis ſi auferantur Subſextana, & Sextanis ſi auferantur Suboctavana, ſed & in Decimanis ſi auferantur Subquintana, & in Quintanis ſi auferantur Subdecimana: & ſic alibi ut ex tabella patet.

PROP. CXXXIII.

Theorema.

SI exponatur ſeries Primanorum mulctata ſerie Secundanorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta

Reſidua	Quadrata.	Cubi.
$aD - a^2$	$a^2D^2 - 2a^3D + a^4$	$a^3D^3 - 3a^4D^2 + 3a^5D - a^6$
$bD - b^2$	$b^2D^2 - 2b^3D + b^4$	$b^3D^3 - 3b^4D^2 + 3b^5D - b^6$
$cD - c^2$	$c^2D^2 - 2c^3D + c^4$	$c^3D^3 - 3c^4D^2 + 3c^5D - c^6$
&c. uſque ad	&c. uſque ad	&c. uſque ad
$DD - D^2$	$D^2D^2 - 2D^3D + D^4$	$D^3D^3 - 3D^4D^2 + 3D^5D - D^6$
$\frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{3}AD^2$	$\frac{1}{3}AD^4 - \frac{2}{4}AD^4 + \frac{1}{5}AD^4$	$\frac{1}{4}AD^6 - \frac{3}{5}AD^6 + \frac{3}{6}AD^6 - \frac{1}{7}AD^6$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}AD^2$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}AD^4$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{140}$
$\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1 \times 2}{3 \times 4 \times 5} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$	$\frac{1 \times 2 \times 3}{4 \times 5 \times 6 \times 7} = \frac{6}{840} = \frac{1}{140}$
$\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2 \times 3} \times \frac{4}{4 \times 5} = \frac{1}{30}$	$\frac{1}{2 \times 3} \times \frac{4}{4 \times 5} \times \frac{9}{6 \times 7} = \frac{1}{140}$

Et ſic deinceps; continue multiplicando Numeratores per numeros quadratos, & denominatores per binos continue ſequentes Arithmetice proportionales.

PROP. CXXXIV.

Corollarium.

IDeoque; *Si ſeries Æqualium mulctata ſerie Primanorum reſpective ducatur in ſeriem Primanorum; Rectangulorum (aut ipſis æqualium, vel etiam proportionalium, Quadratorum aut figurarum quarumvis ſimilium) aggregatum, ad aggregatum totidem æqualium, rationem habebunt cognitam.*

Atque idem accidet ſi Quadrata ſeriei illius in Quadrata hujus; Et Cubi illius in Cubos hujus, &c. reſpective ducantur.

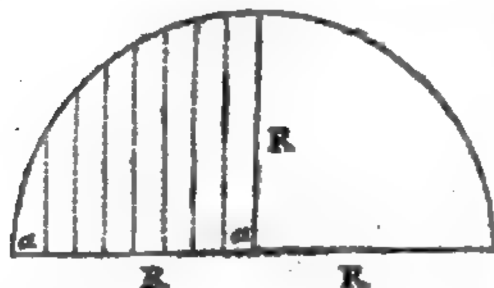
Nempe eædem prodibunt rationes quæ in Prop. præced. Nam ſi ducatur

$D - a$	$Q{:}D - a{:} = D^2 - 2aD + a^2$	$C{:}D - a{:} = D^3 - 3aD^2 + 3a^2D - a^3$
in a	in a^2	in a^3
fiet $aD - a^2$	$a^2D^2 - 2a^3D + a^4$	$a^3D^3 - 3a^4D^2 + 3a^5D - a^6$
&c.	&c.	&c.

PROP. CXXXV.

Corollarium.

IDeoque *Semi-Circulus ad Quadratum Diametri,* (*vel etiam Semi-Ellipsis ad Parallelogrammum Ellipsi circumscriptum,*) *eam habet rationem quam habent Radices quadraticæ universales Residuorum seriei Primanorum serie Secundanorum mulctatæ, ad seriem Primanorum illorum maximo æqualium: Totus itaque Circulus* (*aut Ellipsis*) *ad illud Quadratum* (*vel Parallelogrammum*) *rationem habebit illius duplam.*



Nam si diameter circuli (vel etiam ellipseos) ponatur D, (cujus pars infinite parva $\frac{D}{\infty} = a$,) eique ordinatim-applicentur infinitæ rectæ (æqualiter ab invicem distantes) semicirculum (vel semi-ellipsem) complentes; erunt illæ (ut notum est) mediæ proportionales (vel saltem in ellipsi mediis illis proportionalibus proportionales) inter diametri segmenta; Puta

inter	a	$2a$	$3a$	$4a$	
&	$D - a$	$D - 2a$	$D - 3a$	$D - 4a$	
ideoque	$\sqrt{:aD - a^2:}$	$\sqrt{:2aD - 4a^2:}$	$\sqrt{:3aD - 9a^2:}$	$\sqrt{:4aD - 16a^2}$	&c.
vel	$\sqrt{:aD - a^2:}$	$\sqrt{:bD - b^2:}$	$\sqrt{:cD - c^2}$	$\sqrt{:dD - d^2}$	

Adeoque omnium aggregatum, hoc est semicirculus, (vel semi-ellipsis) ad totidem ipsi $\sqrt{D^2}$ æqualium, puta ad quadratum Diametri (saltem ad diametrum in altitudinem ductam)

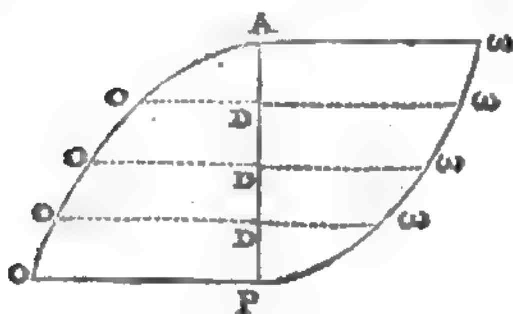
ut $\sqrt{:aD - a^2:} + \sqrt{:bD - b^2:} + \sqrt{:cD - c^2:} +$ &c. usque ad $\sqrt{:DD - D^2}$,
ad $\sqrt{D^2} + \sqrt{D^2} + \sqrt{D^2} +$ &c. $= A\sqrt{D^2} = AD$

Ideoque circulus integer ad idem quadratum, ut
$2\sqrt{:aD - a^2}$ &c. ad AD.

PROP. CXXXVI.

Corollarium.

ET proinde, *Si supponamus semiparabolæ cujusvis infinitas rectas* (*ordinatim-applicatas*) *in ejusdem, inverso situ positæ, respectivas rectas duci; quod provenit solidum ex infinitis illis Rectangulis conflatum* (*vel ex Quadratis, aut aliis quidem figuris similibus, quæ rectangulis illis æquentur,*) *erit ad æque-altum Parallelepipedum congruum* (*nempe cujus basis æquetur Quadrato basis semiparabolæ,*) *ut Semicirculus ad Quadratum Diametri.* (*Et quidem mediæ proportionales erunt in subduplicata ratione ordinatim-applicatarum in Circulo vel Ellipsi.*)



Sit eadem parabola APO situ directo, & PAω situ inverso posita: erunt igitur (ex natura Parabolæ) Quadrata ordinatim-applicatarum (nempe rectarum DO, DO, &c. descendendo; vel Dω, Dω, &c. ascendendo,) infinita series Primanorum; puta a, $2a$, $3a$, &c. vel eorum loco a, b, c, &c. quorum maximum dicatur D (nempe quadratum basis PO vel Aω:) Et propterea, eadem inverso situ erunt $D - a$, $D - 2a$, $D - 3a$, &c. vel etiam $D - a$, $D - b$, $D - c$, &c. (Æquale enim est singulorum incremen-tum,

tum, si à minimo ordiamur, atque decrementum, si ordiamur à maximo.) Et consequenter ipsæ ordinatim-applicatæ (quippe in quadratorum suorum ratione subduplicata,) illic quidem $\sqrt{a}$, $\sqrt{2a}$, $\sqrt{3a}$, &c. vel $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, &c. hic autem $\sqrt{:D-a}$. $\sqrt{:D-2a}$ $\sqrt{:D-3a}$. &c. vel (eorum loco) $\sqrt{:D-a}$. $\sqrt{:D-b}$. $\sqrt{:D-c}$. &c. Ductis igitur his in illas, emergunt rectangula O D ω. Nempe

Ductis	$\sqrt{:D-a}$.	$\sqrt{:D-b}$.	$\sqrt{:D-c}$.	&c.
In	$\sqrt{a}$.	$\sqrt{b}$.	$\sqrt{c}$.	&c.
Fient	$\sqrt{:aD-a^2}$.	$\sqrt{:bD-b^2}$.	$\sqrt{:cD-c^2}$.	&c.

Horum autem rectangulorum omnium aggregatum, ad rectangulum $\sqrt{:D-o}$. in $\sqrt{:D-o}$, hoc est $\sqrt{D^2}=D$ toties positum: hoc est, solidum ex illa multiplicatione ortum, ad dictum Parallelepipedum: est ut semicirculus ad quadratum Diametri, per præcedentem.

Et propterea etiam mediæ proportionales inter contiguas rectas OD, Dω, erunt in subduplicata ratione ordinatim applicatarum in circulo vel ellipsi. Quippe quia rectangula O D ω sunt illis ordinatim-applicatis proportionalia.

SCHOLIUM.

Nota tamen, non necessarium esse ut semi-parabola inverso situ posita sit plane eadem cum ea quæ ponitur situ directo: nam res non minus succedet in quibuslibet duabus semiparabolis inverso situ positis, modo æque-altis. Ita tamen ut, si bases habeant inæquales, basis Parallelepipedi non sumatur, utriusvis Parabolarum basis quadrato, sed utriusque rectangulo æqualis. puta PO × Aω. Quod monuisse sufficiat, cum eadem quæ præcessit demonstratio, levi immutatione facta, etiam huc accommodari possit. Vel etiam hoc inde facile inferri possit.

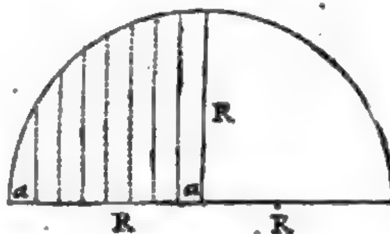
Figura vero ex omnibus mediis proportionalibus (inter OD, Dω,) constans, erit quoddam Ellipsoeides: cujus nempe ordinatim-applicatarum quadrata sunt ipsis ordinatim-applicatis in Ellipsi proportionalia, ut patet. Sicut nempe in Paraboloeide Biquadratico ordinatim-applicatarum quadrata sunt ordinatim-applicatis in Parabola proportionalia; Et quadrata ordinatim-applicatarum in Parabola proportionalia ipsis in Triangulo ordinatim-applicatis.

PROP. CXXXVII.

Corollarium.

ITem, *Sphæroeides (vel etiam Conoeides aut Pyramidoeides Ellipticum,) ad Cylindrum (vel Prisma) circumscriptum, rationem habebunt eam quam habet quadruplum seriei Primanorum serie Secundanorum mulctatæ, ad seriem totidem æqualium maximo Primanorum. Nempe ut 2 ad 3.*

Cum enim rectæ in Circulo vel Ellipsi sint Duplum seriei $\sqrt{:aD-a^2}$, &c. Erunt plana in Conoeide vel Pyramidoeide ut Quadruplum ipsorum $aD-a^2$, &c. Ideoque ad Prisma vel Cylindrum circumscriptum, ut 4 ad 6, vel 2 ad 3. Per prop. 133. Quod & antea ostensum erat prop. 123.

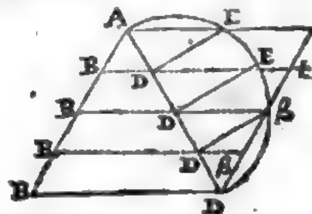


PROP. CXXXVIII.

Corollarium.

ITem, *Si Parallelogrammum linea diagonali dividatur; rectæque unius trianguli in continuas rectas alterius trianguli ducantur, mediæ proportionales erunt totidem (vel circuli, vel saltem) ellipseos ordinatim-appli-*

applicatæ; earumque quadrata aut circuli (aut figuræ quæcunque similes) Pyramidoeidis aut Conoeidis Elliptici Plana.



Sequitur ex duabus præced. Nam rectæ conterminæ sunt instar segmentorum Diametri. An autem Circulus, an Ellipsis prodibit; judicandum erit eodem indicio, quo in prop. 124.

PROP. CXXXIX.

Theorema.

SI exponatur series Primanorum mulctata serie Tertianorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Residua.	Quadrata.	Cubi.
$a D^2 - a^3$	$a^2 D^4 - 2 a^4 D^2 + a^6$	$a^3 D^6 - 3 a^5 D^4 + 3 a^7 D^2 - a^9$
&c. ad	&c. usque ad	&c. usque ad
$D D^2 - D^3$	$D^2 D^4 - 2 D^4 D^2 + D^6$	$D^3 D^6 - 3 D^5 D^4 + 3 D^7 D^2 - D^9$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} AD^3$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} = \frac{8}{105} A D^6$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{6} + \frac{3}{8} - \frac{1}{10} = \frac{48}{1920} A D^9$
vel $\frac{2}{2 \times 4}$	$\frac{2 \times 4}{3 \times 5 \times 7}$	$\frac{2 \times 4 \times 6}{4 \times 6 \times 8 \times 10}$

Et sic deinceps; puta

$\frac{2 \times 4 \times 6 \times 8}{5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13}$. $\frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10}{6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \times 16}$. $\frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12}{7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19}$. &c.

PROP. CXL.

Corollarium.

I*Dem accidet, si series Æqualium mulctata serie Secundanorum, ducatur in seriem Primanorum. Et illius Quadrata, Cubi, &c. in Quadrata, Cubos &c. hujus.*

(Puta, si rectæ in Semiparabola, diametro parallelæ, ducantur in rectas Trianguli; nam earum continuationes, in complemento, sunt series Secundanorum.) Quia nempe $D^2 - a^2$ in a est $a D^2 - a^3$. &c.

PROP. CXLI.

Theorema.

SI exponatur series Primanorum mulctata serie Quartanorum; Residuorum Quadrata, Cubi, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Residua.	Quadrata.	Cubi.
$a D^3 - a^4$	$a^2 D^6 - 2 a^5 D^3 + a^8$	$a^3 D^9 - 3 a^6 D^6 + 3 a^9 D^3 - a^{12}$
&c.	&c.	&c.
$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} A D^4$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{6} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} A D^8$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{7} + \frac{3}{10} - \frac{1}{13} = \frac{162}{3640} = \frac{81}{1820} AD^{12}$
vel $\frac{3}{2 \times 5}$	$\frac{3 \times 6}{3 \times 6 \times 9}$	$\frac{3 \times 6 \times 9}{4 \times 7 \times 10 \times 13}$

Et sic deinceps, puta $\frac{3 \times 6 \times 9 \times 12}{5 \times 8 \times 11 \times 14 \times 17}$. $\frac{3 \times 6 \times 9 \times 12 \times 15}{6 \times 9 \times 12 \times 15 \times 18 \times 21}$. &c.

PROP. CXLII.

Corollarium.

I*Dem continget, si series Æqualium mulctata serie Tertianorum, ducatur in seriem Primanorum.* (Puta,

(Puta, si rectæ Paraboloeidis Cubicalis diametro Parallelæ, ducantur in rectas Trianguli inscripti: Nam earum continuationes in Complemento, sunt series Tertianorum. Et similiter mutatis mutandis, in aliis propositionibus.)

Quia nempe $D^3 - a^3$ in a, est $aD^3 - a^4$.

SCHOLIUM.

Et pariter judicandum erit, mutatis mutandis, in aliis quibusvis casibus, ubi series hujusmodi componitur ex duabus vel pluribus aliis seriebus invicem multiplicatis. Ut patet.

PROP. CXLIII.

Theorema.

PAriter, Si exponatur series Primanorum mulctata serie Quintanorum, Sextanorum, &c. Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta $\frac{4}{2\times6}$. $\frac{4\times8}{3\times7\times11}$. $\frac{4\times8\times12}{4\times8\times12\times16}$. $\frac{4\times8\times12\times16}{5\times9\times13\times17\times21}$ &c.

Item $\frac{5}{2\times7}$ $\frac{5\times10}{3\times8\times13}$ $\frac{5\times10\times15}{4\times9\times14\times19}$ $\frac{5\times10\times15\times20}{5\times10\times15\times20\times25}$ &c.

Et sic deinceps, ut potestas seriei ablatæ postulaverit: Prout inductione patebit. Ideoque ———

PROP. CXLIV.

Theorema.

SI exponatur series Primanorum mulctata serie Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Residua ipsa, eorumque Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella: Sive, quam habent numeri Tabellæ, ad Unitatem. Nempe

Seriei Primanorum mulctatæ serie	Residua	Quadrata.	Cubi	Biquadrata.
Secundan.	$\frac{1}{2\times3}$	$\frac{1\times2}{3\times4\times5}$	$\frac{1\times2\times3}{4\times5\times6\times7}$	$\frac{1\times2\times3\times4}{5\times6\times7\times8\times9}$
Tertianor.	$\frac{2}{2\times4}$	$\frac{2\times4}{3\times5\times7}$	$\frac{2\times4\times6}{4\times6\times8\times10}$	$\frac{2\times4\times6\times8}{5\times7\times9\times11\times13}$
Quartan.	$\frac{3}{2\times5}$	$\frac{3\times6}{3\times6\times9}$	$\frac{3\times6\times9}{4\times7\times10\times13}$	$\frac{3\times6\times9\times12}{5\times8\times11\times14\times17}$
Quintan.	$\frac{4}{2\times6}$	$\frac{4\times8}{3\times7\times11}$	$\frac{4\times8\times12}{4\times8\times12\times16}$	$\frac{4\times8\times12\times16}{5\times9\times13\times17\times21}$
Sextanor.	$\frac{5}{2\times7}$	$\frac{5\times10}{3\times8\times13}$	$\frac{5\times10\times15}{4\times9\times14\times19}$	$\frac{5\times10\times15\times20}{5\times10\times15\times20\times25}$
Septiman.	$\frac{6}{2\times8}$	$\frac{6\times12}{3\times9\times15}$	$\frac{6\times12\times18}{4\times10\times16\times22}$	$\frac{6\times12\times18\times24}{5\times11\times17\times23\times29}$
Octavan.	$\frac{7}{2\times9}$	$\frac{7\times14}{3\times10\times17}$	$\frac{7\times14\times21}{4\times11\times18\times25}$	$\frac{7\times14\times21\times28}{5\times12\times19\times26\times33}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

PROP. CXLV. *Theorema.*

Similiter, Si exponatur ſeries Secundanorum mulctata ſerie Tertianorum, Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. Reſidua ipſa, eorumque Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad ſeriem Æqualium, eam quam indicat ſubjecta Tabella. Nempe

Ratio quam habent ad ſeriem æqualium

Seriei Secundanorum mulctatæ ſerie	Reſ.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.
Tertian.	$\frac{1}{3\times4}$	$\frac{1\times2}{5\times6\times7}$	$\frac{1\times2\times3}{7\times8\times9\times10}$	$\frac{1\times2\times3\times4}{9\times10\times11\times12\times13}$
Quart.	$\frac{2}{3\times5}$	$\frac{2\times4}{5\times7\times9}$	$\frac{2\times4\times6}{7\times9\times11\times13}$	$\frac{2\times4\times6\times8}{9\times11\times13\times15\times17}$
Quintan.	$\frac{3}{3\times6}$	$\frac{3\times6}{5\times8\times11}$	$\frac{3\times6\times9}{7\times10\times13\times16}$	$\frac{3\times6\times9\times12}{9\times12\times15\times18\times21}$
Sextan.	$\frac{4}{3\times7}$	$\frac{4\times8}{5\times9\times13}$	$\frac{4\times8\times12}{7\times11\times15\times19}$	$\frac{4\times8\times12\times16}{9\times13\times17\times21\times25}$
Septim.	$\frac{5}{3\times8}$	$\frac{5\times10}{5\times10\times15}$	$\frac{5\times10\times15}{7\times12\times17\times22}$	$\frac{5\times10\times15\times20}{9\times14\times19\times24\times29}$
Octav.	$\frac{6}{3\times9}$	$\frac{6\times12}{5\times11\times17}$	$\frac{6\times12\times18}{7\times13\times19\times25}$	$\frac{6\times12\times18\times24}{9\times15\times21\times27\times33}$

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps, ut inductione patebit.

PROP. CXLVI. *Theorema.*

Item, Si exponatur ſeries Tertianorum mulctata ſerie Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. Reſidua ipſa, eorumque Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad ſeriem Æqualium, eam quam indicat ſubjecta Tabella. Nempe

Ratio quam habent ad ſeriem æqualium

Seriei Tertianorum mulctatæ ſerie	Reſ.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.
Quartan.	$\frac{1}{4\times5}$	$\frac{1\times2}{7\times8\times9}$	$\frac{1\times2\times3}{10\times11\times12\times13}$	$\frac{1\times2\times3\times4}{13\times14\times15\times16\times17}$
Quintan.	$\frac{2}{4\times6}$	$\frac{2\times4}{7\times9\times11}$	$\frac{2\times4\times6}{10\times12\times14\times16}$	$\frac{2\times4\times6\times8}{13\times15\times17\times19\times21}$
Sextan.	$\frac{3}{4\times7}$	$\frac{3\times6}{7\times10\times13}$	$\frac{3\times6\times9}{10\times13\times16\times19}$	$\frac{3\times6\times9\times12}{13\times16\times19\times22\times25}$
Septiman.	$\frac{4}{4\times8}$	$\frac{4\times8}{7\times11\times15}$	$\frac{4\times8\times12}{10\times14\times18\times22}$	$\frac{4\times8\times12\times16}{13\times17\times21\times25\times29}$
Octavan.	$\frac{5}{4\times9}$	$\frac{5\times10}{7\times12\times17}$	$\frac{5\times10\times15}{10\times15\times20\times25}$	$\frac{5\times10\times15\times20}{13\times18\times23\times28\times33}$

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps, ut inductione patebit.

SCHO-

SCHOLIUM.

Atque eodem modo facile erit vel has Tabellas quousque libet continuare, vel alias etiam pro seriebus sequentibus componere; puta seriebus Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. mulctatis seriebus quibuslibet superioris potestatis.

PROP. CXLVII.

Theorema.

SI exponatur series Subsecundanorum mulctata serie Primanorum: Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium rationem habebunt cognitam.

Nempe eam quæ exhibetur prop. 133. Puta.

Residua.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{aD} - \sqrt{a^2}$	$\sqrt{a^2D^2} - 2\sqrt{a^3D} + \sqrt{a^4}$	$\sqrt{a^3D^3} - 3\sqrt{a^4D^2} + 3\sqrt{a^5D} - \sqrt{a^6}$
&c. ad	&c. usque ad	&c. usque ad
$\sqrt{DD} - \sqrt{D^2}$	$\sqrt{D^2D^2} - 2\sqrt{D^3D} + \sqrt{D^4}$	$\sqrt{D^3D^3} - 3\sqrt{D^4D^2} + 3\sqrt{D^5D} - \sqrt{D^6}$
$\frac{2}{3}A\sqrt{D^3} - \frac{2}{4}A\sqrt{D^4}$	$\frac{2}{4}A\sqrt{D^4} - \frac{4}{5}A\sqrt{D^4} + \frac{2}{6}AD^2$	$\frac{2}{5}AD^3 - \frac{6}{6}AD^3 + \frac{6}{7}AD^3 - \frac{2}{8}AD^3$
$\frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{4} - \frac{4}{5} + \frac{2}{6} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$	$\frac{2}{5} - \frac{6}{6} + \frac{6}{7} - \frac{2}{8} = \frac{12}{1680} = \frac{1}{140}$
$\frac{2}{3 \times 4} = \frac{1}{2 \times 3}$	$\frac{2 \times 2}{4 \times 5 \times 6} = \frac{1 \times 2}{3 \times 4 \times 5}$	$\frac{2 \times 2 \times 3}{5 \times 6 \times 7 \times 8} = \frac{1 \times 2 \times 3}{4 \times 5 \times 6 \times 7}$.

PROP. CXLVIII.

Corollarium.

IDem *continget si series Æqualium mulctata serie Subsecundanorum, ducatur in seriem Subsecundanorum.*

(Puta si ordinatim-applicatæ in semi-parabola ducantur in earundem continuationes in ipsius complemento.) Nam $\sqrt{D} - \sqrt{a}$ in $\sqrt{a}$ facit $\sqrt{aD} - \sqrt{a^2} = \sqrt{aD} - a$. &c. Et facta ab eorum quadratis, æquantur quadratis horum &c.

PROP. CXLIX.

Corollarium.

PAtet *etiam, Eosdem provenire rationes, sive exponatur series* $a - a^2$ *&c. sive series* $\sqrt{a} - \sqrt{a}$ *&c. (vel* $\sqrt{a} - a$*:)*

Nempe, collatis Prop. 133. & 147.

SCHOLIUM.

Ideoque & reliqua quæ post Prop. 133. habentur Corollaria, huc etiam (mutatis mutandis) non difficulter transferri possunt. Quod monuisse sufficiat.

PROP. CL.

Theorema.

SI exponatur series Subsecundanorum mulctata serie Radicum Quadraticarum Tertianorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium rationem habebunt cognitam. Nempe

Residua.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{aD^2} - \sqrt{a^3}$	$\sqrt{a^2D^4} - 2\sqrt{a^4D^2} + \sqrt{a^6}$	$\sqrt{a^3D^6} - 3\sqrt{a^5D^4} + 3\sqrt{a^7D^2} - \sqrt{a^9}$
&c.	&c.	&c.
$\frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$	$\frac{2}{4} - \frac{4}{6} + \frac{2}{8} = \frac{16}{192} = \frac{1}{12}$	$\frac{2}{5} - \frac{6}{7} + \frac{6}{9} - \frac{2}{11} = \frac{96}{3465}$
$\frac{4}{3 \times 5}A\sqrt{D^3}$	$\frac{4 \times 4}{4 \times 6 \times 8}A\sqrt{D^6}$	$\frac{4 \times 4 \times 6}{5 \times 7 \times 9 \times 11}A\sqrt{D^9}$

PROP.

PROP. CLI. *Corollarium.*

IDem continget, si series Æqualium mulctata serie Primanorum, ducatur in seriem Subsecundanorum.

Quia $D - a$ vel $\sqrt{D^2} - \sqrt{a^2}$ in $\sqrt{a}$, facit $D\sqrt{a} - a\sqrt{a}$, vel $\sqrt{aD^2} - \sqrt{a^3}$.

SCHOLIUM.

Et similiter etiam alibi intelligendum est, ubi series exposita dividi possit, in duas vel plures componentes.

PROP. CLII. *Theorema.*

SI exponatur series Subsecundanorum mulctata serie Secundanorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Residua.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{aD^3} - \sqrt{a^4}$ &c.	$\sqrt{a^2D^6} - 2\sqrt{a^5D^3} + \sqrt{a^8}$ &c.	$\sqrt{a^3D^9} - 3\sqrt{a^6D^6} + 3\sqrt{a^9D^3} - \sqrt{a^{12}}$ &c.
$\frac{2}{3} - \frac{2}{6} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{4} - \frac{4}{7} + \frac{2}{10} = \frac{36}{280} = \frac{9}{70}$	$\frac{2}{5} - \frac{6}{8} + \frac{6}{11} - \frac{2}{14} = \frac{324}{6160} = \frac{81}{1540}$
$\frac{6}{3 \times 6}$	$\frac{6 \times 6}{4 \times 7 \times 10}$	$\frac{6 \times 6 \times 9}{5 \times 8 \times 11 \times 14}$

Et sic deinceps. Et similiter in subductione seriei cujusvis potestatis superioris. Adeoque ——

PROP. CLIII. *Theorema.*

SI exponatur series Subsecundanorum mulctata serie Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. vel Radicum Quadraticarum Tertianorum, Quintanorum, &c. Residua ipsa, eorumque Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella. Nempe

Ratio quam habent ad seriem Æqualium

Seriei Subsecundanorum mulctatæ serie	Residua	Quadrata	Cubi	Biquadrata
Primanor.	$\frac{2}{3 \times 4}$	$\frac{2 \times 2}{4 \times 5 \times 6}$	$\frac{2 \times 2 \times 3}{5 \times 6 \times 7 \times 8}$	$\frac{2 \times 2 \times 3 \times 4}{6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}$
√ Tertian.	$\frac{4}{3 \times 5}$	$\frac{4 \times 4}{4 \times 6 \times 8}$	$\frac{4 \times 4 \times 6}{5 \times 7 \times 9 \times 11}$	$\frac{4 \times 4 \times 6 \times 8}{6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14}$
Secundan.	$\frac{6}{3 \times 6}$	$\frac{6 \times 6}{4 \times 7 \times 10}$	$\frac{6 \times 6 \times 9}{5 \times 8 \times 11 \times 14}$	$\frac{6 \times 6 \times 9 \times 12}{6 \times 9 \times 12 \times 15 \times 18}$
√ Quintan.	$\frac{8}{3 \times 7}$	$\frac{8 \times 8}{4 \times 8 \times 12}$	$\frac{8 \times 8 \times 12}{5 \times 9 \times 13 \times 17}$	$\frac{8 \times 8 \times 12 \times 16}{6 \times 10 \times 14 \times 18 \times 22}$
Tertianor.	$\frac{10}{3 \times 8}$	$\frac{10 \times 10}{4 \times 9 \times 14}$	$\frac{10 \times 10 \times 15}{5 \times 10 \times 15 \times 20}$	$\frac{10 \times 10 \times 15 \times 20}{6 \times 11 \times 16 \times 21 \times 26}$
√ Septim.	$\frac{12}{3 \times 9}$	$\frac{12 \times 12}{4 \times 10 \times 16}$	$\frac{12 \times 12 \times 18}{5 \times 11 \times 17 \times 23}$	$\frac{12 \times 12 \times 18 \times 24}{6 \times 12 \times 18 \times 24 \times 30}$
Quartan.	$\frac{14}{3 \times 10}$	$\frac{14 \times 14}{4 \times 11 \times 18}$	$\frac{14 \times 14 \times 21}{5 \times 12 \times 19 \times 26}$	$\frac{14 \times 14 \times 21 \times 28}{6 \times 13 \times 20 \times 27 \times 34}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

PROP.

PROP. CLIV.

Theorema.

PAriter, Si exponatur ſeries Subtertianorum mulctata ſerie Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. vel Radicum Cubicarum Secundanorum, Quartanorum, Quintanorum, Septimanorum, &c. Reſidua ipſa, eorumque Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad ſeriem Æqualium, eam quam indicat ſubjecta Tabella. Nempe

Ratio quam habent ad ſeriem Æqualium

Seriei Subtertianorum mulctatæ ſerie	Reſ.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.
√c. Secun.	$\frac{3}{4\times5}$	$\frac{3\times2}{5\times6\times7}$	$\frac{3\times2\times3}{6\times7\times8\times9}$	$\frac{3\times2\times3\times4}{7\times8\times9\times10\times11}$
Primanor.	$\frac{6}{4\times6}$	$\frac{6\times4}{5\times7\times9}$	$\frac{6\times4\times6}{6\times8\times10\times12}$	$\frac{6\times4\times6\times8}{7\times9\times11\times13\times15}$
√c. Quart.	$\frac{9}{4\times7}$	$\frac{9\times6}{5\times8\times11}$	$\frac{9\times6\times9}{6\times9\times12\times15}$	$\frac{9\times6\times9\times12}{7\times10\times13\times16\times19}$
√c. Quint.	$\frac{12}{4\times8}$	$\frac{12\times8}{5\times9\times13}$	$\frac{12\times8\times12}{6\times10\times14\times18}$	$\frac{12\times8\times12\times16}{7\times11\times15\times19\times23}$
Secundan.	$\frac{15}{4\times9}$	$\frac{15\times10}{5\times10\times15}$	$\frac{15\times10\times15}{6\times11\times16\times21}$	$\frac{15\times10\times15\times20}{7\times12\times17\times22\times27}$
√c. Septim.	$\frac{18}{4\times10}$	$\frac{18\times12}{5\times11\times17}$	$\frac{18\times12\times18}{6\times12\times18\times24}$	$\frac{18\times12\times18\times24}{7\times13\times19\times25\times31}$
√c. Octav.	$\frac{21}{4\times11}$	$\frac{21\times14}{5\times12\times19}$	$\frac{21\times14\times21}{6\times13\times20\times27}$	$\frac{21\times14\times21\times28}{7\times14\times21\times28\times35}$
Tertianor.	$\frac{24}{4\times12}$	$\frac{24\times16}{5\times13\times21}$	$\frac{24\times16\times24}{6\times14\times22\times30}$	$\frac{24\times16\times24\times32}{7\times15\times23\times31\times39}$

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps, ut inductione patebit.

SCHOLIUM.

Et ſimili methodo non erit difficile & has Tabellas quouſque libet continuare, & alias etiam pro ſeriebus aliis componere; puta ſeriebus ſubquartanorum, ſubquintanorum, &c. (aut quidem radicum quadraticarum ſubtertianorum, ſubquintanorum, &c. vel radicum cubicarum ſubſecundanorum, ſubquartanorum, &c. aut aliarum ſimilium,) mulctatis ſeriebus quibuſlibet ſuperioris poteſtatis.

Sed & facile eſt has Tabellas (aliaſque ſimiliter condendas) interpolare, ſaltem quoad altitudinem, interponendo ſeries tranſverſas quotlibet, ut ex ipſa Tabellarum progreſſione rite conſiderata patebit.

Verbi gratia, in Tabella Prop. 144. Si ſeries Primanorum mulctetur ſerie Radicum quadraticarum Quintanorum, interponenda erit huic ablationi conveniens ſeries alia tranſverſa inter primam & ſecundam iſtius Tabellæ, (quia nempe Radices quadraticæ Quintanorum, quarum index eſt $\frac{5}{2}$, vel $2\frac{1}{2}$, medium locum habent inter ſecundana & tertiana, quorum indices 2 & 3;) eritque ſeries illa,

Residua.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.
$\frac{1\frac{1}{2}}{2\times3\frac{1}{2}}$	$\frac{1\frac{1}{2}\times3}{3\times4\frac{1}{2}\times6}$	$\frac{1\frac{1}{2}\times3\times4\frac{1}{2}}{4\times5\frac{1}{2}\times7\times8\frac{1}{2}}$	$\frac{1\frac{1}{2}\times3\times4\frac{1}{2}\times6}{5\times6\frac{1}{2}\times8\times9\frac{1}{2}\times11}$
vel $\frac{3}{2\times7}$	$\frac{3\times6}{3\times9\times12}$	$\frac{3\times6\times9}{4\times11\times14\times17}$	$\frac{3\times6\times9\times12}{5\times13\times16\times19\times22}$
vel $\frac{6}{4\times7}$	$\frac{6\times6}{6\times9\times12}$	$\frac{6\times6\times9}{8\times11\times14\times17}$	$\frac{6\times6\times9\times12}{10\times13\times16\times19\times22}$

Atque idem etiam in aliis Tabellis præstare non erit difficile, si processui cujusvis Tabellæ attendatur.

At quo pacto licebit easdem Tabellas interpolare quoad latitudinem, seriebus scilicet erectis alias interponendo; (puta radicum universalium Residuorum, Radicum quadraticarum Cuborum, &c. vel Radicum cubicarum Residuorum, Quadratorum, Biquadratorum, &c. vel similium;) non adeo facilis est labor, si quidem possibilis. Illud autem deinceps, quoad potero, conabor, & quidem aliquousque præstabo, licet illud universaliter efficere vix spondere ausim aliter quam approximando.

Interim de seriebus auctis aliqua dicenda sunt, ne videar eas penitus omittere; sed breviter, ne sim tædio.

PROP. CLV.

Theorema.

SI exponatur series Æqualium aucta serie analoga Primanorum; Aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem illam Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Aggregata.	Quadrata.	Cubi.
$R+a$	$R^2+2aR+a^2$	$R^3+3aR^2+3a^2R+a^3$
&c. ad	&c. usque ad	&c. usque ad
$R+R$	$R^2+2RR+R^2$	$R^3+3RR^2+3R^2R+R^3$
$AR+\frac{1}{2}AR$	$AR^2+\frac{2}{2}AR^2+\frac{1}{3}AR^2$	$AR^3+\frac{3}{2}AR^3+\frac{3}{3}AR^3+\frac{1}{4}AR^3$
$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	$1+\frac{2}{2}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$	$1+\frac{3}{2}+\frac{3}{3}+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

Ubi numerator quilibet constat ex præcedentis duplo unitate aucto: Denominator ex præcedente unitate aucto.

PROP. CLVI.

Corollarium.

IDeoque, *Si Trapezio (ex Parallelogrammo & Triangulo, æqualium basium & altitudinum, conflato) aptetur Conoides (vel Pyramidoeides) truncatum (sive conversione circa axem, sive alias;) erit illud ad Cylindrum vel Prisma inscriptum, ut* $\frac{7}{3}$ *ad* 1, *vel, ut* 7 *ad* 3.

Nempe ut quadrata seriei æqualium serie Primanorum auctæ, ad seriem æqualium.

Sin Parallelogrammi & Trianguli bases sint inæquales, moderamen adhibendum est.

PROP.

PROP. CLVII.

Corollarium.

SI autem *Conoeides vel Pyramidoeides illud Cylindrice vel Prismatice excavetur; residuum erit (ad exemtum Cylindrum vel Prisma maximum inscriptum) ut* 4 *ad* 3.

Nempe ut $\frac{7}{3} - \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$ ad 1.

PROP. CLVIII.

Theorema.

SI exponatur series Æqualium aucta serie Secundanorum; aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem illam Æqualium, rationem habebunt cognitam. (Puta, si Parallelogrammum complemento Semiparabolæ augeatur.)

Nempe, pro quovis termino seriei Primanorum posito a (ad abbreviandam operationem,) & propterea pro quovis termino Secundanorum a^2, &c. Erunt

Aggregata.	Quadrata.	Cubi.
$R^2 + a^2$ &c.	$R^4 + 2a^2R^2 + a^4$ &c.	$R^6 + 3a^2R^4 + 3a^4R^2 + a^6$ &c.
$1AR^2 + \frac{1}{3}AR^2$	$1AR^4 + \frac{2}{3}AR^4 + \frac{1}{5}AR^4$	$1AR^6 + \frac{3}{3}AR^6 + \frac{3}{5}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6$
$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$	$\frac{1}{1} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{28}{15}$	$\frac{1}{1} + \frac{3}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{7} = \frac{288}{105}$

SCHOLIUM.

Et pari modo procedendum erit, si series Æqualium augeatur serie Tertianorum, Quartanorum, &c. Ut patet.

PROP. CLIX.

Theorema.

SI exponatur series Æqualium aucta serie Subsecundanorum; aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem illam Æqualium, rationem habebunt cognitam. (Puta si Parallelogrammum augeatur Semiparabola.) Nempe

Aggregata.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{R} + \sqrt{a}$ &c.	$\sqrt{R^2} + 2\sqrt{a}R + \sqrt{a^2}$ &c.	$\sqrt{R^3} + 3\sqrt{a}R^2 + 3\sqrt{a^2}R + \sqrt{a^3}$ &c.
$A\sqrt{R} + \frac{2}{3}A\sqrt{R}$	$A\sqrt{R^2} + \frac{4}{3}A\sqrt{R^2} + \frac{2}{4}A\sqrt{R^2}$	$A\sqrt{R^3} + \frac{6}{3}A\sqrt{R^3} + \frac{6}{4}A\sqrt{R^3} + \frac{2}{5}A\sqrt{R^3}$
$\frac{2}{2} + \frac{2}{3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$	$\frac{2}{2} + \frac{4}{3} + \frac{2}{4} = \frac{68}{24} = \frac{17}{6}$	$\frac{2}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{4} + \frac{2}{5} = \frac{588}{120} = \frac{49}{10}$

PROP. CLX.

Theorema.

SI series Æqualium augeatur serie Subtertianorum; Aggregata, eorumque Quadrata, Cubi, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

(Puta, si Parallelogrammum augeatur Semiparaboloeide Cubicali,) Nempe.

Aggregata.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt[3]{R} + \sqrt[3]{a}$ &c.	$\sqrt[3]{R^2} + 2\sqrt[3]{a}R + \sqrt[3]{a^2}$ &c.	$\sqrt[3]{R^3} + 3\sqrt[3]{a}R^2 + 3\sqrt[3]{a^2}R + \sqrt[3]{a^3}$ &c.
$\frac{3}{3} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$	$\frac{3}{3} + \frac{6}{4} + \frac{3}{5} = \frac{31}{10}$	$\frac{3}{3} + \frac{9}{4} + \frac{9}{5} + \frac{3}{6} = \frac{111}{20}$

SCHOLIUM.

Et pari modo procedendum erit, si exponatur series Æqualium aucta serie Subquartanorum, Subquintanorum, &c. vel etiam serie radicum-quadraticarum Cuborum, Supersolidorum, &c. vel radicum Cubicarum Secundanorum, Quartanorum, &c. Et pariter in aliis.

PROP. CLXI.
Theorema.

P*Ariter*, Si series Primanorum augeatur serie Secundanorum; Aggregata, eorumque Quadrata, Cubi, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Aggregata.	Quadrata.	Cubi.
$aR+a^2$	$a^2R^2+2a^3R+a^4$	$a^3R^3+3a^4R^2+3a^5R+a^6$
&c.	&c.	&c.
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}AR^2$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}AR^4$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}+\frac{1}{7}=\frac{209}{140}AR^6$

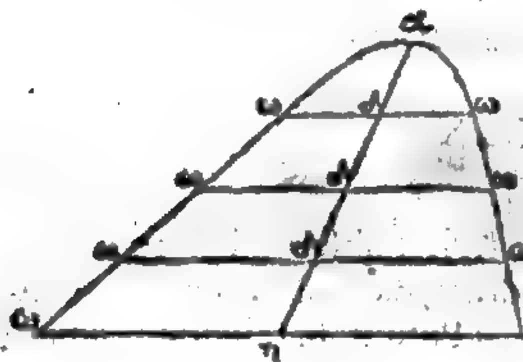
SCHOLIUM.

Et pari modo procedendum erit, si exponatur series Primanorum (vel etiam Secundanorum, Tertianorum, &c.) aucta serie qualibet alia; ut non sit opus hisce diutius immorari. In quibus omnibus Consecutio Numerorum, tum in Numeratoribus tum in Denominatoribus, est ad oculum conspicua.

PROP. CLXII.
Corollarium.

IDeoque, *Conoeides vel Pyramidoeides Hyperbolicum, ad semissem Cylindri vel Prismatis circumscripti, est ut 5 ad 6: ad totum vero, ut 5 ad 12.*

Intellige, si tam transversa diameter, quam diameter intercepta maxima, ponatur æqualis lateri recto: secus enim adhibenda erit moderatio.



Nam, si ponatur Hyperbolæ latus rectum l vel R, transversa diameter $t=l$, & diameter intercepta d, erunt quadrata ordinatim-applicatarum $dl+\frac{d}{t}dl$ (per pr. 33. Con. Sect.) vel (propter $t=l$) $dl+d^2$. Et propterea (cum sit l vel R, certa quantitas, & d mutabilis & quidem altitudini proportionalis, pro qua igitur substitui potest a, b, c, &c.) erunt omnium Quadrata, (adeoque & plana Conoeidis vel Pyramidoeidis,) series infinita Primanorum aucta serie Secundanorum; puta $aR+a^2$, $bR+b^2$, $cR+c^2$, &c. usque ad R^2+R^2. Adeoque series illa ad semissem seriei totidem maximo ($R^2+R^2=2R^2$) æqualium (puta ad AR^2,) erit ut 5 ad 6, per præced. Et propterea ad integram illam seriem æqualium, ut 5 ad 12. Quod erat propositum.

SCHOLIUM.

Idem etiam eveniet, si saltem sumatur Diameter-intercepta maxima æqualis Diametro-transversæ. Ut colligi poterit ex propositione sequente.

PROP. CLXIII.
Corollarium.

S*I autem non adsit limitatio prop. præced. Erit ratio Conoeidis vel Pyramidoeidis ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum, utut non eadem quæ illic innuitur, cognita tamen.*

Cum enim, utcunque, quadratum ordinatim-applicatæ in Hyperbola sit $dl+\frac{dd}{t}l$, vel $dL+\frac{dd}{T}L$, vel $\frac{dT+dd}{T}L$; si pro diametris interceptis, d, d, &c. ponantur successive a, b, c, &c. sitque omnium maxima D, adeoque quadratum ordinatim-applicatæ maximæ $\frac{DT+DD}{T}L$: Erunt omnia $aT+bT+cT$ &c. (usque ad DT) $=\frac{1}{2}ADT$; & omnia $a^2+b^2+c^2$ &c. (ad D^2) $=\frac{1}{3}AD^2$; quorum aggregatum $\frac{1}{2}ADT+\frac{1}{3}AD^2$ si ducatur in L, & factum illud dividatur

tur

tur per T; prodibit $\frac{\frac{1}{2}ADT + \frac{1}{3}AD^2}{T}L$, vel etiam $\frac{\frac{1}{2}T + \frac{1}{3}D}{T}ADL$, vel denique $\frac{3T + 2D}{6T}ADL$: Quam autem habet rationem $\frac{3T + 2D}{6T}ADL$, aggregatum Quadratorum omnium ordinatim-applicatarum; ad $\frac{DT + D^2}{T}AL$ vel $\frac{T + D}{T}ADL$, Aggregatum totidem Quadrato maximæ æqualium: eam habet Conoeides vel Pyramidoeides illud, ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum; (propter plana Quadratis illis proportionalia;) nempe, ut $\frac{3T + 2D}{6T}$ ad $\frac{T + D}{T}$, vel, ut $3T + 2D$ ad $6T + 6D$. vel, ut $\frac{1}{2}T + \frac{1}{3}D$ ad $T + D$. Adeoque ——

PROP. CLXIV.

Corollarium.

UT *semissis Diametri Transversæ auctus triente Diametri Interceptæ, ad Transversæ & Interceptæ Aggregatum; seu, ut Triplum Transversæ simul cum Duplo Interceptæ, ad simul utriusque Sextuplum: sic est Conoeides vel Pyramidoeides Hyperbolicum, ad Cylindrum vel Prisma (super eadem basi) circumscriptum.*

Patet ex præcedente.

PROP. CLXV.

Corollarium.

ITem, *Hyperbola ad Parallelogrammum circumscriptum, est ut Series Radicum-universalium, respective aucta, ad seriem totidem Radicum maximæ æqualium.*

Nempe si adsit limitatio Prop. 162, ut $\sqrt{:aR + a^2:} + \sqrt{:bR + b^2:} + \sqrt{:cR + c^2:}$ &c. (usque ad $\sqrt{:R^2 + R^2:}$) ad $A\sqrt{:R^2 + R^2:} = A\sqrt{2R^2} = AR\sqrt{2}$. Hoc est, ut omnes ordinatim-applicatæ ad maximam toties positam.

Si vero illa limitatio non adsit; saltem erit ut $\sqrt{:\frac{aT + a^2}{T}L:} + \sqrt{:\frac{bT + b^2}{T}L:} + \sqrt{:\frac{cT + c^2}{T}L:}$ &c. (usque ad $\sqrt{:\frac{DT + D^2}{T}L:}$) ad $A\sqrt{:\frac{DT + D^2}{T}L:}$ Hoc est, (dividendo omnia per $\sqrt{L}$ & multiplicando in $\sqrt{T}$) ut $\sqrt{:aT + a^2:} + \sqrt{:bT + b^2:} + \sqrt{:cT + c^2}$ &c. (usque ad $\sqrt{:DT + D^2:}$) ad $A\sqrt{:DT + D^2:}$ ut patet ex demonstratione prop. 163.

SCHOLIUM.

At quo pacto tandem ratio Aggregati Radicum illarum Universalium, ad Aggregatum totidem maximæ æqualium, numeris explicari poterit, non ita facile ostendetur.

Adeoque & hic incidimus in eandem difficultatem in Quadratura Hyperbolæ, quam supra aliquoties meminimus de Quadratura Circuli vel Ellipseos, (aliarumque aliquot figurarum curvilinearum:) nempe ut inquiratur jam ratio quam habet infinita series Radicum universalium Binomiorum, sicut illic Apotomarum.

Et quidem aliquando proclivis eram ut crederem rem plane impossibilem esse ut Radices surdæ numero infinitæ & invicem incommensurabiles ita in unum aggregatum coire possint ut illud, ad expositam aliquam quantitatem rationalem, rationem habeat explicabilem.

Atque hoc quidem eo magis adhuc confirmatum esse videbatur, quoniam ejusmodi series finita ad seriem totidem maximæ æqualium vix aliam passa est ratio-

 nis

nis explicationem quam omnes sigillatim repetendo; raro enim duæ vel plures occurrunt commensurabiles quæ in unam additione colligi possint.

Verbi gratia, si ponatur circuli Radius æqualium partium 6, Sinus recti seu Ordinatim-applicatæ in Quadrante singulis partium istarum terminis insistentes, erunt, $\surd:36-0:+\surd:36-1:+\surd:36-4:+\surd:36-9:+\surd:36-16:+\surd:36-25:+\surd:36-36:$ (per ea quæ dicta sunt ad pr. 121.) vel quod eodem recidit, $\surd 36+\surd 35+\surd 32+\surd 27+\surd 20+\surd 11+\surd 0$; vel, ut irrationalitas ad minimos terminos reducatur, $6+\surd 35+4\surd 2+3\surd 3+2\surd 5+\surd 11+0$: Ratio igitur quam habet illud radicum aggregatum ad radicem maximam toties positam, puta $7\surd:36-0:$ vel $7\surd 36$ vel 7×6 hoc est 42; non explicatius efferri potest quam $\frac{6+\surd 35+4\surd 2+3\surd 3+2\surd 5+\surd 11+0}{42}$. Atque ea est ratio quam habent illi Sinus recti seu Ordinatim-applicatæ in Quadrante ad totidem rectas Radio æquales & parallelas in Quadrato circumscripto.

Pariter, si ponatur radius partium 10; erunt sinus recti $\surd:100-0:+\surd:100-1:+\surd:100-4:+\surd:100-9:+\surd:100-16:+\surd:100-25:+\surd:100-36:+\surd:100-49:+\surd:100-64:+\surd:100-81:+\surd:100-100:$ Hoc est $\surd 100+\surd 99+\surd 96+\surd 91+\surd 84+\surd 75+\surd 64+\surd 51+\surd 36+\surd 19+\surd 0$. Vel etiam $10+3\surd 11+4\surd 6+\surd 91+2\surd 21+5\surd 3+8+\surd 51+6+\surd 19+0$. Quod aggregatum non aliter abbreviari potest quam pro $10+8+6+0$ substituendo 24; ut ratio illius aggregati ad radicem maximam toties positam, puta ad $11\surd 100$ vel 11×10 vel 110, non explicatius efferri possit quam $\frac{24+3\surd 11+4\surd 6+\surd 91+2\surd 21+5\surd 3+\surd 51+\surd 19}{110}$; quæ minus adhuc videtur intelligibilis quam ubi ponitur radius partium pauciorum, puta 6.

Atque eodem modo quo plures supponuntur radii partes eo intricatior necesse est ut fiat rationis explicatio; quæ quidem fere omnium radicum repetitionem postulet, cum paucæ admodum, raro quidem, & non nisi fortuito quasi, occurrunt, quæ vel rationales sint vel quidem invicem commensurabiles. Et propterea si supponatur Radius partium numero infinitarum, ratio proveniens etiam minus adhuc videatur explicabilis.

Idem contingeret, si, juxta tenorem prop. 135. ponatur circuli Diameter partium 12. Ita enim essent Sinus recti correspondentes in Semicirculo, $\surd:0\times 12-0:+\surd:1\times 12-1:+\surd:2\times 12-4:+\surd:3\times 12-9:+\surd:4\times 12-16:+\surd:5\times 12-25:+\surd:6\times 12-36:+\surd:7\times 12-49:+\surd:8\times 12-64:+\surd:9\times 12-81:+\surd:10\times 12-100:+\surd:11\times 12-121:+\surd:12\times 12-144$. Hoc est $\surd:0-0:+\surd:12-1:+\surd:24-4:+\surd:36-9:+\surd:48-16:+\surd:60-25:+\surd:72-36:+\surd:84-49:+\surd:96-64:+\surd:108-81:+\surd:120-100:+\surd:132-121:+\surd:144-144$. Hoc est $\surd 0+\surd 11+\surd 20+\surd 27+\surd 32+\surd 35+\surd 36+\surd 35+\surd 32+\surd 27+\surd 20+\surd 11+\surd 0$. Vel propter easdem radices bis positas, $2\surd 0+2\surd 11+2\surd 20+2\surd 27+2\surd 32+2\surd 35+\surd 36$. Vel, reducendo irrationalitatem ad minimos terminos, $0+2\surd 11+4\surd 5+6\surd 3+8\surd 2+2\surd 35+6$. Ratio igitur quam habet hoc aggregatum ad totidem radices maximæ æquales, puta ad $13\surd 36$ vel 13×6, hoc est, ad 78, non explicatius efferri poterit quam $\frac{2\surd 11+4\surd 5+6\surd 3+8\surd 2+2\surd 35+6}{78}$, vel $\frac{\surd 11+2\surd 5+3\surd 3+4\surd 2+\surd 35+3}{39}$. Atque ea est ratio quam habet aggregatum istorum Sinuum rectorum in Semicirculo, ad totidem rectas Radio æquales & parallelas in Parallelogrammo huic semicirculo circumscripto. Si autem sinus maximus $\surd 36=6$ supponatur bis poni (pro utroque scilicet quadrante semel) atque eapropter pro 13 æqualibus, ponantur 14; (puta, pro $13\times 6=78$ ponatur $14\times 6-84$;) eadem erit hæc ratio cum ea quam supra provenire diximus posito radio partium sex.

Pariter, si Diameter ponatur partium 20; Sinus recti in Semicirculo erunt $\surd:0\times 20-0:+\surd:1\times 20-1:+\surd:2\times 20-4:+\surd:3\times 20-9:+\surd:4\times 20-16:+\surd:5\times 20-25:+\surd:6\times 20-36:+\surd:7\times 20-49:+\surd:8\times 20-64:+\surd:$

$+\surd:9\times20-81:+\surd:10\times20-100:+\surd:11\times20-121:+\surd:12\times20-144:+\surd:13\times20-169:+\surd:14\times20-196:+\surd:15\times20-225:+\surd:16\times20-256:+\surd:17\times20-289:+\surd:18\times20-324:+\surd:19\times20-361:+\surd:20\times20-400.$ Hoc eſt $\surd0+\surd19+\surd36+\surd51+\surd64+\surd75+\surd84+\surd91+\surd96+\surd99+\surd100+\surd99+\surd96+\surd91+\surd84+\surd75+\surd64+\surd51+\surd36+\surd19+\surd0$. Vel $2\surd0+2\surd19+2\surd36+2\surd51+2\surd64+2\surd75+2\surd84+2\surd91+2\surd96+2\surd99+\surd100$. (Nempe iidem ipſi qui ſupra in quadrante habentur poſito radio partium 10, bis hic poſiti; niſi quod ſinus maximus utrique quadranti communis non repetatur.) Vel etiam $0+2\surd19+12+2\surd51+16+10\surd3+4\surd21+2\surd91+8\surd6+6\surd11+10$. Vel denique (quia $0+12+16+10=38$) $38+2\surd19+2\surd51+10\surd3+4\surd21+2\surd91+8\surd6+6\surd11$. Adeoque ratio quam habet aggregatum illud radicum, ad maximam toties poſitam, (puta $21\times10=210$)

eſt $$\frac{38+2\surd19+2\surd51+10\surd3+4\surd21+2\surd91+8\surd6+6\surd11}{210}.$$

vel $$\frac{19+\surd19+\surd51+5\surd3+2\surd21+\surd91+4\surd6+3\surd11}{105}.$$

Et quidem quo plures ponantur Radii vel Diametri partes, eo minus videtur explicabilis ratio ſinuum omnium ad maximum toties ſumptum: adeoque ſi ſupponantur radii vel diametri partes numero infinitæ, (quod ad ſcopum noſtrum faciendum videtur,) ratio ſinuum omnium ad radium toties poſitum, hoc eſt, Quadrantis vel Semicirculi ad Quadratum vel Parallelogrammum circumſcriptum, videatur penitus inexplicabilis, ſaltem niſi ejuſmodi explicatio ſufficere judicanda ſit, qualem prop. 121 & 135. exhibuimus.

His itaque perpenſis, prope abfuit ut rem quaſi penitus conclamatam ulterius inveſtigando deſiſterem. Id unicum quod ſpem fecit hoc erat. Nempe quod eadem difficultate non obſtante, in radicibus quadraticis, cubicis, biquadraticis, &c. numerorum Arithmetice proportionalium res non male ſucceſſit.

Nam, verbi gratia, ſi ſeries Subſecundanorum aliquouſque continuetur, puta $\surd0+\surd1+\surd2+\surd3+\surd4+\surd5+\surd6$, ipſius ratio ad maximum toties poſitum, puta $7\surd6$, non videtur alias explicabilis quam $\frac{\surd0+\surd1+\surd2+\surd3+\surd4+\surd5+\surd6}{7\surd6}$, vel, $\frac{0+1+\surd2+\surd3+2+\surd5+\surd6}{7\surd6}$, vel ſaltem (propter $0+1+2=3$) $\frac{3+\surd2+\surd3+\surd5+\surd6}{7\surd6}$; niſi forſan placeat tam antecedentem quam conſequentem rationis ducere in $\surd6$, ut prodeat ratio $3\surd6+\surd12+\surd18+\surd30+\surd36$, ad 7×6; vel potius $3\surd6+2\surd3+3\surd2+\surd30+6$, ad $7\times6=42$. Et ſimiliter in aliis ejuſmodi ſeriebus.

Verum ſi eadem ſeries ſupponatur in infinitum continuanda, prodibit tandem ratio $\frac{2}{3}$, vel 2 ad 3, aut 1 ad $1\frac{1}{2}$, ut dictum eſt prop. 53, 54. ipſa quidem infinitate (quod mirum videatur) irrationalitatem deſtruente.

Et ſimiliter in ſubtertianis, ſubquartanis, &c. continget, ut patet ex ſuperius traditis prop. 54, 59.

Cum itaque, illa difficultate non obſtante, quadratura Parabolæ & ab aliis antehac & à nobis etiam noſtra methodo, ſed & Paraboloeideos cujuſvis quadratura (eadem manente difficultate) à nobis in ſuperioribus ſatis feliciter tradita ſit; non plane omnis aberat ſpes rationem tandem inveniendi quam Radicum univerſalium (ſeriei vel auctæ vel mulctatæ) ſeries habeat ad ſeriem æqualium, & quidem ſi non univerſaliter, in quibuſdam ſaltem, quadantenus explicandi; fortaſſis etiam in illis ipſis quæ Circuli vel Ellipſeos, & quæ Hyperbolæ quadraturam attingunt nonnihil proficere.

Ut autem quid deinceps ſit inquirendum rectius perſpiciatur, meminiſſe licet nos (inter alia) Circuli (vel etiam Ellipſeos cujuſvis) quadraturam huc uſque perduxiſſe.

Nempe, per prop. 118, & 121, ſi rationum ſeries illa $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{48}{105}$, $\frac{384}{945}$, &c. interpolari poterit; ratio illa quæ primæ & ſecundæ ponenda eſt intermedia, eſt ea quam habet Circuli Quadrans ad Quadratum Radii, vel Circulus ipſe ad Quadratum Diametri. Item,

Item, per prop. 133, & 135, si interpolari poterit rationum series ista $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{140}$, $\frac{1}{630}$, &c. ratio illa quæ primæ & secundæ ponenda est intermedia, est ea quam habet Semicirculus ad Quadratum diametri.

Sed & insuper, si interpolari poterunt numeri diagoniales tabellæ prop. 132. nempe 1, 2, 6, 20, 70, &c. ratio quam habet unitas ad numerum eorundem primo & secundo intermedium, est ea quam habet Circulus ad Quadratum Diametri: & Ellipsis ad Parallelogrammum circumscriptum. Ut probabitur, ex prop. seq.

PROP. CLXVI.

Theorema.

SI series infinita Æqualium, Primanorum, Secundanorum, aut Tertianorum, &c. respective ducatur in seipsam inverse positam; atque eadem etiam in seipsam directe positam: erit Aggregatum rectangulorum illorum, ad Aggregatum horum; ut 1 ad 1, 2, 6, 20, 70, &c. numeros diagoniales Tabellæ prop. 132.

Nam si series Æqualium in seipsam (sive directe sive inverse positam) respective ducatur, fit series Æqualium: cui convenit ratio 1 ad 1.

Si autem series Primanorum in seipsam directe positam sic multiplicetur; fiet series Secundanorum; si series Secundanorum sic ducatur, fiet series Quartanorum; si series Tertianorum, fiet series Sextanorum, &c. per prop. 73. Quibus conveniunt rationes $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{9}$. &c. per prop. 44. vel 64.

Si autem Series Primanorum respective ducatur in seipsam inversam; (puta series a, b, c, &c. in seriem $D-a$, $D-b$, $D-c$, &c. Item series Secundanorum in seipsam inversam, (puta series a^2, b^2, c^2, &c. in seriem $Q:D-a$. $Q:D-b$. $Q:D-c$ &c. vel $D^2-2aD+a^2$. $D^2-2bD+b^2$. $D^2-2cD+c^2$. &c.) Item series Tertianorum in seipsam inversam; (puta series a^3, b^3, c^3, &c. in seriem $C:D-a$. $C:D-b$. $C:D-c$. &c.) Et sic de reliquis; Rationes ipsis convenient, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{140}$, $\frac{1}{630}$, &c. per prop. 133, 134.

$\frac{1}{1}$)	$\frac{1}{1}$	($\frac{1}{1}$
$\frac{1}{3}$)	$\frac{1}{6}$	($\frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}$)	$\frac{1}{30}$	($\frac{1}{6}$
$\frac{1}{7}$)	$\frac{1}{140}$	($\frac{1}{20}$
$\frac{1}{9}$)	$\frac{1}{630}$	($\frac{1}{70}$

Ratio igitur rationum harum ad rationes illas, ea est quam habet 1 ad numeros 1, 2, 6, 20, 70, &c. nempe numeros diagoniales tabellæ prop. 132. (ut ex calculo patet.) Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Notandum hic, in serie rationum $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, &c. Denominatores sive consequentes sunt Arithmetice-proportionales; adeoque si in singulis intervallis totidem essent interponendæ rationes, essent illæ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, &c. juxta analogiam Arithmetice-proportionalium, & leges prop. 44, & 64.

In serie vero rationum $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{140}$, $\frac{1}{630}$, &c. consequentes 1, 6, 30, 140, 630, &c. &c. fiunt continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{6 \times 10 \times 14 \times 18}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$, &c. vel $1 \times \frac{12 \times 20 \times 28 \times 36 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \text{ \&c.}}$ (ubi fractionum tam numeratores quam denominatores sunt Arithmetice-proportionales.) Et propterea (juxta progressionis illius analogiam) si numerus primo & secundo interponendus dicatur A; fient reliqui, reliquis intervallis interponendi, continua multiplicatione numerorum $A \times \frac{16 \times 24 \times 32 \text{ \&c.}}{3 \times 5 \times 7 \text{ \&c.}}$ (Et quidem numerus primo anteponendus $\frac{1}{8}$ A; juxta eandem analogiam. In præcedenti autem, & propterea in mox sequenti serie, numerus primo anteponendus evanescit; nempe, illic in nihil, illic in infinitum.)

In serie denique rationum $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{70}$, &c. Consequentes 1, 2, 6, 20, 70, &c. fiunt continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{2 \times 6 \times 10 \times 14 \text{ \&c.}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \text{ \&c.}}$ vel $1 \times \frac{4 \times 12 \times 20 \times 28 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \text{ \&c.}}$ (ubi,

ut

ut ſupra, tam numeratores quam denominatores fractionum ſunt Arithmetice-proportionales.) Et propterea (juxta progreſſionis analogiam) ſi numerus primo & ſecundo interponendus dicatur α, fiunt reliqui continua multiplicatione numerorum $\alpha \times \frac{8 \times 16 \times 24 \ \&c.}{3 \times 5 \times 7 \ \&c.}$ (Eſt autem $\alpha = \frac{1}{2}A$; propter $\frac{1}{2}$) $\frac{1}{A}$ $(\frac{2}{A} = \frac{1}{\frac{1}{2}A} = \frac{1}{\alpha}$.)

PROP. CLXVII.

Theorema.

I*Deoque*, Si ſeries infinita Subſecundanorum (puta $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c.) reſpective ducatur in ſeipſam inverſam (puta $\sqrt{:D-a}$. $\sqrt{:D-b}$. $\sqrt{:D-c}$. &c.) atque eadem etiam in ſeipſam directe poſitam: (puta ſeries $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c. in ſeriem $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c.) erit aggregatum rectangulorum illorum (puta $\sqrt{:aD-a^2:} + \sqrt{:bD-b^2:} + \sqrt{:cD-c^2:}$ &c.) ad aggregatum horum (puta $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2}$ &c. vel $a+b+c$ &c.) ut unitas ad numerum intermedium, numeris diagonialibus 1, 2, in Tabella prop. 132 interponendum.

Sequitur ex præcedente. Nam ſeries Subſecundanorum eſt ſeriei Æqualium, & ſeriei Primanorum intermedia, (ut patet ex dictis prop. 64.)

Series autem Subſecundanorum in ſeipſam directe poſitam (puta $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c. in $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c.) eſt ſeries Primanorum (puta $\sqrt{a^2}, \sqrt{b^2}, \sqrt{c^2}$, &c. vel a, b, c, &c.) cui convenit ratio $\frac{1}{2}$ per prop. 44, vel 64. Et propterea, ſi ratio quæ convenit ſeriei Primanorum in ſeipſam inverſam ductæ (intermedia nempe rationibus $\frac{1}{1}, \frac{1}{6}$,) dicatur $\frac{1}{2\square}$: Ratio rationis hujus $\frac{1}{2\square}$ ad illam $\frac{1}{2}$, puta $\frac{1}{2}$) $\frac{1}{2\square}$ ($\frac{1}{\square}$, erit (per præced.) ea quam habet 1 ad numerum inter 1 & 2 interponendum, in ſerie diagonialium 1, 2, 6, 20, 70, &c. tabellæ prop. 132. *Qui numerus igitur in poſterum dicatur* $\square$. Eſtque ſemiſſis numeri inter 1 & 6 interponendi in ſerie 1, 6, 30, 140, 630, &c.

PROP. CLXVIII.

Corollarium.

ET propterea, *Circulus ad Quadratum Diametri, eſt ut* 1 *ad* $\square$, *numerum nempe inter* 1 *&* 2 *interponendum in ſerie Diagonalium* 1, 2, 6, 20, 70, *&c. tabellæ prop.* 132.

Cum enim (per prop. 133, 135.) Semicirculus ad Quadratum diametri ſit ut 1 ad $2\square$ (numerum intermedium inter 1 & 6 in ſerie 1, 6, 30, 140, 630, &c.) erit circulus (quippe ſemicirculi duplus) ut 1 ad $\square$, (numerum intermedium inter 1 & 2 in ſerie 1, 2, 6, 20, 70, &c.) per præced.

Et quidem eadem ratio $\frac{1}{\square}$; ea eſt, quæ intermedia ponenda eſt inter $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{3}$, in ſerie $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}$, &c. prop. 118, & 121. ut & deinceps etiam ulterius patebit.

SCHOLIUM.

Cum igitur (ut ad ea quæ monuimus in Schol. prop. 165. tandem redeamus) res eo redacta ſit, ut ſi poſſimus rationes illas interpolare (prop. 118. memoratas) $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}$, &c. hoc eſt, quas habet 1 ad $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{105}{48}$, &c. (hoc eſt, ad $1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{7}{8}, 2\frac{9}{48}$, &c.) qui termini conſequentes fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \ \&c.}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \ \&c.}$

Vel etiam illas (Prop. 133.) $\frac{1}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}$, &c. quarum termini conſequentes 1, 6, 30, 140, &c. fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{6 \times 10 \times 14 \times 18 \ \&c.}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \ \&c.}$

Vel denique ſi illas $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{20}$, &c. nempe quas habet 1 ad 1, 2, 6, 20, &c. (numeros diagoniales tabellæ Prop. 132.) qui fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{2}{1} \times \frac{6}{2} \times \frac{10}{3} \times \frac{14}{4}$ &c.

Si, inquam, harum rationum seriem unam aliquam interpolare possimus, habebitur accuratissima Circuli Quadratura. Et quidem in prima & tertia interponenda erit (post primam) ratio $\frac{1}{\square}$: in secunda vero ratio $\frac{1}{2\square}$. Adeoque interpolatione in una præstita, in reliquis etiam non difficulter fiet.

Placet igitur (ut inde exordium sumamus, unde major elucet spes quæsitum consequendi,) Tabellam illam Prop. 132. aggredi, ut videamus numqua possimus arte illam interpolare: Adeoque, ipsam repetere intermissis alternatim spatiis, (ut quæ istic sunt series prima, secunda, tertia, &c. sint hic secunda, quarta, sexta, &c.) & paulo accuratius examinare; quod sequentibus aliquot propositionibus fiet.

PROP. CLXIX.

Theorema.

NUmeri omnes Tabellæ prop. 132. sunt Figurati. Nempe, qui in illius serie prima (sive erecta sive transversa) sunt Monadici; qui in secunda, Laterales; qui in tertia, Triangulares; qui in quarta, Pyramidales; & sic deinceps, puta Trianguli-triangulares, Trianguli-pyramidales, Pyramidi-pyramidales, &c.

Patet hoc inspecta tabella: & comparatis (si opus) iis, quæ de numeris figuratis apud Maurolicum aut alios occurrunt. Nominibus autem illis utor, quibus utitur Dn. *Oughtredus* nostras (Mathematicus eximius) in ipsius *Clavi Mathematicæ* cap. 17. n. 11.

Quæ autem sunt in illa tabella Prop. 132. series prima, secunda, tertia, &c. jam in eadem hic repetita fiunt (propter intermissa spatia, numeris, si fieri possit, replenda) secunda, quarta, sexta, &c.

Numeri	Monadici.		Laterales.		Triangulares.		Pyramidales.		Trian. triang.		Tri. pyram.
Monadici.	1		1		1		1		1		1
		□									
Laterales.	1		2		3		4		5		6
Triangulares.	1		3		6		10		15		21
Pyramidales	1		4		10		20		35		56
Triangulitriang.	1		5		15		35		70		126
Triangulipyram.	1		6		21		56		126		252

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

PROP.

PROP. CLXX.

Theorema.

SEries duæ, in exposita Tabella, nempe Monadicorum, & Lateralium, facile interpolari possunt (locis interponendis quotlibet;) interpositis scil. illic quot opus est, unitatibus; hic, totidem mediis Arithmeticis.

Puta, si placet unum ubique numerum interponere; erit monadicorum series interpolata, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1. Lateralium vero $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6. vel $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, 4, $\frac{9}{2}$, 5, $\frac{11}{2}$, 6.

Ratio patet; quoniam numeri sunt illic æquales, hic Arithmetice-proportionales.

SCHOLIUM.

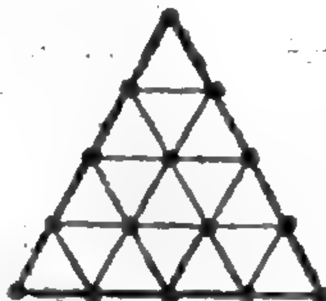
Reliquæ autem series non ita facile interpolantur, nisi invento prius cujusque seriei proprio charactere; quod sequentibus propositionibus investigabimus.

PROP. CLXXI.

Lemma.

PRopositum sit inquirere, quam habeant rationem numeri Triangulares, ad suum latus.

Illud hoc progressu investigabimus.



1. Si puncta totidem, quot numerus aliquis triangularis postulat, debita forma triangulari disponantur, & rectis conjungantur, ut in apposito schemate; manifestum est totam figuram triangularem in tot triangula dividi (tam toti, quam inter se similia,) quot est quadratum numeri lateralis unitate minuti, (quod si opus sit, demonstrari potest ex 19 e 6.) Adeoque si ipsius numerus lateralis sit l, erit numerus triangulorum particularium $Q : l - 1 : = l^2 - 2l + 1$.

2. Quum horum triangulorum quodlibet habeat tres angulos, erit horum angulorum numerus $3l^2 - 6l + 3$.

3. Notandum est ad totius figuræ tria puncta angularia, non nisi tot angulos adjacere (nempe ad singula unum:) & propterea illi tres anguli occupant tria puncta, seu 3 P.

4. Ad reliqua puncta in lateribus, terminantur anguli terni; quorum igitur quilibet occupat trientem puncti. Sunt autem intermedia illa puncta lateralia, in quolibet latere $l - 2$, ergo in omnibus $3l - 6$, (nempe propter tria latera;) & anguli ad hæc intermedia puncta adjacentes $9l - 18$, (propter ternos angulos ad singula puncta;) quorum quilibet occupat trientem puncti, seu $\frac{1}{3}$ P; adeoque omnes occupant $\frac{9l - 18}{3}$ P.

5. Ad reliqua quæ supersunt puncta, intra aream figuræ, terminantur anguli seni (ad quodlibet nempe sex,) qui propterea occupant sextantem puncti. Quot autem illi sunt anguli, sic colligitur. Totus angulorum numerus est (ut diximus) $3l^2 - 6l + 3$: Hinc si subducantur 3 (ad totius figuræ angulos positi,) & $9l - 18$ (ad puncta lateralia adjacentes) manebunt $3l^2 - 15l + 18$; qui est numerus angulorum ad puncta intra aream terminatorum. Cum vero horum quilibet occupat sextantem puncti, sive $\frac{1}{6}$ P; occupabunt hi omnes $\frac{3l^2 - 15l + 18}{6}$ P.

Denique, si simul addantur puncta sic inventa; nempe 3 P & $\frac{9l-18}{3}$ P & $\frac{3l^2-15l+18}{6}$ P; erit horum aggregatum $\frac{l^2+l}{2}$ Puncta; numerus punctorum omnium: Hoc est, numerus triangularis cujus latus l. Ideoque ——

PROP. CLXXII.

Theorema.

Latus numeri cujusvis Triangularis ad ipsum numerum, est ut l ad $\frac{l^2+l}{2}$.

Ut ostensum est in præced.

Adeoque, dato latere l dabitur numerus Triangularis isti lateri conveniens, puta $n=\frac{l^2+l}{2}$.

Et contra, Dato numero Triangulari, invenietur ipsius latus.

Nempe, resolvendo hanc Æquationem $2n=l^2+l$, erit $\surd:\frac{1}{4}+2n:-\frac{1}{2}=l$.

PROP. CLXXIII.

Corollarium.

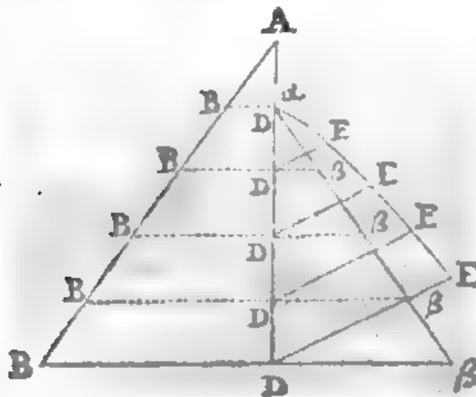
SI Hyperbolæ Diameter transversa sit 1, *& Latus rectum* $\frac{1}{2}$; *sumptis diametris (puncto applicationis & vertice interceptis)* 1, 2, 3, 4, 5, *&c. Ordinatim-applicatarum quadrata erunt* 1, 3, 6, 10, 15, *&c. nempe numeri Triangulares, cujus latera sunt* 1, 2, 3, 4, 5, *&c.*

Probatur per 17 vel 33 prop. Con. Sect. nost. Hyperbolam ipsam exhibebit figura prop. seq.

PROP. CLXXIV.

Corollarium.

ITem, *Si fiant ad eandem rectam* $A\alpha D$ *duo triangula similia*, $\alpha D\beta$, ADB; *sitque ut* 1 *ad* $\surd\frac{1}{2}$ *sic* AD *ad* DB, *&* αD *ad* $D\beta$; *& sumantur æquales* $A\alpha=1=\alpha D=DD$ *&c. Rectangula* $BD\beta$, $BD\beta$, *&c. erunt ad invicem ut* 1, 3, 6, 10, *&c. numeri Triangulares, quorum latera sunt* αD, αD, *&c. Mediæ vero proportionales inter* BD, $D\beta$; BD, $D\beta$, *&c. sunt ordinatim-applicatæ in Hyperbola* αDE; *cujus diameter transversa* $A\alpha$, *& latus rectum* αB, *vel ipsi æquale.*



Patet ex calculo. Nam rectangulorum $BD\beta$, primum erit $\surd\frac{1}{2}\times2\surd\frac{1}{2}=1$. Secundum $2\surd\frac{1}{2}\times3\surd\frac{1}{2}=3$. Tertium $3\surd\frac{1}{2}\times4\surd\frac{1}{2}=6$. Quartum $4\surd\frac{1}{2}\times5\surd\frac{1}{2}=10$. Et sic deinceps. Quæ sunt quadrata ordinatim-applicatarum in Hyperbola, per præced. Ideoque Mediæ proportionales puta $\surd1$, $\surd3$, $\surd6$, $\surd10$, &c. ipsæ ordinatim-applicatæ.

SCHOLIUM.

Si autem sumpta fuissent $AD=DB$, & $\alpha D=D\beta$, tum rectangula fuissent $1\times2=2$. $2\times3=6$. $3\times4=12$. $4\times5=20$, &c. dupla numerorum Triangularium:

rium: & Mediæ proportionales $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{20}$, &c. essent ordinatim applicatæ in Hyperbola, cujus tam latus rectum quam latus transversum sit 1. ut, ex dictis, consideranti patebit. Quod aliis rationibus Lateris Recti ad Diametrum Transversam, facile accommodabitur.

PROP. CLXXV.

Theorema.

SEries numerorum Triangularium, in præmissa tabella, commode interpolari poterit, si ipsorum numeris lateralibus tot interponantur mediæ Arithmeticæ, quot opus est, & ex iis formentur numeri Triangulares, juxta prop. 172.

Puta si in serie numerorum triangularium 1, 3, 6, 10, 15, &c. unus ubique interponendus est numerus; eorum latera 1, 2, 3, 4, 5, &c. mediis Arithmeticis debite interpolata, erunt $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, &c. quibus lateribus (per prop. 172.) respondent numeri triangulares, $\frac{3}{8}$, 1, $1\frac{7}{8}$, 3, $4\frac{3}{8}$, 6, $7\frac{7}{8}$, 10, $12\frac{3}{8}$, 15, $17\frac{7}{8}$, 21, &c. Vel $\frac{3}{8}$, 1, $\frac{15}{8}$, 3, $\frac{35}{8}$, 6, $\frac{63}{8}$, 10, $\frac{99}{8}$, 15, $\frac{143}{8}$, 21, &c. Vel denique $\frac{3}{8}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{24}{8}$, $\frac{35}{8}$, $\frac{48}{8}$, $\frac{63}{8}$, $\frac{80}{8}$, $\frac{99}{8}$, $\frac{120}{8}$, $\frac{143}{8}$, $\frac{168}{8}$, &c. quorum quidem differentiæ sunt Arithmetice-proportionales.

Pari modo, si interponendi sint in singulis intervallis duo loci; prodirent numeri, $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$, 1, $\frac{14}{9}$, $\frac{20}{9}$, 3, $\frac{35}{9}$, $\frac{44}{9}$, 6, $\frac{65}{9}$, $\frac{77}{9}$, 10, &c. Vel $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{20}{9}$, $\frac{27}{9}$, &c. quorum item differentiæ sunt Arithmetice-proportionales.

PROP. CLXXVI.

Lemma.

PRopositum sit inquirere quam habeant rationem numeri Pyramidales, ad latus suum.

Liceret & hanc propositionem pari progressu investigare, quo in prop. 171. usus sum: (observato interim discrimine quo differt debita numeri Pyramidalis dispositio à dispositione numeri Triangularis:) quod qui volet experiri poterit. Verum cum non ita facile esset lectori concipere debitum punctorum situm in pyramide, (ut quæ non omnia supponenda sunt in eodem plano,) & angulorum solidorum ad ea puncta positionem: satius videtur illud hac quæ sequitur methodo præstare. (Quæ quidem, nisi mallem utrumque modum ostendisse, adhiberi potuisset etiam ad prop. 171.)

1. Numerus Pyramidalis æquatur aggregato numerorum Triangularium (ut patet ex dictis ad prop. 130. & 132.) nempe ab Unitate ad numerum Triangularem sibi collateralem inclusive: (sicut & numeri Triangulares fiunt aggregatione Lateralium; & Laterales, Monadicorum; ut & Trianguli-triangulares, Pyramidalium; & sic deinceps.)

2. Est autem lateris l, numerus quilibet Triangularis $\frac{l^2+l}{2}$. per prop. 171.

3. Ergo, sumptis lateribus 1, 2, 3, 4, &c. vel (eorum loco) a, b, c, d, &c. summa horum a^2+a, b^2+b, c^2+c, d^2+d, &c. erit duplum aggregati Triangularium; (quorum numerus erit æquans lateri maximi:) & hujus propterea semissis, erit numerus Pyramidalis, cujus latus æquatur lateri maximi Triangularium.

$$2)\begin{array}{c} a^2+a \\ b^2+b \\ c^2+c \\ d^2+d \\ \text{\&c.} \\ \hline \text{Num Pyramid.} \end{array}$$

4. Est igitur numerus Pyramidalis, semissis aggregati duarum serierum; eousque ab unitate continuatarum, donec numerus locorum æquetur lateri numeri Pyramidalis quæsiti, quod supponatur l: Quibus si præponatur locus alter 0^2+0, (ut series intelligantur ab 0 inchoatæ,) fiet harum numerus $l+1$. Et utriusque seriei summa seorsim innotescet per prop. 2 & 20.

5. Nempe, summa seriei Primanorum $0+a+b+c$, &c. quorum ultimum est l, numerus locorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{2}l$ per prop. 2.

 6. Et

6. Et summa seriei Secundanorum $0 + a^2 + b^2 + c^2$ &c. quorum ultimum est l^2, & numerus locorum $l + 1$; erit $\frac{l+1}{3} l^2 + \frac{l+1}{6l} l^2$; vel $\frac{l+1}{3} l^2 + \frac{l+1}{6} l$. per Prop. 20.

7. Utriusque igitur summæ aggregatum, (puta $\frac{l+1}{2} l + \frac{l+1}{3} l^2 + \frac{l+1}{6} l$,) nempe $\frac{3l^2 + 3l + 2l^3 + 2l^2 + l^2 + l}{6} = \frac{2l^3 + 6l^2 + 4l}{6}$, est aggregatum duarum serierum; cujus aggregati semissis $\frac{l^3 + 3l^2 + 2l}{6}$ est numerus Pyramidalis cujus latus l. Ideoque ———

PROP. CLXXVII. *Theorema.*

Latus numeri cujusvis Pyramidalis ad ipsum numerum suum, est ut l ad $\frac{l^3 + 3l^2 + 2l}{6}$.

Ut ostenditur in præced.

At, dato numero Pyramidali n, non innotescit ipsius latus, nisi resolvendo Æquationem Cubicam $6n = l^3 + 3l^2 + 2l$.

PROP. CLXXVIII. *Theorema.*

Series numerorum Pyramidalium, in præmissa tabella commode interpolari poterit; si ipsorum numeris lateralibus tot interponantur mediæ Arithmeticæ quot opus est, & ex iis formentur numeri Pyramidales, juxta prop. præced.

Puta, si numerorum Pyramidalium 1, 4, 10, 20, 35, 56, latera 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. sic interpolata sint $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6, &c. hisce lateribus respondebit series Pyramidalium $\frac{5}{16}$, 1, $2\frac{3}{16}$, 4, $6\frac{9}{16}$, 10, $14\frac{7}{16}$, 20, $26\frac{13}{16}$, 35, $44\frac{11}{16}$, 56, &c. vel etiam $\frac{5}{16}$, 1, $\frac{35}{16}$, 4, $\frac{105}{16}$, 10, $\frac{231}{16}$, 20, $\frac{429}{16}$, 35, $\frac{715}{16}$, 56, &c. Vel potius $\frac{15}{48}$, 1, $\frac{105}{48}$, 4, $\frac{315}{48}$, 10, $\frac{693}{48}$, 20, $\frac{1287}{48}$, 35, $\frac{2145}{48}$, 56, &c.

PROP. CLXXIX. *Lemma.*

Propositum sit inquirere, quam habeant rationem numeri Trianguli-triangulares ad latus suum.

Præstabitur hoc eadem methodo qua prop. 176. Nempe,

1. Numerus Trianguli-triangularis æquatur aggregato numerorum omnium Pyramidalium, (intellige quorum latera sunt numeri integri, nam de interpolatis hic non agitur,) ab unitate ad numerum sibi collateralem, inclusive.

2. Est autem lateris l, numerus Pyramidalis $\frac{l^3 + 3l^2 + 2l}{6}$. per prop. 177.

$$6)\begin{array}{l} a^3 + 3a^2 + 2a \\ b^3 + 3b^2 + 2b \\ c^3 + 3c^2 + 2c \\ d^3 + 3d^2 + 2d \\ \text{\&c.}\quad \text{\&c.}\quad \text{\&c.} \\ \hline \text{Num. Trianguli-triang.} \end{array}$$

3. Ergo, sumptis lateribus 1, 2, 3, 4, &c. vel (eorum loco) $a, b, c, d,$ &c. summa horum $a^3 + 3a^2 + 2a$, $b^3 + 3b^2 + 2b$, $c^3 + 3c^2 + 2c$, $d^3 + 3d^2 + 2d$, &c. erit sextuplum aggregati Pyramidalium, (quorum omnium numerus erit æqualis lateri eorum maximi, ut patet:) & propterea hujus aggregati sextans erit numerus Trianguli-triangularis, cujus latus idem erit cum latere maximi Pyramidalium.

4. Adeoque numerus Trianguli-triangularis est sexta pars aggregati trium serierum, cousque ab unitate continuatarum donec numerus terminorum fit æqualis lateri numeri Trianguli-triangularis propositi, quod dicatur l: adeoque si ipsis præponatur terminus alter $0^3 + 0^2 + 0$ (ut series intelligantur ab 0 inchoatæ,) fiet numerus terminorum $l + 1$. Et singularum serierum illarum summa seorsim innotescet per Prop. 2. 20. & 40.

5. Nempe

5. Nempe summa duplicatæ seriei Primanorum, $o + 2a + 2b + 2c$, &c. cujus terminus ultimus $2l$, & numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{2} \cdot 2l$. per. Prop. 2.

6. Summa triplicatæ seriei Secundanorum, $o + 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$ &c. cujus terminus ultimus $3l^2$, & numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{3} 3l^2 + \frac{l+1}{6l} 3l^2$. per Prop. 20.

7. Summa seriei Tertianorum, $o + a^3 + b^3 + c^3$ &c. cujus terminus ultimus l^3, numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{4} l^3 + \frac{l+1}{4l} l^3$. per Prop. 40.

Harum igitur summarum aggregatum, (puta $\frac{l+1}{2} 2l + \frac{l+1}{3} 3l^2 + \frac{l+1}{6l} 3l^2 + \frac{l+1}{4} l^3 + \frac{l+1}{4l} l^3$.) nempe

$$\frac{24l^2 + 24l + 24l^3 + 24l^2 + 12l^2 + 12l + 6l^4 + 6l^3 + 6l^3 + 6l^2}{24}$$

$= \frac{6l^4 + 36l^3 + 66l^2 + 36l}{24}$, est Aggregatum trium illarum seriecum; cujus aggregati sextans $\frac{l^4 + 6l^3 + 11l^2 + 6l}{24}$ est numerus Trianguli-triangularis cujus latus l, Ideoque ———

PROP. CLXXX.

Theorema.

Latus numeri Trianguli-triangularis ad ipsum numerum, est ut l ad $\frac{l^4 + 6l^3 + 11l^2 + 6l}{24}$.

Adeoque, Dato latere l dabitur numerus Trianguli-triangularis, puta $n = \frac{l^4 + 6l^3 + 11l^2 + 6l}{24}$.

Dato autem numero Trianguli-triangulari, non invenitur ipsius latus nisi resolvendo hanc æquationem $24n = l^4 + 6l^3 + 11l^2 + 6l$.

PROP. CLXXXI.

Theorema.

Series numerorum Trianguli-triangularium, in præmissa Tabella, commode interpolari poterit; si ipsorum numeris lateralibus, tot interponantur medii Arithmetici, quot opus est, & ex iis formentur numeri Trianguli-triangulares, per præcedentem.

Puta lateribus interpolatis $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6, &c. respondent numeri Trianguli-triangulares $\frac{35}{128}$, 1, $2\frac{59}{128}$, 5, $9\frac{3}{128}$, 15, $23\frac{59}{128}$, 35, $50\frac{35}{128}$, 70, $94\frac{123}{128}$, 126, &c. vel etiam $\frac{35}{128}$, 1, [illegible], 5, $\frac{1155}{128}$, 15, $\frac{3003}{128}$, 35, $\frac{6435}{128}$, 70, $\frac{12155}{128}$, 126, &c. Vel potius $\frac{105}{384}$, 1, $\frac{945}{384}$, 5, $\frac{3465}{384}$, 15, $\frac{9009}{384}$, 35, $\frac{19305}{384}$, 70, $\frac{36465}{384}$. 126, &c.

PROP. CLXXXII.

Lemma.

Propositum sit inquirere, quam ad latus suum rationem habeant sequentium serierum numeri Figurati, puta Trianguli-pyramidales, Pyramidi-pyramidales, &c.

Posset quidem hoc præstari eadem methodo qua usus sum ad Prop. 176, & 179, ope propositionum ibidem memoratarum, nempe prop. 2, 20, & 40, simul cum prop.

prop. 43. saltem si prius ulterius prosecuti fuerimus traditionem rationum quas habent series finitæ Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, (cum sequentibus,) ad series Æqualium; quam traditionem non nisi leviter innuimus ad prop. 43. Eam vero siquis ulterius continuandam velit, licebit ipsi vel alia quæ sibi maxime placeat methodo id præstare, vel etiam (nisi meliora ipsi occurrant auxilia) ope hujus ipsius quam jam præ manibus habemus Tabellæ, postquam via mox docenda ostenderimus rationes numerorum figuratorum ad suum cujuslibet latus in sequentibus seriebus investigare. Nam ut ad prop. 176 & 179, ex cognitis rationibus simplicium serierum finitarum (puta Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, per prop. 2, 20, 40. ad seriem Æqualium) investigantur rationes hujus Tabellæ (puta numerorum Triangularium, Pyramidalium, Trianguli-triangularium, ad sua respective latera:) ita, vice versa, ex cognitis his licebit & illas expiscari, adeoque illam propositionis 43 traditionem quousque libet continuare.

Quoniam autem illud (ut diximus) non nisi leviter traditum est ad prop. 43. Nec quidem necesse sit ad præsens institutum illud ulterius prosequi, cum ex cognitis paucarum istius Tabellæ serierum characteribus (sive rationibus quas numeri isti figurati habent ad sua respective latera,) sequentium etiam characteres investigandi methodus elucescat, ego illa ut faciliori jam utar, quæ hæc est.

Patet ex præmissis, character seriei numerorum.

Monadicorum 1. Triangularium $\frac{l^2+l}{2}$.
Lateralium l.

Pyramidalium $\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$. Trianguli-triang. $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$.

Patet etiam, accuratius intuenti, characteres hos fieri continua multiplicatione harum quantitatum,

$1 \times \frac{l}{1} \times \frac{l+1}{2} \times \frac{l+2}{3} \times \frac{l+3}{4}$ &c. vel $1 \times \frac{l \text{ in } l+1 \text{ in } l+2 \text{ in } l+3}{1 \text{ in } 2 \text{ in } 3 \text{ in } 4}$.

$$\text{Nam } 1 \times \frac{l+0}{1} = l.$$

$$l \times \frac{l+1}{2} = \frac{l^2+l}{2}$$

$$\frac{l^2+l}{2} \times \frac{l+2}{3} = \frac{l^3+3l^2+2l}{6}$$

$$\frac{l^3+3l^2+2l}{6} \times \frac{l+3}{4} = \frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$$

Adeoque, si continuetur ulterius multiplicatio rationis ultimo inventæ in $\frac{l+4}{5} \times \frac{l+5}{6} \times \frac{l+6}{7}$ &c. habebimus sequentium serierum characteres.

Puta. $\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l}{120}$.

Item $\frac{l^6+15l^5+85l^4+225l^3+274l^2+120l}{720}$

Item $\frac{l^7+21l^6+175l^5+735l^4+1624l^3+1764l^2+720l}{5040}$

Et sic deinceps, quousque libet.

SCHOLIUM.

Diximus modo, ex rationibus sive characteribus præsentis Tabellæ continuatis, deduci posse continuationem etiam rationum illarum quas indicat prop. 43. Quoniam vero illud fortasse non erit omnibus obvium: operæ pretium duxi paucis id in transitu ostendere. Quod quidem ut sine incommodo hic possit inseri, ita quibusdam forsan ingratum non erit. Ideoque, exempli gratia, ——

Propositum

Propositum sit inquirere, Quam habeat rationem series finita Quartanorum, (ab o inchoata,) ad seriem totidem maximo Æqualium.

1. Character numeri Trianguli-triangularis, (per prop. 180:) est $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$; Et Trianguli-pyramidalis $\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l}{120}$, per prop. 182.

$$24)\left.\begin{array}{l} o^4+o^3+o^2+o \\ a^4+6a^3+11a^2+6a \\ b^4+6b^3+11b^2+6b \\ c^4+6c^3+11c^2+6c \\ \text{\&c. ad} \\ l^4+6l^3+11l^2+6l \end{array}\right\}\text{Addita.}$$

$$\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l.\ \text{Aggregatum.}}{24\times5=120}$$

2. Est autem, (ut sæpius dictum est,) numerus Figuratus unius gradus (in præsenti tabella) aggregatum omnium præcedentium in gradu sibi proximo: Adeoque numerus Trianguli-pyramidalis, est aggregatum Trianguli-triangularium.

3. Et propterea, sumptis lateribus 1, 2, 3, &c. vel (eorum loco) $a, b, c,$ &c. (quorum maximum dicatur l,) & formatis inde numeris Trianguli-triangularibus; Horum aggregatum erit numerus Trianguli-pyramidalis ejusdem lateris, nempe $\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l}{120}$.

4. Summa autem seriei $o+6a+6b+6c$ &c. est (per prop. 2.) $\frac{l+1}{2}6l=\frac{6l^2+6l}{2}$.

5. Summa seriei $o+11a^2+11b^2+11c^2$ &c. est (per prop. 20.) $\frac{l+1}{3}11l^2+\frac{l+1}{6l}11l^2=\frac{11l^3+11l^2}{3}+\frac{11l^2+11l}{6}=\frac{22l^3+33l^2+11l}{6}$.

6. Summa seriei $o+6a^3+6b^3+6c^3$ &c. est (per prop. 40.) $\frac{l+1}{4}6l^3+\frac{l+1}{4l}6l^3=\frac{6l^4+6l^3}{4}+\frac{6l^3+6l^2}{4}=\frac{6l^4+12l^3+6l^2}{4}$.

7. Hæ tres summæ in unam collectæ, sunt $\frac{6l^2+6l}{2}+\frac{22l^3+33l^2+11l}{6}+\frac{6l^4+12l^3+6l^2}{4}=\frac{9l^4+40l^3+60l^2+29l}{6}$.

8. Si igitur ex vigintiquadruplo totius aggregati, auferatur summa trium serierum.

Nempe si ex $5)\ l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l.$
auferatur $6)\ 9l^4+40l^3+60l^2+29l.$

Hoc est, Si ex $30)\ 6l^5+60l^4+210l^3+300l^2+144l.$
auferatur $30)\ +45l^4+200l^3+300l^2+145l.$

Manebit summa seriei quartæ, quæ est Quartanorum $30)\ 6l^5+15l^4+10l^3+00l^2-1l.$

Hoc est,
$$30)\ \begin{array}{l} 6l^5+6l^4 \\ \quad+9l^4+9l^3 \\ \qquad+1l^3+1l^2 \\ \qquad\quad-1l^2-1l \end{array}$$

Hoc est, $\frac{l+1}{5}l^4+\frac{3l+3}{10}l^3+\frac{l+1}{30}l^2-\frac{l+1}{30}l.$

Quæ est igitur summa seriei Quartanorum cujus terminus ultimus est l^4 numerus terminorum $l+1$.

Vel; si pro numero terminorum $l+1$, substituatur m, & propterea series æqualium ml^4; erit series Quartanorum $\frac{1}{5}ml^4+\frac{3}{10}ml^3+\frac{1}{30}ml^2-\frac{1}{30}ml.$ (si nempe terminus primus sit o, secundus 1:) vel $\frac{ml^4}{5}+\frac{3ml^4}{10l}+\frac{ml^4}{30l^2}-\frac{ml^4}{30l^3}$.

9. Adeoque series finita Quartanorum ad seriem totidem maximo Æqualium est ut $\frac{1}{5} + \frac{3}{10\,l} + \frac{1}{30\,l^2} - \frac{1}{30\,l^3}$ ad 1. Quod erat inquirendum.

Et pari modo, his cognitis, ratio quam habet ad seriem Æqualium series Quintanorum, invenietur ope characteris in proxima præsentis tabellæ serie; Et deinde, quam habet series Sextanorum, ope characteris seriei proxime subsequentis in hac tabella; & sic deinceps quousque libet.

10. Nimirum; cum character numeri Trianguli-pyramidalis sit $\frac{l^5 + 10\,l^4 + 35\,l^3 + 50\,l^2 + 24\,l}{120}$; & Pyramidi-pyramidalis sit $\frac{l^6 + 15\,l^5 + 85\,l^4 + 225\,l^3 + 274\,l^2 + 120\,l}{720}$.

Trianguli-pyramidalium omnium continue additorum aggregatum (ut ostensum est,) est correspondens numerus Pyramidi-pyramidalis.

$$\left.\begin{array}{r} 0^5 + 0^4 + 0^3 + 0^2 + 0 \\ a^5 + 10a^4 + 35a^3 + 50\,a^2 + 24\,a \\ 120)\,b^5 + 10b^4 + 35b^3 + 50\,b^2 + 24\,b \\ \text{\&c. ad} \\ l^5 + 10\,l^4 + 35\,l^3 + 50\,l^2 + 24\,l \end{array}\right\}\text{Addita}$$

$$\frac{l^6 + 15l^5 + 85l^4 + 225l^3 + 274l^2 + 120l}{720 = 120 \times 6}\ \text{Aggregatum}$$

11. Sunt autem omnes $24a$ &c. $\frac{l+1}{2}\,24\,l = 12l^2 + 12l$.

12. Et omnes $50\,a^2$ &c. sunt

$$\frac{l+1}{3}\,50\,l^2 + \frac{l+1}{6l}\,50\,l = \tfrac{50}{3}\,l^3 + \tfrac{50}{3}\,l^2 + \tfrac{25}{3}\,l^2 + \tfrac{25}{3}\,l$$

13. Item omnes $35\,a^3$ &c. sunt

$$\frac{l+1}{4}\,35\,l^3 + \frac{l+1}{4\,l}\,35\,l^3 = \tfrac{35}{4}\,l^4 + \tfrac{35}{4}\,l^3 + \tfrac{35}{4}\,l^3 + \tfrac{35}{4}\,l^2.$$

14. Item omnes $10\,a^4$ &c. (per jam modo demonstrata) sunt

$$\frac{l+1}{5}\,10\,l^4 + \frac{3\,l+3}{10\,l}\,10\,l^4 + \frac{l+1}{30\,l^2}\,10\,l^4 - \frac{l+1}{30\,l^3}\,10\,l^4$$

$$= 2\,l^5 + 2\,l^4 + 3\,l^4 + 3\,l^3 + \tfrac{1}{3}\,l^3 + \tfrac{1}{3}\,l^2 - \tfrac{1}{3}\,l^2 - \tfrac{1}{3}\,l.$$

15. Quæ omnia simul addita, (§ 11, 12, 13, 14, comprehensa,) sunt $2\,l^5 + 13\tfrac{3}{4}\,l^4 + 37\tfrac{1}{2}\,l^3 + 45\tfrac{3}{4}\,l^2 + 20\,l, = \frac{8\,l^5 + 55\,l^4 + 150\,l^3 + 183\,l^2 + 80\,l}{4}$.

16. Hæc itaque si ex Aggregati 120 *plo* auferantur. Hoc est

Si ex 6) $l^6 + 15\,l^5 + 85\,l^4 + 225\,l^3 + 274\,l^2 + 120\,l$
auferantur 4) $8\,l^5 + 55\,l^4 + 150\,l^3 + 183\,l^2 + 80\,l$
Hoc est, si ex 12) $2\,l^6 + 30\,l^5 + 170\,l^4 + 450\,l^3 + 548\,l^2 + 240\,l$
auferantur 12) $24\,l^5 + 165\,l^4 + 450\,l^3 + 549\,l^2 + 240\,l$

Restabunt 12) $2\,l^6 + 6\,l^5 + 5\,l^4 - 1\,l^2$
Quæ itaque est summa omnium a^5 &c.

Nimirum 12) $2\,l^6 + 2\,l^5 + 4\,l^5 + 4\,l^4 + 1\,l^4 + 1\,l^3 - 1\,l^3 - 1\,l^2$.

Hoc est $\frac{l+1}{6}\,l^5 + \frac{l+1}{3}\,l^4 + \frac{l+1}{12}\,l^3 - \frac{l+1}{12}\,l^2$.

Vel

Vel (posito $m = l + 1$;) $\frac{1}{6} m l^5 + \frac{1}{2} m l^4 + \frac{5}{12} m l^3 - \frac{1}{12} m l^2$. Quæ itaque est summa Seriei Quintanorum ab o inchoatorum, quorum ultimum est l^5: & terminorum numerus $m = l + 1$.

17. Ad eandem formam; Cum sit character Numeri

Pyramidi-pyramidalis $720)\, l^6 + 15 l^5 + 85 l^4 + 225 l^3 + 274 l^2 + 120 l.$
Trianguli-trianguli-pyram. $5040)\, l^7 + 21 l^6 + 175 l^5 + 735 l^4 + 1624 l^3 + 1764 l^2 + 720 l.$
Adeoque omnes $720)\, a^6 + 15 a^5 + 85 a^4 + 225 a^3 + 274 a^2 + 120 a$
sint $5040)\, l^7 + 21 l^6 + 175 l^5 + 735 l^4 + 1624 l^3 + 1764 l^2 + 720 l.$
Hoc est, omnes $a^6 + 15 a^5 + 85 a^4 + 225 a^3 + 274 a^2 + 120 a.$
sint $7)\, l^7 + 21 l^6 + 175 l^5 + 735 l^4 + 1624 l^3 + 1764 l^2 + 720 l.$

18. Suntque Omnes $120 a = \frac{l+1}{2} 120 l = 60 l^2 + 60 l.$

Omnes $274 a^2 = \frac{l+1}{3} 274 l^2 + \frac{l+1}{6} 274 l = 91\frac{1}{3} l^3 + 91\frac{1}{3} l^2$
$+ 45\frac{2}{3} l^2 + 45\frac{2}{3} l.$

Omnes $225 a^3 = \frac{l+1}{4} 225 l^3 + \frac{l+1}{4} 225 l^2 =$
$= 56\frac{1}{4} l^4 + 56\frac{1}{4} l^3$
$+ 56\frac{1}{4} l^3 + 56\frac{1}{4} l^2.$

Omnes $85 a^4 = \frac{l+1}{5} 85 l^4 + \frac{3l+3}{10} 85 l^3 + \frac{l+1}{30} 85 l^2 - \frac{l+1}{30} 85 l =$
$= 17 l^5 + 17 l^4$
$+ 25\frac{1}{2} l^4 + 25\frac{1}{2} l^3$
$+ 2\frac{5}{6} l^3 + 2\frac{5}{6} l^2$
$- 2\frac{5}{6} l^2 - 2\frac{5}{6} l.$

Omnesque $15 a^5$ (per jam modo demonstrata)
$= \frac{l+1}{6} 15 l^5 + \frac{l+1}{3} 15 l^4 + \frac{l+1}{12} 15 l^3 - \frac{l+1}{12} 15 l^2 =$
$= \frac{5}{2} l^6 + \frac{5}{2} l^5$
$+ 5 l^5 + 5 l^4$
$+ \frac{5}{4} l^4 + \frac{5}{4} l^3$
$- \frac{5}{4} l^3 - \frac{5}{4} l^2.$

19. Erit harum quinque summarum Aggregatum,

$\frac{5}{2} l^6 + 24\frac{1}{2} l^5 + 105 l^4 + 232\frac{1}{6} l^3 + 252 l^2 + 102\frac{5}{6} l.$
Hoc est $6)\, 15 l^6 + 147 l^5 + 630 l^4 + 1393 l^3 + 1512 l^2 + 617 l.$
Quod itaque, una cum omnibus a^6, complet integrum
$7)\, l^7 + 21 l^6 + 175 l^5 + 735 l^4 + 1624 l^3 + 1764 l^2 + 720 l.$

20. Si ex hoc itaque subducatur illud, habetur omnium a^6 aggregatum: vel (sumpto communi denominatore)

Si ex $42)\, 6 l^7 + 126 l^6 + 1050 l^5 + 4410 l^4 + 9744 l^3 + 10584 l^2 + 4320 l.$
Subducatur $42)\, 105 l^6 + 1029 l^5 + 4410 l^4 + 9751 l^3 + 10584 l^2 + 4319 l.$
Restabit $42)\, 6 l^7 + 21 l^6 + 21 l^5 - 7 l^3 + 1 l.$

Quæ itaque est summa omnium a^6, ab o inchoatarum, quorum maximum est l^6, & omnium numerus $m = l + 1$.

Hoc est, $6 l^7 + 6 l^6$
$+ 15 l^6 + 15 l^5$
$42)\quad + 6 l^5 + 6 l^4$
$- 6 l^4 - 6 l^3$
$- 1 l^3 - 1 l^2$
$+ 1 l^2 + 1 l.$

 Vel

Vel (posito $m = l + 1$,) sunt omnes a^6

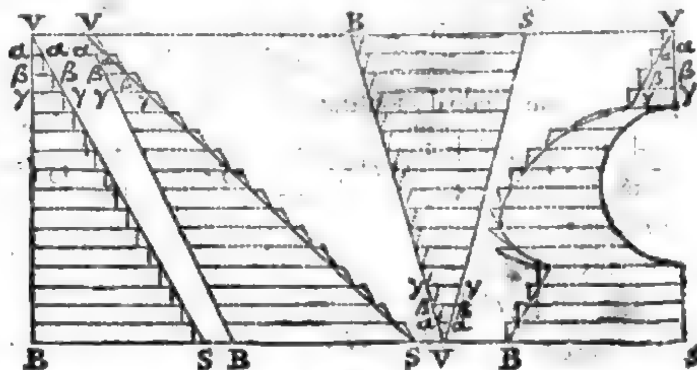
$$= \tfrac{1}{7}ml^6 + \tfrac{1}{14}ml^5 + \tfrac{1}{3}ml^4 - \tfrac{1}{7}ml^3 - \tfrac{1}{42}ml^2 + \tfrac{1}{42}ml.$$

Et similiter de aliis potestatibus faciendum erit.

Quo melius autem hoc intelligatur, operæ fortasse pretium erit, quæ jam tradita sunt, paulo distinctius aperire: Utut enim ea satis aperte tradidisse nos nobis videamur, fieri tamen potest ut lector illis minus assuetus nonnunquam forsan hæsitet.

Notandum igitur est, nos hic (ut & alibi semper, ubi de finita serie verba fiunt,) numerum terminorum assignare $l + 1$, (nempe si terminus primus 0, secundus dicatur 1,) nimirum unitate majorem quam est numerus particularum ex quibus conflatur terminus maximus, hoc est, omnium differentiarum terminorum continue positorum, quarum omnium aggregato terminus maximus æquatur, sive differentiæ illæ sint æquales, ut in serie primanorum, (puta 1, 1, 1, 1, &c. differentiæ numerorum Arithmetice-proportionalium,) sive crescentes, ut in serie secundanorum, tertianorum, &c. (puta 1, 3, 5, 7, &c. differentiæ numerorum quadraticorum, vel 1, 7, 19, 37, &c. differentiæ numerorum cubicorum; &c.) sive etiam decrescentes, ut in serie subsecundanorum, subtertianorum, &c. (nam verbi gratia, differentia $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ minor est quam $\sqrt{2} - \sqrt{1}$, atque hæc minor quam $\sqrt{1} - \sqrt{0}$; & sic in cæteris.) Harum omnium differentiarum (in qualibet serie) numerus l, unitate minor est quam numerus terminorum, ut patet; earumque omnium aggregatum (propter termini primi 0 nullitatem) est ipse terminus maximus. Ubi autem numerus seu multitudo terminorum dicitur m, numerus differentiarum, sive particularum in maximo, erit $m - 1$.

Exemplum esto, series primanorum, quale est Aggregatum Parallelogrammorum æque-altorum figuram triangulo adscriptam complentium: quorum si primum dicatur 0, (quippe nullius latitudinis, utut altitudinis ejusdem cum reliquis;)



secundum 1, &c. omnium numerus 16, erunt differentiæ 15, (invicem æquales nempe 1 ubique,) & maximum propterea 15. Adeoque cum in singulis parallelogrammis altitudo communis sit $\tfrac{1}{16}$ VB (in fig. 1.) & latitudinum incrementum continuum $\tfrac{1}{16}$ BS: Omnes simul altitudines, hoc est, figuræ inscriptæ altitudo, $VB = \tfrac{16}{16}$ VB; at omnia simul latitudinum incrementa, hoc est, Basis figuræ inscriptæ, non BS, sed $\tfrac{15}{16}$ BS, sive $BS - \tfrac{1}{16}$ BS. Si autem uno adhuc gradu ulterius procedatur, adjuncto infra basem uno adhuc parallelogrammo, erit quidem illius latitudo BS præcise, sed altitudo jam fiet auctior, nempe $VB + \tfrac{1}{16}$ VB. Si vero (ut in fig. 2.) sumatur figura ex parallelogrammis circumscripta, erunt tum omnium simul parallelogrammorum altitudines, hoc est, figuræ circumscriptæ altitudo VB, (quam finge jam basi perpendicularem,) tum latitudinum simul omnes particulæ, hoc est, basis figuræ circumscriptæ, BS præcise: at vero jam non ab 0, sed 1, series inchoatur: sin series hæc supra verticem uno adhuc gradu continuetur (ut inchoetur ab 0,) erit jam altitudo sic aucta $VB + \tfrac{1}{16}$ VB, ut patet. Adeoque figura inscripta uno infra basin gradu continuata, & figura circumscripta continuata uno gradu supra verticem, tantundem valent.

Atque hoc totum in Triangulo, (atque eadem ratione in figuris aliis, nisi quod illic incrementa sint inæqualia,) satis est manifestum. Nam (præterquam quod ex jam dictis satis pateat) si in Triangulo ducantur quotlibet rectæ basi parallelæ (in quarum censu & basin ipsam, & punctum verticis, censeri volumus,) eisque

eisque totidem adjaceant parallelogramma: si illa omnia supponantur infra suas rectas jacere, erit eorum infimum subter basem; sin supra, erit supremum supra verticem; si autem supponamus rectas illas neque in parallelogrammorum suorum summo neque in imo jacere, sed per ipsorum media transire, tum eorum tam supremum quam infimum erit partim intra partim extra Triangulum. Adeoque quemcunque situm habere supponantur illæ rectæ ad sua parallelogramma, figura illa ex parallelogrammis constans (dummodo ab o inchoetur,) habebit vel basin suam una parte minorem, vel altitudinem una parte majorem quam habet verum illud Triangulum.

Atque hic quidem sive excessus sive defectus, quamdiu de finita serie agitur, omnino animadvertendus est: ubi autem de serie infinita agitur, tuto poterit negligi. Cum enim quo plures supponantur termini eo minor illa evadat sive basium sive altitudinum differentia, ubi in infinitum proceditur evanescet, quippe $\frac{1}{\infty}$ (pars infinite parva) habenda erit pro nihilo; (ea saltem adhibita limitatione de qua mox dicetur.) Sic, verbi gratia, si Triangulo cujus altitudo A, basis B, inscribatur figura ex parallelogrammis quorum singulorum altitudo $\frac{1}{\infty}$ A, & longitudinum incrementa $\frac{1}{\infty}$ B, erit inscriptæ altitudo $\infty \times \frac{1}{\infty} A = A$, basis non B sed $B - \frac{1}{\infty} B$: est enim altitudinum numerus ∞, at differentiarum $\infty - 1$. Si vero figura sic inscripta continuetur uno gradu infra basem, vel circumscripta uno gradu supra verticem, erit basis $\infty \times \frac{1}{\infty} B = B$, altitudo $A + \frac{1}{\infty} A$; quippe jam numerus incrementorum est ∞, altitudinum $\infty + 1$. Ubi igitur de serie finita agitur, per altitudinem & basin intelligendæ sunt altitudo & basis figuræ sic adscriptæ (sive inscripta sit, sive circumscripta,) non autem istius cui adscribitur; at vero in serie infinita perinde est sive hujus sive illius intelligantur, propter differentiam infinite exiguam, adeoque evanescentem sive nullam. Nam ∞, $\infty + 1$, $\infty - 1$, perinde sunt. Et quemadmodum ubi polygonum infinitorum laterum, pro circulo habetur, perinde est sive inscriptum sive circumscriptum intelligatur, (hoc est, sive supponatur circuli radius æqualis rectæ quæ à centro ad angulos, sive illi quæ à centro ad medium lateris ducitur, quarum differentia, propter latera numero infinita, est infinite exigua:) sic in adscriptionibus nostris perinde est (propter differentiam infinite parvam,) an inscriptæ an circumscriptæ altitudo aut basis sumatur pro vera. Et quidem ut in polygono infinitorum laterum inscripto & circumscripto, latera supponuntur invicem æqualia, hoc est, ejusdem arcus sinus rectus & tangens æquales tam invicem quam ipsi arcui, ita & hic figuræ ex parallelogrammis inscriptæ & circumscriptæ tam bases quam altitudines supponendæ sunt æquales tam inter se quam illius cui adscribuntur; hoc est, si accurate loqui libeat, non nisi infinite exigua sui parte differre.

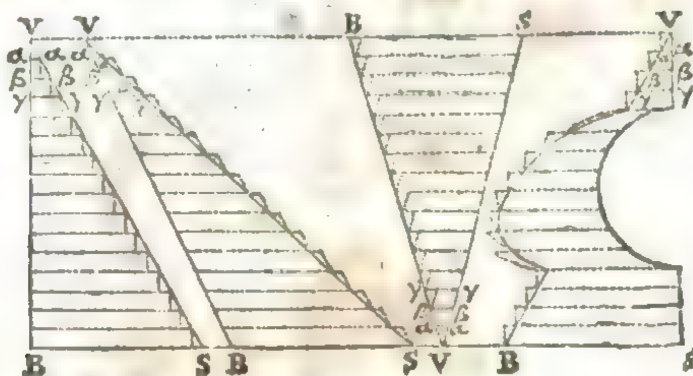
Eodem modo, in fig. prop. 5. Figura ex similibus sectoribus spirali inscripta, si sectorum numerus sit finitus, erit series finita, cujus terminus primus est o, ultimus vero sectorum inscriptorum ultimus, (cujus radius est una parte minor quam ultimi circumscriptorum,) omniumque horum sectorum arcus simul sumpti, æquantur semissi arcus circuli contermini, nempe qui est figuræ ex sectoribus conflatæ conterminus, non qui conterminus est veræ spirali; at si numerus sectorum (prout ibi supponitur) supponatur infinitus, erunt adhuc omnium sectorum arcus simul sumpti, æquales semissi arcus circuli contermini, nempe contermini figuræ ex his infinitis sectoribus conflatæ, qui tamen vel ille ipse est cum contermino veræ spirali, vel ipso saltem infinite-exigua sui parte (hoc est, nihilo,) minor. Si vero pro sectoribus inscriptis sumantur circumscripti, arcus circuli contermini erit una sui parte augendus (sive finita sive infinita, pro numero sectorum,) ut ipsius semissis æqualis habeatur omnibus sectorum arcubus simul sumptis, adeoque supponendus est incepisse uno gradu ante initium veræ spiralis, ut primi sectoris arcus sit o: nam in Arithmetice-proportionalibus, nisi primus terminus sit o, aggregatum omnium non erit æquale semissi ultimi in numerum terminorum ducti.

Quod autem de his figuris ostensum est, intelligendum erit (mutatis mutandis) de quibusvis aliis, nempe numerum terminorum (si ab o incipiatur) esse unitate majorem quam est numerus differentiarum, sive particularum ex quibus maximus constat; (sive æquales sint illæ differentiæ sive inæquales;) adeoque si adscriptæ figuræ (sive sit inscripta sive circumscripta,) basis sumatur æqualis basi figuræ propositæ cui adscribitur, (sive continuando inscriptam uno gradu infra

 basin,

basin, vel circumscriptam uno gradu supra verticem) erit istius altitudo una parte major quam altitudo hujus, (sive pars illa finita sit sive infinita;) ubi autem numerus partium altitudinis hujus supponitur ∞, erit in illa $\infty + 1$; vel si hujus altitudo A, erit illius $A + \frac{1}{\infty} A$; si illius A (quod nos ponere solemus) erit hujus $A - \frac{1}{\infty} A$, quod tamen (in infinitis) tantundem valet ob differentiam infinite parvam.

Dum vero differentiam infinite parvam, pro nulla habendam dicimus: caute hoc accipiendum est; neque enim id ubique obtinet, sed aliquando lapsui occasionem præbet. Cum enim infinite parvum infinities multiplicatur, assurgit nonnunquam quantitas satis magna, nempe illa ipsa cujus illa fuit aliquota pars utut infinite parva: Nam $\frac{1}{\infty} \times \infty = 1$, & $\frac{1}{\infty} A \times \infty = A$.



Exemplum ostendimus in Schol. prop. 13. Si enim (in fig. 1 & 2) concluderet quis, quoniam infinitorum parallelogrammorum latera (rectam VB constituentia,) & trapeziorum latera (complentia rectam VS) sigillatim sumpta non nisi differentia infinite parva ab invicem differant, (cum tam hæc quam illa sint infinite parva, quippe $\frac{1}{\infty}$ rectarum VB, VS,) eam igitur contemnendam esse, ipsaque parallelogrammorum atque trapeziorum latera dicenda æqualia, & propterea (cum ex æqualium æqualibus additione aggregata sint æqualia,) infinita hæc infinitis illis æqualia, hoc est, totam VS, æqualem esse toti VB: manifestus esset paralogismus, (in quem tamen lapsus est admodum proclivis, ni caveatur:) Quamvis enim differentiæ sint sigillatim infinite-parvæ, (nempe $\frac{1}{\infty} VS - \frac{1}{\infty} VB$) omnium tamen (numero infinitorum) aggregatum sat notabilem habet magnitudinem, nempe $SV - VB$.

At interim eadem parallelogramma atque trapezia (si aream spectemus,) non modo sigillatim sumpta differentiam habent infinite parvam; sed & eorum aggregatum & aggregatum horum, (hoc est infinita illa parallelogramma simul sumpta, atque infinita hæc trapezia,) differentia non nisi infinite parva ab invicem differunt: quod de ipsorum lateribus non obtinet.

Discriminis ratio hæc est: Quoniam ubi de lateribus comparandis agitur, quamvis in binis quibuslibet respective sumptis differentia minor est quo major est omnium numerus, at in eadem semper ratione qua singulæ differentiæ minuuntur, differentiarum numerus augetur; adeoque differentiarum aggregatum dividendo non minuitur: At ubi de areis agitur, non modo binorum (trapezii & parallelogrammi) respective sumptorum differentiæ singulæ minuuntur, sed & omnium aggregatum; & quidem quo plures sunt differentiæ eo minus est omnium aggregatum, donec tandem non modo à singulis singula, (quod demonstrasse non sufficeret,) sed & ab omnibus omnia differant spatio infinite-parvo, ut ex demonstrationibus liquet. Atque hæc aliquanto fusius notasse operæ pretium duxi, quoniam hic loci nonnullos lapsui proclives animadverti.

Ne autem hinc aliquid periculi quis suspicetur dum nos altitudinem figuræ cujuslibet accuratam, atque eandem aliquota sui parte infinite-parva auctam, perinde habemus: hoc unum sat securos reddat, quod, cæteris paribus, auctio altitudinis figuræ cujuslibet (sive planæ sive solidæ,) non nisi in eadem ratione auget ipsius aream sive magnitudinem; adeoque ubi altitudinis augmentum est non nisi aliquota sui parte infinite-parva, erit etiam totius figuræ non nisi in eadem ratione auctio, hoc est aliquota parte sui infinite-parva, sive $\frac{1}{\infty}$ totius figuræ;
quod

quod (cum non infinities, sed semel tantum sumatur,) omni assignabili spatio minus erit, adeoque pro nullo habendum.

Sin tandem quæratur, cur ego figurarum inscriptionem, potius quam circumscriptionem, elegerim; adeoque ab o potius quam ab 1, ubique fere inchoaverim? præsertim cùm figura circumscripta (non uno gradu supra verticem continuata, ut ab o incipiat, sed potius ab 1) eandem habeat præcise & basin & altitudinem cum ea cui adscribitur, sive in serie Primanorum, sive Secundanorum, aut aliorum sequentium; item sive finita sit sive infinita series?

Dicimus: Posse quidem id quod agimus utrovis modo fieri, nempe vel per figurarum inscriptionem vel circumscriptionem (quod & supra monuimus ad prop. 43. quæ toti huic Scholio ansam dedit, cujus quidem pars magna tradi citius non potuit, ut quæ à propositione proxime præcedente dependeat,) adeoque, verbi gratia, series Primanorum indifferenter designari, per 1, 2, 3, &c. vel per o, 1, 2, &c. nam terminus primus o reliquorum quantitati nihil addit. Et quidem ego jam olim utroque modo lemmata mea ordinaveram, ut ut alterutrum demonstrationibus nostris sufficeret, quapropter lectorem utroque onerandum non censui; præsertim cum ego Series Infinitas maxime spectabam, finitis vix aliter quam lemmatum instar ad infinitorum theoremata usus.

At interim figuræ circumscriptæ, si res accuratius perpendatur, non magis congruunt figuris illis quibus circumscribuntur, quam inscriptæ: Nam verbi gratia, inscripta cum exposita congruit altitudine & verticis latitudine, sed quoad basin (hoc est latitudinem in imo) differt; eadem inscripta uno infra basin gradu continuata, (vel circumscripta sic continuata supra verticem) convenit expositæ quoad basin & verticis latitudinem, sed quoad altitudinem differt; circumscripta vero (non continuata) convenit quidem expositæ quoad basin & altitudinem, sed non quoad latitudinem verticis, quippe in altera est o in altera 1.

Cum itaque admodum se indifferenter habebant ad negotium nostrum figuræ inscriptæ & circumscriptæ; mallem ego series nostras ab o quam ab 1 inchoare: partim quod illud, utut inscriptionem potius referre videatur, utrisque tamen accommodari possit, (ut jam dictum est,) prout vel supra verticem vel infra basin supponatur continuari: partim quod hoc pacto (propter minimi termini nullitatem) extremorum aggregatum idem sit atque terminus maximus: præsertim vero ut possim, sine longo verborum ambitu, seriei Primanorum appellatione comprehendere non modo o, 1, 2, 3, &c. sed & o, 2, 4, 6, &c. vel o, 3, 6, 9, &c. vel 4, 8, 12, &c. similesque alias ab o inchoatas quicunque sit terminus secundus; & sub serie Secundanorum nomine, non modo o, 1, 4, 9, &c. sed & o, 2, 8, 18, &c. vel o, 3, 12, 27, &c. similesque: & pariter in seriebus sequentibus.

Siquis autem mallet ab 1, series inchoare, poterit ad hunc modum lemmata ordinare.

Ad seriem Primanorum;

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1+2}{3+3}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1+2+3}{4+4+4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1+2+3+4}{5+5+5+5}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5+5}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1+2+3+4+5}{6+6+6+6+6}=\frac{1}{2}$$

&c. &c.

Aut

Aut etiam,

$$\frac{0+1}{2+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4} \qquad \frac{1+2}{2+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{0+1+2}{3+3+3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6} \qquad \frac{1+2+3}{3+3+3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{0+1+2+3}{4+4+4+4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8} \qquad \frac{1+2+3+4}{4+4+4+4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{0+1+2+3+4}{5+5+5+5+5}=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}. \qquad \frac{1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$$

&c. &c.

Ad seriem Secundanorum;

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6} \qquad \frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12} \qquad \frac{1+4}{9+9}=\frac{1}{3}-\frac{1}{18}$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18} \qquad \frac{1+4+9}{16+16+16}=\frac{1}{3}-\frac{1}{24}$$

$$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}. \qquad \frac{1+4+9+16}{25+25+25+25}=\frac{1}{3}-\frac{1}{30}.$$

&c. &c.

Aut etiam

$$\frac{0+1}{4+4}=\frac{1}{3}-\frac{5}{24} \qquad \frac{1+4}{4+4}=\frac{1}{3}+\frac{7}{24}$$

$$\frac{0+1+4}{9+9+9}=\frac{1}{3}-\frac{12}{81} \qquad \frac{1+4+9}{9+9+9}=\frac{1}{3}+\frac{15}{81}$$

$$\frac{0+1+4+9}{16+16+16+16}=\frac{1}{3}-\frac{22}{192}. \qquad \frac{1+4+9+16}{16+16+16+16}=\frac{1}{3}+\frac{26}{192}$$

$$\frac{0+1+4+9+16}{25+25+25+25+25}=\frac{1}{3}-\frac{35}{375}. \qquad \frac{1+4+9+16+25}{25+25+25+25+25}=\frac{1}{3}+\frac{40}{375}$$

&c. &c.

Ad seriem Tertianorum.

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{8}=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$$

$$\frac{0+1+8}{8+8+8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \qquad \frac{1+8}{27+27}=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+8+27}{27+27+27+27}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12} \qquad \frac{1+8+27}{64+64+64}=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}$$

$$\frac{0+1+8+27+64}{64+64+64+64+64}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16} \qquad \frac{1+8+27+64}{125+125+125+125}=\frac{1}{4}-\frac{1}{20}$$

&c. &c.

Et

Et similiter ad series sequentes, quibus recensendis abstineo ne sim prolixus. Poterit, si lubet, lector non magno negotio vel hæc ipsa lemmata in Theoremata formare, vel alia his similia sequentibus seriebus aptare, si ad ea quæ jam tradidimus attenderit.

Sed & alius adhuc est (si varietate lector delectetur) series has ordinandi modus, qui etiam aliquando non minus erit accommodus: Si nempe nec ab o (ut in figuris inscriptis,) nec ab 1 (ut in figuris circumscriptis,) sed ab intermedia quantitate, puta $\frac{1}{2}$, series inchoetur, (adeoque figuram repræsentet quæ inscriptæ & circumscriptæ est intermedia, sive major quam inscripta & minor quam circumscripta:) Ut sit, verbi gratia, series primanorum $\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}$ &c. vel (quod eodem recidit) $1 + 3 + 5 + 7$ &c. Quo casu lemma sic erit ordinandum, pro serie primanorum.

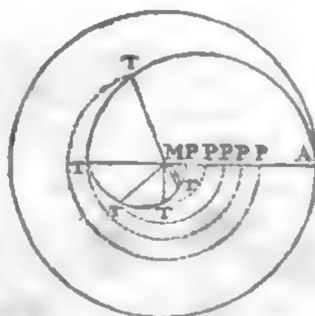
$$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}}{2 + 2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1 + 3}{4 + 4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}}{3 + 3 + 3} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1 + 3 + 5}{6 + 6 + 6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}}{4 + 4 + 4 + 4} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1 + 3 + 5 + 7}{8 + 8 + 8 + 8} = \frac{1}{2}$$

Atque hic quidem modus omnium optime convenit prop. 15, 16, ubi figuram Spirali adjacentem cum Parabolica comparamus. Nam si, in figura spirali, ductis quotlibet rectis M T angulos facientibus continuos invicem æquales, si in singulis spatiis sectores inscribi supponantur, erunt eorum arcus, ut 0, 1, 2, 3, &c. sin circumscribi, ut 1, 2, 3, 4, &c. si vero ita adscribi ut sectorum arcus à spirali bisecentur, erunt ut $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, &c. vel ut 1, 3, 5, 7, &c. (nempe ut differentiæ numerorum quadraticorum:) adeoque si arcus illi (sive numero infiniti sive finiti, quamvis ibidem de infinitis tantummodo verba facta sint, adeoque hanc curiositatem illic omittendam duxerim,) supponantur in rectum extendi & invicem continuari, ut fiant totidem segmenta diametri parabolæ (continue posita;) unde evadant diametri interceptæ 1, 4, 9, 16, &c. (nam $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, &c.) quibus conveniant ordinatim applicatæ (quippe in diametrorum ratione subduplicata) quæ erunt ad invicem, ut 1, 2, 3, 4, &c. hoc est ut ipsæ rectæ M T, M T, &c. in figura spirali vera per similium sectorum terminos transeuntes.



Atque hoc pacto comparare licet, non modo figuram ex sectoribus numero infinitis (quod nos illic fecimus,) sed etiam ex numero finitis conflatam, spirali adjacentem, cum figura ex totidem parallelogrammis adjacente parabolæ. Quod quidem (sine nova figura) satis intelligi poterit. Si illi sectorum arcus ponantur $1a$, $3a$, $5a$, &c. radii vero (ipsis proportionales) $2r$, $6r$, $10r$, &c. erunt sectores $1ar$, $9ar$, $25ar$, &c. (nempe semisses parallelogrammorum radiis & arcubus respectivis contentorum.) Sumptis item in parabolæ diametro continuis segmentis $1a$, $3a$, $5a$, &c. adeoque diametris interceptis $1a$, $4a$ $(= 1a + 3a,)$ $9a$ $(= 4a + 5a)$ &c. & ordinatim-applicatis quæ illis diametris conveniant (in diametrorum ratione subduplicata) $2r$, $4r$, $6r$, &c. (quæ spacia abscindant non æque-alta, sed quorum altitudines sint Arithmetice-proportionales, ut 1, 3, 5, &c. ut patet;) parallelogramma spaciis illis inscripta erunt $1a \times 0r$, $3a \times 2r$, $5a \times 4r$, &c. vel $0ar$, $6ar$, $20ar$, &c. circumscripta, erunt $1a \times 2r$, $3a \times 4r$, $5a \times 6r$, &c. vel $2ar$, $12ar$, $30ar$, &c. his autem intermedia partim inscripta partim circumscripta, (quæ nempe eam habent latitudinem quæ est Arithmetice media inter

Mmm

ter duas ordinatim-applicatas spatium terminantes,) vel (quod tantundem valebit) inscripta trapezia, erunt $1a \times 1r$, $3a \times 3r$, $5a \times 5r$, &c. vel $1ar$, $9ar$, $25ar$, &c. expositis sectoribus sigillatim æqualia: iis nempe quorum arcus sunt parallelogrammorum altitudinibus (hoc est, segmentis diametri parabolæ) æquales, radii vero latitudinum parallelogrammorum dupli: vel, si sectorum radii sint parallelogrammorum illorum latitudinibus æquales, erunt parallelogramma sectorum dupla.

Sed tempus est ut prolixo Scholio finem imponam; quod, cur in hunc locum rejecerim, supra dictum est.

PROP. CLXXXIII.

Theorema.

Latus numeri Figurati cujuslibet, in qualibet serie Tabellæ expositæ (prop. 132.) quousque libet continuandæ; ad suum illum numerum Figuratum; rationem habet cognitam.

Nempe eam quam indicat prop. præced.

PROP. CLXXXIV.

Theorema.

ET *propterea*, Series sequentes in præmissa Tabella quousque libet continuata, non erit difficile interpolare.

Nempe, invento per prop. 182. cujusque proprio charactere, fiat interpolatio ut in prop. 175, 178, 181.

Tabella vero, ut dictum est, interpolata sic se exhibebit.

Numeri		Monadici.		Laterales.		Triangulares.		Pyramidales.		Triang. triang.	
	∞	1		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{15}{48}$		$\frac{105}{384}$	
Monadici.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	□	$1\frac{1}{2}$		$1\frac{7}{8}$		$2\frac{9}{48}$		$2\frac{177}{384}$	
Laterales.	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5	l
		1		$2\frac{1}{2}$		$4\frac{3}{8}$		$6\frac{27}{48}$		$9\frac{9}{384}$	
Triangulares.	$\frac{3}{8}$	1	$1\frac{7}{8}$	3	$4\frac{3}{8}$	6	$7\frac{7}{8}$	10	$12\frac{3}{8}$	15	$\frac{l^2+l}{2}$
		1		$3\frac{1}{2}$		$7\frac{7}{8}$		$14\frac{21}{48}$		$23\frac{177}{384}$	
Pyramidales.	$\frac{15}{48}$	1	$2\frac{9}{48}$	4	$6\frac{27}{48}$	10	$14\frac{21}{48}$	20	$26\frac{39}{48}$	35	$\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$
		1		$4\frac{1}{2}$		$12\frac{3}{8}$		$26\frac{39}{48}$		$50\frac{105}{384}$	
Trianguli-triang.	$\frac{105}{384}$	1	$2\frac{177}{384}$	5	$9\frac{9}{384}$	15	$23\frac{177}{384}$	35	$50\frac{105}{384}$	70	$\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$

Et sic deinceps.

Vel

Vel aliter expeditius. Postquam per Prop. 170, 175, &c. interpolatio serierum tam transversarum quam erectarum aliquousque incepta est, licet eam ulterius continuare quousque libet sola additione numerorum jam inventorum; nam non modo numeri tabellæ Prop. 132. (prout ibidem monuimus,) sed & qui interpolatione immiscentur, fiunt ex duobus aliis additis, altero superius altero ad sinistram, (non quidem proximis, ut in Prop. 132. sed, propter loca jam interpolata,) post unum locum interjectum positis. Ut animadvertenti patebit.

Quod autem de interpolatione unius in singulis spatiis loci, in propositionibus aliquot præcedentibus jam dictum est, etiam ad duorum vel trium pluriumve interpositionem, mutatis mutandis, facile accommodari poterunt.

SCHOLIUM.

Notandum hic, totum hoc interpolationis negotium, huc usque præstitum, perfici posse (etiam sine inventis cujusque seriei propriis characteribus) ope monitorum quæ habentur in Scholiis Prop. 126. & 154. Interpolatis nempe primo seriebus erectis, & istis deinde interpolationibus in series item transversas relatis. Verum cum singularum serierum characteres investigare, res esset non injucunda, & lectori forsan non ingrata: placuit ea potius quam habetis methodo incedere.

Cum autem huc perventum est, patet, intercalatione facta in singulis seriebus tam erectis quam transversis Tabellæ Prop. 132. novas jam emersisse series ipsis interpositas: nondum tamen completas, sed hiantes. Et quidem locus ille (nota □ insignitus) quem quam maxime suppletum vellem, manet adhuc vacuus. Si autem vel unus ex vacuis illis locis suppleri datum sit, & reliqui non difficulter suppleri poterunt; ut ex Prop. 188. patebit.

Cum vero Tabella Prop. 132. jam habetur novis seriebus interpolata, ut interjectæ series suos habeant titulos juxta tenorem illius tabellæ accommodatos, observanda est hæc sequens Propositio,

PROP. CLXXXV.

Theorema.

SI seriebus Tabellæ Prop. 132. novæ interserantur series, ut suum quæque debitum sortiatur titulum; observandi sunt indices potestatum illic appositarum; eæque potestates sunt interponendæ quarum indices cum illarum indicibus debitam analogiam retinent.

Puta, cum potestates, in summitate Tabellæ istius repertæ, indices habeant, 0, 1, 2, 3, 4, &c. Interpolatione unius loci ubivis jam facta, potestatum apponendarum indices erunt $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4$ &c.

Item cum potestatum illic ad marginem appositarum indices sint $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, &c. seu $\frac{2}{0}, \frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{2}{8}$, &c. potestatum jam appositarum indices erunt $\frac{2}{-1}, \frac{2}{0}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \frac{2}{8}$, &c. (vel pro $\frac{2}{-1}$, substituas, $-\frac{2}{1}$, vel $\frac{-2}{1}$, vel -2, tantundem enim valent.)

Adeoque Tabella illa jam interpolata sic se habebit.

Si infinita series Æqualium mulctetur analoga serie Subprimanorum, vel Subsecundanorum, vel Subtertianorum, &c. Residua, eorumque Quadrata, Cubi, &c. eam rationem habebunt ad Æqualium seriem congruam, quam habet unitas ad numeros Tabellæ sequentis.

Seriei Æqualium multætæ serie

	Recip. √q Residuorum.	Æqualia.	√q Residuorum.	Residua.	√q. Cuborum.	Quadrata.	√q. Quintanorum.	Cubi.	√q. Septimanorum.	Biquadrata.
Recipr. Quadrat.	∞	1		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{15}{48}$		$\frac{105}{384}$
Nulla. seu Æqualium.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Secundanorum.		1	□	$1\frac{1}{2}$		$1\frac{7}{8}$		$2\frac{9}{48}$		$2\frac{177}{384}$
Prim. seu Subprim.	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5
Quadr. Subtert.		1		$2\frac{1}{2}$		$4\frac{3}{8}$		$6\frac{27}{48}$		$9\frac{9}{384}$
Subsecundanorum.	$\frac{3}{8}$	1	$1\frac{7}{8}$	3	$4\frac{3}{8}$	6	$7\frac{7}{8}$	10	$12\frac{3}{8}$	15
Qu. Subquintanor.		1		$3\frac{1}{2}$		$7\frac{7}{8}$		$14\frac{21}{48}$		$23\frac{177}{384}$
Subtertianorum.	$\frac{15}{48}$	1	$2\frac{9}{48}$	4	$6\frac{27}{48}$	10	$14\frac{21}{48}$	20	$26\frac{39}{48}$	35
Qu. Subseptiman.		1		$4\frac{1}{2}$		$12\frac{3}{8}$		$26\frac{39}{48}$		$50\frac{105}{384}$
Subquartanorum.	$\frac{105}{384}$	1	$2\frac{177}{384}$	5	$9\frac{9}{384}$	15	$23\frac{177}{384}$	35	$50\frac{105}{384}$	70

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

SCHOLIA.

Atque hic jam notare licet alteram etiam seriem earum quarum in Scholiis Prop. 165 & 168. meminimus, nempe eam quam Prop. 118 & 121 prius tradideram, etiam in hac ipsa Tabella inexspectato prodire: in serie nempe transversa tertia.

PROP. CLXXXVI.

Theorema.

H*Inc patet, quod* Series infinita radicum universalium, ad seriem totidem Æqualium, rationem habere potest satis explicabilem.

Nempe per prop. præced. erit.

√q Resid.	Residua.	√q Cuborum.
$\sqrt{u}:\sqrt{R}-\sqrt{a}:$	$\sqrt{R}-\sqrt{a}$	$\sqrt{u}:\sqrt{R^3}-3\sqrt{R^2a}+3\sqrt{Ra^2}-\sqrt{a^3}:$
$\sqrt{u}:\sqrt{R}-\sqrt{b}:$	$\sqrt{R}-\sqrt{b}$	$\sqrt{u}:\sqrt{R^3}-3\sqrt{R^2b}+3\sqrt{Rb^2}-\sqrt{b^3}:$
$\sqrt{u}:\sqrt{R}-\sqrt{c}:$	$\sqrt{R}-\sqrt{c}$	$\sqrt{u}:\sqrt{R^3}-3\sqrt{R^2c}+3\sqrt{Rc^2}-\sqrt{c^3}:$
&c. ad	&c. ad.	&c. usque ad
$\sqrt{}:\sqrt{R}-\sqrt{R}:$	$\sqrt{R}-\sqrt{R}$	$\sqrt{u}:\sqrt{R^3}-3\sqrt{R^3}\ +3\sqrt{R^3}-\sqrt{R^3}:$
$\frac{8}{15}A\sqrt{qqR}$	$\frac{1}{3}A\sqrt{R}$	$\frac{8}{35}A\sqrt{qqR^3}$

√q Residuorum.	Residua.	√q. Cuborum.
$\sqrt{u}:\sqrt[3]{R}-\sqrt[3]{a}:$	$\sqrt[3]{R}-\sqrt[3]{a}$	$\sqrt{u}:\sqrt[3]{R^3}-3\sqrt[3]{R^2a}+3\sqrt[3]{Ra^2}-\sqrt[3]{a^3}:$
$\sqrt{u}:\sqrt[3]{R}-\sqrt[3]{b}:$	$\sqrt[3]{R}-\sqrt[3]{b}$	$\sqrt{u}:\sqrt[3]{R^3}-3\sqrt[3]{R^2b}+3\sqrt[3]{Rb^2}-\sqrt[3]{b^3}:$
$\sqrt{u}:\sqrt[3]{R}-\sqrt[3]{c}:$	$\sqrt[3]{R}-\sqrt[3]{c}$	$\sqrt{u}:\sqrt[3]{R^3}-3\sqrt[3]{R^2c}+3\sqrt[3]{Rc^2}-\sqrt[3]{c^3}:$
&c. ad	&c. ad	&c. usque ad
$\sqrt{u}:\sqrt[3]{R}-\sqrt[3]{R}:$	$\sqrt[3]{R}-\sqrt[3]{R}$	$\sqrt{u}:\sqrt[3]{R^3}-3\sqrt[3]{R^2R}+3\sqrt[3]{RR^2}+\sqrt[3]{R^3}.$
$\frac{48}{175}A\sqrt[6]{R}.$	$\frac{1}{4}A\sqrt[3]{R}$	$\frac{48}{315}A\sqrt[6]{R^3}=\frac{48}{315}A\sqrt{R}$
vel $\frac{16}{35}A\sqrt[6]{R}$		$\frac{16}{105}A\sqrt[6]{R^3}=\frac{16}{105}A\sqrt{R}$

Et

Et pari modo in quibusvis aliis istius Tabellæ seriebus in quibus interpolatio perfecta est.

Adeoque nihil deest ad idem in reliquis seriebus perficiendum, (& speciatim ad quadrandum circulum,) nisi ut methodus supplendi loca vacua reperiatur, vel (quod eodem recidit) ut serierum istarum proprius character inveniatur. Et quidem quamvis non obvium sit interpolitarum serierum characteres invenire, tamen, quam habent illi ad invicem rationem, ex prop. seq: innotescet: ut siqua possimus arte eorum unum invenire, statim invenientur & reliqui.

PROP. CLXXXVII.

Theorema.

IN Tabella prop. 184. Ut, posito seriei secundæ (hoc est, parium primæ) charactere 1, reliquarum (ex paribus) characteres fiunt continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{l}{1} \times \frac{l+1}{2} \times \frac{l+2}{3} \times \frac{l+3}{4}$ &c. (ut dictum est prop. 178.) vel (quod tantundem valet) $1 \times \frac{2l}{2} \times \frac{2l+2}{4} \times \frac{2l+4}{6} \times \frac{2l+6}{8}$ &c. Sic, posito seriei primæ (imparium) charactere A, reliquarum ex imparibus characteres fiunt continua multiplicatione numerorum $A \times \frac{2l-1}{1} \times \frac{2l+1}{3} \times \frac{2l+3}{5} \times \frac{2l+5}{7}$ &c. Adeoque ex horum uno cognito innotescent statim & reliqui.

Nam id postulat analogia progressionis Arithmeticæ, quæ & in Numeratoribus & in Denominatoribus conspicitur. Atque id ipsum comprobat inductio locorum omnium qui complentur; ut non sit dubium quin & idem de vacuis judicandum sit.

Adeoque ex imparium characteribus, uno cognito innotescent etiam & reliqui.

PROP. CLXXXVIII.

Theorema.

IN seriebus Tabellæ prop. 184. Si primi termini A dicantur α, A, β, B, γ, C, δ, D, ϵ, E, &c. secundi (hoc est, primi parium,) 1. Reliqui omnes (tam pares quam impares) fiunt continua multiplicatione numerorum sequentium. Nempe

	Impares.	Pares.
In prima	$\alpha \times \frac{0 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8 \text{ \&c.}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}$	$1 \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c.}}$
In secunda	$A \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}$	$1 \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c.}}$
In tertia	$\beta \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c.}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}$	$1 \times \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c.}}$
In quarta	$B \times \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \text{ \&c.}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}$	$1 \times \frac{4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c.}}$
In quinta	$\gamma \times \frac{4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \text{ \&c.}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}$	$1 \times \frac{5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c.}}$
In sexta	$C \times \frac{5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \text{ \&c.}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}$	$1 \times \frac{6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c.}}$
In septima	$\delta \times \frac{6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \text{ \&c.}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}$	$1 \times \frac{7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c.}}$
In octava	$D \times \frac{7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \text{ \&c.}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}$	$1 \times \frac{8 \times 10 \times 12 \times 14 \times 16 \text{ \&c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \text{ \&c.}}$

Et sic deinceps.

Probabitur hæc ex præcedente. Vel etiam (ut præcedens) ex analogia progressionis Arithmeticæ. Et quidem inductione comprobatur in locis omnibus repletis; ut non sit dubium quin idem de vacuis etiam judicandum sit.

Si quis autem hæsitat de imparibus seriei primæ, (quos aio fieri ex continua multiplicatione numerorum $\infty \times \frac{0 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8 \text{ \&c.}}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ \&c.}}$) nempe, ne o ciphra quæ istic conspicitur, totam continuam multiplicationem, quantacunque fuerit, penitus destruat, faciatque omnes istius seriei terminos evanescere in o ciphram seu Nihil: Sciendum est, inde huic malo cautum esse quod terminus A in ista serie sit ∞ Infinitum, (prout superius ostendimus in Scholiis ad prop. 166.) adeoque nisi sequeretur o (ad ipsius ∞ vires minuendas) excrevissent omnes istius seriei termini in ∞ Infinitum. Sed eorum alterum alterius malo medetur commode. Quamvis enim $\infty \times 0$ non aliquem determinate numerum designet, (& propterea nihil inde certi de reliquis quantitatibus concludi possit,) potest tamen quasi virtualiter cujusvis numeri vices subire. Nam quicunque numerus per ∞ dividatur, quotientem dabit o, & contra. Puta ∞) 1 (o . o) 1 (∞ . ∞) 2 (o . o) 2 (∞ . ∞) 3 (o . o) 3 (∞. Et sic de quovis alio: Et propterea (cum *Divisor* in *Quotientem* ductus restituere debeat numerum *Dividendum*) esset $\infty \times 0 = 1$, vel $\infty \times 0 = 2$, vel $\infty \times 0 = 3$; Et sic de quovis alio numero.

PROP. CLXXXIX.

Theorema.

Hinc sequitur, quod Si ex Tabellæ prop. 184. locis vacuis unus quilibet numero noto suppleatur, erunt & reliqui omnes cogniti.

Verbi gratia; si numerus hac nota □ designatus supponatur cognitus, reliqui omnes etiam cognoscentur; qui nempe eam habent ad illum rationem quæ hic subtus indicatur.

∞	1	$\frac{1}{2}$□	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$□	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{15}$□	$\frac{15}{48}$	$\frac{8}{35}$□	$\frac{105}{384}$	A
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$□	1	□	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$□	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{5}$□	$\frac{105}{48}$	$\frac{64}{35}$□	$\frac{945}{384}$	$A \times \frac{2l-1}{1}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$l = \frac{2l+0}{2}$
$\frac{1}{3}$□	1	$\frac{4}{3}$□	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$□	$\frac{35}{8}$	$\frac{64}{15}$□	$\frac{315}{48}$	$\frac{128}{21}$□	$\frac{3465}{384}$	$A \times \frac{4l^2-1}{3}$
$\frac{3}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	6	$\frac{63}{8}$	10	$\frac{99}{8}$	15	$\frac{l^2+l}{2} = \frac{4l^2+4l}{8}$
$\frac{4}{15}$□	1	$\frac{8}{5}$□	$\frac{7}{2}$	$\frac{64}{15}$□	$\frac{63}{8}$	$\frac{128}{15}$□	$\frac{693}{48}$	$\frac{512}{35}$□	$\frac{9009}{384}$	$A \times \frac{8l^3+12l^2-2l-3}{15}$
$\frac{15}{48}$	1	$\frac{105}{48}$	4	$\frac{315}{48}$	10	$\frac{693}{48}$	20	$\frac{1287}{48}$	35	$\frac{l^3+3l^2+2l}{6} = \frac{8l^3+24l^2+16l}{48}$
$\frac{8}{35}$□	1	$\frac{64}{35}$□	$\frac{9}{2}$	$\frac{128}{21}$□	$\frac{99}{8}$	$\frac{512}{35}$□	$\frac{1287}{48}$	$\frac{1024}{35}$□	$\frac{19305}{384}$	$A \times \frac{16l^4+64l^3+56l^2-16l-15}{105}$
$\frac{105}{384}$	1	$\frac{945}{384}$	5	$\frac{3465}{384}$	15	$\frac{9009}{384}$	35	$\frac{19305}{384}$	70	$\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24} = \frac{16l^4+96l^3+176l^2+96l}{384}$

Totus

Totus processus demonstratur ex prop. præced.

Notandum autem & hic numerum quemvis intermedium aggregatum esse ex duobus altero sursum altero ad dextram, (non proximis, sed post unum intermissum,) positis.

Cujusque seriei characterem (quatenus per prop. 182 & 187 innotescit,) libuit etiam adjungere, quo melius perspiciat lector quousque rem perduximus.

SCHOLIUM.

Atque hactenus quidem rem perduxisse videamur satis feliciter. Verum hic tandem hæret aqua. Neque enim video quo pacto possim vel quantitatem □ reperire, vel characterem seriei A. (Et propterea, nec characteres seriérum imparium penitus assequi, licet eorum ad invicem rationes cognoscantur; nec imparium seriérum locos impares, quamvis & horum etiam cognoscantur quas habent ad invicem rationes.) Quanquam enim si numeri laterales sint integri, puta 1, 2, 3, 4, &c. noti sint seriérum illarum termini primi; puta 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, [illegible], &c. non tamen facile est deprehendere quo pacto horum numerorum ad suos respective numeros laterales ratio possit una aliqua æquatione explicari: unde & reliquis lateribus (locorum imparium) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c. accommodari possit suæ cujusque seriei primus terminus. Quanquam enim hinc spes non exigua visa est affulsisse, lubricus tamen quem præ manibus habemus Proteus tam hic quam superius non raro elapsus, spem fefellit. Quem autem & hic comprimenti vultum ostenderit, non erit fortassis ingratum apposuisse. Nempe ——

PROP. CXC.

Theorema.

IN serie quarta, (sive parium secunda,) cujus numeri alterne sumpti (in locis paribus) 1, 2, 3, 4, 5, &c. fiunt continua multiplicatione numerorum seu rationum $1 \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4}$, &c. seu $1 \times \frac{4}{2} \times \frac{6}{4} \times \frac{8}{6} \times \frac{10}{8}$ &c. &, (in locis imparibus,) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, &c. ex multiplicatis $\frac{1}{2} \times \frac{3}{1} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \frac{9}{7}$, &c. Si, propter intercalationem unius in singulis spatiis numeri, (ut ex locis tam paribus quam imparibus intermistis una fiat series,) quælibet rationum, in quas continue multiplicatur terminus omnium tam parium quam imparium primus, in binas dirimenda est, (nam, verbi gratia, ratio 1 ad 2 composita est ex ratione 1 ad 1 $\frac{1}{2}$ & 1 $\frac{1}{2}$ ad 2,) hoc modo

$$\overbrace{\tfrac{1}{2} \times \tfrac{2}{1}}^{1} \times \overbrace{\tfrac{3}{2} \times \tfrac{4}{3}}^{\frac{4}{2}} \times \overbrace{\tfrac{5}{4} \times \tfrac{6}{5}}^{\frac{6}{4}} \times \overbrace{\tfrac{7}{6} \times \tfrac{8}{7}}^{\frac{8}{6}} \times \tfrac{9}{8} \;\&c.$$

$$\tfrac{1}{2} \times \underbrace{\tfrac{2}{1} \times \tfrac{3}{2}}_{\frac{3}{1}} \times \underbrace{\tfrac{4}{3} \times \tfrac{5}{4}}_{\frac{5}{3}} \times \underbrace{\tfrac{6}{5} \times \tfrac{7}{6}}_{\frac{7}{5}} \times \underbrace{\tfrac{8}{7} \times \tfrac{9}{8}}_{\frac{9}{7}}$$

In serie sexta, (sive parium tertia,) si idem faciendum sit; distribuenda est quælibet ratio item in binas, sed quarum utraque est ex duabus composita; ad hunc modum.

$$\overbrace{\frac{1\times3}{2\times4} \times \frac{2\times4}{1\times3}}^{1} \times \overbrace{\frac{3\times5}{2\times4} \times \frac{4\times6}{3\times5}}^{\frac{6}{2}} \times \overbrace{\frac{5\times7}{4\times6} \times \frac{6\times8}{5\times7}}^{[illegible]} \times \overbrace{\frac{7\times9}{6\times8} \times \frac{8\times10}{7\times9}}^{\frac{10}{6}} \;\&c.$$

$$\tfrac{3}{8} \times \underbrace{\frac{2\times4}{1\times3} \times \frac{3\times5}{2\times4}}_{\frac{5}{1}} \times \underbrace{\frac{4\times6}{3\times5} \times \frac{5\times7}{4\times6}}_{\frac{7}{3}} \times \underbrace{\frac{6\times8}{5\times7} \times \frac{7\times9}{6\times8}}_{\frac{9}{5}} \;\&c.$$

Nempe, divisa prius qualibet ratione in quaternas, (puta $\frac{6}{2} = \frac{3\times4\times5\times6}{2\times3\times4\times5}$, & $\frac{7}{3} = \frac{4\times5\times6\times7}{3\times4\times5\times6}$, & sic in cæteris,) & tum distributione alternatim facta in binas classes.

In

In ſerie Octava (ſive parium quarta) diſtribuenda eſt quælibet ratio item in binas, ſed quarum utraque eſt ex ternis compoſita, ſic.

$$\overbrace{\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\times\frac{2\times4\times6}{1\times3\times5}}^{1}\times\overbrace{\frac{3\times5\times7}{2\times4\times6}\times\frac{4\times6\times8}{3\times5\times7}}^{\frac{8}{2}}\times\overbrace{\frac{5\times7\times9}{4\times6\times8}\times\frac{6\times8\times10}{5\times7\times9}}^{\frac{10}{4}}\ \&c.$$

$$\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\times\underbrace{\frac{2\times4\times6}{1\times3\times5}\times\frac{3\times5\times7}{2\times4\times6}}_{\frac{7}{1}}\times\underbrace{\frac{4\times6\times8}{3\times5\times7}\times\frac{5\times7\times9}{4\times6\times8}}_{\frac{9}{3}}\times\frac{6\times8\times10}{5\times7\times9}\ \&c.$$

$$\frac{15}{48}\times\frac{7}{1}\times\frac{9}{3}\ \&c.$$

Nempe, diviſa prius qualibet ratione in ſenas, (puta $\frac{8}{2}=\frac{3\times4\times5\times6\times7\times8}{2\times3\times4\times5\times6\times7}$, & $\frac{9}{3}=\frac{4\times5\times6\times7\times8\times9}{3\times4\times5\times6\times7\times8}$, &c.) quæ poſtea diſtribuendæ ſunt alternatim in duas claſſes.

Et ſimiliter in ſerie Decima, Duodecima, &c. dividenda quælibet ratio in Octonas, Denas, &c. quæ alternatim diſtribuenda ſunt in duas claſſes.

(In ſerie autem Secunda (ſive parium Prima) nulla rationum diviſione opus eſt, ſed cum omnes ſint eadem æqualitatis ratio, ſive $\frac{1}{1}$; eadem illa eſt & ubique interponenda, nam $\frac{1}{1}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{1}$.)

Verum ſi in ſeriebus Imparibus illud aggrediamur; nempe ut quælibet ratio in duas (æquabiliter progrediendo) diſtribuatur; res non ita feliciter ſuccedit.

Nam (verbi gratia) cum (ex analogia reliquarum) rationes ſeriei Quintæ dividendæ eſſent in ternas, Septimæ in quinas, &c. (numero ſemper impares,) non poteſt fieri iſta æquabilis earum diſtributio in duas claſſes quæ ad debitam interpolationem requiritur.

Tota propoſitio (inſpecta Tabella) ſatis per ſe patet animadvertenti.

Res aliquanto clarius fortaſſe patebit ubi ſerierum aliquot rationes in binas, ternas, quaternas, &c. (prout ſeries quælibet poſtulat) diviſero. Nempe

In ſerie tertiâ.

	$\frac{2}{1}=\frac{2}{1}$
$\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$	
	$\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$
$\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$	
	$\frac{6}{5}=\frac{6}{5}$
$\frac{7}{6}=\frac{7}{6}$	
	$\frac{8}{7}=\frac{8}{7}$
$\frac{9}{8}=\frac{9}{8}$	

In ſerie quarta.

	$\frac{3}{1}=\frac{2\times3}{1\times2}$
$\frac{4}{2}=\frac{3\times4}{2\times3}$	
	$\frac{5}{3}=\frac{4\times5}{3\times4}$
$\frac{6}{4}=\frac{5\times6}{4\times5}$	
	$\frac{7}{5}=\frac{6\times7}{5\times6}$
$\frac{8}{6}=\frac{7\times8}{6\times7}$	
	$\frac{9}{7}=\frac{8\times9}{7\times8}$
$\frac{10}{8}=\frac{9\times10}{8\times9}$	

In ſerie quinta.

	$\frac{4}{1}=\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}$
$\frac{5}{2}=\frac{3\times4\times5}{2\times3\times4}$	
	$\frac{6}{3}=\frac{4\times5\times6}{3\times4\times5}$
$\frac{7}{4}=\frac{5\times6\times7}{4\times5\times6}$	
	$\frac{8}{5}=\frac{6\times7\times8}{5\times6\times7}$
$\frac{9}{6}=\frac{7\times8\times9}{6\times7\times8}$	
	$\frac{10}{7}=\frac{8\times9\times10}{7\times8\times9}$
$\frac{11}{8}=\frac{9\times10\times11}{8\times9\times10}$	

In ſerie ſexta.

	$\frac{5}{1}=\frac{2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4}$
$\frac{6}{2}=\frac{3\times4\times5\times6}{2\times3\times4\times5}$	
	$\frac{7}{3}=\frac{4\times5\times6\times7}{3\times4\times5\times6}$
$\frac{8}{4}=\frac{5\times6\times7\times8}{4\times5\times6\times7}$	
	$\frac{9}{5}=\frac{6\times7\times8\times9}{5\times6\times7\times8}$
$\frac{10}{6}=\frac{7\times8\times9\times10}{6\times7\times8\times9}$	
	$\frac{11}{7}=\frac{8\times9\times10\times11}{7\times8\times9\times10}$
$\frac{12}{8}=\frac{9\times10\times11\times12}{8\times9\times10\times11}$	

In

In ſerie ſeptima.

$$\frac{7}{2} = \frac{3\times4\times5\times6\times7}{2\times3\times4\times5\times6} \qquad \frac{6}{1} = \frac{2\times3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times4\times5}$$

$$\frac{9}{4} = \frac{5\times6\times7\times8\times9}{4\times5\times6\times7\times8} \qquad \frac{8}{3} = \frac{4\times5\times6\times7\times8}{3\times4\times5\times6\times7}$$

$$\frac{11}{6} = \frac{7\times8\times9\times10\times11}{6\times7\times8\times9\times10} \qquad \frac{10}{5} = \frac{6\times7\times8\times9\times10}{5\times6\times7\times8\times9}$$

$$\frac{13}{8} = \frac{9\times10\times11\times12\times13}{8\times9\times10\times11\times12} \qquad \frac{12}{7} = \frac{8\times9\times10\times11\times12}{7\times8\times9\times10\times11}$$

In ſeriebus hiſce (quantumlibet continuatis) & ſequentibus omnibus, notandum eſt, Rationes cujuſlibet ex paribus ſeriei dividi in alias numero pares, quæ propterea commode diſtribui poſſunt (ut dictum eſt) in duas Claſſes: cujuſlibet autem ex ſeriebus imparibus, rationes dividi in alias numero impares, quæ propterea ſic diſtribui non poſſunt.

SCHOLIUM.

Si quis autem putet huic malo medelam ſatis commode applicari poſſe, dividendo rationes ſeriei quintæ, ſeptimæ, &c. (non in ternas, quinas, &c. ſed) in ſenas, denas, &c. (nempe bis ternas, bis quinas, &c.) ut ita rationes (jam numero pares) diſtribui poſſint in binas claſſes: Res neutiquam ex voto ſuccedet. Nam hoc quidem tantundem eſt acſi Rationes ſeriei quartæ, ſextæ, octavæ, &c. dividantur (non in binas, quaternas, ſenas, &c. ſed) in quaternas, octonas, duodenas, &c. Et harum poſtea fiat alternatim diſtributio in duas claſſes. Quod quidem ſi fieret, non ipſæ prodirent rationes quæſitæ, (quas ſupra exhibuimus,) ſed aliæ ab ipſis ſatis diverſæ, ut experienti patebit.

Et quidem proclivis ſum ut credam (quod & ab initio ſuſpicatus ſum,) rationem illam quam quærimus talem eſſe ut quæ non poterit numeris exprimi juxta ullum adhuc receptum notationis modum, ne quidem per latera ſurda; (quale quid innuit Schootenius, de radicibus Æquationum quarundam cubicarum, in ipſius *Appendice* ad tractatum *de Organica Conicarum Sectionum deſcriptione*, idque ad mentem Vietæi, Carteſii, & aliorum:) ut neceſſe videatur alium ejuſmodi rationem explicandi modum introducere, quam vel per numeros veros, vel etiam per recepta latera ſurda.

Atque hæc quidem noſtra ſive ſententia, ſive conjectura, hinc confirmari videtur; Quoniam, ſi, ut ſerierum parium quælibet (in Tabella Prop. 184) ſuum habet appoſitum characterem, ita & imparium quælibet ejuſmodi characterem nacta eſſet: tum, ut per characteres parium, rationem inveſtigari docuimus quam habet ſeries finita Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo Æqualium, (in Scholiis ad Prop. 182.) ita per ejuſmodi characteres ſerierum imparium, ſimiliter inveſtiganda videretur ratio quam habet finita ſeries Subſecundanorum, Subtertianorum, &c. ad ſeriem totidem horum maximo Æqualium: cur autem hoc non ſperandum ſit, oſtendimus in Scholiis ad Prop. 165.

Et propterea, quod in aliis Arithmetices negotiis fieri ſolet; illud & hic faciendum erit: nempe, ubi ad [illegible] aliquid pervenitur, quod quidem fieri ſupponendum eſt, nec tamen actu fieri poteſt; excogitant modum aliquem exprimendi id quod fieri ſupponitur utut factum non ſit.

Atque hoc quidem in Arithmeticis operationibus omnibus reſolutoriis uſu venit. v. g. In Subductione; ſi proponitur numerus major ex minori auferendus, puta 3 ex 2, vel 2 ex 1; quoniam id actu præſtari non poteſt, excogitantur numeri negativi quibus exprimatur ejuſmodi ſuppoſititia ſubductio, puta, $2-3$, vel $1-2$, vel -1.

In diviſione; ſi proponatur numerus per alium dividendus qui ipſum non metitur, puta 3 per 2; cum hoc actu præſtari non poſſit, inventus eſt modus ejuſmodi ſuppoſititiam diviſionem indicandi ad hanc formam $\frac{3}{2}$ vel $1\frac{1}{2}$.

In extractione Radicum; si proponatur numerus resolvendus qui non sit sui generis vere figuratus; verbi gratia, si quæratur radix quadratica numeri 12; quoniam radix illa non potest ullis numeris sive integris sive fractis exponi, ideo inventa est methodus ejusmodi Radicem supposititiam utcunque indicandi ad hanc formam, $\surd\, 12$, vel $2\surd\, 3$.

Pariter, in Progressione Geometrica, puta 3, 6, 12, &c. Si quæratur terminus novus inter 3 & 6 interponendus, dicetur ille $3\surd\, 2$, vel $\surd\, 18$, vel $\surd : 3 \times 6 :$ vel forte (quod tantundem valet) $\surd : 2 \times 9 :$ quod idem est atque explicatius dicere, *terminus medius inter* 3 & 6 *in progressione* 3, 6, 12, &c. aut *inter* 2 *&* 9 *in progressione* 2, 9, $40\tfrac{1}{2}$ &c. Ita si inter 3, 6, interponendi essent duo medii Geometrici, esset eorum prior $\surd c : 3 \times 3 \times 6 :$ vel $\surd c\, 54$ vel potius $3 \surd c\, 2$, (nempe 3 ducti in radicem cubicam communis multiplicatoris 2,) & sic in cæteris.

Si autem Progressio Geometrica, quæ supponitur fieri ex continua multiplicatione primi termini in numeros quotlibet invicem æquales, (puta 3, 6, 12, 24, &c. ex continua multiplicatione $3 \times 2 \times 2 \times 2$ &c.) non semper admittat terminos intermedios rationales: non mirandum est si neque illud contingat in progressione facta ex termini primi continua multiplicatione in quotlibet succedentes numeros inæquales, sive crescentes sive decrescentes; (puta 1, 2, 6, 24, &c. ex continue multiplicatis $1 \times 2 \times 3 \times 4$. &c. vel 1, $\tfrac{3}{2}$, $\tfrac{15}{8}$, $\tfrac{105}{48}$, &c. ex continue multiplicatis $1 \times \tfrac{3}{2} \times \tfrac{5}{4} \times \tfrac{7}{6}$, &c.

Quoties autem hoc contingit, cum illud veris numeris designari non possit, (& ne quidem solis radicibus surdis dictis,) quærendus erit modus aliquis id ipsum utcunque exprimendi. Si igitur ut $\surd : 3 \times 6 :$ significat *terminum medium inter* 3 *&* 6 *in progressione Geometrica æquabili* 3, 6, 12, &c. (continue multiplicando $3 \times 2 \times 2$ &c.) ita $\sqcap : 1 \mid \tfrac{3}{2} :$ significet *terminum medium inter* 1 *&* $\tfrac{3}{2}$ *in progressione Hyper-geometrica decrescente* 1, $\tfrac{3}{2}$, $\tfrac{15}{8}$, &c. (continue multiplicando $1 \times \tfrac{3}{2} \times \tfrac{5}{4}$ &c.) erit $\square = \sqcap : 1 \mid \tfrac{3}{2} :$ Et propterea *circulus est ad quadratum diametri, ut* 1 *ad* $\sqcap : 1 \mid \tfrac{3}{2}$. Quæ quidem erit Vera Circuli Quadratura in numeris, quatenus ipsa numerorum natura patitur, explicata.

Et quidem, sicut in progressione Geometrica æquabili, 3, 12, 48, &c. quanquam qui terminum inter 3 & 12 intermedium dicit $\surd : 3 \times 12 :$ non dicendus erit rem satis explicasse, quoniam terminus ille explicatius dici possit 6, (est enim $\surd : 3 \times 12 : = \surd\, 36 = 6 :$) attamen qui inter 3 & 6 (in progressione 3, 6, 12, &c.) terminum assignat intermedium $\surd : 3 \times 6 :$ (vel saltem $\surd\, 18$, aut $3 \surd\, 2$,) rem satis explicasse dicendus erit, quoniam non potest vero numero assignari: Ita qui in progressione 1, $\tfrac{15}{8}$, $\tfrac{945}{384}$, &c. terminum inter 1 & $\tfrac{15}{8}$ intermedium dicit $\sqcap : 1 \mid \tfrac{15}{8} :$ non satis explicate rem tradit, dicere enim potuisset $\tfrac{3}{2}$; At qui inter 1 & $\tfrac{3}{2}$ medium terminum assignat $\sqcap : 1 \mid \tfrac{3}{2} :$ satis rem explicasse dicendus est, cum iste terminus non possit veris numeris exprimi: adeoque sufficit si utcunque indicetur.

Atque insuper, ut $\surd : 3 \times 6 :$ (in progressione 3, 6, 12, &c.) vel $\surd\, 18$, vel $3\surd 2$, quamvis veris numeris explicari non potest accurate, potest tamen quam proxime designari; (puta major quam 4|24, minor tamen quam 4|25; item major quam 4|2426, minor quam 4|2427; item major quam 4|242639, minor quam 4|242640; & sic deinceps,) ita & numerus $\square = \sqcap : 1 \mid \tfrac{3}{2} :$ designari potest veris numeris quam proxime, licet non accurate; puta major quam 1|27, minor tamen quam 1|28; item major quam 1|2732, & minor quam 1|2733; item major quam 1|273239, & minor quam 1|273240; & sic deinceps, prout vel ex tabella nostra (quod sequente propositione ostensurus sum) vel etiam aliunde variis modis colligi potest.

Adeo ut nihil videam cur non ratio Circuli ad Quadratum circumscriptum, (vel etiam Ellipseos ad circumscriptum Parallelogrammum,) nempe ut 1 ad $\square = \sqcap : 1 \mid \tfrac{3}{2} :$ vel $\square = 1 \sqcap \tfrac{3}{2}$. (hoc est, ut 1 ad terminum medium inter 1 & $\tfrac{3}{2}$ in progressione 1, $\tfrac{3}{2}$, $\tfrac{15}{8}$ &c.) æque τεχνικῶς explicari dicenda sit, atque ratio lateris ad diagonium in quadrato, nempe ut 1 ad $1 \surd\, 2$, vel ad $\surd : 1 \times 2 :$ (hoc est, ut 1 ad terminum medium inter 1 & 2 in progressione 1, 2, 4, &c.) nisi quod hæc notatio $\surd\, 2$ vel $\surd : 1 \times 2 :$ jamdiu fuerit recepta (sed quæ aliquando fuit nova;) nostra vero jam primitus introducta, propter novum progressionis genus jam primum (quod sciam) detectum. Sicut autem notatio numeri surdi (puta $\surd\, 2$ &c.) in Arithmeticam introduxit methodum addendi, subducendi, multiplicandi, dividendi, &c. latera surda; ita non erit difficile ejusmodi operationes ad novum hunc nostrum notationis modum applicare; quod tamen præsentis instituti non est. Non ignoro

interim

interim ad hanc ipsam notationem accuratius perficiendam, apponendas esse notæ π distinctiones suas, puta π^2, π^3, π^4, &c. prout indicaverit vel medium unicum, vel primum duorum, trium, &c. sicut & notæ $\surd$ fieri solet, puta $\surd^2$, $\surd^3$, $\surd^4$, &c. prout designat radicem quadraticam, vel cubicam, biquadraticam, &c. hoc est, vel unicum, vel primum duorum, trium, &c. mediorum proportionalium: Item alias apponendas esse distinctiones quæ indicent, an continuæ multiplicationes (in exposita serie interpolanda) vel unitate, vel numero binario, ternario, &c. continue crescant. Verum ea omnia, & siqua sunt similia, remittenda sunt ad accuratiorem hujusce progressionis disquisitionem si illam in Arithmeticam admittendam sentiant Mathematici, (quod quo minus fiat nihil video.) Præsenti sufficit instituto illud quod volumus utcunque indicare, & quod in charactere deficit apertis verbis supplere. Si autem notationis modus ille a nobis excogitatus Mathematicis minus placuerit; ego quam lubentissime illum mutari patiar modo aptiorem ostendant.

Ut ut sit: Ego quidem necesse habeo ut fatear, me nec ejusmodi pro seriebus imparibus quales pro paribus in Tabella, characteres; nec seriarum imparium locos impares, adhuc supplere posse, juxta aliquem (quem adhuc receptum scio) notationis modum; (quanquam eorum ad invicem rationes jam ostenderim.) Et quanquam in superioribus, per avia non raro, & tramites nulli quod sciam antea calcatos perrumpens, insperatos exitus aliquoties invenerim: vix tamen (ob causas jam expositas) ausim sperare, & hic item ex voto omnia successura. Si forsan alius aliquis nostra dehinc premens vestigia eo tandem perveniat quo mihi non datum est pervenire, (nollem enim pro nostri modulo aliorum item omnium ingeniis terminos indicere,) & modos magis accommodos eidem quantitati exprimendæ invenerit, ego neutiquam gravatim feram. Mathematicis interim haud ingratum fore autumo me novam aliquam nec (si quid ego judico) prorsus contemnendam, obscuro satis de Circuli Quadratura problemati, lucem præbuisse; eamque eatenus numeris explicasse quatenus ipsa numerorum natura ferat.

Quod autem jam invenimus, libet etiam, in sequentibus aliquot propositionibus, mutata aliquantulum forma proponere. Et primo quidem qui id possit numeris absolutis quam proxime designari, & deinde etiam lineis rectis.

PROP. CXCI.

Problema.

PRopositum sit inquirere, quantus sit terminus □ (tabellæ Prop. 189.) in numeris absolutis quam proxime.

Quo facilius res succedat, progressionis (ibidem repertæ) termini

$$\tfrac{1}{2}\square.\ 1.\ \square.\ \tfrac{3}{2}.\ \tfrac{4}{3}\square.\ \frac{3\times5}{2\times4}.\ \frac{4\times6}{3\times5}\square.\ \frac{3\times5\times7}{2\times4\times6}.\ \&c.$$

dicantur, $\alpha.\ a.\ \beta.\ b.\ \gamma.\ c.\ \delta.\ d.$ &c.

Est autem $1.2::\alpha.\beta$. Et $2.3::a.b$. Et $3.4::\beta.\gamma$. Et $4.5::b.c$. Et $5.6::\gamma.\delta$. Et $6.7::c.d$.

Hoc est, $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2}{1}$, $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$, $\frac{\gamma}{\beta}=\frac{4}{3}$, $\frac{c}{b}=\frac{5}{4}$, $\frac{\delta}{\gamma}=\frac{6}{5}$, $\frac{d}{c}=\frac{7}{6}$, &c.

Ideoque (cum rationes continue multiplicantes perpetuo decrescant,) erit

$$\frac{\beta}{a}\left\{\begin{array}{l}\text{minor duarum}\left\{\frac{a}{\alpha}\times\frac{\beta}{a}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2}{1}\right.\\ \text{major duarum}\left\{\frac{\beta}{a}\times\frac{b}{\beta}=\frac{b}{a}=\frac{3}{2}\right.\end{array}\right\}\text{Ideoque}\left\{\begin{array}{l}\text{minor quam, }\surd\frac{2}{1}=\surd 1\frac{1}{1}.\\ \text{major quam, }\surd\frac{3}{2}=\surd 1\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

$$\text{Et propterea }\beta=a\times\frac{\beta}{a}=\square,\left\{\begin{array}{l}\text{minor quam, }1\surd 2=1\surd 1\frac{1}{1}.\\ \text{major quam, }1\surd\frac{3}{2}=1\surd 1\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Item $\frac{\gamma}{b}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{minor duarum } \left\{\frac{b}{\beta} \times \frac{\gamma}{b} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{4}{3}\right. \\ \text{major duarum } \left\{\frac{\gamma}{b} \times \frac{c}{\gamma} = \frac{c}{b} = \frac{5}{4}.\right.\end{array}\right\}$ Ideoque $\left\{\begin{array}{l}\text{minor quam, } \sqrt{\tfrac{4}{3}} = \sqrt{1\tfrac{1}{3}}. \\ \text{major quam, } \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \sqrt{1\tfrac{1}{4}}.\end{array}\right.$

Et propterea $b \times \frac{\gamma}{b} = \gamma = \frac{9}{8}\square$, $\left\{\begin{array}{l}\text{minor quam } \frac{9}{8} \times \sqrt{1\tfrac{1}{3}}. \\ \text{major quam } \frac{9}{8} \times \sqrt{1\tfrac{1}{4}}.\end{array}\right.$

Hoc est, $\square$ minor quam $\frac{3 \times 3}{2 \times 4} \times \sqrt{1\tfrac{1}{3}}$. major quam $\frac{3 \times 3}{2 \times 4} \times \sqrt{1\tfrac{1}{4}}$.

Et (pari ratione) erit $\delta = c \times \frac{\delta}{c} = \frac{4 \times 6}{3 \times 5}\square$, $\left\{\begin{array}{l}\text{minor quam } \frac{3 \times 5}{2 \times 4} \times \sqrt{1\tfrac{1}{5}}. \\ \text{major quam } \frac{3 \times 5}{2 \times 4} \times \sqrt{1\tfrac{1}{6}}.\end{array}\right.$

Hoc est, $\square$ minor quam $\frac{3 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 4 \times 4 \times 6}\sqrt{1\tfrac{1}{5}}$. major quam $\frac{3 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 4 \times 4 \times 6}\sqrt{1\tfrac{1}{6}}$.

Et (continuata ejusmodi operatione juxta Tabellæ leges) invenietur

$$\square \left\{\begin{array}{l}\text{minor quam } \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11 \times 13 \times 13}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 12 \times 12 \times 14} \times \sqrt{1\tfrac{1}{13}}. \\ \text{major quam } \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11 \times 13 \times 13}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 12 \times 12 \times 14} \times \sqrt{1\tfrac{1}{14}}.\end{array}\right.$$

Et sic deinceps quousque libet. Ita nempe ut fractionis Numerator fiat continue multiplicando numeros impares 3, 5, 7, &c. bis positos; Denominator vero, continue multiplicando numeros pares, 2, 4, 6, &c. bis item positos, exceptis primo & ultimo, qui semel ponuntur: Et tota denique ratio seu fractio, sic facta, ducatur in Radicem-quadraticam Unitatis aliquota-parte sui auctæ; ea nempe quæ denominatorem habet eum qui est ultimus numerorum, continue multiplicatorum, imparium, si quæramus numerum justo majorem, vel parium, si justo minorem.

Atque hoc pacto eousque tandem pervenietur donec majoris & minoris differentia evadat quavis assignata minor; (quæ propterea, si supponatur in infinitum continuanda operatio, tandem evanitura est.) Quod quidem, si opus sit, sic demonstrabitur.

Numerorum, ita ut jam dictum est, continue multiplicatorum, parium maximus (nempe, ex Denominatoris factoribus ultimus) dicatur z; adeoque imparium maximus (nempe, ultimus ex factoribus Numeratoris,) erit $z - 1$, (quippe qui ab isto unitate deficit.) Erit igitur (propter eundem utrobique multiplicatorem compositum) numerus justo major ad numerum justo minorem ut $\sqrt{1\frac{1}{z-1}}$ ad $\sqrt{1\frac{1}{z}}$, (nempe, ut terminalis numerus surdus in illo ad terminalem numerum surdum in hoc,) hoc est, ut $\sqrt{\frac{z}{z-1}}$ ad $\sqrt{\frac{z+1}{z}}$ hoc est, ut $\sqrt{\frac{z^2}{z-1}}$ ad $\sqrt{:z+1}$: hoc est, ut $\sqrt{z^2} = z$ ad $\sqrt{:z^2 - 1}$. Fieri autem potest (aucta nempe, quantum opus est, quantitate z) ut differentia radicum $\sqrt{z^2}$ & $\sqrt{:z^2 - 1}$: nempe $z - \sqrt{:z^2 - 1}$: minor evadat quavis assignanda, (ut notum est, & alibi etiam à nobis dictum ad prop. 39. Con. Sect.) Et propterea numerus justo major excedat numerum justo minorem, secundum eam rationem quæ minor sit quavis assignata. Quod erat ostendendum.

Cum autem, ut ex dictis patet, aucto in infinitum numero z, numerus justo major numerum justo minorem ea ratione superet quæ minor sit quavis assignata: erit

erit eorum ab invicem differentia (& propterea utriusvis à justo) infinite parva, hoc est, nulla.

Porro; Quoniam, numero z sic in infinitum aucto, illa Unitati adjuncta pars sui aliquota, futura est infinite parva; eritque, sive $\sqrt{1\frac{1}{z}}$, sive $\sqrt{1\frac{1}{z-1}}$, tantundem atque $\sqrt{1}$, sive 1, (propter evanescentem partem infinite parvam,) quæ multiplicando nihil mutat: Dicimus, fractionem illam $\frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times \&c.}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times \&c.}$ seu $\frac{9 \times 25 \times 49 \times 81 \ \&c.}{8 \times 24 \times 48 \times 80 \ \&c.}$ in infinitum continuatam, esse ipsissimum quæsitum numerum □ præcise; ad quem ita se habet 1, ut Circulus ad Quadratum Diametri: Vel, (si id magis placeat,) ut est istius fractionis Denominator ad Numeratorem, sic esse dicimus Circulum ad Diametri Quadratum: Et, ut Numerator ille ad Denominatorem, sic Quadratum illud ad Circulum; Nempe ut factum ex continue multiplicatis $9 \times 25 \times 49 \times 81$ &c. (quadratis numerorum imparium,) ad factum ex $8 \times 24 \times 48 \times 80$ &c. (eisdem quadratis unitate minutis) in infinitum continuatis.

Si quis autem curiosius inquirat, quousque continuanda erit illa multiplicatio continua, ut tandem ad differentiam datam, sive ipsa minorem perveniatur: Nempe ut numerus justo major, numerum justo minorem, ipsius parte quamlibet exigua (vel ne illa quidem) superet; Id hoc modo investigabitur.

Quantitas major dicatur m, minor n, sitque earum differentia, istius pars quantumvis exigua; puta $\frac{a}{b}m = m - n$; & quæratur quousque continuanda erit operatio, hoc est, quis futurus est numerus z multiplicatorum (simplicium) maximus, ut illa differentia (vel saltem ipsa minor) prodeat.

Quoniam igitur $m - n = \frac{a}{b}m$, erit $n = m - \frac{a}{b}m$; & $m . n :: m . m - \frac{a}{b}m :: \frac{b}{b}m . \frac{b-a}{b}m :: b . b - a :: z . \sqrt{:z^2 - 1}$. (per modo demonstrata.) Ideoque $b\sqrt{:z^2 - 1:} = bz - az$. Et (utrinque quadrando) $b^2z^2 - b^2 = b^2z^2 + a^2z^2 - 2abz^2$. Atque (delendo utrinque b^2z^2, & reliqua transponendo,) $2abz^2 - a^2z^2 = b^2$. Et denique (utrinque dividendo) $z^2 = \frac{b^2}{2ab - a^2}$. Hujus igitur numeri radix quadratica, (si fuerit numerus par,) vel saltem, (si vel fractus vel surdus sit vel numerus impar,) par numerus illa radice proxime major, futurus est multiplicatorum maximus, ut assignata differentia, vel ipsa saltem minor, proveniat. Quod erat investigandum.

Idem Aliter.

Post hanc autem nostram, ipsius quantitatis □ designationem; libet etiam aliam subjungere, quam à Nobilissimo Viro, atque acutissimo simul Geometra, Dom. Guliel. Vicecom. & Barone *Brouncker*, accepi.

Cum illi progressionum aliquot mearum proposuerim, & qua lege procederent indicaverim, id interim rogans, ut qua forma quantitatem illam commode designandam putaverit, indicaret; Nobilissimus Vir ille, re apud se perpensa, methodo item Infinitorum sibi peculiari quantitatem ad hanc formam commodissime designandam judicavit.

$$□ = 1\frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2}\frac{49}{2}\frac{81}{2} \ \&c.$$

Nempe si unitati adjungatur fractio, quæ denominatorem habeat continue fractum; ea lege, ut particularium fractionum Numeratores sint 1, 9, 25, &c. numeri quadratici imparium 1, 3, 5, &c. Denominator vero ubique 2 cum adjuncta fractione, & sic in infinitum. Hoc simul addito, ut, ubicunque tandem placeat consistere; pro ultimo numero 2 cum fractione deinceps insecutura, ponatur horum aliquis (prout locus ubi consistitur postulaverit) 3, 5, 7, 9, &c. (deinceps ab 1, numero integro, Arithmetice proportionalium;) nempe si in primo loco sistatur, 3; si in secundo,

 5;

1. justo minor.

$1\frac{1}{2}$. justo major.

$1\frac{1}{2}\frac{9}{2}$. justo minor.

$1\frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2}$. major.

$1\frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2}\frac{49}{2}$. minor.

5; si in tertio, 7; & sic deinceps; posito numeri qui locum denominat duplo unitate aucto. Atque hoc pacto, si in fractionis loco impari sistatur, prodibit numerus justo major; sin pari, justo minor. Quo longius autem procedatur eo propius utrinque ad numerum justum acceditur.

Atque ad eandem formam numeros reliquos tabellæ nostræ quæsitos designavit; aliasque ex progressionibus nostris, iis in exposita tabella similes, interpolavit. Totum vero illius methodi processum aperire, longius esset quam ut hic inseratur. Sperabam autem aliquando fore ut id ipsum ab illo in formam digestum publice exhiberetur.

SCHOLIUM.

Quum vero Nobilissimo Viro difficilius persuasum iri video ut illud ipse suscipere velit: conabor ego rem illam ad ipsius mentem, quam possim proxime, breviter exhibere.

Animadvertit siquidem Nobilissimus Vir, numeros duos impares continue proximos, si invicem ducantur, rectangulum facere, quod quadrato intermedii numeri paris sit unitate minus (puta $1 \times 3 = 3 = 4 - 1 = Q2 - 1$. $3 \times 5 = 15 = 16 - 1 = Q4 - 1$. &c.) Et similiter duos pares proxime positos rectangulum facere quod unitate minus sit quam quadratum intermedii numeri imparis, (puta $0 \times 2 = 0 = 1 - 1 = Q1 = 1$. $2 \times 4 = 8 = 9 - 1 = Q3 - 1$. $4 \times 6 = 24 = 25 - 1 = Q5 - 1$. &c.) Quærebat igitur qua ratione augendi erant factores, ut prodirent rectangula, non quadratis illis unitate minutis, sed ipsis quadratis æqualia. Invenit autem id fieri posse, si utrique factores fractione augeantur, quæ denominatorem haberet continue fractum in infinitum, ad eam formam quam superius exhibuimus: Nempe ut particularium fractionum Numeratores sint quadrata numerorum imparium, Denominator vero ubique integri duplus fractione auctus in infinitum. Ad hanc formam, quousque libet continuandam.

$1 = Q1$ $9 = Q3$ $25 = Q5$ $49 = Q7$ $81 = Q9$

$0\frac{1}{0}\frac{9}{0}\frac{25}{0}$ &c. $2\frac{1}{4}\frac{9}{4}\frac{25}{4}$ &c. $4\frac{1}{8}\frac{9}{8}\frac{25}{8}$ &c. $6\frac{1}{12}\frac{9}{12}\frac{25}{12}$ &c. $8\frac{1}{16}\frac{9}{16}\frac{25}{16}$ &c. $10\frac{1}{20}\frac{9}{20}\frac{25}{20}$ &c.

$1\frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2}$ &c. $3\frac{1}{6}\frac{9}{6}\frac{25}{6}$ &c. $5\frac{1}{10}\frac{9}{10}\frac{25}{10}$ &c. $7\frac{1}{14}\frac{9}{14}\frac{25}{14}$ &c. $9\frac{1}{18}\frac{9}{18}\frac{25}{18}$ &c. $11\frac{1}{22}\frac{9}{22}\frac{25}{22}$ &c.

$4 = Q2$ $16 = Q4$ $36 = Q6$ $64 = Q8$ $100 = Q10$

Factores autem illi sic constituti, quantumlibet continuati, (modo ne in infinitum,) rectangulum facient debito quadrato vel minus, si numerus fractionum integro adjunctarum sit par; vel majus, si impar; ita tamen ut quo longius procedatur eo propius ad quadratum debitum accedat. Quod hac demonstratione confirmatur.

Esto, ex debitis factoribus quibusvis, prioris numerus integer F, adeoque posterioris $F + 2$; numerus igitur interjectus (quod latus est quadrati) $F + 1$. Eorum rectangulum $Fq + 2F$ minus est quam hujus quadratum $Fq + 2F + 1$.

Jam adjungatur utrique factori fractio una; Factores igitur

$F\frac{1}{2F}$, $F + 2 + \frac{1}{2F+4}$, constituent rectangulum

$\frac{4Fqq + 16Fc + 20Fq + 8F + 9}{4Fq + 8F}$, quod majus erit quam quadratum

$Fq + 2F + 1 = \frac{4Fqq + 16Fc + 20Fq + 8F}{4Fq + 8F}$.

Adjungantur deinde fractiones binæ; Factores emergentes

$F\frac{1}{2F}\frac{9}{2F}$, $F + 2 + \frac{1}{2F + 4 + \frac{9}{2F+4}}$, constituent rectangulum

4Fc +

$$\frac{4Fc+11F}{4Fq+9} \times \frac{4Fc+24Fq+59F+54}{4Fq+16F+25} =$$
$$\frac{16Fcc+96Fcq+280Fqq+480Fc+649Fq+594F}{16Fqq+64Fc+136Fq+144F+225}$$

quod minus est quam quadratum $Fq+2F+1 =$

$$\frac{16Fcc+96Fcq+280Fqq+480Fc+649Fq+594F+225}{16Fqq+64Fc+136Fq+144F+225}$$

Et sic quousque procedatur, prodibit rectangulum quod erit nunc minus nunc majus (alternis vicibus) quam expositum quadratum, (quæ tamen differentia perpetuo minuitur, ut patet,) quod erat demonstrandum.

His autem sic inventis; poterunt illa ad series nostras ita accommodari, ut inde innotescant termini in tabella desiderati juxta hunc notationis modum designandi.

Exempli gratia; (posito A pro primo termino cujusvis seriei.) Tabellæ nostræ series prima componitur, (ut supra ostensum est) in locis imparibus, ex continua multiplicatione. $A \times \frac{0}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7}$ &c. vel $A \times \frac{0}{2} \times \frac{4}{6} \times \frac{8}{10} \times \frac{12}{14}$ &c. Et in locis paribus $1 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ &c. vel $1 \times \frac{2}{4} \times \frac{6}{8} \times \frac{10}{12} \times \frac{14}{16}$ &c. Hoc est

```
     0×2)Q0(0/2          4×6)Q4(4/6          8×10)Q8(8/10
  ⏞‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏞  ⏞‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏞   ⏞‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏞
   −1 1/2 9/2   +1 1/2 9/2+   3 1/6 9/6+   5 1/10 9/10+   7 1/14 9/14+   9 1/18 9/18+   11 1/22 9/22+
A× ────────── × ──────────── × ────────── × ──────────── × ──────────── × ──────────── × ───────────── ×&c.
       0              2             4             6              8             10              12
                  ⏟‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏟            ⏟‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏟            ⏟‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏟
                   2×4)Q2(2/4                  6×8)Q6(6/8                 10×12)Q10(10/12
```

Vel etiam, (quod eodem plane recidit,) ad hanc formam.

```
     Q2)0×2(0/2          Q6)4×6(4/6           Q10)8×10(8/10
     ⏞‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏞         ⏞‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏞          ⏞‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏞
      0         2        4          6          8          10          12
A× ──────── × ──────── × ──────── × ──────── × ──────── × ──────── × ──────── ×&c.
   1 1/2 9/2+  3 1/6 9/6+  5 1/10 9/10+  7 1/14 9/14+  9 1/18 9/18+  11 1/22 9/22+  13 1/26 9/26+
               ⏟‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏟           ⏟‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏟           ⏟‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏟
                Q4)2×4(2/4            Q8)6×8(6/8             Q12)10×12(10/12
```

Utrovis modo, rationes quibus numeri vel paribus vel imparibus locis ponendi constituuntur, resolvi possunt in binas (ut patet) quibus constituantur numeri locis continuis ponendi; numeris nempe locorum tum parium tum imparium in unam seriem interpolatione mutua redactis.

Similiter in serie tertia, cujus numeri in locis imparibus positi, constituuntur ex continue multiplicatis $A \times \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{7}$ &c. vel $A \times \frac{4}{2} \times \frac{8}{6} \times \frac{12}{10} \times \frac{16}{14}$ &c. Et locis paribus $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \frac{9}{8}$ &c. vel $1 \times \frac{6}{4} \times \frac{10}{8} \times \frac{14}{12} \times \frac{18}{16}$ &c. Hoc est

```
        2×4)Q4(4/2          6×8)Q8(8/6           10×12)Q12(12/10
      ⏞‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏞    ⏞‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏞    ⏞‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏞
     3 1/6 9/6+   5 1/10 9/10+   7 1/14 9/14+   9 1/18 9/18+   11 1/22 9/22+   13 1/26 9/26+   15 1/30 9/30+
A× ─────────── × ──────────── × ──────────── × ──────────── × ───────────── × ───────────── × ───────────── ×&c.
        2              4              6              8              10              12              14
                  ⏟‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏟               ⏟‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏟                 ⏟‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾⏟
                   4×6)Q6(6/4                     8×10)Q10(10/8                 12×14)Q14(14/12
```

Atque hæc quidem abunde sufficiant ad omnes tabellæ nostræ numeros complendos, cum jam supra ostensum sit prop. 188. uno aliquo desideratorum invento reliquos statim innotescere. Si quis tamen cupiat, ut nos seriei primæ & tertiæ rationes resolvimus, ita & reliquarum serierum rationes item resolutas habere: poterit quidem & illud fieri, ita tamen ut in serie quarta (hoc est, post unitatum seriem secunda) erit rationum prodeuntium quælibet bimembris, in quinta trimembris, & sic deinceps.

Nempe,

Nempe, in quarta, ad hanc formam.

$$\overbrace{\frac{3\frac{1}{6}\frac{9}{6}{}_4 \times 5\frac{1}{10}\frac{9}{10}{}_4}{2\times 4} \times \frac{5\frac{1}{10}\frac{9}{10}{}_4 \times 7\frac{1}{14}\frac{9}{14}{}_4}{4\times 6}}^{2\times4\times4\times6)\,Q:\,4\times6:\,(\frac{6}{2}=\frac{3}{1}} \times \overbrace{\frac{7\frac{1}{14}\frac{9}{14}{}_4 \times 9\frac{1}{18}\frac{9}{18}{}_4}{6\times 8} \times \frac{9\frac{1}{18}\frac{9}{18}{}_4 \times 11\frac{1}{22}\frac{9}{22}{}_4}{8\times 10}}^{6\times8\times8\times10)\,Q:\,8\times10:\,(\frac{10}{6}=\frac{5}{3}} \&c.$$

$$\underbrace{4\times 6 \quad 6\times 8}_{4\times6\times6\times8)\,Q:\,6\times8:\,(\frac{8}{4}=\frac{4}{2}}$$

In ferie quinta, ad hanc formam.

$$A\times\overbrace{\frac{3\frac{1}{6}\frac{9}{6}{}_4 \times 5\frac{1}{10}\frac{9}{10}{}_4 \times 7\frac{1}{14}\frac{9}{14}{}_4}{2\times4\times6}}^{2\times4\times6\times4\times6\times8)\,Q:\,4\times6\times8:\,(\frac{8}{2}=\frac{4}{1}} \times \frac{5\frac{1}{10}\frac{9}{10}{}_4 \times 7\frac{1}{14}\frac{9}{14}{}_4 \times 9\frac{1}{18}\frac{9}{18}{}_4}{\underbrace{4\times6\times8}_{4\times6\times8\times6\times8\times10)\,Q:\,6\times8\times10:\,(\frac{10}{4}=\frac{5}{2}}} \&c.$$

Et fimiliter in fequentibus feriebus. Nempe fingulæ rationes feriei quartæ, quintæ, fextæ, &c. componuntur ex feriei tertiæ rationibus binis, ternis, quaternis, &c.

Cum autem in fingulis his rationum jam inventarum feriebus (ex quarum continuo ductu conftituuntur Tabellæ noftræ numeri) commodum videatur ut in variis formis exhiberi poffint, & (prout opus videbitur) ab una in aliam transformari, quo melius (aliarum fractionum inftar) operationes Arithmeticas fufcipiant: Poteft & id commode fieri per ea quæ in hujus Scholii initio tradita funt. Nempe, refolutis (ut ibidem docetur) quadratis numerorum parium in rectangulorum illis æqualium latera illic indicata, notentur fingula (ob commodiorem proceffum) fuis fymbolis, hoc modo,

Q2	Q4	Q6	Q8	Q10	Q12	Q14	Q16	
$\square$	B	C	D	E	F	G	H	I
$1\frac{1}{2}\frac{9}{2}{}_4$	$3\frac{1}{6}\frac{9}{6}{}_4$	$5\frac{1}{10}\frac{9}{10}{}_4$	$7\frac{1}{14}\frac{9}{14}{}_4$	$9\frac{1}{18}\frac{9}{18}{}_4$	$11\frac{1}{22}\frac{9}{22}{}_4$	$13\frac{1}{26}\frac{9}{26}{}_4$	$15\frac{1}{30}\frac{9}{30}{}_4$	$17\frac{1}{34}\frac{9}{34}{}_4$
		$\frac{4}{1}\square$	$\frac{9}{4}B$	$\frac{16}{9}C$	$\frac{25}{16}D$	$\frac{36}{25}E$	$\frac{49}{36}F$	$\frac{64}{49}G$
				$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}\square$	$\frac{9}{4}\times\frac{25}{16}B$	$\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}C$	$\frac{25}{16}\times\frac{49}{36}D$	$\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}E$
						$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}\square$	$\frac{9}{4}\times\frac{25}{16}\times\frac{49}{36}B$	$\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}C$
								$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}\square$

Cum enim fit $\square B = Q2 = 4$, & $BC = Q4 = 16$:
Erit $4.\,16 :: \square B.\,BC :: \square.\,C = \frac{16}{4}\square = 4\square$;
Et $\frac{1}{4}C = \square$. Item $\square\,)4(\,B$, & $B\,)4(\,\square$.
Et fimiliter in locis reliquis.

Adeoque cum rationes nuper inventæ, fint in ferie

$$\text{Prima } A\times\frac{0}{1\frac{1}{2}\frac{9}{2}{}_4}\times\frac{2}{3\frac{1}{6}\frac{9}{6}{}_4}\times\frac{4}{5\frac{1}{10}\frac{9}{10}{}_4}\times\frac{6}{7\frac{1}{14}\frac{9}{14}{}_4}\times\frac{8}{9\frac{1}{18}\frac{9}{18}{}_4}\times\frac{10}{11\frac{1}{22}\frac{9}{22}{}_4}\times\frac{12}{13\frac{1}{26}\frac{9}{26}{}_4}\times\&c.$$

Hoc eft $A\times\frac{0}{\square}\times\frac{2}{B}\times\frac{4}{C}\times\frac{6}{D}\times\frac{8}{E}\times\frac{10}{F}\times\frac{12}{G}\times\&c.$

Secunda, $A\times\frac{2}{2}\times\frac{4}{4}\times\frac{6}{6}\times\frac{8}{8}\times\frac{10}{10}\times\frac{12}{12}\times\&c.$

Tertia,

Tertia, $A \times \frac{B}{2} \times \frac{C}{4} \times \frac{D}{6} \times \frac{E}{8} \times \frac{F}{10} \times \frac{G}{12} \times \frac{H}{14} \times$ &c.

Quarta, $A \times \frac{BC}{2 \times 4} \times \frac{CD}{4 \times 6} \times \frac{DE}{6 \times 8} \times \frac{EF}{8 \times 10} \times \frac{FG}{10 \times 12} \times \frac{GH}{12 \times 14} \times \frac{HI}{14 \times 16} \times$ &c.

Quinta, $A \times \frac{BCD}{2 \times 4 \times 6} \times \frac{CDE}{4 \times 6 \times 8} \times \frac{DEF}{6 \times 8 \times 10} \times \frac{EFG}{8 \times 10 \times 12} \times \frac{FGH}{10 \times 12 \times 14} \times \frac{GHI}{12 \times 14 \times 16} \times$ &c.

Et ſic in cæteris: (ubi tamen intelligendum eſt A non eandem eſſe ubique quantitatem, ſed in ſerie prima $A = \infty$ vel potius $\infty \square$, in ſecunda $A = 1 = \infty \square \times \frac{0}{\square}$, in tertia $A = \frac{1}{2}\square = 1 \times \frac{2}{B}$, in quarta $A = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\square \times \frac{1}{\square}$, in quinta $A = \frac{1}{3}\square = \frac{1}{3} \times \frac{6}{D} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{5}C = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\square$. Et ſic deinceps. Nam ſeries prima erecta, eadem eſt cum prima tranſverſa; (ut ſupra liquet,) Poſſunt illæ, per æquipollentiam modo demonſtratam, ſic exhiberi, ut non niſi uno aliquo numerorum horum interminabilium opus ſit in ſingulis exprimendis; & ſæpe quidem ne uno. Exempli gratia, In ſerie quinta, ratio Secunda $\frac{CDE}{4 \times 6 \times 8} = \frac{36B}{4 \times 6 \times 8} = \frac{64C}{4 \times 6 \times 8} = \frac{4\square}{3} = \frac{16}{3B} = \frac{C}{3} = \frac{12}{D} = \frac{3E}{16}$ &c. hac igitur ratione, quolibet modorum illorum deſignata, ducta in iſtius ſeriei terminum ſecundum 1, (in tabella noſtra repertum) habetur terminus tertius, $1 \times \frac{4\square}{3} = \frac{16}{3B} = \frac{C}{3} = \frac{12}{D} = \frac{3E}{16}$ &c.

Tertius autem hic terminus, ductus in rationem ſequentem

$\frac{DEF}{6 \times 8 \times 10} = \frac{64F}{6 \times 8 \times 10} = \frac{100D}{6 \times 8 \times 10} = \frac{900B}{1920} = \frac{15}{8\square} = \frac{15B}{32} = \frac{15}{2C} = \frac{5D}{24} = \frac{40}{3E}$ &c.

exhibebit ejuſdem ſeriei terminum quartum $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, eundem nempe quem exhibet Tabella. (Sed & idem terminus pariter exhibebitur ex ductu ſecundi termini 1, in rationem ex ſecunda & tertia compoſitam.) Atque ad hunc modum licebit ſingulos tabellæ noſtræ terminos indicare, adhibito nonnunquam uno quovis, ſæpius autem ne uno quidem, numerorum iſtorum interminabilium; quorum quidem nos primum, hac nota $\square$ deſignatum, in tabella noſtra adhibuimus.

Eſt igitur ratio Circuli ad Quadratum Diametri, (per jam dicta) $\frac{1}{4}pd.d^2 :: 1.\square = \frac{4}{B} = \frac{C}{4} = \frac{9}{D} = \frac{9E}{64} = \frac{225}{16F} = \frac{25G}{256}$ &c. Et ſimiliter (cum ſit ratio perimetri ad diametrum quadrupla rationis circuli ad quadratum, quia nempe $\frac{1}{4}pd.d^2 :: \frac{1}{4}p.d.$) ratio perimetri ad diametrum $p.d :: 4.\square$: & diametri ad perimetrum $d.p :: \square.4 ::$

$$:: 1.\frac{4}{\square} = B = \frac{16}{C} = \frac{4D}{9} = \frac{256}{9E} = \frac{64F}{225} = \frac{1024}{25G} \text{ \&c.}$$

Nempe ut 1 ad $\left\{ \begin{array}{l} \square : \text{ſic Circulus ad Quadratum Diametri.} \\ B : \text{ſic Circuli Diameter ad Perimetrum.} \end{array} \right.$

Supereſt, ut rationem oſtendam cur in aſſignando valorem quantitatis $\square$, ſuperius dixerim, pro fractionis continue fractæ denominatore ultimo (ubicunque ſiſtendum quis velit) ponendum eſſe, non 2, ſed vel, 3, 5, 7, 9, &c. prout locus ubi conſiſtitur poſtulaverit, (quod non tam neceſſitatis, quam perſpicuitatis cauſa factum eſt.) Quæ quidem ratio, hæc eſt.

Cum ſupponatur (juxta jam tradita) $\square \times B = Q2 = 4$. ſitque $\square = 1\frac{1}{2}\frac{9}{2}$ & $B = 3\frac{1}{6}\frac{9}{6}$. Adeoque ſi numerum $4 = Q2$ dividamus per B (factorem poſteriorem) prodibit $\square$. Si quantitas B imperfecte ſumatur, non prodibit ipſa quantitas $\square$, ſed alia quæ major ſit vel minor, prout B imperfecte ſumpta, ſit ipſa B accurate, minor vel major. Nempe ſi pro diviſore B ſumatur 3, diviſione facta, pro $\square$ prodibit $1\frac{1}{3}$: ſi pro diviſore $3\frac{1}{6}$. prodibit $1\frac{1}{2}\frac{9}{3}$, ſi $3\frac{1}{6}\frac{9}{6}$, prodibit $1\frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{5}$. Et ſic deinceps: ut ex ipſo calculo patebit.

Et ſic in $B = 3\frac{1}{6}\frac{9}{7}$, $C = 5\frac{1}{10}\frac{9}{10}$, $D = 7\frac{1}{14}\frac{9}{14}$ &c. faciendum erit. Nempe in B,

denomi-

denominator ultimus erit unus ex his 5, 7, 9, 11, &c. (is nempe quem locus ubi sistitur postulaverit;) quia 3 (numero integro unde quantitatis B designatio inchoatur) in progressione Arithmetica binario continue crescunt. Et similiter, in C, unus ex his 7, 9, 11, 13, &c. Et, in D, unus ex illis 9, 11, 13, 15, &c. (qui nempe illic a 5, hic a 7, in Arithmetica progressione continua, binario crescunt:) Et in sequentibus similiter: quod ipse calculus indicabit.

Adeoque universaliter; in earum quantitatum qualibet designanda, (quocunque tandem loco sistere libuerit,) pro denominatore ultimo sumendus erit numeri qui fractionum locum denominat duplus numero integro quæ designationem inchoat auctus.

Si quis autem quærat, cur in hoc processu (in denominatore ultimo designando) per factorem posteriorem potius quam priorem divisionem faciamus: Ratio est, quia sic res commodius procedit. Nam uti jam denominatores illi ab inchoante numero integro Arithmetice procedunt crescendo; si per factorem priorem fieret divisio, denominatores illi ab inchoante numero integro retrocederent decrescendo, donec tandem perveniatur ad numeros negativos (qui designationem magis turbabunt) ut experimento facto patebit. Adeoque ad illam legem, si (verbi gratia) designanda sit quantitas F, dividendo Q 10 = 100 per E, denominatores illi sic prodeuntes futuri sunt 9, 7, 5, 3, 1, −1, &c. Si autem ai methodum priorem dividatur Q 12 = 144 per G, fuissent 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, &c. nempe à numero 11 illic decrescendo, hic crescendo: ubi autem hac methodo tota quantitas prodit justa major, illa prodibit etiam justa major, & contra. Unde etiam patet, priorem illam methodum designandi ultimum denominatorem non modo minus turbatam, sed & magis accuratam esse, quam est posterior. Cum enim excessus & defectus sit semper penes ultimam fractionem, (cujus nempe adjectione quantitas quæ prius erat justa major fit justa minor, aut contra,) ubi denominator est major (eodem manente numeratore) fractio minor est, adeoque sive excessus sive defectus minor, quam si denominator ille fuisset major: adeoque denominatorum illorum assumptio per continuum augmentum minuit, at quæ per continuum decrementum auget errorem. Quod quidem eousque verum est, ut ne quidem illa nostra emendatio, quæ per continuum denominatorum incrementum procedit, quicquam adfert commodi (sed incommodi potius ob dictam rationem,) donec eousque procedatur ut denominator ille auctus major sit denominatore communi, (eo nempe qui æquatur duplo inchoantis numeri integri,) nam, donec eo perveniatur, mutatio illa communis denominatoris in denominatorem crescentem, non minuit, sed auget adjunctam illam fractionem, adeoque & errorem.

Hoc unicum adhuc restare videtur; nempe ut ostendam qua lege Fractiones hujusmodi continue fractæ ad fractiones ordinarias commode reducantur.

Cum autem id fieri possit methodo nemini ignota, inchoando à fine, & recedendo donec ad principium tandem deveniatur: Optandum interim videtur, ut id fieri possit inchoando à principio & procedendo quousque libet. Hoc igitur qui fieri possit jam sumus ostensuri.

Esto igitur fractio ejusmodi continue fracta quælibet, sic designata.

$$\frac{a}{\alpha}\ \frac{b}{\beta}\ \frac{c}{\gamma}\ \frac{d}{\delta}\ \frac{e}{\varepsilon}\ \&c.$$

Cum igitur constet, recepta methodo, reductionem institui posse ad hunc modum,

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{a}{\alpha}$$

$$\frac{a}{\alpha}\ \frac{b}{\beta} = \frac{a\beta}{b + \alpha\beta}$$

$$\frac{a}{\alpha}\ \frac{b}{\beta}\ \frac{c}{\gamma} = \frac{ac + a\beta\gamma}{\alpha c + b\gamma + \alpha\beta\gamma}$$

$$\frac{a}{\alpha}\ \frac{b}{\beta}\ \frac{c}{\gamma}\ \frac{d}{\delta} = \frac{a\beta d + ac\delta + a\beta\gamma\delta}{bd + \alpha\beta d + \alpha c\delta + b\gamma\delta + \alpha\beta\gamma\delta}$$

Et

Et sic deinceps, quantum opus erit. Nos inde hanc colligimus regulam, cujus ope à principio reductionem inchoemus quousque libet continuandam;

$$\left.\frac{P}{N_3 \times}\frac{Q}{\frac{N_1}{D_1} : +}\frac{P}{D_3 \times}\frac{Q}{\frac{N_2}{D_2} : =}\frac{Q}{\frac{N_3}{D_3}}\right\}$$

Hoc est; Si (trium continue sequentium fractionum) tam Numerator tertius propositus ducatur in Numeratorem primum jamjam quæsitum, quam Denominator tertius propositus in Numeratorem secundum jamjam quæsitum, aggregatum erit Numerator tertius quæsitus. Et similiter, si tam Numerator tertius propositus ducatur in Denominatorem primum jamjam quæsitum, quam Denominator tertius propositus in Denominatorem secundum jamjam quæsitum, aggregatum erit Denominator quæsitus.

Exemplo res fiet manifesta.

Sit fractio reducenda $\frac{1}{2}\ \frac{9}{2}\ \frac{25}{2}\ \frac{49}{2}\ \frac{81}{11}$

Operatio sic instituetur. Inventa fractione secunda modo usitato; tertia & quæ deinceps sic reperientur.

$\frac{25}{2}$	$\times\ 1 = 25$ $\times\ 2 = 4$	29
$\frac{25}{2}$	$\times\ 2 = 50$ $\times\ 13 = 26$	76
$\frac{49}{2}$	$\times\ 2 = 98$ $\times\ 29 = 58$	156
$\frac{49}{2}$	$\times\ 13 = 637$ $\times\ 76 = 152$	789
$\frac{81}{11}$	$\times\ 29 = 2349$ $\times 156 = 1716$	4065
$\frac{81}{11}$	$\times\ 76 = 6156$ $\times 789 = 8679$	14835

P	Q
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{9}{2}$	$\frac{2}{13} = \frac{1}{2}\ \frac{9}{2}$
$\frac{25}{2}$	$\frac{29}{76} = \frac{1}{2}\ \frac{9}{2}\ \frac{25}{2}$
$\frac{49}{2}$	$\frac{156}{789} = \frac{1}{2}\ \frac{9}{2}\ \frac{25}{2}\ \frac{49}{2}$
$\frac{81}{11}$	$\frac{4065}{14835} = \frac{1}{2}\ \frac{9}{2}\ \frac{25}{2}\ \frac{49}{2}\ \frac{81}{11}$

Et sic deinceps quousque opus erit. Ratio operationis ex jam dictis p…

Siquis autem adhuc miretur, unde factum sit quod fractiones hæ continue fractæ, (prout hic vel illic cuiquam sistere placuerit) sint alternatim nunc majores nunc minores quantitate debita: hujus rei causam sic breviter accipiat. Cum certum sit numerum integrum sine ulla adjuncta fractione justo minorem esse; fractio prima, huic integro adjuncta, quantitatem auget: sed eo minus auget quo ipsa minor fuerit. Hæc igitur prima fractio quantitatem auget, & quidem eousque ut jam, quæ fuerat justa minor, fiat justa major. Hujus autem fractionis, eodem manente numeratore, si denominator augeatur, (quod fit adjecta fractione secunda,) fractio prima, adeoque & tota quantitas, adjectione secundæ minuitur. Hæc autem diminutio eo minor erit, (adeoque & tota quantitas major,) quo ipsius secundæ fractionis (manente numeratore) denominator augetur; quod fit adjectione tertiæ fractionis. Tertia igitur fractio secundam minuit, adeoque primam auget, ut & totam igitur quantitatem. Et similiter in sequentibus. Puta quartæ adjectio minuit tertiam, hoc est, auget secundam, adeoque minuit primam, totamque quantitatem. Quinta minuit quartam, adeoque auget tertiam, minuit secundam, augetque primam totamque quantitatem. Adeoque fractionum adjectio in locis imparibus auget, in paribus minuit quantitatem: Quod non de his tantum, sed de quibusvis aliis fractionibus ita (quoad denominatores) continue fractis, intelligendum erit.

Atque hactenus Nobilissimi Viri mentem, quanta potui brevitate simul atque perspicuitate exposui; quæque de ipsius methodo dicenda habui breviter indicavi.

PROP. CXCII.

Theorema.

SI sit æquabilis Curva (non hinc inde subsultans) V C, cujus Axis V X, & Tangens in vertice V T; unde ductis ad curvam rectis axi parallelis, & ab invicem æqualibus distantiis remotis, harum Secunda, Quarta, Sexta, Octava, &c. (in locis paribus,) sint ut 1, 6, 30, 140, &c. (qui numeri fiunt ex continua multiplicatione horum, $1 \times \frac{6}{1} \times \frac{10}{2} \times \frac{14}{3} \times \frac{18}{4}$, &c.) Erit, ut Secunda ad Tertiam (hoc est, ut 1 ad numerum ipsis 1, 6, interponendum,) sic Semicirculus ad Quadratum Diametri.

Sequitur ex Prop. 139, & 135.

PROP. CXCIII.

Theorema.

SI exponatur æquabilis curva V C, cui occurrat in vertice V T, unde ductis ad curvam quotlibet rectis parallelis & æqualiter ab invicem remotis, harum Secunda, Quarta, Sexta, Octava, Decima, &c. (in locis paribus,) sint ut 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{105}{48}$, $\frac{945}{384}$, &c. (qui numeri fiunt ex continua multiplicatione horum, $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \frac{9}{8}$ &c.) Erit, ut Secunda ad Tertiam, (hoc est, ut 1 ad numerum ipsis 1, $\frac{3}{2}$, interponendum,) sic Circulus ad Quadratum Diametri. (Ut autem Secunda ad Quintam, sic Triplum Circuli ad Quadruplum istius Quadrati, &c.)

Sequitur ex Prop. 118, 121, & 185.

PROP. CXCIV.

Theorema.

SI sit æquabilis curvæ V C, axis V X, tangens in vertice V T, unde rectæ ad curvam ductæ (axi parallelæ & æqualibus interstitiis dissitæ) secunda, quarta, sexta, octava, decima, &c. (in locis paribus) sint ut 1, $\frac{5}{2}$, $\frac{35}{8}$, $\frac{315}{48}$, $\frac{3465}{384}$, &c. (qui numeri fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{4} \times \frac{9}{6} \times \frac{11}{8}$ &c.) Erit, ut secunda ad tertiam (hoc est, ut 1 ad numerum ipsis 1, $\frac{5}{2}$, interponendum;) sic Circulus ad $\frac{1}{4}$ Quadrati circumscripti (sive Quadrati ex Diametro;) Sive Triplum Circuli ad Quadruplum Quadrati circumscripti. (Ut autem Secunda ad Quintam, sic Triplum Circuli ad Octuplum istius Quadrati, &c.)

Patet ex præced. & Tabella prop. 189.

SCHOLIUM.

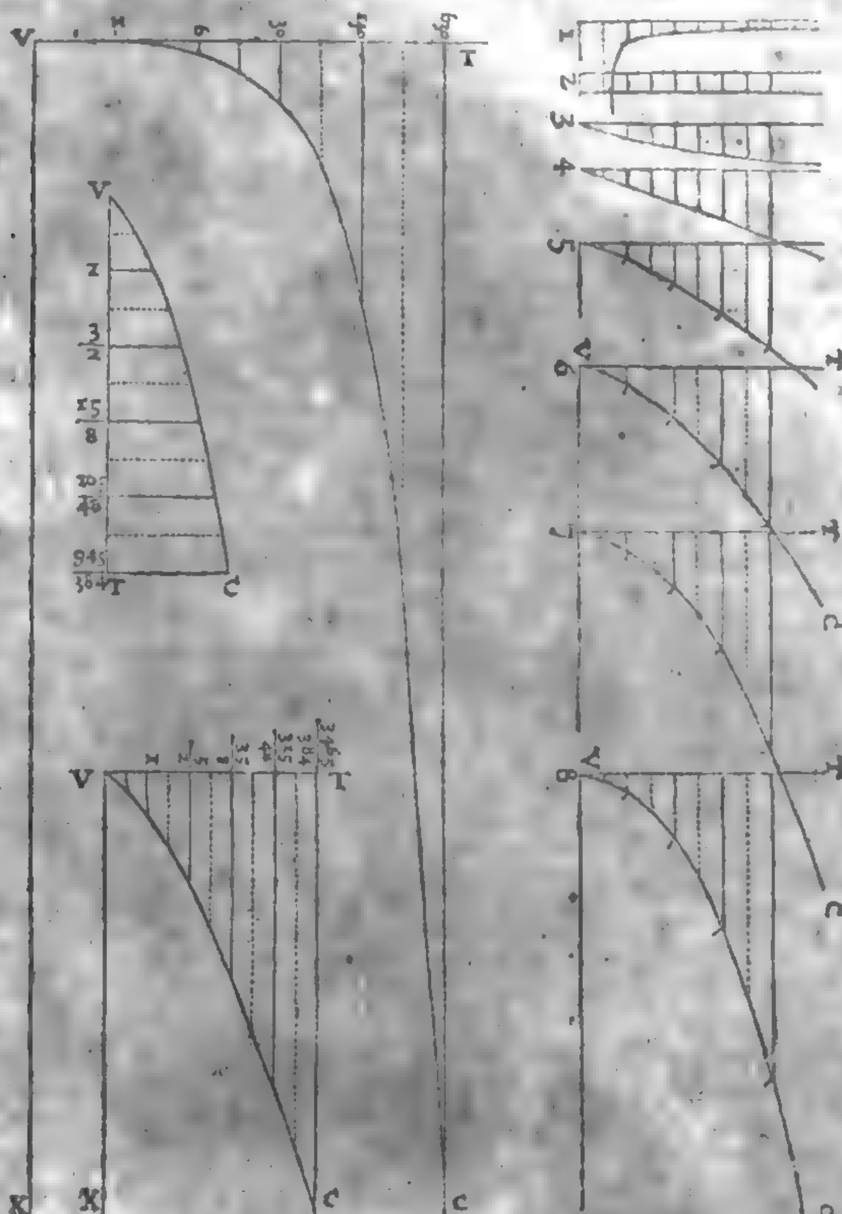
Et quidem hujusmodi aliæ propositiones innumeræ ex eadem Tabella (prop. 189.) deduci possunt: formatis scilicet aliis atque aliis ejusmodi curvis juxta istius Tabellæ tenorem.

Quales autem futuræ sint istæ omnes curvæ non adeo facile erit judicare. Hoc interim de quibusdam observare licet. Nempe; In serie sexta, numeri (Triangulares) 1, 3, 6, 10, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{6}{2} \times \frac{8}{4} \times \frac{10}{6}$ &c.) Sunt ut quadrata ordinatim-applicatarum in Hyperbola; ut dictum est prop. 173.

In serie Quarta, numeri (Arithmetice proportionales) 1, 2, 3, 4, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{4}{2} \times \frac{6}{4} \times \frac{8}{6}$ &c.) sunt ut quadrata ordinatim-applicatarum in Parabola: sive ut rectæ in Triangulo: ut patet.

In

In ſerie Secunda, numeri (æquales) 1, 1, 1, 1, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum, $1 \times \frac{2}{2} \times \frac{4}{4} \times \frac{6}{6}$ &c.) ſunt ut quadrata rectarum (vel etiam ipſæ rectæ) in Parallelogrammo, ut patet. Adeoque in Secunda & Quarta ſerie,



pro curvis prodeunt revera rectæ, latus nempe hic Trianguli, illic Parallelogrammi.

In ſeriebus ſexta, octava, decima, &c. (alternatim ſumptis,) prodibunt curvæ magis adhuc compoſitæ, ſed quarum characteres non minus accurate deſignantur in dicta tabella, quam Parabolæ, Hyperbolæ aut Ellipſeos characteres noti.

In reliquis autem ſeriebus interjectis, prima, tertia, quinta, &c. (in locis imparibus,) provenient item æquabiles curvæ & regulares (quales puta pro Geometricis agnoſceret Carteſius,) quamvis earum characteres difficilius explicari poſſint, ut qui expoſitis ſerierum, in locis paribus poſitarum, characteribus ſunt intermedii, juxta illam quam exhibuimus progreſſionis formam in Prop. 187.

Qualiter autem ad aſpectum ſe præbent expoſitæ curvæ, (tam quæ locis paribus quam quæ imparibus conveniant,) ſingulis tabellæ ſeriebus indicatæ, oſtendit appoſita figura, quæ ſigillatim illas depictas exhibet, debitis ſuis menſuris ex eadem (ut loquuntur) *Scala* deſumptis.

Notandum interim eſt (quod & ipſe aſpectus indicat,) quod convexitas curvæ V C (rectam V T verſus obverſa) quæ in curvarum ultima eſt maxima, (ſi retro compu-

computemus,) in anterioribus sensim decrescit; donec in loco quarto curva illa in rectam (secantem) transeat (quæ inter convexam & concavam est media,) deinde loco tertio in concavam, secundo autem in parallelam, & in primo denique in recurvam, (quæ nempe ex iis partibus ad rectam continue appropinquat quibus reliquæ inde recedunt.) Item recta V T, quæ in quinta & sequentibus est tangens, in quarta rectam secat, in tertia fit curvæ diameter, in secunda fit parallela, & in prima denique Asymptota.

Quænam autem sint curvarum harum omnium affectiones, & quibus modis commodissime describantur, non libet mihi (fesso jam, varioque & impedito itinere satis lassato) curiosius impræsentiarum inquirere; ut nec Hyperbolæ quadraturam ulterius (quam supra factum est) attingere. Et quidem fieri potest ut gratum nonnullis negotium, vel ea tacendo præstiturus sim, quo liceat ipsis, indicata jam methodo, eisdem investigandis oblectari.

Eas autem omnes tales esse quales pro *Geometricis* haberi velit Cartesius, quo minus dubitem id facit, quod de locis paribus jam satis constet, detectis jamjam eorum characteribus, adeoque & de locis imparibus (quamvis eorum characteres non ita commode designari possint) non aliter censendum est. Quales autem illæ sint Æquationes quæ singulis conveniant, ex ipso ordine patebit. Cum enim seriei quartæ conveniat æquatio Lateralis, sextæ Quadratica, octavæ Cubica, &c. (puta quarum suprema potestas est, Latus, Quadratum, Cubus, &c.) ad series interjectas tales necesse est æquationes pertinere quæ sint his intermediæ; (puta, quintæ, talis quæ sit quadraticæ & laterali intermedia; & de cæteris pariter judicandum.) An autem ejusmodi Æquationes sat commode possint recepto more designari, dubitandum forsan erit.

Mihi interim sufficiat (nec quidem susceptorum laborum pœnitet) rem hactenus perduxisse; novamque ingresso semitam, eandem aliis aperuisse: quæ quidem quo me duceret, in principio non adeo facile erat hariolari, sed quæ ad curvilineatum (saltem quarundam) quadraturam, aliaque ejusmodi abstrusiora problemata, recta tendere videbatur. Nec quidem spem fefellit. Utut enim in Circulo, ratio ea quam habet ille ad Quadratum (quam mihi præ oculis etiam ab initio fuisse non nego) non ita plane ex voto se prodat, ut in aliis aliquot curvilineis, recepto aliquo notationis modo explicanda, (sed per varios Mæandros me deduxerit, & tandem in ἄῤῥητον quiddam desinat:) Operæ tamen pretium est eatenus eam indicasse quatenus ipsa numerorum natura patitur; ut nihil insuper reliquum sit quam ut inter Mathematicos conveniat qua velint notatione (sive mea sive alia adhuc ad arbitrium excogitanda) rationem illam ἄῤῥητον indicare. In aliis autem curvilineis non paucis ita ex voto successerunt omnia (& quidem supra spem non raro,) ut innumeras Curvilineorum quadraturas, partim antehac plane incognitas, partim etiam cognitas quidem antea, sed nova jam & faciliori methodo traditas, indicaverim: Aliaque innumera ex intricatioribus Matheseos problematis, (puta de Pyramidoeidibus, Conoeidibus, & Sphæroeidibus, de linea Spirali, & Spatiis ipsi adjacentibus, de Paraboloeidibus, aliisque passim,) vel primus detexerim, vel multum elucidaverim: Figuras item in infinitum continuatas (non unam aliquam, quod tamen à Toricellio factum, satis videbatur mirandum, sed varias) tam planas quam solidas, ad mensuram notam & finitam reduxerim.

Facile quidem fuisset (modo libuisset) innumeras passim propositiones alias inseruisse, (quod nemini harum rerum perito dubium esse potest,) cum sit ea quam trado doctrina consectariorum satis ferax. Et quidem in primoribus hujusce tractatus partibus copiosius hujusmodi consectaria interserui, ideo præsertim ut quo tenderet hæc doctrina indicarem. Verum in sequentibus illud parcius prosecutus sum, partim quod jam ex præcedentibus eousque pateret methodus nostra, ejusque utilitas, ut jam suo Marte possit quilibet id ipse præstare; partim etiam ne propositionum numerus (qui jam turgere videbatur) adeoque totius tractatus moles nimis excresceret. Adeoque multa passim in transitu leviter indicata sunt, quæ, si libuisset curiosius prosequi, integram potius disquisitionem sibi sigillatim postularent.

Quod reliquum est; orandi sunt harum rerum periti, ut quod nos præstare valuimus candide dignentur acceptare, & siquid ipsis rectius obtigit in publicum Matheseos augmentum impertire.

LAUS DEO.

ECLIPSIS SOLARIS

OXONII VISÆ

Anno Æræ Christianæ 1654

2° *Die Mensis Augusti,*

STILO VETERI

OBSERVATIO.

Anno 1655 Edita.

AMPLISSIMO VIRO

JOHANNI HEVELIO,

SENATORI DANTISCANO,

Matheseos peritissimo;

JOHANNES WALLISIUS

S.

NON illud agitur hisce literis (Vir Illustris) ut quanta Tua fuerit in rebus Mathematicis peritia, quanta industria, aut quantum etiam ipsa Mathesis sedulitati Tuæ debeat, literato Orbi innotescat. Quotusquisque enim est qui illa nescit? Aut quidem, si nesciretur, quis ego sum ut ea mihi de Te prædicanti major quam ipsis tuis operibus debeatur fides? Non patiuntur autem egregia illa quæ ex tuis exstant opera, non patitur nominis tui celebritas, nec Mathematicorum omnium in te conversi oculi patiuntur, ut HEVELII *nomen ab erudito Orbe vel ignoretur, vel amplis laudibus undique non efferatur. Quisquis enim limatissimum illud opus Selenographicum, (ut cætera taceam,) quod Te authorem prædicat, inspexerit; &, quanta cura, quantis sumptibus, quantis vigiliis, quanto denique (ut uno verbo omnia complectar) Viro opus sit, ut egregium illud opus instruatur, satis perpenderit; non poterit ille non in admirationem rapi. Quis enim illum vel tacere poterit, vel satis eloqui, qui unus isthæc omnia peregerit! Ego quidem non satis mirari valeo, summum virum, tam rebus domesticis, quam negotiis publicis, & obeundo magistratu, occupatissimum, eousque cælestibus observationibus vacare posse, eisque tanta cum sedulitate, tanto & temporis & facultatum & valetudinis etiam impendio, tam pertinaciter invigilare. Tanto enim apparatu, tanto molimine, tantis sumptibus, in conficiendis instrumentis, in vitris excolendis, aptisque parandis observationi locis, in tot insuper Lunæ phasibus, aliisque Cœli Phænomenis, accurate notandis, delineandis, ærique incidendis, opus esse nemo non fatebitur, ut ea non unum aliquem, licet summum virum, sed sat multos potius viros egregios postulare videantur.*

Cum autem mihi contigerit, non modo Tuis quæ publice extant scriptis, sed & humanissimis ad me literis Tuis aliquoties frui; à gratitudinis officio nequaquam alienum duxi, quæ nobis nuper observare licuit tecum communicare. Quamvis enim hujusmodi conatus nostri, tanti non sint ut cum Tuis illos comparandos velim, (cum neque tantus mihi suppetat instrumentorum delectus, nec eam mihi vendicem, minus exercitato, in observando

 ἀκρίβειαν)

ακεχομεναι) *attamen Tibi non ingratum fore facile judico, quid ab aliis observatum fuerit intelligere: præsertim cum ea quæ à Luminarium Eclipsibus addisci solent, non tam ab una aliqua, utut accurata, uno in loco præstita observatione, quam ex collatis variis, in variis Terræ locis peractis, innotescant. Ideoque hanc nostram qualemqualem deficientis Solis Observationem* Oxonii *habitam, sive observantiæ, sive gratitudinis ergo, Tuis oculis subjicere visum est, simul cum ea qua usus sum observandi methodo. Siquid autem inde vel delectationis vel commodi perceperis, omnino mihi gratissimum erit aliquid præstitisse tanto viro non ingratum. Superest, ut à Deo Opt. Max. omnia Tibi felicia precatus, Tuique observantissimum me professus, Valere jubeam. Dabam* Oxonii, *ipsis Calendis Januarii, Anno* 1655.

Eclipsin

ECLIPSIN SOLAREM, OXONII VISAM, Aug. 2. 1654. Stil. Vet.

Observandi Methodus.

CUM Ephemeridum indicio moniti, Eclipsin Solarem satis quidem amplam secundo die Mensis Augusti (stylo veteri) Anno Æræ Christianæ vulgaris currente 1654, tempore matutino, conspiciendam exspectavimus: parabam ea quæ huic negotio necessaria videbantur, ut, si cœlo propitio frui datum fuerit, Eclipsis exspectata commode spectari posset. Cameram nempe curavi probe obscurandam, ut meræ essent tenebræ; in quam per Telescopium satis limatum Solares radii intromissi in adversa tabula reciperentur, quam ita Telescopio accommodaveram, ut, ubi ad Solem illud directum fuerit, hæc semper Solari disco maneret parallela: eodem ipso instrumento usus, quo ante biennium eodem in loco Eclipsin (quantum per cœlum nubilum tunc licuit) observaveram.

Huic tabellæ, sive asserculo ligneo, chartam affixeram, quæ circulum continebat tantæ magnitudinis ut illum exacte impleret per Telescopium intromissa Solaris corporis effigies. Hunc circulum (duabus diametris decussatim positis divisum, quarum altera lineam verticalem, altera horizontalem ostenderet,) ita dividebant alii circuli concentrici ut in qualibet diametro digiti & digitorum quadrantes distinguebantur. Et perpendiculum etiam appensum erat, cujus umbra moneret siquando linea verticalis à debito situ deflecteret.

Habui autem observationis comites duos egregios viros, Artium Magistros, & rerum Mathematicarum peritissimos, D. *Richardum Rawlinson* Collegii Reginalis Socium, & D. *Christophorum Wren* Socium Collegii Omnium-Animarum, quorum etiam alterius ope in ære incidendo usus sum.

Ubi dies advenerat, metuebam primo mane ne nubilum cœlum aspectum Solis penitus impediret. Sed nubes paulatim dispersæ, ante Eclipseos initium, cœlum sudum ostendebant, & negotio nostro satis accommodum.

Ipsum Eclipseos principium non observavi, quippe quod paulo citius contigit quam exspectaveram; sed ex sequentibus observationibus aliquammultis satis illud colligi poterit: incidisse nempe (apud nos) hor. 7. 45'. (circiter) tempore matutino: in limbi Solaris gradu 22° à puncto verticali Occidentem versus.

Deinde vero phases umbræ crescentes notavi sex, prout illas habes in Typo delineatas; ut & decrescentes quindecim.

Maximam vero Solis obscurationem omnino non vidi, non tam injuria Cœli quam loci ubi fueram impeditus. Camera enim ubi habita est observatio eum habuit situm ut non per unam aliquam fenestram tota potuerit Eclipsis observari; sed principium quidem per unam, finis autem per aliam. Maxima autem omnium obscuratio tum contigit cum instrumentum ab hac ad illam movendo fuimus occupati, dum neutra fenestra satis erat commoda: Sol enim ab una digressus nondum ad alteram pervenerat. Quanta autem illa fuerit, ex reliquis phasibus collatis satis colligitur. Erat nempe illa (juxta eam quam exhibemus observationem) decem integris digitis paulo minor. Incidit autem (apud nos) hora 8. $58\frac{1}{2}$. circiter, paulo ante observationem nostram septimam.

Ubi denique Eclipsis ad finem vergebat, curavimus tam momentum exitus, quam punctum marginis Solaris quod ultimum umbram passum est satis curiose observare. Incidit nempe (apud nos) hora 10. 14. (ante meridiem:) in limbi Solaris gradu 43°, à puncto infimo Orientem versus. Duravit igitur Eclipsis per horas duas integras cum semisse, circiter.

Quem autem in singulis phasibus situm habuerint lucis cornua, & quem Solaris limbi gradum tetigerint, in ipso quem vides Typo expressum habes; ut non sit

opus multis illud verbis explicare. In omnibus autem illis quas notavimus phasibus; consensus ipse satis indicio esse videtur, totam observationem satis accurate fuisse peractam, saltem errores siqui sint non adeo magnos esse.

Diametrum Solis visibilem deprehendimus in hac Eclipsi minorem esse quam in ea quæ accidit duobus abhinc annis, (Martii 29. 1652. st. vet.) quod eo statim indicio patuit, quod idem Circulus Observatorius quem tunc adhibui nonnisi in remotiori à Perspicillo distantia implebatur.

Diametrum Lunæ visibilem, quamvis illam exhibeant Tabulæ Diametro Solari paulo majorem, invenimus potius æqualem esse, ab ea saltem vix notabili quantitate differre. Quod hoc indicio deprehensum est. Circulos habebam aliquot chartaceos antea paratos, diversæ paulo ab invicem magnitudinis, Circulo Observatorio (qui discum Solarem exhibuit) partim majores partim minores aut æquales; quos sigillatim umbræ in Solari disco visæ applicando illum inveni arcui lucem ab umbra separanti optime convenire, qui circulo Observatorio congruebat.

Atque hoc quidem circulo chartaceo usus sum in singulis phasibus observandis. Cum enim celerior motus umbræ non passus est notabilem moram in una aliqua phasi delineanda; circulo chartaceo umbræ applicato, per ipsius statim marginem arcus eos plumbo descripsimus quos in ipso Typo vides expressos. Hoc enim pacto, & expeditioni melius prospectum, & confusioni cautum, iri judicavi, quam si singulos arcus ternis punctis indicatos circino tandem post observationem peractam delineandos reliquerim.

Cum autem visibilem Lunæ Diametrum respectu Diametri Solaris paulo minorem nobis apparuisse dictum est quam indicabant Tabulæ: non tamen propterea Tabulas illas eo nomine suspectas statim insinuo aut erroris incuso; cum & salva Tabularum fide satis illud contingere possit. Corpus enim lucidum, dum radiis suis corpus opacum lambit, ipsius marginem ita perstringere solitum est acsi nonnihil inde abraderet, & corpus opacum paulo minus apparere facit quam revera est. Quod familiari instantia contueri licet. Si enim bacillum teres oculum inter & lucernam transversim colloces, ut lucernæ flamma partim supra baculum partim subtus conspiciatur; videbitur rotundum illud bacillum eo loci ubi radiis perstringitur aliquanto minus esse, quam alibi ubi radiis flammulæ liberatur; quasi utrinque aliquid radiis perstringentibus ablatum esset. Quod quidem de corpore Lunari si concedatur, Solem inter & oculum posito; necesse est ut ipsius discus, radiis Solaribus quasi detersus, minor aliquanto appareat, quam vel revera sit, vel in alio situ videatur esse. Quod quidem animadvertisse, in Solaribus Eclipsibus æstimandis, non levis erit momenti. Hinc enim eveniet ut Eclipses Solares semper videantur paulo minores quam Luminarium proportio & situs postulant. Et (eadem de causa) Eclipses Lunares etiam justo minores apparere possunt, diminuto scilicet umbræ terrestris cono (abrasis quasi lumine Solari ipsius particulis exterioribus,) unde necesse erit ut & minuatur Lunaris disci obscuratio. Quantum autem, in utraque Eclipsi, hanc ob causam deesse judicandum erit, accuratiori indagine non indignum videatur.

Temporis momenta quod attinet; ea indicio Horologii ambulatorii, singula minuta prima & secunda monstrantis, æstimavi; prout illa habes in adjuncta Tabella indicata. Quamvis enim isthæc automata, utut artificiose facta, non ita plane æquabili motu procedant ut Mathematicam ἀκρίβειαν attingant; si tamen minuto forsan integro (vel etiam altero) aliquando peccatum fuerit, non eapropter eorum usus esset contemnendus. Sed & altitudinem Centri Solaris aliquoties interim æneo Quadrante observavi, non quidem adeo magno, sed accurate diviso, & fideliter etiam tractato. Ex quibus comparatis liquet, Horologium, in principio Eclipseos, potius sequi justum tempus, sed properanter; in fine vero, præire, sed & segnescere.

Plura temporis mensurandi media non adhibui, partim quod ad manum alia non erant, partim etiam quod non totidem adjutores habui, illarum rerum peritos, quot pluribus attenti esse possent.

Tota Observationis serie sic peracta: cum tandem esset ære incidenda, non ulla placuit emendatione uti, ne correctionis prætextu depravare videar: sed observationem integram, sicut in protographo primitus depicta fuerat, fideliter in æneam laminam transferre. Schematis tamen totius situm inversum, ex radiorum decussatione ortum, in integrum restituendum duxi, (quod sola chartæ conversione præstitum

præstitum est,) quo melius apparentiæ cœlesti congrueret. Totum etiam in minorem aliquanto formam redigere coactus sum; quia circulus, quo usus eram, Observatorius aliquanto major fuerat quam ut una pagina commode contineri possit.

Centri denique Lunaris transitum, per discum Solis, depictum habes; quatenus ex observatorum arcuum centris colligitur. Quæ quamvis linea sit non ita plane æquabilis, quin aliquantulum hinc inde fluctuet; tantillum tamen aberratum est, ut vix majorem ἀκρίβειαν sperare ausus essem; cum in accuratissimis quas videre contigit Observationibus, non minorem deprehendi centrorum divaricationem, nonnunquam etiam & longe ampliorem; quod & quivis alius deprehendere poterit, cui libet in aliorum Observationibus arcuum observatorum centra examinare. Neque mirum illud illis videbitur qui rebus hujusmodi sunt exercitati: Norunt enim levissimam in observandis umbræ arcubus (præcipue minoribus) aberrationem, satis notabilem nonnunquam centri divaricationem creare posse; præsertim si accedat vel leviuscula instrumenti titubatio, vel perpendiculi à suo situ deflexio: quid quod & ipsum lucis & umbræ confinium non adeo accurate, quasi linea Mathematica, determinare datum est, quin aliqua latitudo concedatur sit necesse non nisi conjectantis oculi æstimatione determinanda. Ne autem sit linea plane recta, impedire debent mutata subinde in singulis momentis tam Luminarium Parallaxes quam Solaris Disci puncta Verticalia.

Tandem præcipuas aliquot phases seorsum placuit in minori forma describere: non quidem eas ipsas quas in Observationis curriculo notavimus, sed quæ integris potius diametri Solaris digitis respondeant, prout eas ex majori Schemate colligere licuit.

Quis autem fuerit Zodiaci situs in singulis observatis phasibus, nec erat necesse, nec quidem conveniens adnotare; adeoque nec nodi Ecliptici positionem. Cum enim Zodiaci ad Horizontem inclinatio non eadem permaneat, sed in singulis subinde momentis immutetur; opus esset Zodiacum vel non omnino notare, vel toties quot sunt ipsæ observatæ phases, unde linearum confusio nimia oriretur sit necesse. Nec tamen eapropter placuit observationis Typum primarium (quem nempe tempore Observationis descripsimus) immutare, ut omnes observatæ phases ad unum aliquod perpendiculum reducerentur, cujus respectu Zodiacus in eodem semper persistat situ. Sed mallem rem ipsam simpliciter ut facta est exhibere, & ejusmodi calculum seu restitutionem cujusvis arbitrio permittere.

Atque hæc sunt quæ de præsenti Observatione monenda duxi. Reliqua ex ipsa Typi, qui sequitur, inspectione satis patebunt.

Observatio Eclipseos Solaris

OXONII habita;

Anno Æræ Christianæ 1654. *Die* 2 *Augusti st. vet. Elevatio Poli* 51°, 46′ *circiter.*

Phasium Observatarum ordo.			Digiti Eclipticí.	Tempus secundum Horologium ambulatorium Hor.	′	″	Altitudines centri Solaris Gr.	Mi.	Tempus ex altitudine Solis erutum Hor.	′	″
* Paulo major quam in Typo.	Crescentes	1	* $2\frac{2}{3}$ D.	8	2′	20″.					
		2	4 circ.	8.	9.	30.					
		3	5 circ.	8.	15.	23.					
				8.	22.	0.	33.	34′	8.	23.	7.
		4	$6\frac{3}{8}$	8.	28.	29.					
		5	$7\frac{3}{8}$	8.	34.	24					
		6	$8\frac{1}{3}$	8.	39.	31.					
	Decrescentes	7	$9\frac{3}{8}$	8.	59.	42.					
		8	$9\frac{2}{3}$	9.	4.	50.					
		9	$9\frac{3}{8}$	9.	8.	34.					
		10	$8\frac{7}{8}$	9.	12.	45.					
				9.	15.	15.	40.	34.	9.	13.	31.
		11	$8\frac{1}{4}$	9.	17.	29.					
		12	$7\frac{2}{3}$	9.	23.	54.					
		13	$6\frac{3}{4}$	9.	28.	37.					
		14	$6\frac{1}{8}$	9.	33.	18.					
		15	$5\frac{1}{8}$	9.	37.	7.					
				9.	42.	30.	43.	45.	9.	38.	53.
		16	$3\frac{7}{8}$	9.	53.	17.					
		17	3 circ.	9.	56.	24.					
		18	$2\frac{1}{3}$	9.	59.	14.					
		19	$1\frac{7}{8}$	10.	2.	57.					
		20	$1\frac{3}{8}$	10.	6.	15.					
		21	$1\frac{1}{8}$	10.	7.	50.					
		22	Finis.	10.	14.	0.					
				10.	20.	35.	47.	57.	10.	17.	31.

Speciales aliquot Phases ad analogiam Schematis Universalis.

Crescentes

Initium.	Hor.	Min.
	7.	45.
1 Dig.	7.	51.
2 Dig.	7.	57.
3 Dig.	8.	$3\frac{1}{2}$.
4 Dig.	8.	10.
5 Dig.	8.	$16\frac{1}{2}$.
6 Dig.	8.	23.
7 Dig.	8.	$29\frac{1}{2}$.
8 Dig.	8.	$36\frac{1}{2}$.
9 Dig.	8.	45.
10 Fere.	8.	58.

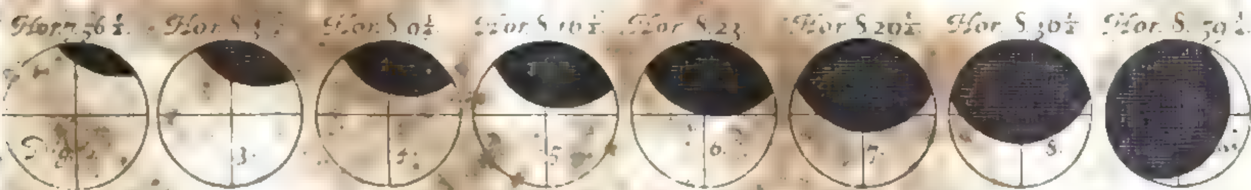
Decrescentes

	Hor.	Min.
9 Dig.	9.	11.
8 Dig.	9.	$19\frac{1}{2}$.
7 Dig.	9.	$26\frac{1}{2}$.
6 Dig.	9.	34.
5 Dig.	9.	41.
4 Dig.	9.	48.
3 Dig.	9.	55.
2 Dig.	10.	$1\frac{1}{2}$.
1 Dig.	10.	8.
Finis.	10.	14.

F I N I S.

Typus Eclipseos Solaris, ut apparuit OXONII 2 Augusti, 1654. ante meridiem.

Crescentes. Phases.



Phases Decrescentes.

MBurghers sculp.

TRACTATUS DUO.

Prior,

DE CYCLOIDE

Et corporibus inde genitis.

Posterior, EPISTOLARIS;

In qua agitur,

DE CISSOIDE,

Et Corporibus inde genitis:

Et

DE CURVARUM,

Tum Linearum Εὐθύνσει, tum Superficierum Πλατυσμῷ.

Anno 1659 Editi.

Monitum ad Lectorem.

MOnendus est Lector, plurima eorum quæ de Cycloide habentur in hoc Tractatu (qui, propter Dettonvilii tractatum interea prodeuntem, relictus erat imperfectus) fusius haberi, & plenius tradita (sed alio ordine) in Tractatu (post plures annos edito) de *Mechanicis*, sive de *Motu*. Quæ erant ibidem repetenda, ne Tractatus ille (separatim editus) foret mutilatus.

Honorabili Doctissimoque Viro,

D. ROBERTO BOYLE

ARMIGERO,

Tum illustri Familia, Tum magnis Virtutibus Nobili.

QUUM, *Scientiam nullos habituram inimicos, præter ignorantes, jam olim sit scitissimum: Nemo, credo, aut inique aut imprudenter à me factum existimabit, quod Scientissimum Virum opusculo huic nostro patronum advocaverim. Qui præter tuam in Theologicis tum cognitionem tum praxin; atque in Linguis, tum sacris, antiquisque, tum modernis etiam peritiam; in Politicis item, & negotiis publicis, & rerum & personarum, domi peregreque, intimam notitiam;*

Qui mores hominum multorum nôris & urbes:

In Physicis etiam, & veræ Philosophiæ venatione, ita perpetuis & subtilissimis Experimentis, Medicis, Chymicis, Anatomicis, aliisque omne genus, Naturam quasi ferro & igne prosequeris, (nedum per omnes subtiliorum in quacunque arte Opificum officinas,) in secretos abditissimosque sequeris recessus, & quasi in viscera penetras; ut mirum ni tibi tandem se in prædam dedat. Quique Naturam, tanquam equuleo impositam, severa saltem, ne crudeli dicam, quæstione, torquendo vexas & retorquendo, quo verum tandem fassa secreta pandat omnia: idem, in Mathesi, Æquationes Analyticas (Equuleum Mathematicum) versas; quo vix subtilius aliud instrumentum abdita perquirendi, aut extricandi involuta.

Quanquam enim tam perspicacis ingenii Virum, atque subacti judicii, reformidare debere videar, qui de nostris sententiam feras; ut qui, vel leviora παροράματα aut ἀκυρίας, vel ἀμεθοδίας etiam, si qua deviatum est, potis es dignoscere; Tu tamen, qui cætera noris, etiam noris quam in festino scripto multa sint condonanda, quamque omnino arduum sit, omnem unguis critici scalpturam devitare.

Invenies autem, ex subtilissimis præsentis seculi inventis, si non omnia, præcipua saltem, vel ex professo tradita, vel obiter insinuata: Eaque, utut non nova omnia, aut nulli hactenus reperta, at novis saltem demonstrationibus ornata, & methodis nostris accommodata. Et quidem ab aliis nonnulla per longiores ambages & particulatim inventa, mirabere forsan tam facile ex principiis nostris, & universaliter traditis, simplicius & sponte fluere.

Tu vero, ut soles, & doctis favere pergas, & studia promovere: nec aversеris interim,

VIR NOBILISSIME,

Tui observantissimum

& amantissimum,

JOHANNEM WALLIS.

PRÆFATIO.

QUO, *quid in sequentibus agatur, rectius persentiscat Lector, quaque ansa data hæc fuerim meditatus; præviam hanc totius rei gestæ, quatenus ea me spectet, narrationem præmittere visum est, quæque ad id operis me impulerunt causas breviter aperire. Cum Illustrissimi Equitis* Digbæi *literis* (*Julii* 17, 1658, *Parisiis datis*) *duas simul inclusas chartulas, pridie Cal. Augusti, stylo nostro, hoc est Aug.* 10. *stylo novo, Oxonii accepi. Quarum prior, hæc continebat Problemata*; (*Parisiis, quod audio, ineunte mense Junio primum divulgata*)

Dato, in Cycloide quacunque A B C D fig. 1. quolibet puncto Z, ex quo ducta Z Y recta, basi A D parallela, axem C F in puncto Y secet: Quæruntur;

Dimensio spatii C Z Y; Ejusque centrum gravitatis:

Solidaque ex ejusdem C Z Y conversione, tum circa Z Y, tum circa C Y, genita; & horum Solidorum Centra gravitatis.

Quod si eadem solida, tum quod circa Z Y, tum quod circa C Y, plano per axem bifariam secentur: Horum item semisolidorum quæruntur centra gravitatis.

Quorum quidem Problematum solutionem, à præstantissimis toto orbe Geometris, supplex postulat *Anonymus, proposito simul* præmio *in hæc verba*, Quisquis superius proposita, intra primam diem Mensis Octobris anni 1658 solverit & demonstraverit, magnus erit nobis Apollo. Et primus quidem consequetur valorem quadraginta duplorum aureorum Hispanicorum, quos ipsi Hispani *Dublones*, & Galli *Pistolles* vocant: Secundus vero viginti ejusmodi duplos aureos: Si unus tantum solverit, sexaginta solus habebit.

Charta posterior, indicat; Per [Cycloidem quamcunque] non aliam ab ipso intelligi, quam Cycloidem primariam à Toricellio descriptam; cujus nempe Basis perimetro circuli generantis æquatur; *Seque* rationem quam habet Basis Cycloidis ad altitudinem, sive ad diametrum circuli generantis, pro data reputare: *Remittit denique nonnihil de propositionum præcedentium rigore, nempe* multorum casuum calculum, & absolutam solutionum conscriptionem; *Adeoque his tandem verbis conditiones suas exponit*, Qui publico Instrumento, intra præstitutum tempus, Illustrissimo D. de Carcavi significaverit, eorum quæ quæsita sunt demonstrationem penes se habere; & aut ipsammet demonstrationem quantumvis compendiosam ad ipsum miserit; aut si chartæ mandare nondum per otium licuerit, saltem ad confirmandam suæ assertionis veritatem, casus quem mox designabimus calculum dederit; seque paratum esse professus fuerit omnia omnino demonstrare ad ipsius D. de Carcavi nutum, hunc nobis satisfecisse declaramus: Et consentimus, primum qui hæc fecerit primo, secundum secundo, præmio donandum, si sua solutio ab ipso D. de Carcavi virisque ad id secum adhibitis, cum ipsi visum fuerit, exhibita, Geometrica ac vera judicetur: Salvo semper erroris calculo, (*lege*, errore calculi.) Casus autem cujus solius sufficiet calculus ille est. Si semicyclois A C F circa basin A F convertatur, & solidum inde genitum secetur plano per ipsam A F (quæ jam hujus solidi axis est) ducto, quod quidem solidum dividet in duo semisolida paria. Alterius horum semisolidorum centrum gravitatis assignari postulamus.

His acceptis literis cum inde perspexerim Illustrissimo Equiti in votis esse, ut ego huic me inquisitioni accingerem; id statim feci, non tam exposito præmio (*quod quidem ad pompam facere visum est*) *quam Illustrissimi Equitis desiderio inductus. Videbam autem non parum temporis propositi* (*mediam saltem partem*) *jam effluxisse: Et quidem* (*quod intellexi postea*) *non exiguum etiam à calce amputandum erat; quantum saltem exscribendis, transmittendis & tradendis literis sufficiat*: (*Quod enim in charta prima dictum est*, qui intra primam diem Octobris solverit & demonstraverit; *id in secunda sonat*, qui publico Instrumento, intra præstitutum tempus D. Carcavio significaverit; *quod tandem exponunt Pascalii ad Wrennum literæ*, si intra dictum tempus Carcavius id acceperit.) *In*

angustias

angustias itaque temporis conjectus eram; (& quantas quidem tam perplexæ disquisitioni vix sufficere vel author ipse judicabit;) Præsertim cum rudis ego ad id operis accesserim, quod ipsum, & Gallos suos, jam per viginti annos & ultra, neadum quadragnita, exercuit: (neque enim ego de Cycloide quidpiam ante meditatus eram quam his Problematis fuerim excitatus.) Quod itaque temporis angustiæ postulabant, nec abnuebant oblatæ conditiones, rem ego summatim aperiendam duxi: adeoque literis Aug. 19. *Oxonii datis, paragraphis* 55, *(eisdem fere verbis cum totidem tractatus insequentis primoribus,) ad D. Carcavium amandabam; quibus totius methodi summa continetur: reservata mihi, quam & oblatæ conditiones patiuntur, libertate, lapsus (si qui forte fuerint) emendandi. (Non enim tam ipsum calculum quam calculi methodum tum exponere satagebam.) Et quoniam* Instrumenti publici *mentionem factam videram, quamquam quid illæ voces ibidem innuebant non satis perspiciebam, ne tamen & hac ex parte quidquam deficeret,* Notarii publici *subscriptione rem confirmandam curabam.*

Has meas literas, ad D. Carcavium 10 *Septemb. pervenisse intelligo; vel saltem (eo absente) ad ipsum Pascalium: qui tum ea Problemata, quod jam intelligimus, Anonymus proposuerat, tum D. Carcavio permittente aliorum scripta literasque ad eum ea de re datas accepit & perlustravit, id enim in suis ad D. Wren literis* 13 *Sept. datis innuit, his verbis.* Absentia communis amici nostri D. de Carcavi qui tuas ad me misit Epistolas, causa est cur non ille sed ego quamvis ignotus audeam respondere. *Et tandem (post alia multa)* Unum tibi, *inquit,* dicere habeo, scilicet hic receptas esse ab eximio ex vestris Geometra epistolas in quibus omnium quæ de Cycloide problematum sunt proposita solutionem tradit. Et ipsi suum ordinem religiose servandum ab illa die scilicet quo recepta fuerunt, nempe à decimo die hujus mensis stilo novo. Sic enim habetur intentio Anonymi proponentis, ut qua die D. de Carcavi excipit solutionem alicujus eo die ordo ejus sumatur. Et quidem conformius fuisset Anonymi ipsius intentioni ut per Notarios Parisienses attestatio facta fuisset quam per Oxonienses. Parisienses enim fidem facerent receptionis D. de Carcavi, unde ordo sumitur; Oxonienses vero nihil ad hoc facere possunt. (*Tanta siquidem solennitate res transigenda erat! Quasi quidem nesciverit Carcavius, sine Notariorum plurium Publicorum testimonio, se accepisse; vel etiam quo die acceperit.) Ne autem isthæc non satis intelligantur; Ad ea verba impressæ chartulæ posterioris.* Qui publico instrumento ante præstitutum tempus, Illustrissimo D. de Carcavi significaverit; *hanc adscriptam transmisit notam marginalem,* id est, per Notarios Parisienses, per extraneos enim nihil significari potest D. de Carcavi: Et in hoc est aliquantulum plus gratiæ in Gallos, quam in alios Geometras; sic autem voluit Anonymus, suæ legis dominus: Itaque quicquid ante Calendas Octob. ad D. de Carcavi mittetur, ordinem obtinebit, quod autem postea, non recipietur quamvis probaretur actum fuisse ante Calendas Octobris: significatio enim facta ad D. de Carcavi, seu ejus receptio sola valet ad ordinem præmii. Et siquis è regione magis remota jam mittat solutionem actam ante 29 Augusti (qua die acta est solutio vestri dicti Geometræ;) ipsa quamvis prior, posterior habebitur, utpote posterius recepta. *Atque hæc sunt quæ ad D.* Wren *de me scripserat. De quibus mihi nihil quicquam contra disputare in animo est. Ad præmium enim quod attinet, de quo videtur ille admodum solicitus, id me omnium minime solicitum tenet. Rem ipsam quod spectat; Geometrarum illud judicio permittendum est. De Instrumento publico quod dicitur: putarim quidem ego, vel eo hoc opus esse ut D. Carcavio fidem faceret, quo tempore solutio quælibet alibi facta fuerit; vel non omnino opus esse: ut enim sibi se accepisse constet, vel quo die acceperit, quid Instrumento publico vel publicis notariis opus esset non videbam. Sed assignat quam velit mentem suis verbis, & de præmio quod lubet statuat, non repugno; Gallisque suis præ aliis favorem quem velit largiatur. Facti siquidem ego rem refero, non de jure litigaturus.*

Interea vero temporis, literis secundis 3 *Septemb. datis, minutiora quædam in literis præcedentibus contenta, partim explicabam partim immutabam (reservata tamen qua prius libertate,) adeoque in eundem plane statum quo jam habentur redigebam: Nisi quod, etiam tum, non satis attentus, §* 30. *falsos adhuc numeros apposueram; (& similiter §* 45.) *Illis utique numeris investigandis, trilineum* C2FA *fig.* 1. *hoc est* CFA *fig.* 7. *(qui facilis lapsus est) circa rectam* AF *converteram, quod circa*

CF *convertendum erat, (ut § 77, ubi calculus instituitur, videre est,) nempe ut habeatur aggregatum omnium* FY, *sive* ζZ *fig. 7. in* Zz *Arithmetice proportionales ductarum. Quam quidem oscitantiam ubi animadverterem (quodque unicum in jam tractatis emendavimus) ultimis tandem literis, eodem mense datis insinuabam*: superesse, *nempe*, in prioribus nonnihil immutandum, quod & ipsis, ni nondum ad examen redegerint, perspectum esse possit: cum autem ipsis adhuc plura videri forte possint supplenda, ad justam eorum demonstrationem quæ vel strictim insinuaverim, vel ut pro concessis habuerim, exspectaturum me *aiebam*, donec quid ipsis videretur intelligerem, ut eadem opera immutarem immutanda, supplenda supplerem, & supremam adjicerem manum. *Atque hæc quidem ego ipsorum conditionibus conformia esse duxi, (qui nonnisi* demonstrationem quantumvis compendiosam *peterent, vel ne hanc quidem, modo numeros uni casui accommodos quis exhiberet,) idque* salvo semper errore calculi: *modo saltem (quod in literis ad D.* Wren *additum est) parati simus reliqua exhibere ubi fuerimus à D. Carcavio ad hoc moniti.*

Lapsus autem ille quis fuerit quem emendaturus eram, speciatim literis illis non indicabam; quia jam mihi subolebat lupus in fabula. Conjiciebam enim ex literis ad D. *Wren scriptis, (me enim nullis hactenus dignati sunt,) Paschalium hunc cui* D. *Carcavius literas accipiendi, perlustrandi, eisque respondendi copiam fecisse diceretur, (fortasse & sententiam ferendi num conditionibus satisfiat,) eundem esse qui hæc problemata Anonymus proposuerat. Cui cur ego mea ulterius aperirem non videbam. Accedebat, quod jam edoctus fueram, quocunque tempore quidpiam alibi factum fuisse constet, nisi id Parisiis ante indictum diem Carcavio tradatur, (quocunque id fato fiat,) non admittendum fore; adeoque cum non sperandum videbatur ut quicquid ego tum scriberem (exeunte Septembri) ante primum diem Octobris eo accederet; id saltem insinuare visum est, tum deprehendisse me errorem illum calculi, tum paratum esse vel illum emendare, vel etiam, quæ ultra desiderentur, ad eorum nutum supplere.*

Cum vero ego per aliquot menses, ut monitus eram, (sive D. *Carcavii, sive potius) Paschalii nutus expectaveram, quid ultra postularent, aut quid suppletum adhuc vellent; nec quicquam literarum acceperim, (licet literas meas ternas ad* D. *Paschalium rite fuisse traditas aliunde intelligam;) Tandem prodiit, quasi rei gestæ Narratio,* Histoire de la Roulette; *quam exeunte mense Novembri primum vidi. In qua, utut de solutionibus à me exhibitis (quod & de aliorum item evenisse conjicio) altum fuerit silentium; tamen etiam adhuc exspectandum insinuatum erat dum alii nescio qui a* D. *Carcavio ad id designati (siqui saltem designati,) judicium tulerint de scriptis sive nostris, sive & aliorum, quorum etiam nomina reticere voluit.*

Innuit quidem hæc historiola, Considerationem Cycloidis, Mersenno proponente, jam ab anno 1615 *(dum ego nondum natus eram) Gallos exercuisse; Robervallium vero anno* 1634 *demonstrasse primum,* Figuram Cycloidalem circuli genitoris triplam esse: *quod & post illum demonstrasse dicuntur Fermatius & Cartesius, sed quorum demonstrationes, præ illa Robervalli, extenuatum itur. (Eorum vero nemo, quod sciam, demonstrationem suam typis vulgari hactenus curavit.) Torricellius deinde, qui anno* 1644, *harum rerum nescius, vulgavit suas (omnium, credo, primus,) insimulatur plagii; (quam juste, nedum candide, non inquiro; postquam per complures annos sit demortuus;) non quod Robervallii demonstrationem pro sua venditaverit, sed quod (sic utique suspicantur) inter Galilæi schediasmata vidisse forte potuerit propositionis istius demonstrationem a* D. *Beaugrand ad Galilæum olim transmissam. Cui simile quid de Lalouera Jesuita videntur suspicari, qui eorum nonnulla protulerat quæ sibi peculiaria putaverit Robervallius. Fortassis etiam & nos ejusdem insimulandi, ubi viderit eadem & a nobis inveniri.* Inveniri, *inquam; non enim si se prius hæc scivisse contendat, utut id verum esse possit, nos ideo minus invenisse dicendi sumus, dummodo clam nobis sit quod ipse fecerit; qui nec vel scrinia ejus vel scripta compilavimus, nec ab illo quidquam fuimus edocti. Didiceram quidem a Toricellio, (a* Toricellio, *inquam, nam Robervalium de rebus hisce quidpiam meditatum esse, quæ mea erat infelicitas, ne per somnia cogitabam;) didiceram, inquam, ab illo, tum Cycloidis aream circuli triplam esse; tum Tangentes describendi methodum: Plura vero de Cycloide, quempiam excogitasse, nesciebam plane; ut & (quantum hactenus intelligo) nostri juxta mecum ignorabant*

omnes:

omnes: *Nec quidem ullo jure censendi sumus cognovisse; cum illud omne quod se invenisse contendit, vel intra privata sua scrinia recondidit, vel familiaribus saltem aliquot communicavit, in publicum certe (quantum mihi hactenus assequi licuit) nondum edidit.*

Pergit deinde eadem historiola edisserere, quid Robervallius, quid author ipse invenerit. (Se solos autem eadem invenisse, non dicent, credo.) Quid autem invenerint alii, subticuisse mirandum non est, cum palam profiteatur peculiarem se Gallis suis favorem exhibere voluisse. Non diffitetur interim Hugenium Batavum, & Wrennium nostrum prodidisse, Portionem Cycloidis quam abscindit recta ad axem ordinatim applicata, ejusdem axis partem quartam vertici proximam abscindens, æqualem esse spatio rectilineo: (*Quod quidem verum est; æquat utique* $\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$: *ut ex calculo* § 23 *liquet; uti & trilineum* CbB *fig.* 1. *vel* 7, *æquare* R^2 *quadratum radii; Et prismatis oblique secti portionem, sive momentum ejusdem* CbB *trilinei respectu* cB, *æquare* R^3 *cubum radii; item ejusmodi portionem, sive momentum trilinei* BFC, *sive respectu* cβ, *sive respectu* βF, *æquare* $2R^3$, *duos cubos radii circuli generantis: quæ nos in sequentibus demonstravimus:*) *Eundemque Wrennium nostrum* Cycloidis curvæ, ejusque partibus, æquales rectas invenisse. *Atque hinc denique ansam desumit novas proponendi quæstiones,* De centro gravitatis tum lineæ curvæ Cycloidis, tum partium ejusdem, deque superficiebus ejusdem curvæ tum conversione tum semiconversione, tam circa basem, quam circa axem, descriptis, & harum superficierum centro gravitatis. *Nos autem (nullius nominis in narratione sua) quid præstitimus, patebit in sequentibus.*

Exspectandum autem aliquandiu videbatur (prout superius insinuatum diximus,) numquid aliquando nobis injunctum foret a Carcavio ad demonstrationes nostras summatim traditas pro libitu suo perficiendas. Atque interea quæstiones de novo propositas solvebam, (quod quidem post solutas præcedentes non erat factu difficile.) Tandem vero, cum nihil prorsus acceperim, nec noverim quid ageretur; quæ ad solutiones meas qua priores, qua posteriores, elucidandas, visa sunt necessaria, (quæ nempe post § 55 *insequuntur,) scholiorum instar subjunxi, eaque prout nunc sunt ad* D. *Vicecomitem Brounker Mense Martio transmisi: neque ex eo tempore quicquam innovandum putavi.*

Rem autem ipsam quod attinet; Id animo propositum habui, quam succincte omnia, sed & perspicue proponere: Non tamen quæ subinde occurrunt Lemmata singula seorsim semper demonstrare, (id enim si fecissem, nimis increvisset operis moles,) sed ea saltem quæ videbantur obscuriora; reliquorum fontes vel digito indicasse satis esse ratus. Sed & eadem non raro, variis in locis, variis etiam modis demonstrata reperiantur. Nec eandem semper demonstrandi methodum secutus sum, sed nunc ad morem veterum, nunc ex Geometria Indivisibilium, nunc etiam & ex Infinitorum Arithmetica nostra petitis demonstrationibus. Non quidem quod illud necesse habui; sed quoniam id Lectori, & magis utile, nec minus gratum fore credidi, quam eandem sæpe cramben recoquere. Quod moneo, ne miretur forsan aliquis si in se quidem similia, dissimili nonnunquam demonstrandi methodo probata videat. Non raro etiam a minutioribus nonnullis demonstrandis consulto abstinui; nec ad singulos forsan casus possibiles ubique descendi; satis id ratus, si viam demonstrandi palam ostenderim, singulos interim apices (si illud [illegible] postulent) paratus exhibere.

Atque hæc sunt quæ Lectorem præmonendum putabam. Quæ quidem paulo fusius exposui, ut, qui supra-memoratas chartas non viderint, earum saltem summam, adeoque rei gestæ narrationem, hinc intelligant; & causam simul cur hac methodo mea disponantur, quæ secus alia forsan methodo rectius disponenda esse, si res esset integra, existimare possent.

Libet hic subjungere Anonymi duo scripta, ad me missa, quæ huc spectant.

SCRIPTO-

SCRIPTORUM PRIUS.

Cycloidis definitio ad finem hujus Scripti habetur.

CUM ab aliquot mensibus, quædam circa Cycloeidem ejusque centra gravitatis meditaremur, In propositiones satis arduas ac difficiles, ut nobis visum est, incidimus, quarum solutionem à præstantissimis toto orbe Geometris supplices postulamus, proposito ipsis præmio, non mercedis gratia, quod absit, sed in obsequii nostri, aut potius meriti eorum qui hæc invenerint, publicum argumentum.

Quæ vero proponimus sunt ejusmodi.

Dato puncto quolibet Z in quacunque Cycloeide ABCD, ex quo ducta sit ZY basi AD parallela quæ axem CF secet in puncto Y. Quærimus.

Dimensio spatii CZY. Ejusdemque centrum gravitatis. Solida genita ex circumvolutione dicti spatii CZY, tam circa ZY quam circa CY. Et horum solidorum centra gravitatis.

Quod si eadem solida, plano per axem ducto secentur, & sic fiant utrinque duo solida, duo scilicet ex solido circa basem ZY, & duo ex solido circa axem CY genito. Cujusque horum solidorum quærimus etiam centra gravitatis.

Quia vero quæsitorum demonstratio forsan adeo prolixa evadet ut vix intra præstitutum tempus exequi satis commode possit, genio & otio doctissimorum Geometrarum confidentes, ab his tantum postulamus, ut demonstrent, vel more antiquorum, vel certe per doctrinam indivisibilium (hanc enim demonstrandi viam amplectimur) omnia quæ quæsita sunt, data esse: Ita ut facile ex demonstratis, quælibet puncta quæsita ex datis in hypothesibus possint inveniri.

Et ut apertius mentem meam explicem, nec subsit aliquid ambiguum, exemplo rem illustro. Proponatur, verbi gratia, parabola ABC, cujus axis AB, basis AC, tangens BD, parallela axi CD. Inveniendum centrum gravitatis trilinei DCB. Satisfactum esse problemati censerem, si demonstretur, datum esse centrum gravitatis parabolæ ABC, nec non & centrum gravitatis rectanguli CDBA, & proportionem hujus rectanguli cum parabola CBA, ideoque & datum esse centrum gravitatis quæsitum trilinei CDB; nam etsi præcise punctum in quo reperitur centrum gravitatis non exhibeatur, demonstratum tamen est datum esse, cum ea ex quibus invenitur data sint: reique eo deducta erit ut nihil aliud supersit præter calculum, in quo nec vis ingenii, nec peritia artificis requiruntur, ideoque non is à nobis calculus exigitur; cur enim in iis immoraremur? sed tantummodo petimus demonstrari, res quæ proponuntur datas esse.

Verum doctissimi Geometræ, prorsus necessarium judicabunt & ab his postulamus, duarum propositionum, vel duorum casuum integram constructionem, seu integrum calculum.

Primus casus est, cum punctum Z constituitur in A.

Secundus cum idem punctum Z datur in B, in quod transit parallela GB ducta à puncto G centro circuli genitoris Cycloeidis.

Quod si aliquis error calculi in his duobus casibus subrepserit, eum libenter condonamus, & veniam quam ipsi peteremus facile promerebuntur.

Quisquis superius proposita, intra primam diem mensis Octobris anni 1658. solverit & demonstraverit, magnus erit nobis Apollo.

Et primus quidem consequetur valorem quadraginta duplorum aureorum hispanicorum quos ipsi Hispani *doblones* & galli *pistolles* vocant, vel certe, si mavult, ipsos duplos aureos.

Secundus vero viginti ejusmodi duplos aureos. Si unus tantum solverit, sexaginta solus habebit.

Et quia serio rem agimus, dictos sexaginta duplos aureos Illustrissimo Domino de Carcavy Regio Consiliario Parisiis commoranti, apud Celsissimum dominum ducem de Liencourt deponi curavimus, qui eos exsolvet statim ac demonstrationes quæ ad ipsum mittentur, veræ ac Geometricæ, à viris ab ipso ad id deputatis judicabuntur. Et cum Illustrissimum consiliarium, jam à multis annis virum probum, & matheseos amantissimum, agnoverimus, audacter pollicemur rem sincere & absque fallacia exequendam.

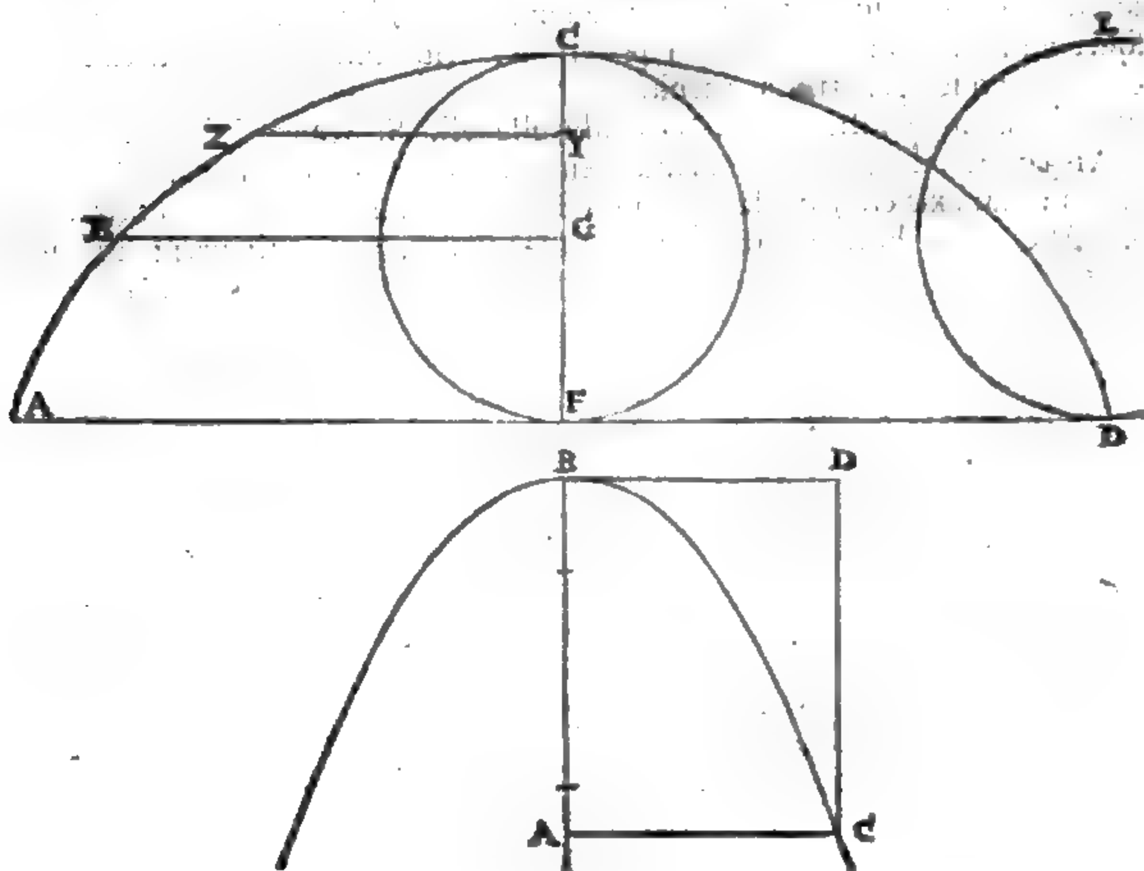
Quod si his circiter tribus elapsis mensibus nullus inveniatur qui quæsita nostra

nostra solverit, non denegabimus quæ ipsi invenimus, nec aliis invidebimus ussi de majora jam inventa nanciscantur, & ex quibus forsan apud posteros gratiam inibimus.

Hoc unum restat ut lineæ Cycloidis descriptionem exhibeamus, à qua brevitatis causa abstinendum arbitrabamur, cum hæc linea jampridem Galileo, Toricellio, & aliis innotuerit, sed quia eorum libri omnibus non sunt obnoxii, ideo hanc ex Toricellio damus.

Descriptio Cycloidis.

Concipiatur super manente recta linea A D, circulus D L contingens rectam D A in puncto D. noteturque punctum D tanquam fixum in peripheria circuli D L: tum intelligatur super manente recta D A converti circulum D L motu circulari simul & progressivo versus partes A, ita ut subinde aliquo sui puncto rectam lineam A D semper contingat, quousque fixum punctum D iterum ad contactum revertatur, puta in A. Certum est quod punctum D fixum in peripheria circuli rotantis A C, aliquam lineam describet, surgentem primo à subjecta linea A D, deinde culminantem versus C, postremo pronam descendentemque versus punctum A. Et talis linea vocata est Cyclois.



SCRIPTORUM POSTERIUS.

CUM circa ea quæ de Cycloide proposuimus duo orta esse dubia, nobis Illustrissimus D. D. De Carcavy significaverit, his statim occurrendum duximus, & ita occurrimus.

Prius inde oritur, quod in proponendis nostris de Cycloide problematis hac voce usi fuerimus, *in quacumque Cycloide*, cum tamen unius tantum speciei Cycloidis definitionem attulerimus. Verum nihil aliud intelleximus præter solam illam simplicem naturalem ac primariam Cycloidem cujus ex Toricellio descriptionem dedimus, cum enim quæ de illa resolvuntur facile sit ad omnes alias species protrahere, qui nostra problemata de hac sola solverit, nobis omnino satisfecerit.

Posterius in eo consistit, quod à nobis non sit præcise positum an supponamus datam esse rationem basis Cycloidis A F, cum sua altitudine, seu cum diametro circuli genitoris F C. Sed ipsam datam esse rationem pro concesso usurpandum arbitrabamur, & ut omnino æquum est datam esse supponimus.

Nihil ergo jam superest obscuritatis. Unum tamen restare videtur ut doctissimos geometras ad propositiones nostras commodius & libentius investigandas invitemus: scilicet ea omnia removere quæ à perspicacitate ingenii, quam solam magni facimus & explorare ac coronare instituimus, sunt aliena, qualia sunt tam calculus integer multorum casuum quem postulabamus, quam absoluta solutionum conscriptio, cum ea non à viribus ingenii, sed ab aliis circumstantiis pendeant. Hoc itaque tantummodo jam instituimus ut sola problematum difficultas remaneat superanda. Nempe

Qui publico instrumento, intra præstitutum tempus, Illustrissimo Domino *de Carcavi* significaverit, eorum quæ quæsita sunt demonstrationem penes se habere; & aut ipsammet demonstrationem quantumvis compendiosam ad ipsum miserit; aut si cartæ mandare nondum per otium licuerit, saltem ad confirmandam suæ assertionis veritatem, casus quem mox designabimus calculum dederit; seque paratum esse professus fuerit omnia omnino demonstrare ad ipsius D. *de Carcavi* nutum, hunc nobis satisfecisse declaramus, & consentimus, primum qui hæc fecerit primo, secundum secundo, præmio donandum, si sua solutio ab ipso D. *de Carcavi* virisque, ad id secum adhibitis, cum ipsi visum fuerit, exhibita, Geometrica ac vera judicetur, salvo semper erroris calculo.

Casus autem cujus solius sufficiet calculus ille est. Si Semicyclois A C F circa basim AF convertatur, & Solidum inde genitum secetur plano per ipsam A F (quæ jam hujus solidi axis est) ducto, quod quidem, solidum dividet in duo Semisolida paria. Alterutrius horum Semisolidorum centrum gravitatis assignari postulamus.

DE

DE

CYCLOIDE

ET

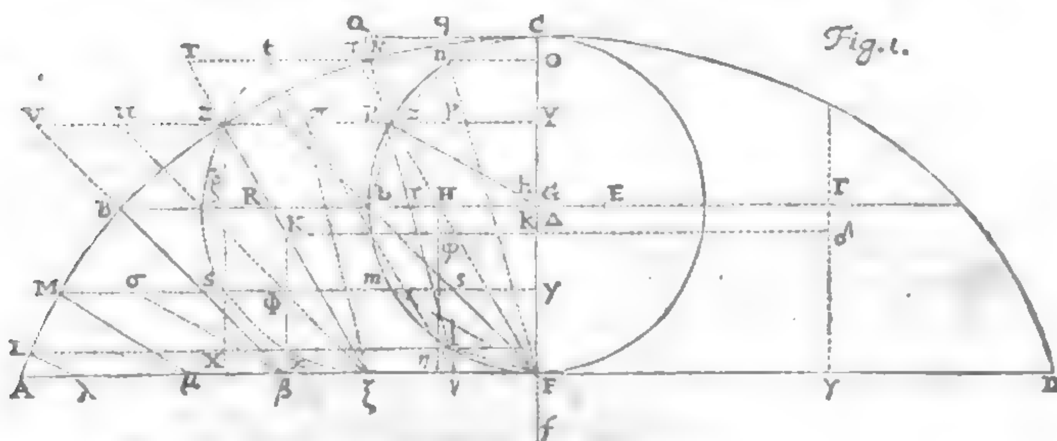
CORPORIBUS

Inde genitis, Problematum Solutio.

PARS PRIOR.

§ 1. MAnifestum est, in constructione Cycloidis, Peripheriam Circuli generantis, propter continuam sui quæ supponitur ad rectam D A applicationem, huic æqualem esse: Adeoque & semissem semissi, &c. *Recta* Z Γ.

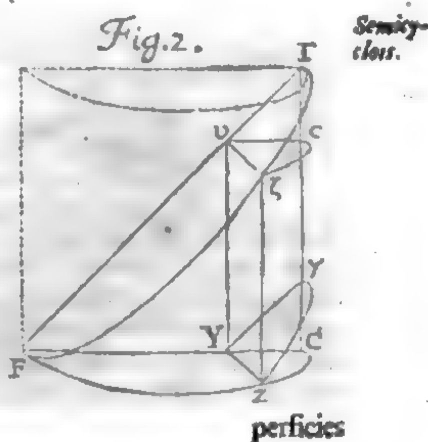
2. Et quidem, particulatim, dum Circulus Genitor, basin in ζ contingens,



puncto suo lineante designat Cycloidis punctum Z, manifestum est (propter eandem continuam ἐφαρμογὴν) rectam ζ A congruere curvæ ζ Z, hoc est (ducta Z z basi parallela, quæ occurrat in z circulo C z F circa Cycloidis axem) curvæ F z: Adeoque & reliquam reliquæ: nempe ζ F, hoc est Z z, ipsi z C. Et sic ubique.

3. Recta igitur Z Y æquat ubique aggregatum Arcus & Sinus recti, Sinui verso C Y convenientium.

4. Si super circulo C z F circa Cycloidis Axem constituto, aut huic æquali, erigatur Cylindrus rectus F z C Γ, altitudinem habens C Γ, diametro Basis æqualem: Tota superficies hujus Cylindri (cum basibus,) est dupla Cycloidis A C D F; (nempe duæ bases Cylindri fig. 2. sunt duplæ circuli C z F fig. 1. & Cylindrica superficies curva, dupla reliquorum segmentorum:) Atque si eadem superficies (*Superficies*, inquam; non Cylindrus, ne novæ superficies secando emergant) plano F C Γ per axem bisecetur: Semisuperficies Cylindri erit dupla Semicycloidis A F C; (nempe duæ semibases, sunt duplæ semicirculi C z F fig. 1; & Semicylindrica su- *Semicycloïs.*



 perficies

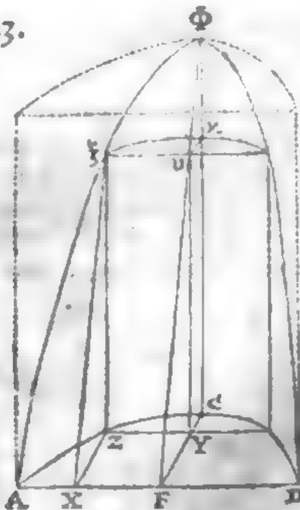
perficies curva, dupla trilinei C A F z :) Et denique si ea Semisuperficies bisecetur adhuc plano elliptico F ζ Γ υ quod plano F C Γ rectum sit; Semisuperficiei illius semissis Γ ζ F z C Y F æquabit Semicycloidem C A F ; (nempe Semicirculus basis C z F fig. 2. æquabit Semicirculum C z F fig. 1. & superficies curva Γ ζ F z C Γ æquabit trilineum C A F z.)

5. Nam, sumpto ubivis in Cycloidis axe puncto Y, unde parallela basi ducatur Y z Z : rectæ C Y in axe Cycloidis sumatur C Y æqualis in diametro basis Cylindricæ, unde ducatur Y υ lateri C Γ parallela, diagonali F Γ occurrens in υ; & per punctum υ, plano basi F z C parallelo, puta υ ζ c, secetur superficies Cylindrica sectionem exhibens ζ c arcum circuli, qui (propter parallelas) congruet arcui z C in base Cylindri, hoc est arcui z C circuli genitoris, adeoque z Z rectæ æqualis, (sicut υ ζ congruit rectæ Y z sive in base Cylindri sive in circulo generante.) Quod cum ubique fiat, erunt omnes curvæ in superficie Cylindrica Γ ζ F z C Γ, ipsi ζ c parallelæ, æquales rectis omnibus ipsi z Z parallelis in Trilineo Cycloidis C A F z, & singulæ singulis, & similiter positæ (in eisdem puta sive à base sive à vertice distantiis:) Adeoque, propter æqualem etiam utriusque figuræ altitudinem, figura figuræ æqualis : superficies Cylindrica, plano Trilineo ; (sed & segmenta illius respectivis segmentis hujus, ut patet :) Et si addantur utrobique æquales Semicirculi C z F, erit aggregatum aggregato æquale, & duplum duplo, quadruplum quadruplo, &c. Hoc est, superficies Γ ζ F z C Y F, Semicycloidi A C F ; & Semisuperficies Cylindri (quippe istius dupla) Cycloidi A C D F ; & tota superficies, hujus dupla. Quod erat propositum.

Cyclois Circuli tripla. 6. Est igitur Cyclois A C D F, circuli genitoris tripla. Quod sic colligitur. Cylindri integri modo expositi superficies curva, æquatur facto ex altitudine (quæ æqualis est diametro Basis) in basis Circumferentiam ; adeoque est quadrupla Circuli basis : Cui si basis utraque adjiciatur, aggregatum erit, baseos (hoc est circuli genitoris) sextuplum. Est autem, ut supra ostensum est, duplum Cycloidis : Ergo Cyclois ipsa est circuli Genitoris Tripla. Nempe Trilineum C A F z Semicirculi C z F duplum.

Segmentum CYZ. 7. Porro, si exposita quæ prius superficies (nempe Semisuperficei Cylindricæ semissis) Γ ζ F z C Y F, secetur adhuc plano z γ Y, quod sit plano elliptico F ζ Γ υ parallelum : Superficies abscissa γ z C Y z, æquabit segmentum Cycloidis C Y Z. Nam, propter Cylindricæ superficiei sectiones parallelas, congruet γ z C ipsi Γ ζ c, hoc est Trilineo C z Z Cycloidis; sed & C Y z utrobique æqualis ; Ergo aggregatum aggregato æquale.

Solidum axis AD. 8. Si super Cycloide A C D erigatur Semicylindrus rectus, sive Prisma, (utrovis enim nomine dicatur perinde est) altitudinem habens C Φ duplam rectæ A D; quod per axem secet F C Φ planum, sectionem in latere faciens C Φ rectam; cui plano intelligatur planum aliud recte insistens, per rectam F Φ transiens, solidum abscindere D A Φ C D : Huic solido æquatur solidum factum ex conversione Cycloidis A C D circa rectam A D. Cum enim sit A D æqualis peripheriæ diametri F C ; erit ipsius dupla C Φ, æqualis peripheriæ Semidiametri F C ; adeoque (propter angulum F C Φ rectum) triangulum F C Φ æquatur circulo ex conversione radii F C facto. Et similiter ostendetur triangulum X Z ξ æquale circulo radii X Z : & sic ubique. Ergo omnia Triangula omnibus circulis, adeoque solidum solido æquatur; & segmenta segmentis respective sumptis : Puta,



solidum X Z ξ A, solido ex conversione plani X Z A facto; & sic ubique : Item Prisma X Z ξ υ Y F solido ex conversione Parallelogrammi X Z Y F; adeoque & solidum Z Y C Φ υ ξ solido Cylindrice excavato conversione plani Z Y C circa rectam A F facto. Sin adhuc secetur plano ξ υ κ basi parallelo, segmentum Φ ξ υ κ æquabitur solido ex conversione plani Z Y C circa rectam Z Y facto. Nam & hic eodem modo ostendetur, triangulum υ κ Φ æquale circulo radii υ κ ; & de reliquis similiter.

9. Simili-

9. Similiter, si super Semicycloide A F C erigatur Prisma, sive Cylindri recti quadrans, altitudinem habens A V, quæ sit ad A F, ut 4 A F ad F C; (nempe ut circuli Perimeter ad Radium;) secetur autem plano F C V: Solido F V C Z A æquatur solidum ex conversione plani F C Z A circa rectam F C; & segmenta segmentis respective sumptis; puta segmentum Y Z Ψ C segmento conversione plani Z C Y facto. Nam & hic triangulum F A V æquatur circulo radii F A; & Triangulum Y Z Ψ circulo radii Y Z: Et sic ubique. *Solidum axis F C.*

10. Atque hactenus quidem utut tum planorum tum solidorum omnium expositorum dimensionem aliquatenus hac methodo tradidisse videamur: Cum tamen de Gravitatis Centris nihil hinc constet, libet in sequentibus, resumpto iterum toto negotio, rem aliter expedire, hoc modo.

11. Ut supra ostendimus rectam z Z fig. 1. æqualem arcui z C: ita ostendetur, angulum Z ζ A, hoc est z F A, arcui Z ζ sive z F, hoc est rectæ A ζ, proportionalem esse: (nempe, ut arcus F z, hoc est A ζ recta, ad arcum F z C, hoc est rectam A F, sic esse angulum Z ζ A vel z F A, ad C F A rectum:) propter angulum z G F anguli z F A ubique duplum, & propterea utrumque arcui F z ubique proportionalem. *Angulus Z ζ A. Fig. 1.*

12. Adeoque, divisa recta A F in partes quotlibet æquales, in punctis λ, μ, β, ζ, &c. ductisque rectis λ L, μ M, β B, ζ Z, &c. à puncto contactus ad punctum lineans, (quibus parallelæ existunt in circulo F l, F m, F b, F z, &c.) anguli L λ A, M μ A, B β A, Z ζ A, &c. sunt Arithmetice-proportionales; quorum continuus excessus primo æqualis est, nempe angulo L λ A.

13. Ductis itaque tum in Cycloide rectis λ L, μ M, β B, ζ Z, &c. tum ipsis respondentibus in circulo F l, F m, F b, F z, &c. distribuentur Semicyclois & Semicirculus in segmenta numero æqualia; singula singulis (respective) correspondentia.

14. Ductis item in Cycloide, à punctis ν, ζ, β, &c. rectis ν π, ζ ρ, β σ, &c. quæ parallelæ sint rectis ζ Z, β B, μ M, &c. Erunt anguli omnes N ν π, Z ζ ρ, B β σ, &c. æquales tum inter se, tum angulo L λ A, tum etiam cuilibet angulorum A F l, l F m, m F b, &c. qui item (propter æquales arcus F l, l m, m b, &c.) sunt inter se æquales.

15. Ductis porro tum in Cycloide rectis N O, Z P, B R, &c. tum in circulo n O, z p, b r; &c. inscribatur tum Cycloidi figura ex Trapeziis, tum circulo figura ex Triangulis correspondentibus constans.

16. Erunt autem illa Trapezia, Triangulorum horum respective sumptorum, ubique plusquam tripla. Constat enim quodlibet Trapeziorum, ex Triangulo simul & Parallelogrammo: quorum illud, triangulo correspondenti in circulo (ut ex dictis facile colligitur) ubique æquale est; hoc illius (ut jam ostendetur) plusquam duplum.

17. Nam, verbi gratia, in Trapezio O N ν F, Triangulum O n F est utrique figuræ commune; & Parallelogrammum N n F ν (æquialtum) plusquam duplum Trianguli, propter rectam N n, hoc est curvam n C, majorem n O recta.

18. Sin aliud sumatur Trapezium, puta P Z ζ ν; Erit inibi Triangulum P ν π, Triangulo p F z æquale; & Parallelogrammum Z ζ ν π plusquam duplum, propter rectam Z π, hoc est, ζ ν, hoc est curvam z n, majorem quam z p, vel π P. Nam si aptetur chorda z n; erit angulus p F Y (propter tum semiperipheriam C z F, tum angulum rectum C F A, in sex partes æquales divisum) $\frac{1}{6}$ anguli recti; adeoque angulus Y p F, hoc est z p n, $\frac{5}{6}$ recti; cui si addatur angulus n z p, qui est $\frac{3}{6}$ recti, (subtendit utique duplo arcus z C, minus z n;) aggregatum $\frac{8}{6}$ recti ex 2 rectis subductum, relinquet angulum z n p, $\frac{4}{6}$ recti. Major itaque est angulus z p n angulo z n p, (nempe ut 5 ad 4,) adeoque latus oppositum z n recta, major quam z p; ideoque à fortiori, z n curva, hoc est recta Z π, multo major erit quam recta z p, hoc est π P. Et similiter ostendetur (inscripta chorda b z) angulum b r z majorem esse angulo b z r, (nempe ut 4 ad 3,) & sic alibi. Nempe, universaliter, si

ſi ponamus arcum ſemicirculi C F, adeoque angulum rectum C F A, dividi in partes æquales numero s; quarum arcus z C, adeoque & angulus z F C, contineat partes numero n, (adeoque angulus p F C partes $n - 1$, & propterea angulus Y p F, hoc eſt z p n, partes $s - n + 1$;) erit angulus n z p partium $2n - 1$; qui ſi addatur angulo z p n, & utriuſque aggregatum $s + n$ ex duobus rectis, hoc eſt ex $2s$, auferatur; manebit angulus z n p partium $s - n$, minor angulo z p n partium $s - n + 1$.

19. Sin iſtiuſmodi figuræ tum Cycloidi tum Circulo circumſcribantur; erunt ſingula Cycloidis Trapezia, reſpectivorum Circuli Triangulorum, minus quam tripla. Triangula ſiquidem erunt in utraque figura æqualia; Parallelogramma minus quam dupla Triangulorum; cum æque alta ſint, ſed ſuper minore baſe.

Fig. 1.

20. Nam, verbi gratia, In Trapezio C Q ν F, recta Q q, hoc eſt ν F recta, hoc eſt arcus n C, minor eſt tangente q C. Utut enim ſecans F q, non à centro G, ſed ab oppoſito diametri termino F ducatur, adeoque minor ſit q C quam Tangens vulgo dicta quæ rectæ à G centro per arcus terminum n tranſeunti occurrat; eſt tamen ipſo arcu n C major; Nam ſi intelligatur à centro G duci recta rectæ F q parallela; biſecabit illa tum arcum n C, tum rectam q C; adeoque erit q C æqualis duabus Tangentibus Semiarcus, quas ſimul ipſo arcu majores eſſe conſtat.

21. Atque eodem fere modo oſtendetur, n τ, hoc eſt N t, majorem eſſe quam eſt n z curva, hoc eſt recta T t; item z ν, hoc eſt Z u, majorem quam z b curva, hoc eſt recta V u; & in reliquis pariter. Et quidem quo longius à puncto C receſſum eſt, eo inſignior erit exceſſus. Nam, in ejuſmodi Triangulo quovis, ut z F ν, fig. 1. vel 7. arcum z b intercipiente; continuata ν z, donec occurrat Diametro C F in Y; ductiſque tum ſubtenſa b C, tum b x Tangente quæ occurrat rectæ ν z (extra Peripheriam) in x: Manifeſtum eſt, propter æquales angulos x b C, ν F C, (communem arcum b C intercipientes;) eorum item ad rectum reſiduos x b ν, F ν Y, æquales eſſe; ideoque & rectas x b, x ν, invicem æquales: Et, propterea, rectam ν z, æqualem duabus b x, x z, majorem curva b z. Et ſic ubique.

Semicycloïs ſemicirculi tripla.

22. Quoniam igitur figura ſic circumſcripta Semicycloidi C Z A, aut ipſius parte C Z, (utrobique enim eodem modo procedit demonſtratio,) minor eſt quam tripla figuræ Semicirculo C z F, aut ipſius parti C z, circumſcriptæ, (quotcunque fuerint illic Trapezia, hic Triangula;) inſcripta vero inſcriptæ major quam Tripla: Et quidem augendo illic numerum Trapeziorum, hic Triangulorum, eo tandem devenietur utrobique, ut differentia figuræ inſcriptæ à circumſcripta minor futura ſit quavis aſſignata, (adeoque in infinitum procedendo evaneſcat:) erunt tum figuræ ſingulæ quadrilineæ (qualis B β ζ Z) ſingularum reſpective ſumptarum Trilinearum (qualis b F z,) tum omnes omnium, Triplæ. Hoc eſt, tum Semicyclois C Z A F Semicirculi C z F, tum iſtius ſegmentum B β ζ Z ſectoris hujus b F z, tum Segmentum Z A ζ ſegmenti z F z, tum ſegmentum Z ζ F C ſectoris z F C, (& ſic ubique) triplum.

Segmentum CZY.

23. Jam vero, ex ductu Semiradii ($\frac{1}{2}$ G z) in arcum z C, hoc eſt rectam Z z, habetur ſector G z C; atque ex ductu ſemiradii ($\frac{1}{2}$ G F) in altitudinem z Y, habetur Triangulum G z F: Ergo ex ductu Semiradii in totam Z Y, habetur ſector F z C: Atque ex ductu Seſquiradii in eandem Z Y, habetur ſegmentum ζ Z C F: Unde, ſi auferatur ζ Z Y F trapezium, habetur dimenſio ſegmenti C Z Y quæſita: Vel etiam, ſubducto inſuper C z Y, habetur C z Z trilineum.

Solidum axis A F.

24. Porro, Quoniam ſi ponamus ſemicirculum ex infinitis trilineis, qualia C n F, n z F, &c. vel etiam (nam & hoc, propter infinitatem, adeoque & approximationem in infinitum, tantundem valet,) ex infinitis triangulis, qualia O n F, p z F, &c. conſtare: ponendum & ſemicycloeidem conſtare ex totidem quadrilineis, ut C N τ F, N Z ζ ν, &c. vel etiam trapeziis numero infinitis, ut O N τ F, P Z ζ ν, &c. quorum quodvis exhibeat tum Triangulum tum Parallelogrammum iſtius duplum. Ex converſione autem Parallelogrammi, ut N F, circa axem A F, fiet Cylindrus, ſaltem diſtortus; & ex ſimili converſione Trianguli, ut O n F, in hoc ſitu, fiet ſimilis Cylindrus conice excavatus, qui erit $\frac{2}{3}$ cylindri pleni: Ex converſione igitur Trapezii, ex parallelogrammo ſimul & triangulo conſtantis, fit ſolidum quod ad ſolidum converſione Trianguli eſt ut $1 + \frac{2}{3}$ ad $\frac{2}{3}$, ſive ut 5 ad 2. Quod cum ubique fiat; erit ſolidum ex converſione cycloidis, ad ſolidum ex converſione circuli circa rectam A F, ut 5 ad 2. (Quod ipſum etiam ſic colligitur. Centrum gravitatis Trapezii P Z ζ ν diſtat ab A F, per $\frac{5}{9}$ rectæ F Y; centrum autem gravitatis Trianguli p z F ab eadem A F recta, diſtat $\frac{2}{3}$ vel $\frac{6}{9}$ ejuſdem F Y: Centrorum

trorum itaque ab A F distantiæ sunt ut 5 ad 6; Et magnitudines ostensæ sunt ut 3 ad 1. Ergo quæ ex illis componitur, sive momentorum respectu A F rectæ, sive solidorum circa eandem A F conversione factorum, ratio, est ut 5 ad 2. Nempe $\frac{5}{6}\times\frac{3}{1}=\frac{5}{2}$.)

25. Ex ea vero conversione circuli, fiet annulus (ut loquuntur) clausus, æqualis Cylindro cujus basis est ille circulus, & altitudo æqualis istius circuli circumferentiæ, hoc est rectæ A D, fig. 1. Solidum itaque ex ea conversione Cycloidis, æquatur Cylindro cujus basis est idem circulus C F, & altitudo æqualis rectæ quæ sit ad istius circumferentiam ut 5 ad 2; hoc est, dupla sesqui altera rectæ A D. (Est utique annulus ille $\frac{1}{4}\mathcal{D}\mathcal{P}\times\mathcal{P}=\frac{1}{4}\mathcal{D}\mathcal{P}^2$; & solidum illud Cycloidicum $\frac{5}{8}\mathcal{D}\mathcal{P}^2$. Intelligendo scilicet per $\mathcal{D}$, diametrum, &, per $\mathcal{P}$, peripheriam circuli generantis: ut & deinceps alibi passim.)

26. Sed & pari argumento de partibus judicandum erit. Nempe tum solidum *Segmenta*
ex conversione segmenti ζ Z A, ad solidum ex conversione segmenti F z F; tum *solidi cir-*
solidum ex conversione Quadrilinei ζ Z C F, ad solidum ex conversione sectoris *ca A F.*
F z C; tum solidum ex conversione Quadrilinei β B Z ζ, ad solidum ex conversione sectoris b F z; est ut 5 ad 2. Dantur autem hæc, ergo & illa.

27. Sed & insuper, si ex solido ex conversione quadrilinei ζ Z C F, auferatur solidum ex conversione trapezii ζ Z Y F, manebit annulus conversione segmenti C Z Y circa axem A F factus; qui itaque datus est.

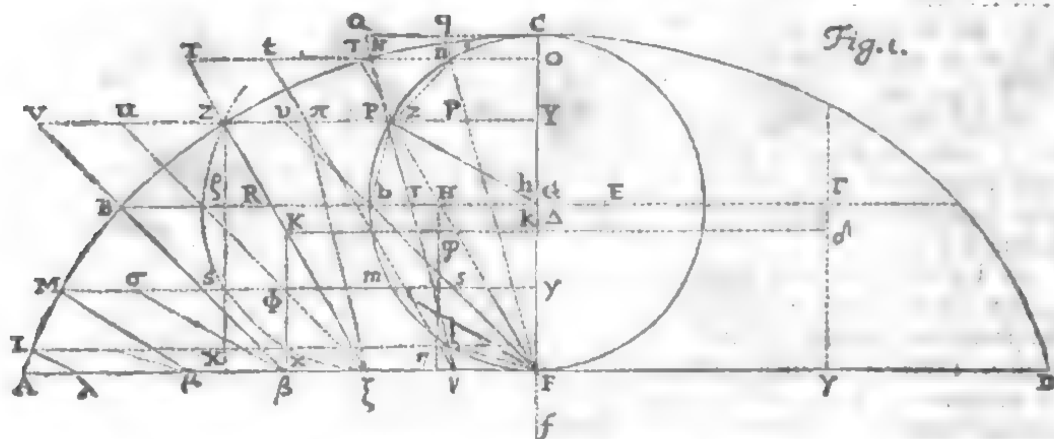
28. Est autem Annulus ille, æqualis solido Z Y C φ ν ξ fig. 3. (ut § 8. ostendi- Fig. 3
tur;) unde si auferatur datum prisma Y Z ξ ν κ C (cujus basis est segmentum modo repertum C Z Y, altitudo Y ν, quæ est ad C φ sive 2 A D, ut F Y ad F C;) quod superest solidum φ ξ ν κ æquatur solido ex conversione segmenti C Z Y circa rectam Z Y facto.

29. Ut vero habeamus solidum ex conversione Semicycloidis circa rectam C F, *Solidum*
ejusque solidi segmenta, libet paulo immutare constructionem, (nulla necessitate, *axis C F.*
sed phantasiæ juvandæ gratia.) Nempe cum prius ostendimus, in figura circumscripta, Trapezii-Parallelogrammum minus esse quam Trianguli duplum, sed ma- Fig. 1.
jus in figura inscripta; differentiam vero utrobique (sectione in infinitum continuata) evanescere; adeoque reapse perinde esse sive inscriptæ sive circumscriptæ figuræ Trapezia perpendamus, (& de Triangulis similiter:) Commodum jam videtur viam inter utramque mediam sectari, adeoque tum Trapezia Cycloidis, tum Triangula circuli, partim circumscribere, partim inscribere; puta pro Trapezio Z ζ ν P fig. 1. Trapezium V β ν P: &, pro Triangulo z F p, Triangulum ν F p substituendo; ut tum illic recta Z ζ Trapezium, tum hic recta z F Triangulum, quasi medium secet. (Utut enim in sectione definita V Z major sit quam Z P, & ν z quam z p, hæc tamen differentia, sectione in infinitum continuata, evanescit; adeoque in figuris infinite exiguis, tum Trapeziis tum triangulis, supponenda est æqualitas.) Sed & insuper, si libet, licebit (ducta recta ζ ϖ) Trapezii Triangulum ν ζ ϖ parallelogrammo medium interponere; adeoque substituere, pro uno parallelogrammo integro, duo parallelogramma dimidia V ζ & ζ P (supponitur utique, propter continuatam in infinitum sectionem, tum Z ϖ, ϖ P, tum ζ ν, ϖ P, invicem æquales esse;) quæ duo parallelogramma dimidia tantundem circumvolvendo præstant sive rectæ Z ζ utrinque contigua, sive æqualiter utrinque remota fuerint: cum sit idem utrobique centrum gravitatis. (Supponimus enim, quod & facile si opus sit probabitur, planum quodvis tantundem hujusmodi conversione producere quantum est quod fit ex eodem plano in lineam ipsius centro gravitatis descriptam ducto; quod & de linea quavis sive recta sive curva in eo plano descripta pariter intelligendum est. Quod quidem quum ipse olim me primum invenisse putaverim, monitus mox eram nonnihil apud Guldinum exstare quod huc spectat. Id autem si animadvertisset Tacquetus, dum *de Cylindricis & Annularibus* acutum opus conscripsit, non parum illi fuisset adjumento; multaque quæ illic exstant tum universalius tum & contractius forte fuissent tradita. [*Quod & Tacquetus tandem deprehendit, ut patet ex ejus libro Quinto, Anno* 1659 *edito, primoribus Quatuor Anno* 1651 *editis, addendo*]

30. Re sic constructa; Ratio Solidi ex conversione Trapezii V β ν P, ad solidum ex conversione Trianguli ν F p; componitur ex ratione Trapezii ad Triangulum, (hoc est, sectione in infinitum continuata, ut 3 ad 1;) atque ex ratione distantiarum centri gravitatis in utraque figura à conversionis axe; Nempe, in

Trapezio,

Trapezio, puncti K, quod ita dividit rectam Zζ, ut sit ζK ad Zζ, ut 5 ad 9; (adeoque distantia Kk erit zZ + $\frac{5}{9}$zY;) In Triangulo, puncti H, quod ita dividit rectam Fz, ut sit FH ad Fz ut 2 ad 3; (adeoque distantia Hh est $\frac{2}{3}$zY.) Ratio itaque distantiarum est, ut zZ + $\frac{5}{9}$zY ad $\frac{2}{3}$zY; sive ut 3zZ + $\frac{5}{3}$zY ad 2zY; quæ si cum ratione planorum 3 ad 1 componatur, emergit solidorum ratio ad invicem ut 9zZ + 5zY ad 2zY; sive, ut 5zY ad 2zY (hoc est, ut 5 ad 2,) atque insuper ut 9zZ ad 2zY. Quod quidem cum ubique fiat, sitque eadem ubique ratio 5zY ad 2zY, adeoque & omnium ad omnes; non autem eadem ubique ratio 9zZ ad 2zY, sed neque æqualia ubique triangula νFp circumducta, (quorum si utrumvis esset, pro omnibus 9zZ ad 2zY, ponendum esset 18 ad 2; quia nempe omnes zZ ad omnes zY, hoc est trilineum CAFz ad semicirculum CzF, est ut 2 ad 1; quum autem eorum neutrum sit, non licet sic arguere;) præter rationem illam 5 ad 2, quærenda est alia ratio; nempe quam habeat noncuplum omnium zZ (sive zC arcuum Arithmetice proportionalium) in respectiva Triangula νFp, ad duplum omnium zY (sinuum rectorum eorundem arcuum) in eadem respective triangula. Hoc est (propter triangulorum



bases æquales) noncuplum arcuum Arithmetice proportionalium, in residuorum sinus versos ductorum (utpote Triangulorum altitudines;) ad duplum sinuum rectorum in eosdem sinus versos, Hoc est (ut deinceps fusius ostendetur § 74, &c.) ut differentia quadratorum basis AF & altitudinis CF, ad $\frac{2}{9}$ quadrati CF, sive ut 9AFq − 9CFq ad 2CFq. Cui si adjungatur ratio 5 ad 2, hoc est 5CFq ad 2CFq; fiet 9AFq − 4CFq ad 2CFq, ratio solidi ex semicycloidis conversione circa CF, ad sphæram circuli genitoris.

Segmenta solidi circa CF. 31. Eodem fere modo etiam de solidis ex conversione segmentorum arguendum. Nam & hic omnia minuta Trapezia segmenti, verbi gratia ζZCF, circumducta: ad omnia minuta Triangula sectoris FzC sic circumducta, circa eandem rectam CF: sunt ut 5 ad 2, atque insuper, ut noncuplum omnium zZ in respectiva Triangula, ad duplum omnium zY in eadem triangula: sin ex hoc demum solido, auferatur solidum ex conversione Trapezii ζZYF circa rectam CF factum; manebit solidum ex conversione segmenti CZY circa rectam CY.

32. Et pari fere processu, si demissa recta ZX rectæ CF parallela abscindi intelligatur segmentum ZXA; istius segmenti tum dimensio, tum & solidi inde facti, sive conversione circa rectam CF, sive circa rectam ZX, facile colligitur. Sed hæc inter quæsita non sunt.

Centrum Gravitatis Semicycloidis. 33. Ad centrum gravitatis inveniendum, supponimus ob datas CF, AD, fig. 1. datam esse circuli quadraturam; adeoque & centrum gravitatis in segmentis. Nam ut, ex dato centro gravitatis in circuli segmentis, colligi posse circuli quadraturam, jam ab aliis ostensum est; sic vice versa, ex data quadratura facile colligitur centrum gravitatis in segmentis. (Quod, si opus sit, deinceps ostendetur § 67. & seqq.)

Quantum distat à CF. 34. Ponamus itaque primo centrum libræ in G, & rectam CF lineam æquilibrii (libræ transversam:) sitque utriusvis semicirculi CF centrum gravitatis punctum E (in circuli diametro basi Cycloidis parallela.) Quoniam vero momentum semicycloidis ad momentum semicirculi, respectu lineæ CF; est in ratione composita

ex

ex rationibus magnitudinum, & distantiarum centri gravitatis ab eadem æquilibrii linea CF; atque ex eisdem rationibus componatur ratio solidorum ex eorundem planorum circa CF conversione genitorum, (ut supra insinuatum est § 29.) eadem erit momentorum ratio, atque ratio solidorum sic genitorum. Nempe, ut 9 AFq — 4 CFq ad 2 CFq. Ut § 30. dictum est.

35. Ducta itaque Ge basi Cycloidis parallela, quæ sit ad GE, ut 9 AFq—4 CFq ad 2 CFq: Si intelligatur ex puncto e suspendi æqualis semicirculus, æquiponderabit ille semicycloidi oppositæ in suo situ. Quoniam vero magnitudo semicycloidis est ad magnitudinem semicirculi, ut 3 ad 1; si sumatur (in utravis semicycloide) recta GΓ (basi parallela) quæ sit ad Ge, ut 1 ad 3; & ducatur recta Γγ rectæ CF parallela; erit centrum gravitatis istius semicycloidis in recta Γγ.

36. Ponamus deinde Centrum libræ in F, & rectam AD lineam æquilibrii. Quoniam momentum semicycloidis ad momentum semicirculi, respectu rectæ AD, est in ratione composita ex rationibus magnitudinum, & distantiarum centri gravitatis ab eadem AD; adeoque in eadem ratione cum solidis ex conversione circa rectam AD factis, hoc est (ut supradictum est § 24.) ut 5 ad 2; Si in continuata GF, sumatur Ff, quæ sit ad FG ut 5 ad 2; semicirculus in puncto f, æquiponderabit semicycloidi in suo situ: Cumque semicyclois sit ad semicirculum ut 3 ad 1; si sumatur (in recta FG) recta FΔ, quæ sit ad Ff ut 1 ad 3; atque à puncto Δ ducatur basi Cycloidis parallela Δδ (rectæ Γγ occurrens in δ,) erit centrum gravitatis semicycloidis in recta Δδ; adeoque in illius puncto δ. *Quantum distat ab AF.*

37. Atque ex iisdem principiis, eodem fere processu, colligetur Centrum Gravitatis segmenti CZY. Erit enim momentum segmenti CZY ad momentum segmenti CzY respectu lineæ æquilibrii CF, ut solidum istius ad solidum hujus conversione circa eandem CF factum: sed hæc ratio dari supponitur ex § 31; ergo & illa: Esto ut α ad ϐ. Sed & data est ratio magnitudinis ad magnitudinem, per § 23: Esto hæc ut α ad γ. Datur item segmenti CzY centrum gravitatis (ut § 33. supponitur, & § 67. &c. deinceps ostendetur;) adeoque & ipsius distantia ab æquilibrii linea CF: Esto ea ι. Erit itaque, propter $\frac{\alpha}{\gamma}) \frac{\alpha}{\beta} (\frac{\gamma}{\beta}$, Distantia centri gravitatis segmenti CZY ab eadem CF recta, ad distantiam ι, ut γ ad β. (Nempe in ratione quæ componitur ex ratione momentorum, α ad β; atque reciproca magnitudinum, γ ad α.) puta $\frac{\gamma}{\beta}$. *Centrum gravitatis segmenti CZY.*

38. Similiter momentum segmenti CZY ad momentum segmenti CzY, respectu lineæ ZY, est ut solidum istius ad solidum hujus conversione circa rectam ZY factum. Sed hæc ratio superius data est, per § 28; Ergo & illa. Esto ut α ad δ. Magnitudinum autem ratio (ut prius) ut α ad γ. Distantia vero centri gravitatis segmenti CzY à recta ZY, sit ζ. Erit distantia centri gravitatis segmenti CZY ad distantiam ζ, ut γ ad δ. Nempe $\frac{\gamma\zeta}{\delta}$.

39. Cum itaque data sit istius distantia tum à recta CF, tum à recta ZY, (atque intra ipsum segmentum esse constet,) datur & ipsum gravitatis centrum quæsitum.

40. Deinde, ad inveniendum centrum gravitatis in solidis; Supponimus ut supra in segmentis circularibus, ita jam in sphæralibus segmentis centrum gravitatis datum esse: vel, si exigatur, parati sumus exhibere, ut infra § 67 & seqq. *Centrum solidi circa AF.*

41. Ponamus jam solidum factum ex conversione Semicycloidis CAF circa rectam AF, secari plano quod plano CAF recte insistat in AF recta, semisolidum abscindens; cujus propterea centrum gravitatis in plano CAF esse manifestum est.

42. Deinde, cum solidum sive ex conversione, sive ex semiconversione Trapezii VβιP (circa rectam AF,) ad solidum ex simili conversione vel semiconversione trianguli ιFp, sit ut 5 ad 2, (ut § 24 ostensum est;) quærantur utriusque centra gravitatis, ut habeatur ratio distantiarum tum à recta AF tum à recta CF.

43. Habetur autem solidi ex semiconversione Trapezii centrum gravitatis, si in recta ζZ intelligatur punctum K abscindere rectam ζK quæ sit ad ζZ ut 7 ad 10 (quod quidem centrum gravitatis esset si curvatura figuræ demeretur; puta, si pro

singulis semicirculis sive superficiebus semicylindricis circa axem A F intelligantur totidem lineæ rectæ vel superficies planæ plano C A F ad angulos rectos positæ atque ab eo bisectæ;) atque deinde in recta K κ quæ sit basi A D perpendicularis, sumatur (propter curvaturam) ut C F ad F A, (hoc est, ut Diameter ad Semiperipheriam circuli,) sic κ Φ ad κ K, (qua nempe ratione dividendus est axis semicirculi ut habeatur Semiperipheriæ centrum gravitatis :) Erit Φ centrum gravitatis solidi ex semiconversione Trapezii V β ν P circa rectam A F.

44. Centrum autem gravitatis solidi ex semiconversione Trianguli, habetur, si à rectæ F z puncto H, quod jam intelligatur abscindere rectam F H, quæ sit ad F z, ut 3 ad 4, (quod nempe centrum gravitatis esset si demeretur curvatura,) perpendicularis H ν intelligatur (propter curvaturam) ita dividi in φ ut modo divisimus K κ in Φ. Erit utique φ centrum gravitatis solidi ex semiconversione Trianguli ν F p circa rectam A F. (Quamquam revera perinde omnino est ad hoc negotium an omnino reperiantur puncta Φ, φ, an tantum puncta K, H : Nam eadem est distantia, quantum ad rectam C F, punctorum K & Φ, item punctorum H & φ ; &, quantum ad rectam A F, eadem saltem distantiarum ratio, sive puncta K, H, sive Φ, φ, considerentur.)

Quantum distat ab A F.

45. Cum igitur ratio distantiarum sive punctorum K, H, sive Φ, φ, à recta A F, sit ut $\frac{7}{10}$ ad $\frac{3}{4}$, sive 28 ad 30, vel 14 ad 15; & magnitudinum, ut 5 ad 2 : Erit, quæ ex his componitur, ratio momentorum, ut 70 ad 30, sive 7 ad 3. Quod cum ubique fiat; eadem erit & ratio momenti solidorum ex semiconversione Trapeziorum omnium ad omnium Triangulorum sic conversorum momentum, hoc est, momenti solidi ex semiconversione semicycloidis, ad momentum solidi ex semiconversione semicirculi, (circa rectam A F,) respectu rectæ A F : Nempe ut 7 ad 3. Unde colligentur puncta, f, Δ, δ, ut supra. Nempe si intelligatur G centrum gravitatis solidi ex semiconversione circuli circa rectam A F, (quod punctum G dari supponimus, vel, si exigatur, deinceps exhibebimus § 56;) & fiat, ut 3 ad 7, sic F G ad F f ; & deinde, ut 5 ad 2, sic F f ad F Δ ; atque ducatur Δ δ basi parallela ; erit centrum gravitatis solidi ex semiconversione semicycloidis circa rectam A D, in recta Δ δ.

Quantum distat à C F.

46. Cum vero distantia puncti sive K sive Φ à recta C F sit z Z + $\frac{7}{10}$ z Y; atque distantia puncti H vel φ ab eadem recta sit $\frac{3}{4}$ z Y ; (quorum utrumque ex dictis patet :) erit distantiarum ratio, ut z Z + $\frac{7}{10}$ z Y ad $\frac{3}{4}$ z Y, sive ut 20 z Z + 14 z Y ad 15 z Y : Quæ si cum ratione magnitudinum 5 ad 2 componatur, habetur momentorum ratio 100 z Z + 70 z Y ad 30 z Y, sive 10 z Z + 7 z Y ad 3 z Y. Quod cum ubique fiat ; pro ratione momenti solidi ex conversione (vel semiconversione) semicycloidis, ad momentum solidi ex conversione (vel semiconversione) semicirculi circa rectam A F, respectu lineæ æquilibrii C F, sumenda erit tum ratio 7 ad 3 (propter 7 z Y ad 3 z Y) tum (propter 10 z Z ad 3 z Y) ea ratio quam habet decuplum momenti solidorum ex conversione Triangulorum ν F p circa A F, suspensorum in distantiis z Z respective, ad triplum momenti eorundem solidorum suspensorum in distantiis z Y : Nempe ut $\frac{5}{32}RP^3 - \frac{10}{3}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$, sive ut 15 A F q — 20 C F q ad 4 C F q. (Quod § 87 & seqq. fusius declaratur.) Quæ quidem ratio si cum ratione 7 ad 3 conjungatur, habetur ratio momenti (respectu rectæ C F) solidi ex conversione (vel semiconversione) semicycloidis circa rectam A F, ad momentum solidi ex simili conversione (vel semiconversione) semicirculi : Nempe $\frac{5}{32}RP^3 - \frac{16}{9}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$, sive ut $45P^2 - 512R^2$ ad $192R^2$, Hoc est, ut 45 A F q — 32 C F q ad 12 C F q.

47. Si itaque ponamus G E distantiam centri gravitatis solidi ex ea conversione vel semiconversione semicirculi, (à recta C F ;) & fiat, ut 12 C F q ad 45 A F q — 32 C F q, sic G E ad G e ; iterumque, ut 5 ad 2, sic G e ad G Γ ; & ducatur Γ γ parallela rectæ C F : Erit semisolidi ex conversione (hoc est solidi ex semiconversione) Semicycloidis circa rectam A F, centrum gravitatis in recta Γ γ ; adeoque in ipsius eo puncto ubi occurritur rectæ Δ δ modo inventæ § 45. (Designamus autem in schemate centrum gravitatis in ea semicycloide, ubi minor futura esset linearum confusio ; perinde enim ad rem est, in utra designetur.)

Centrum solidi integri, circa A F.

48. Habito autem centro gravitatis in semisolido, à fortiori in solido integro haberi certum est : puta in Axis puncto γ.

49. Eodem fere processu (mutatis mutandis, ut supra § 31.) colligitur centrum gravitatis semisolidi ex conversione segmenti ζ Z C F circa rectam A F ; & conse-

consequenter etiam centrum gravitatis semisolidi ex conversione segmenti C Z Y, tum circa rectam A F, tum & circa rectam Z Y.

Centrum semisolidi circa C F.

50. Tandem superest ut centrum gravitatis semisolidi ex conversione Semicycloidis circa rectam C F investigemus. Nempe si semisolidum illud plano abscindatur quod plano C A F in recta C F recte insistat; manifestum est gravitatis centrum fore in ipso plano C A F. Quæritur, in quonam ejus puncto. Hoc modo.

51. Semisolidum ex conversione trianguli *z* F *p*, erit semiconus excavatus; cujus propterea centrum gravitatis, si curvaturam demas, erit in rectæ z F puncto H, quod abscindat F H = ¾ z F; (nempe in recta z F sic secta ut secanda esset F Y ad inveniendum centrum gravitatis hujus solidi integri;) sed deinde, propter curvaturam semicircularem versus rectam C F, (si verum gravitatis centrum indagare liceat,) abscindenda est rectæ H h, ea portio versus h, quæ sit ad totam H h ut diameter circuli ad semicircumferentiam; (sic utique dividendus est axis semicirculi ut habeatur semiperipheriæ centrum gravitatis.)

52. Semisolidum autem ex conversione Trapezii V θ *z* P, est frustum coni excavatum, cujus centrum gravitatis (si curvaturam demas) est in rectæ ζ Z eo puncto, puta K, quo ita dividitur ut dividenda esset F Y ad inveniendum centrum gravitatis hujus solidi integri, nempe excavati frusti conici. Centrum autem gravitatis verum, est (propter curvaturam) in rectæ K k eo puncto quo ita dividitur ut de H h modo diximus.

53. Cum itaque horum semisolidorum ratio momentorum, tum respectu rectæ C F, tum rectæ A F, componatur ex rationibus magnitudinum & distantiarum; reperientur puncta Γ, Δ, simili fere methodo quo supra; adeoque & punctum Γ, centrum gravitatis semisolidi; & simul centrum gravitatis solidi integri, puta punctum Axis Δ.

Centrum solidi ex segmento.

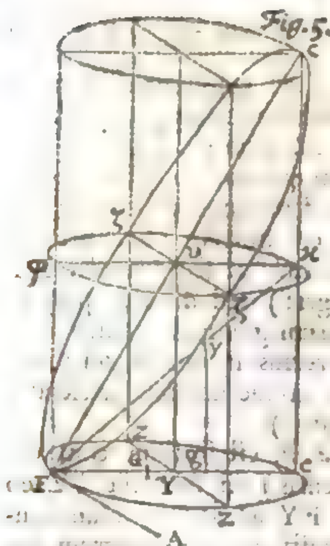
54. Cumque similiter faciendum sit (*mutatis mutandis* ut § 31, 49,) de semisolido ex conversione segmenti, puta ζ Z C F; pariter datum erit & hujus centrum gravitatis; & consequenter (propter datum etiam centrum gravitatis semisolidi ex conversione Trapezii ζ Z Y F,) centrum gravitatis semisolidi (adeoque & solidi integri) ex conversione segmenti C Z Y circa C F. Dabuntur itaque quæ quærebantur omnia.

55. Possumus autem hæc eadem exhibere, etiam sine ope centrorum K, H, &c, methodo, mihi quidem facili & familiari, ex principiis in nostra *Infinitorum Arithmetica* traditis desumpta, (& quidem in multis expeditius:) sed quam alii forsan haud ita prompte sine longiori verborum apparatu assequerentur.

Atque hactenus ea sunt quæ ad D. Carcavium mensibus Augusto & Septembri, Anni 1658, miseram (hoc est, intra tempus à proponente limitatum,) methodum meam, totiusque rei quasi sceleton, exhibentia: Et quidem iisdem fere tum verbis tum ordine; Nisi quod ad § 30, numeros emendaverim qui vitiosi erant, utpote quos, investigando Trilineum C A F, fig. 7, circa rectam A F incautus converteram cum circa C F convertendum esset, & similiter ad § 46; Quem calculi lapsum ubi deprehenderam, literis eodem Septembri datis insinuabam; meque insuper tum illius emendationem, tum alia quæ sibi suisve ad justam demonstrationem deesse visa forent, ubi hoc indicaverint, exhibiturum. Cum autem nihil inde hactenus monitus fuerim, (quod oblatæ conditiones exspectandum innuebant, ut & emendandi calculi veniam impune permittunt;) ea tamen quæ sequuntur, quasi Scholiorum instar, ad præcedentium tum illustrationem tum justam demonstrationem, libet hic subjungere.

Centrum portionis cylindri oblique secti, & semiannuli.

56. Quum supra § 45. desiderari videatur punctum G, quod ibidem designat (non centrum circuli, sed) centrum gravitatis semiannuli ex semiconversione circuli C F circa rectam A D: Illud hac methodo investigamus. Super circulo C z F fig. 5. (qui circulo C z F genitori Cycloidis æquetur) erigatur Cylindrus rectus F c, altitudinem habens C c circuli genitoris perimetro æqualem, adeoque æqualem semiperipheriæ circuli radio F C descripti. Et intelligatur Cylindrus ille bisecari, tum per axem plano F c C parallelogrammo; tum per hujus diagonalem F c transeunte plano elliptico F c ζ, quod plano F C c recte insistat; tum denique plano basi parallelo θ κ; reliquaque construantur ut in schemate. Dico primo, Cylindri portionem plano elliptico abscissam F ζ ζ c C, per omnia æquari



semiannulo exposito, dempta curvatura. Nempe rectam Cc æquari semicirculo à puncto C descripto; & similiter rectas Yυ, zζ, (sumptis ubivis in base Cylindri respectivis punctis Y, z,) semiperipheriis punctorum similiter positorum in semiannulo; item Yζ parallelogrammum, semisuperficiei cylindricæ recta Yz in annulo descriptæ; & sic ubique. Nec aliter differt hæc portio Cylindrica ab illo semiannulo, quam quod semisuperficies cylindricæ omnes rectis Yz in annulo descriptæ, in portione Cylindri in planum expandantur; adeoque hæc Cylindri portio tantundem valet atque semiannulus dempta curvatura.

57. Centrum autem gravitatis in exposita Cylindri portione, sic colligitur. Si ponamus Cc lineam æquilibrii (adeoque planum huic perpendiculariter insistens, æquilibrii planum;) erunt, tum altitudines Yυ ad invicem, ut rectæ FY; tum distantiæ ab æquilibrii plano, ut YC; adeoque, quæ ab ipsis fiunt, ut rectangula FYC, hoc est, ut quadrata Yz; quæ quidem in ipsas Yz ducta, hoc est, facta ex basis in altitudinem & distantiam continuo ductu, hoc est, planorum Yζ momenta respectu rectæ Cc, sunt ut cubi rectarum Yz. (Per *momentum* autem, tum hic, tum passim alibi, intelligo factum ex magnitudine in distantiam ab æquilibrii plano ducta; ut quæ momentis sunt proportionalia.) Sunt autem omnes cubi rectarum Yz, ad totidem cubos rectæ CF; hoc est, momentum FY$\upsilon\zeta$cC portionis semicylindri in suo situ, ad momentum Parallelepipedi æqualti basin habentis quadratum FC ex puncto F suspensi; ut 3 ad 32□; (ubi per 1 ad □ intelligo rationem circuli ad quadratum diametri, sive ut $\mathcal{P}$ ad 4 $\mathcal{D}$;) quod mox probabitur § 60, &c. adeoque, ad momentum Cylindri parallelepipedo illi inscripti similiter suspensi, ut 3 ad 32; (substitutis scilicet circulis pro diametri quadratis:) Et propterea, momentum F$\zeta\zeta$cC Portionis integri Cylindri in suo situ, ad momentum Cylindri sic suspensi, ut 3 ad 16. Est autem magnitudo ad magnitudinem, ut 1 ad 2. Ergo, distantia ad distantiam, ut 3 ad 8. Si itaque dividatur FC in g, ut sit Cg ad CF ut 3 ad 8; & ducatur gγ rectæ Cc parallela: Erit centrum gravitatis portionis expositæ F$\zeta\zeta$Cc in recta gγ. Sed & (quod tamen ad præsens negotium quæsitu non est necessarium, ipsum enim g punctum jam inventum nobis sufficit,) idem gravitatis centrum est in recta F$\varkappa$, (quippe quæ per omnium zζ parallelogrammorum centra transit, ipsique revera FC in annulo respondet;) ergo in eorum communi puncto γ.

58. Si itaque ut rectam F$\varkappa$ in γ, vel FC diametrum basis Cylindri in g, ita & FC axem annuli dividamus in g, (quod semiannuli centrum gravitatis esset dempta curvatura:) ipsamque Fg$=\frac{5}{8}\mathcal{D}$ dividamus iterum (propter curvaturam) in G, ita ut sit FG ad Fg, ut circuli diameter ad semicircumferentiam; erit G centrum gravitatis semiannuli ex semiconversione circuli FC circa AF rectam. Habetur itaque (quod § 45. supponitur) semiannuli centrum gravitatis G. (nempe, ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad $\mathcal{D}$, sic Fg$=\frac{5}{8}\mathcal{D}$ ad $\frac{5\mathcal{D}}{4\mathcal{P}}$ D $=$ FG.) Et consequenter, propter $\frac{3}{3}$) $\frac{1}{3}\times\frac{5\mathcal{D}^2}{4\mathcal{P}}$ $\left(\frac{7\mathcal{D}^2}{6\mathcal{P}}\right.$, erit $\frac{7\mathcal{D}^2}{6\mathcal{P}}$, vel $\frac{14R^2}{3\mathcal{P}}$. $=$ FΔ fig. 1. distantia centri gravitatis solidi (semiconversione semicycloidis circa AF facti) ab AF.

59. Ut autem habeatur E, centrum gravitatis semiannuli ex simili semiconversione semicirculi, sumenda adhuc erit, à puncto G jam proxime invento, recta GE (basi parallela) quæ tanta sit quanta distantia centri gravitatis semicirculi FC à circuli centro; quæ nempe sit ad $\frac{1}{2}$FC (sive $\frac{1}{2}$ radii) ut FC ad FA, sive ut $\mathcal{D}$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}$.

60. Quod autem § 57. probandum suscepimus, Nempe omnes cubos rectarum Yz ad totidem cubos CF, esset ut 3 ad 32□; sic ostenditur ex nostræ *Infinitorum Arithmeticæ* principiis. Si ponamus diametrum FC$=\mathcal{D}$ in partes æquales numero infinitas dividi in punctis Y; erunt omnes FY$=a$ series infinita Primanorum,

norum, sive Arithmetice proportionalium, quorum maximum est $\mathcal{D}$; quæ in $YC = \mathcal{D} - a$ respective ductæ, dant Residua $a\mathcal{D} - a^2$ omnia rectangula FCY, hoc est omnia Quadrata Yz; quæ ad totidem $\mathcal{D}^2$ sunt ut 1 ad 6; Residuorum vero Quadrata, hoc est rectarum Yz Biquadrata, ad totidem $\mathcal{D}^4$, ut 1 ad 30; Residuorum cubi, hoc est rectarum Yz potestates sextæ, ad totidem $\mathcal{D}^6$, ut 1 ad 140, &c. Unde colligitur series 1, 6, 30, 140, 630, &c. (Arith. Infin. pr. 133.) Quæ non alia est quam series 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{35}{16}$, $\frac{315}{128}$, &c. in seriem Geometrice proportionalium 1, 4, 16, 64, 256, &c. respective ducta: Adeoque series illa (ibid. prop. 189.) interpolata 1, □, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$□, $\frac{15}{8}$, $\frac{8}{5}$□, &c. in hanc item interpolatam 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. respective ducta, exhibebit illam primam interpolatam 1, 2□, 6, $\frac{32}{3}$□, 30, $\frac{256}{5}$□, 140, &c. Et propterea, sicut 1 ad 6, 30, 140, &c. exhibent rationes quas habent rectarum omnium Yz potestates secunda, quarta, sexta, &c. ad totidem $\mathcal{D}^2$, $\mathcal{D}^4$, $\mathcal{D}^6$, &c. Sic 1 ad 2□, $\frac{32}{3}$□, $\frac{256}{5}$□, &c. exhibebunt rationes quas habent earundem rectarum Yz potestates prima, tertia, quinta, &c. ad totidem $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^3$, $\mathcal{D}^5$, &c. Et speciatim (quod nostra jam interest) omnes cubi rectarum Yz, ad totidem $\mathcal{D}^3$ sive cubos FC, rationem habebunt 1 ad $\frac{32}{3}$□, sive ut 3 ad 32□. Quod suscepimus probandum.

61. Porro, quum calculus ad § 51, 52, 53, 54, (ubi agitur de centro gravitatis solidorum ex conversione Semicycloidis circa rectam CF) omissus sit, & calculi tantum fundamenta remotiora exhibita: libet hic calculum illum aliquatenus exhibere, juxta methodum quam § 55 insinuavi. Et primo quidem perpendemus conversionem Trianguli υFp, deinde Trapezii Vβυ P. Rectam autem in Triangulo υp, adeoque & βυ in Trapezio, dicemus B; ejusque aliquotam partem infinite exiguam b; adeoque VP erit $B + B$, vel $2B$. Item zY, dicemus T; ejusque partem infinite exiguam, y. Et rectam FY, hoc est altitudinem, vel etiam distantiam ab AF, dicemus A; ejusque partem infinite exiguam, a. Rectam denique zZ, dicemus Z. *Centrum gravitatis semisolidi circa CF.*

62. His positis; supponimus in Triangulo υFp infinitas rectas parallelas Arithmetice-proportionales, à vertice F ad basin usque υp continuatas, 0, $1b$, $2b$, $3b$, usque ad B earum maximam, quæ est ipsa υp. Hæ autem rectæ, dum circa rectam FC convertuntur, describunt totidem annulos planos (saltem hujusmodi annulorum partes similes) æquales totidem rectangulis parallelogrammis a rectis ipsis quæ convertuntur, & peripheriis quæ earum punctis mediis describuntur, contentis; quas peripherias, sive integras sive dimidias, cum sint radiis proportionales, per ipsos radios designabimus, nempe 0, $1y$, $2y$, $3y$, &c. usque ad T, hoc est zY radiorum illorum maximum. Erunt igitur plana illa, ut 00, $1b \times 1y$, $2b \times 2y$, $3b \times 3y$, &c. hoc est 00, $1by$, $4by$, $9by$, &c. usque ad BT. Deinde, cum horum planorum momenta respectu rectæ AF, sint facta ex magnitudinibus in distantias proportionalia; sintque distantiæ, ut 0, a, $2a$, $3a$, &c. usque ad A; erunt ea momenta ut $0by \times 0a$, $1by \times 1a$, $4by \times 2a$, $9by \times 3a$, &c. hoc est 000, $1aby$, $8aby$, $27aby$, &c. usque ad ABT. Hoc est, omnia momenta, sunt series Tertianorum; Quæ Tertianorum series, ad totidem maximo æqualia, hoc est ad maximum in altitudinem ductum, hoc est ad Cylindrum vel Prisma ejusdem vel æqualis basis æqualtum, ex puncto Y suspensum, est ut 1 ad 4. Quod dicamus igitur $\frac{1}{4}AABT$.

63. Eodem modo; Infinitæ rectæ Trapezii, à minima B, hoc est βυ, ad usque $B + B$, sive $2B$, hoc est VP; sunt $B + 0$, $B + b$, $B + 2b$, $B + 3b$, &c, usque ad $B + B$. Radii vero peripheriarum à mediis rectarum punctis descriptarum, sunt $Z + 0$, $Z + y$, $Z + 2y$, $Z + 3y$, &c. usque ad $Z + T$. Ex quibus seriebus invicem respective ductis fit series magnitudinum, $BZ + 0Z + 0B + 00$, $BZ + bZ + yB + by$, $BZ + 2bZ + 2yB + 4by$, $BZ + 3bZ + 3yB + 9by$, &c. usque ad $BZ + BZ + TB + BT$. Quæ si ducantur in respectivas suas ab AF distantias 0, a, $2a$, $3a$, &c. usque ad A; fiet series Momentorum

$$0BZ + 000Z + 00B + 000$$
$$aBZ + abZ + ayB + aby$$
$$2aBZ + 4abZ + 4ayB + 8aby$$
$$3aBZ + 9abZ + 9ayB + 27aby$$

&c. usque ad

$$ABZ + ABZ + ATB + ABT$$

Cujus summa est $\frac{1}{2}AABZ + \frac{1}{3}AABZ + \frac{1}{3}AATB + \frac{1}{4}AABT$.
sive $\frac{5}{6}AABZ + \frac{7}{12}AABT$.

 64. Cum

64. Cum igitur sit ratio momenti hujus ad momentum illius, ut $\frac{5}{6}$ *AABZ* + $\frac{7}{12}$ *AABT* ad $\frac{1}{4}$ *AABT*; hoc est (dividendo per *AAB*) ut $\frac{5}{6}$ Z + $\frac{7}{12}$ *T* ad $\frac{1}{4}$ *T*, sive (ductis omnibus in 12) ut 10 Z + 7 *T* ad 3 *T*: Nempe, ut 10 z Z + 7 z Y ad 3 z Y, (eadem scilicet ratio quæ & supra § 46,) Atque hoc ubique: Propter omnes 7 z Y ad 3 z Y, ponenda ratio 7 ad 3; & propter 10 z Z ad 3 z Y, eadem quæ supra § 46. Et quidem eandem utrobique rationem provenire necesse est, (utut variis modis libuerit investigare:) Nam momentum solidi ex conversione ejusdem figuræ circa A F respectu rectæ C F, atque circa C F respectu rectæ A F (propter magnitudinum & distantiarum reciprocationem) tantundem erit. Adeoque hinc habetur tum distantia centri gravitatis semisolidi ex semicycloidis semiconversione circa C F, à recta A F; tum integri istius solidi ipsissimum gravitatis centrum, utpote quod in C F situm esse constat.

65. Quantum autem ad distantiam centri gravitatis ejusdem Semisolidi (ex semiconversione semicycloidis circa C F) ab ipsa C F: simili methodo investiganda erit. Cum enim solidum ex semiconversione Trianguli *v* F p circa C F, sit aggregatum seriei 0 *by*, 1 *by*, 4 *by*, 9 *by*, &c. usque ad *BT*, (ut supra § 62:) Et solidum ex semiconversione Trapezii V *β v* P circa eandem C F sit aggregatum seriei *BZ* + 0 Z + 0 *B* + 00, *BZ* + *b*Z + *yB* + *by*, *BZ* + 2*b*Z + 2*yB* + 4*by*, *BZ* + 3*b*Z + 3*yB* + 9*by*, &c. (ut supra § 63.) Si utraque series ducatur in seriem suarum respective distantiarum à recta C F; (nempe illa, in 0, *y*, 2*y*, 3*y*, &c. usque ad *T*; & hæc, in Z + 0, Z + *y*, Z + 2*y*, Z + 3*y*, &c. usque ad Z + *T*;) habebitur series momentorum eorundem solidorum respectu lineæ æquilibrii C F. Unde & aggregati ad aggregatum ratio; hoc est, momenti Semisolidi ex Triangulo, ad momentum semisolidi ex Trapezio (circa C F converso) respectu rectæ C F. Nempe

	0 *byy*.		*BZZ* + 0 *bZZ* + 0 *yBZ* + 0 *byZ* + 0 *yyB* + 0 *byy*.
	1 *byy*		*BZZ* + 1 *bZZ* + 2 *yBZ* + 2 *byZ* + 1 *yyB* + 1 *byy*.
	8 *byy*		*BZZ* + 2 *bZZ* + 4 *yBZ* + 8 *byZ* + 4 *yyB* + 8 *byy*.
	27 *byy*		*BZZ* + 3 *bZZ* + 6 *yBZ* + 18 *byZ* + 9 *yyB* + 27 *byy*.
	&c. usque ad		&c. in infinitum usque ad
	BTT		*BZZ* + *BZZ* + 2 *TBZ* + 2 *BTZ* + *TTB* + *BTT*.
Summa	$\frac{1}{4}$ *ABTT*	ad summā	*ABZZ* + $\frac{1}{2}$ *ABZZ* + $\frac{2}{2}$ *ATBZ* + $\frac{2}{3}$ *ABTZ* + $\frac{1}{3}$ *ATTB* + $\frac{1}{4}$ *ABTT*.
sive	$\frac{1}{4}$ *ABTT*	ad	$\frac{3}{2}$ *ABZZ* + $\frac{5}{3}$ *ABTZ* + $\frac{7}{12}$ *ABTT*.
Est ut	$\frac{1}{4}$ *TT*	ad	$\frac{3}{2}$ ZZ + $\frac{5}{3}$ *T*Z + $\frac{7}{12}$ *TT*.
sive ut	3 *TT*	ad	18 ZZ + 20 *T*Z + 7 *TT*.

Hoc est, ut 3 quadrata rectæ z Y, ad 18 quadrata rectæ z Z una cum 20 rectangulis Z z Y, & 7 quadratis z Y. Quod cum ubique fiat: ut habeatur ratio momenti solidi ex semiconversione omnium Trapeziorum, hoc est Semicycloidis, ad momentum solidi ex conversione omnium Triangulorum, hoc est Semicirculi, (circa rectam C F,) quærenda ratio tum omnium Quadratorum z Z Arithmetice proportionalium, tum omnium Rectangulorum Z z Y, in respectiva Triangula *v* F p, sive (propter æquales ubique *v* p) in respectivas Altitudines Y F; ad omnia Quadrata z Y in eadem respectiva sive Triangula sive Altitudines. Atque ista demum ratio si ducatur in rationem 18 ad 3, sive 6 ad 1; atque hæc quidem in rationem 20 ad 3; & utrisque tandem (sic ductis) adjungatur ratio 7 ad 3: Habebitur ratio ea quam habet momentum solidi ex semiconversione Semicycloidis circa C F, ad momentum solidi ex Semicirculi circa eandem C F semiconversione, respectu ejusdem C F lineæ æquilibrii. Unde si eximatur ratio magnitudinum; habebitur ratio distantiarum centrorum gravitatis. Fig. 1.

66. Similiter si sumantur (in fig. 1 vel 8) omnes Z Y æqualibus intervallis dissitæ; ex quarum semiconversione circa C F fit solidum Cycloidale, sicut ex semiconversione Semicirculi sive omnium in eo ordinatim-applicatarum circa eandem rectam fit Hemisphærium: Erit momentum illius ad momentum hujus, respectu ejusdem C F rectæ, ut omnes cubi rectarum G Y, ad omnes cubos rectarum z Y: Hoc est, ut omnes z Z c + 3 z Z q × z Y + 3 z Z × z Y q + z Y c, ad omnes z Y c. Quæ quidem omnia similibus methodis ad calculum revocanda sunt atque superiora.

67. Porro,

67. Porro siquis de Segmentorum Circularium & Sphæricalium sive Magnitudinibus sive gravitatis Centris hæsitet, (quæ supra § 33, 40, dari supponimus,) sic habeat. De circulo, nemo nescit, ex ductu Semiradii in arcum z C vel z z haberi sectorem z G C vel z G z; cui si auferatur Triangulum z G C, vel z G z, manebit segmentum z C vel z z C; (intellige, si z C z arcus non excedat Semiperipheriam; ubi enim excedit, non auferendum est, sed addendum Triangulum z G z:) Tum, addendo Triangulum z F C vel z F z, haberi Sectorem z F C vel z F z. Et sic alibi. Et in Sphæra similiter, superficies sphærica z C z, abscissa plano z Y z est ad totam sphæræ superficiem, sive quadruplum circuli maximi, ut C Y ad C F, (uti notum est:) ea vero ducta in trientem radii, dat sectorem sphæricum G z z C (factum ex conversione sectoris circuli z G C circa G C;) unde sublato cono G z z, manebit portio z z C; (intellige de portione quæ hemisphærium non excedit; sin excedat, addendus est, non auferendus, conus ille:) cui portioni si addatur conus F z z, habetur sphæricus sector F z z C, sive solidum ex conversione sectoris circularis z F C circa C F factum. Et similiter de segmentis aliis.

68. Vel etiam idem Sector Sphæricus sic colligi poterit non ineleganter: Inventis nempe tum circumducti Sectoris circularis magnitudine, ut supra, tum centro gravitatis, per § seq. Sector ille circularis ductus in peripheriam hujus centri conversione descriptam, dat sectoris Sphærici magnitudinem. Sed & memorata superficiei Sphæricæ portio plano abscissa, eodem modo colligi poterit: habitis nempe arcus z C tum magnitudine tum centro gravitatis: quippe arcus ille in peripheriam hoc centro circumducto descriptam ductus, dat illam superficiei Sphæricæ portionem: (quæ quidem omnia, quod oppido notandum est, non tantum de conversionibus integris sed & partialibus perinde valent;) unde non modo portiones jam dictæ, sed & aliæ variis modis positæ, mensuræ subjiciuntur.

Et quidem, supposita circuli quadratura, quæ hic supponitur, quadrabitur Figura quælibet in superficie Sphæræ circulorum quorumvis (sive minorum) arcubus terminata. Quod quamvis non sit hujus loci fusius prosequi, paucis tamen ostendam. Nam 1. Posse figuram hanc quamcunque in Trilinea Sphærica circulorum peripheriis dirimi, manifestum est. 2. Trilinea hæc si sint vera Sphærica Triangula (circulorum maximorum arcubus terminata) data sunt: Quippe, ut Excessus quo angulorum in Triangulo Sphærico aggregatum superat duos rectos, ad duos rectos; sic Triangulum illud, ad Circulum in Sphæra maximum. 3. Si quod vero Trilineorum non sit tale Triangulum Sphæricum; habetur tamen illius à Sphærico Triangulo, iisdem punctis angularibus terminato, differentia, habitis Bilineis quæ circulorum maximi & minoris arcubus conterminis interjiciuntur. 4. Habetur autem hujusmodi Bilineum, si intelligantur ab extremis arcus circuli minoris ad polum suum duci duos arcus circuli maximi: Qui, cum arcu illo circuli minoris, continebunt Trilineum Isosceles, cujus magnitudinem hic (§ 68.) exhibemus; Idemque, cum contermino arcu circuli maximi, continent Triangulum Sphæricum; Quorum differentia, est Bilineum quæsitum. Adeoque, *Supposita circuli quadratura, quadrabitur figura quælibet in superficie Sphæræ circulorum quorumvis arcubus terminata; non minus quam, in Plano, Figura rectilinea.* Quod nos, ni fallor, primi docemus. *Figuræ in superficie Sphærica.*

Vel, vice versa, Habitis tum portionis superficiei Sphæricæ, tum & arcus circularis magnitudinibus, invenietur ipsius arcus centrum gravitatis. Centrum autem gravitatis arcus cujusvis, in radio bisecante situm, distat à centro circuli ea radii parte quæ sit ad radium integrum, ut istius arcus subtensa ad ipsum arcum: Distat vero idem gravitatis centrum à diametro huic arcui contermina, simili semisubtensæ parte. Arcuum denique, ut C z, momenta, respectu conterminæ diametri, ut C F, sunt ad invicem, ut eorum sinus versi, C Y. Sed hæc obiter, atque ex abundanti.)

69. De centro gravitatis in Segmentis circuli, res item constat. Cum enim, ob datam (quæ dari supponitur) rationem altitudinis ad basin Cycloidis, hoc est, Diametri ad Circumferentiam circuli, detur etiam arcus (puta z C z fig. 6.) magnitudo; dabitur etiam segmenti centrum gravitatis. Nempe si fiat (in radio G C qui arcum bisecat) ut z C z arcus, ad sui subtensam z z; sic $\frac{2}{3}$ radii, ad G E: erit E cen- *Centrum Gravitatis Sectoris, vel Segmenti Circularis.*

E centrum gravitatis Sectoris zGz; sive Semicirculo majus sit, sive minus, sive æquale. [Quod quidem tum ab aliis, & nominatim Hugenio, demonstratum est; tum si opus est, sic more nostro poterit demonstrari: Si intelligatur GzCz Sector, ex æqualibus similibusque Triangulis numero infinitis conflari, quæ totidem radii repræsentent; per horum omnium centra gravitatis quæ transit curva, adeoque radiorum illorum duas tertias abscindit, erit similis arcus circuli radium habentis $\frac{2}{3}$GC; cujus quidem arcus singula puncta (utpote æqualium triangulorum centra gravitatis) cum supponenda sint æque onerata, idem erit tum hujus arcus, tum expositi Sectoris, centrum gravitatis: Hujus autem arcus centrum gravitatis habetur, si fiat (quod modo dictum est & mox probabitur) ut arcus ille ad suam subtensam, (hoc est, ut arcus similis zCz, ad subtensam suam zz,) sic radius dicti arcus $\frac{2}{3}$GC (nempe $\frac{2}{3}$ radii Sectoris expositi) ad quartam, quæ erit GE: Est itaque punctum E tum hujus arcus, tum propterea Sectoris expositi, centrum gravitatis: Quod ostendendum erat. Quod autem arcus centrum gravitatis illud est quod diximus; sic probatur. Quoniam parallela plana eadem ratione secant superficiem Sphæricam, qua secant axem, (quod ab Archimede & aliis demonstratum est;) Manifestum est, portionem superficiei Sphæricæ quæ arcu zCz Semicirculum non excedente circa bb axem converso describitur, eam rationem ad totam sphæræ superficiem habere, quam habet zz subtensa (vel axis portio huic respondens) ad bb axem integrum: Puta, ut axis $\mathcal{D}$, ad subtensam s; sic tota Sphæræ superficies $\mathcal{D}\mathcal{P}$, ad portionem arcu descriptam; quæ itaque est $s\mathcal{P}$. Quæ quidem portio si, per magnitudinem arcus a, dividatur, prodibit $\frac{s}{a}\mathcal{P}$ peripheria centro gravitatis istius arcus descripta, adeoque hujus peripheriæ radius, hoc est distantia centri gravitatis dicti arcus à centro circuli, $\frac{s}{a}R$: Nempe ea pars radii $GC = R$; quæ est ad totum, ut s ad a, subtensa dicti arcus ad ipsum arcum: Quod probandum suscepimus.] Et similiter de centro gravitatis Sectoris zGC (aut alius cujusvis) eodem processu constabit. Et speciatim, semicirculi centrum gravitatis, à circuli centro distat, $\frac{8R}{3\mathcal{P}}R$, sive $\frac{2\mathcal{D}^2}{3\mathcal{P}}$: Nempe ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad $\mathcal{D} = 2R$, sic $\frac{2}{3}R$ ad $\frac{8R^2}{3\mathcal{P}} = \frac{2\mathcal{D}^2}{3\mathcal{P}}$. Datis vero Sectoris cujusvis zGC, & zCG trianguli, tum magnitudinibus tum centris gravitatis, datur etiam centrum gravitatis segmenti zC. Datis autem tum segmenti zC, tum trianguli zCY, magnitudinibus & gravitatum centris, datur etiam centrum gravitatis aggregati zYC. Et similiter de Sectoris zFC, aliusve, centro gravitatis constabit.

Centrum Gravitatis Sectoris, vel Segmenti, Sphærici.

70. In portionibus Sphæræ, centrum gravitatis sic colligitur. Quadratum rectæ zY fig. 6. æquat ubique quadratum Radii minus quadrato GY, (quod patet.) Dicamus autem, ut alibi, Radium R, ejusque partem aliquotam infinite exiguam r. Erunt igitur quadrata omnium zY (quadrantem bCG complentium) $R^2 - 0$, $R^2 - r^2$, $R^2 - 4r^2$, $R^2 - 9r^2$, &c. usque ad $R^2 - R^2$, (quod est punctum verticis C.) Sin pro Quadratis hisce substituamus ubique circulos, lateribus quadratorum ut Radiis descriptos, (adeoque quadratis illis proportionales:) pro omnibus R^2 habebimus circulos Cylindri, hemisphærio circumscripti; pro omnibus 00, r^2, $4r^2$, $9r^2$, &c. Circulos Coni, cujus vertex G centrum Sphæræ, basis eadem cum base Cylindri, in plano quod Sphæram in C tangit; pro utrorumque vero differentiis $R^2 - 0$, $R^2 - r^2$, $R^2 - 4r^2$, $R^2 - 9r^2$, &c. Circulos hemisphærii, (quadratis utique rectarum zY proportionales;) qui propterea æquales deprehenduntur planis annulis cylindri conice excavati: Sed & eadem habebunt gravitatis centra, (nempe respectiva puncta Y, in recta GC:) æquiponderabunt itaque tum singula singulis respective, tum omnia omnibus; idemque erit centrum gravitatis cylindri hujus conice excavati, atque hemisphærii: Nempe in eo axis hemisphærii puncto quo ita dividitur, ut pars ad centrum Sphæræ sit ad reliquam ut 3 ad 5, sive $\frac{3}{8}$ totius: Id enim ob datum tum Cylindri, tum exempti coni, magnitudines & gravitatis centra facile colligitur.

71. Vel sic. Cum circuli hemisphærium complentes, sint (quod modo dictum est) ut $R^2 - r^2$, $R^2 - 4r^2$, $R^2 - 9r^2$, &c. (hoc est, juxta nostram Arithmeticam

cam Infinitorum, ut series Æqualium dempta serie Secundanorum, quæ ad correspondentem seriem Æqualium, est ut $1 - \frac{1}{3}$ ad 1, hoc est ut $\frac{2}{3}$ ad 1, sive ut 2 ad 3; quæ itaque est ratio Hemisphærii ad circumscriptum Cylindrum;) sintque eorundem Circulorum distantiæ à centro sphæræ, ut r, $2r$, $3r$, &c. nempe series Primanorum: Hæc distantiarum series in seriem magnitudinum respective ducta, dat seriem $rR^2 - r^3$, $2rR^2 - 8r^3$, $3rR^2 - 27r^3$, &c. hoc est seriem Primanorum dempta serie Tertianorum, quæ ad correspondentem seriem Æqualium est ut $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ ad 1, hoc est ut $\frac{1}{4}$ ad 1, sive ut 1 ad 4. Quæ quidem series cum sit momentis dictorum Circulorum respectu Centri sphæræ proportionales, (quorum utique rationes sunt ex rationibus magnitudinum & distantiarum compositæ;) erunt eorundem omnium in suis locis momenta, ad momenta totidem maximo æqualium in maxima distantia; hoc est, momentum Hemisphærii in suo situ, ad momentum circumscripti Cylindri ex puncto C suspensi, (respectu centri G;) ut 1 ad 4. Est autem magnitudo ad magnitudinem (quod jam ostensum est) ut 2 ad 3: Ergo, propter $\frac{2}{3})\frac{1}{4}(\frac{3}{8}$, distantia ad distantiam, ut 3 ad 8. Distat itaque centrum gravitatis Hemisphærii à centro Sphæræ, $\frac{3}{8}$ Radii. Ut prius.

72. Et simili processu (juxta utramvis methodum) de centro gravitatis in aliis Sphæræ partibus judicandum est. Nempe idem esse centrum gravitatis Segmenti Sphærici plano z z abscissæ, atque segmenti sic excavati Cylindri eodem plano abscissæ. Sed & similiter judicandum est de centro segmenti Sphærici duobus planis axi rectis interjecti: Et quidem sive in eodem sint sive in oppositis Hemisphæriis ea plana; si & circa reliquum Hemisphærium constituatur Cylindrus similiter excavatus. Cum itaque tum Cylindri, tum allati Coni vel frusti conici magnitudines & centra gravitatis non ignorentur; nec ignorabitur centrum gravitatis figuræ excavatæ, adeoque nec Segmenti Sphærici planis quibuscunque parallelis abscissi.

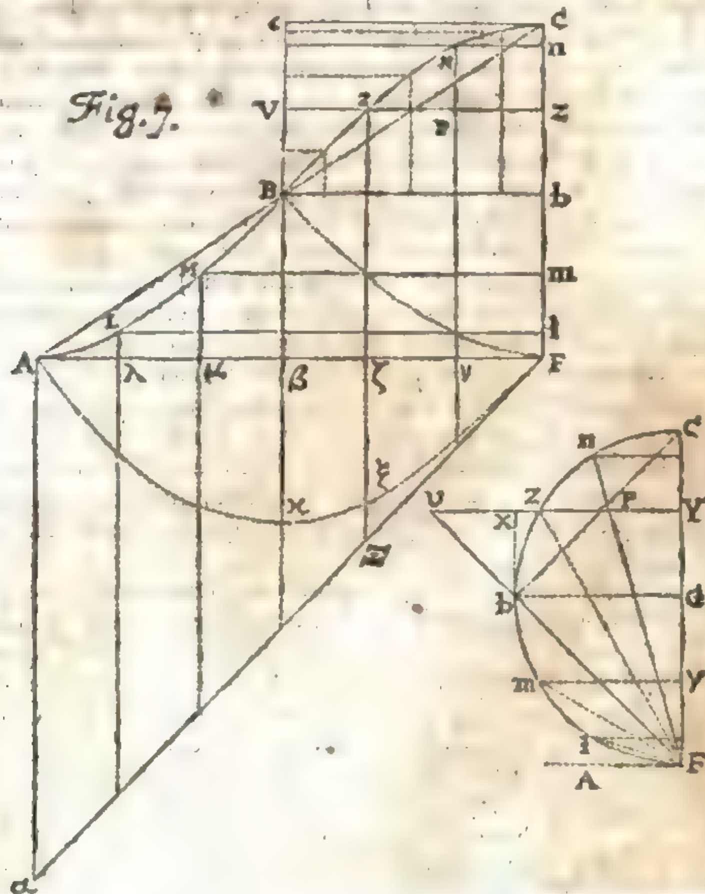
73. Datis autem segmenti Sphærici z z C (sive hemisphærium sit, sive majus aut minus hemisphærio) tum magnitudine tum centro gravitatis; si eidem adjiciatur, vel auferatur, conus z z G, vel z z F, vel aliud quodvis solidum cujus tum magnitudo tum centrum gravitatis innotescunt; dabitur & aggregati vel residui centrum gravitatis. Et quidem, quantum ad Sectores Sphæricos, ut G z z C, sunt illi respectivis superficiei Sphærici segmentis z z C, adeoque & Y C rectis, proportionales; (æquales utique $\frac{1}{3}$ Radii in illam superficiem ducto:) Suorumque centrorum gravitatis à centro circuli distantiæ, sunt rectis G E (si intelligatur E punctum medium inter C & Y) proportionales; æquales utique $\frac{3}{4}$ G E. Idem nempe erit centrum gravitatis Sectoris Sphærici G z z C, atque segmenti superficiei sphæricæ segmento z z C similis & concentrici radium habentis $\frac{3}{4}$ G C. Ut enim E (punctum medium rectæ C Y) est centrum gravitatis segmenti Superficiei sphæricæ z z C (propter segmenta superficiei sphæricæ segmentis Axis iisdem planis abscissis ubique proportionalia;) ita Segmenti similis concentrici radium habentis $\frac{3}{4}$ G C (cujus singula puncta, utpote conorum vel pyramidum totidem æqualium Sectorem Sphæricum complentium centra gravitatis, æqualiter onerari intelligenda sunt) centrum gravitatis erit in suo radio similiter situm. Quod ipsum est & centrum gravitatis Sphærici Sectoris, sive pyramidum simul omnium numero infinitarum Sectorem illum complentium.

Momentum semicycloidis respectu Axis, & solidum conversione circa Axem factum.

74. Quam superius (§ 30.) suscepimus rationem, 9 A F q — 4 C F q ad 2 C F q, ostendendum; eam sic investigamus. Primo quidem cum Trilineum C Z A F z fig. 1. in Semicycloide (propter Semicirculi interpositionem inter trilineum illud ejusque axem C F) sit distortum; intelligamus (exempto semicirculo) *trilineum illud restitui* in situm debitum, protrusis scilicet omnibus Z z ad rectam C F, ut puncta z coincidant punctis Y: & sic ubique. (Quod tantundem est atque superficiem curvam trilineam Γ ζ F z C fig. 2. in planum expandere.) Quo facto, rectæ ζ Z &c. prius inclinatæ in Fig. 1. erigentur ut in Fig. 7. Exemptis nempe Trapeziorum omnium Triangulis (quæ Triangulis Semicirculi ubique æquantur) manebunt tantum Parallelogramma, Triangulorum illorum dupla: puta Parallelogrammum V P ν β in *Trilineo restituto*, duplum Trianguli ν F p in Semicirculo, (& sic ubique:) Ut eadem jam sit ratio omnium z Z in hæc respectiva Parallelogramma, ad omnes z Y in eadem Parallelogramma; atque prius in sua respective Triangula, vel horum eorumve altitudines.

75. Cum, sumptis Y, y, æqualiter utrinque à centro G remotis, altitudines binæ Fy FY simul sumptæ æquent ubique F C, sintque zY my æquales; erit ubique

zY x FY + my x Fy = zY x FC. Sive, quod tantundem est, quadrilineum M μ λ L una cum quadrilineo Z ζ ν N, complent Parallelogrammum basis ζ ν altitudinis FC, (altero scilicet supplente quod in altero deest.) Adeoque perinde est sive ducamus omnia Parallelogramma vel Quadrilinea Trilinei restituti CZAF in omnes respective rectas zY totius Semicirculi, sive omnia minuta Parallelogramma Parallelogrammi C β in omnes respective rectas zY unius quadrantis;



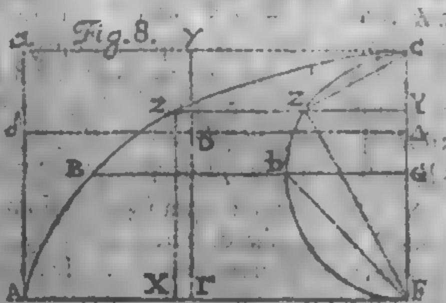
hoc est, in omnes sinus rectos arcuum Arithmetice proportionalium in Quadrante; hoc est, in omnes respective rectas, æqualibus intervallis sumptas, trilinei CBb ipsi Cb parallelas, incipiendo a B (quod statim ostendetur.) Hoc est, perinde est sive super base AF x, erigamus figuram altitudinum respective earundem cum trilineo restituto CAF: sive super base F β x, hoc est BbC, figuram altitudinis CF ubique; (posito nimirum figuras tum A β x, tum F β x, figuræ BbC congruere.) Quod autem rectæ Trilinei CBb sint arcuum Arithmetice proportionalium Sinus recti, sic constat: Cum enim propter tum Semiperipheriam CbF, tum rectam AF, in partes æquales divisam, omnes FY, hoc est omnes ζZ (trilinei CAF fig. 7.) sint sinus versi arcuum Fz Arithmetice proportionalium totius Semiperipheriæ; erunt similiter omnes GY (earundem excessus supra semidiametrum) hoc est, omnes rectæ trilinei BbC, arcuum bz Arithmetice proportionalium in bC quadrante, Sinus recti; (uti &, eadem ratione, Gy defectus rectarum FY sive Fy à radio, hoc est rectæ trilinei similis BbF, sunt sinus recti arcuum Arithmetice proportionalium quadrantis bF:) quod suscepimus ostendendum.

76. Est autem (ut calculus § 23. indicabit) prismatis modo dicti, basis BbC, Fig. 1. æqualis R^2 quadrato radii circuli generantis. [Nam si ponatur punctum Y fig. 1. in centro circuli, ut G, erit tum $FY = R$, tum $zY = R$, & $zZ = zC = \frac{1}{4}P$; adeoque $ZY = R + \frac{1}{4}P$, quæ si in $\frac{2}{2}R$ ducatur, habetur $\frac{2}{2}R^2 + \frac{2}{4}RP$ magnitudo quadrilinei ζZCF, hoc est, in hoc casu, quadrilinei βBCF, fig. 1. unde si auferamus trapezium βBGF, hoc est, tum parallelogrammum $\beta BbF = GF \times \beta F = R \times \frac{1}{4}P = \frac{1}{4}RP$, tum triangulum $FbG = GF \times \frac{1}{2}bG = R \times \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R^2$, manebit $R^2 + \frac{1}{4}RP$ magnitudo segmenti CGB; unde si iterum subducamus quadrantem

tem CbG $= \frac{1}{2}RP$, manebit R^3 magnitudo trilinei CbB fig. 1. hoc est CbB fig. 7.] Quæ quidem basis Bb C $= R^2$ in altitudinem F C $= 2R$ ducta, dat $2R^3$ mensuram dicti Prismatis; sive aggregatum omnium z Y in respectiva parallelogramma ductarum. Si autem pro omnibus z Y, substituamus ubique peripherias his radiis (convertendo) descriptas; pro $2R^3$, prodibit $2R^2P$. [Quod quidem est triplum Sphæræ circuli genitoris: (quod hinc oritur, quia tum parallelogramma V β γ P sunt triangulorum γ F p dupla, tum z Y distantia mediæ basis trianguli, est $\frac{3}{2}$ distantiæ centri gravitatis Trianguli à conversionis axe CF: adeoque $\frac{3}{2} \times 2 = 3$:) Sicut &, iisdem de causis, $2R^3$ triplum Momenti Semicirculi respectu rectæ CF, est Momentum omnium parallelogrammorum sic suspensorum. Quod & in solidis, mutatis mutandis, perinde valet. Verbi gratia. Si intelligatur tum super Trilineo restituto CAF, tum super semicirculo CbF, insistere corpus Cylindricum sive Prismaticum eodem plano oblique sectum, ita ut in puncto F & recta AF altitudinem habeat nullam, & in C maximam; atque intelligantur singula prismata parallelogrammis ut V β γ P incumbentia suspendi in distantiis z Y respective: erunt eorum omnium Prismatum sic suspensorum pondus, ad pondus pyramidum triangulis γ F p incumbentium, hoc est ad pondus portionis cylindri semicirculo insistentis, respectu rectæ CF, ut 2 ad 1. Cum enim Parallelogrammorum Prismata sint sigillatim ad Triangulorum Pyramides, ut 3 ad 2; atque z Y distantia suspensi Prismatis, sive distantia mediæ basis Pyramidis, est ad distantiam centri gravitatis istius Pyramidis, ut 4 ad 3; erit, quæ ex his componitur ratio 2 ad 1. (propter $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$.) Adeoque pondus sic suspensorum Prismatum, erit ponderis Pyramidum in suo situ, hoc est ponderis dictæ portionis cylindri, (respectu rectæ CF,) duplum. Et similiter alibi. Sed hæc obiter hic loci, quorum tamen usus esse poterit in sequentibus. Redimus ad suspensa Parallelogramma.]

77. Si vero eadem trilinei restituti CAF Parallelogramma V β γ P fig. 7. ducantur in omnes respective rectas z Z arithmetice proportionales (quippe arcubus Arithmetice proportionalibus æquales:) hoc est in omnes parallelas rectas Trianguli F A α (quarum maxima A α = A F;) habebitur portio Prismatis, basin CAF altitudinem A α habentis, oblique abscissa plano per basis lineam CF & verticis punctum α transeunte; (quæ quidem portio exhibebit momentum dicti trilinei CAF respectu rectæ CF.) Sin pro trianguli rectis A α &c. (ut pridem pro rectis β κ &c.) sumantur aliæ quæ ad has sint ut peripheriæ circuli ad ejusdem radium; abscissa prismatis portio æqualis erit solido ex Trilinei CAF conversione circa CF facta; (tunc enim Triangulum F A α æquale fiet circulo radii F A; reliquaque respective triangula reliquis circulis parallelis:) Quod solidum, tantisper dum illius magnitudo innotescat, appellabimus A^3.

78. Solidum igitur ex omnibus Triangulis γ F p &c. vel Parallelogrammis V β γ P &c in respectivas rectas z Z, vel peripherias his radiis descriptas; ad solidum ex iisdem triangulis vel parallelogrammis in respectivas rectas z Y, vel peripherias his radiis descriptas; est ut A^3, ad $2R^2P$, (per § 76, 77:) Adeoque noncuplum istius ad duplum hujus ut $9A^3$ ad $4R^2P$: Cui si addatur ratio 5 ad 2, sive $10R^2P$ ad $4R^2P$; habebitur ratio solidi ex conversione Semicycloidis, ad solidum ex conversione Semicirculi, (circa axem CF,) ut $9A^3 + 10R^2P$ ad $4R^2P$, per § 30.



79. Porro, eorundem Solidorum ad invicem ratio sic alias colligitur. Solidum ex conversione Semicycloidis (Fig. 1. vel 8.) ad Solidum ex conversione Semicirculi, (circa axem CF,) est, ut omnes circuli radiorum Z Y (æqualibus ab invicem intervallis sumptorum,) ad omnes circulos radiorum z Y respective; hoc est, ut omnia quadrata Z Y, ad omnia quadrata z Y; hoc est, ut omnia z Zq + 2 ▯ Z z Y + z Y q ad omnia z Y q.

80. Sed omnia z Y q (per prop. 133, 135. *Arithm. Infin.*) æquant $\frac{1}{6}D^3$, vel $\frac{4}{3}R^3$. (Sunt enim omnes ordinatim applicatæ in semicirculo, ut series $\surd: aD - a^2$: adeoque earum quadrata, ut series $aD - a^2$: quæ est ad seriem æqualium,

 nempe

nempe D^2 toties sumptum, hoc est, ad D^2; ut $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, ad 1; sive ut 1 ad 6.)

81. Item omnia rectangula Z z Y, æquantur solido cylindrico, basem habenti semicirculum C b F, altitudines vero z Z respective sumptas, hoc est (propter z Y = m y, & Z z + M m = A F = N n + L l, &c.) solido Cylindrico habenti basin G b F quadrantem, altitudinem vero ubique A F; hoc est $\frac{1}{16}RP^2$: (quod fit ex $\frac{1}{4}RP$ quadrante circuli genitoris, in A F $=\frac{1}{2}P$ ducto:) Adeoque omnium rectangulorum dupla, sive 2 ▯ Z z Y, sunt $\frac{1}{8}RP^2$.

82. Sunt igitur $\frac{2}{3}R^3+\frac{1}{8}RP^2$ (hoc est, omnia z Y q + 2 ▯ Z z Y,) una cum omnibus z Z q, æqualia omnibus quadratis Z Y. Et (pro radiorum quadratis substituendo circulos, hoc est, dividendo per R & multiplicando per $\frac{1}{2}P$,) erunt $\frac{1}{3}R^2P+\frac{1}{16}P^3$ una cum omnibus circulis radiorum z Z (æqualibus intervallis sumptorum,) hoc est, una cum solido ex conversione trilinei restituti C A F fig. 7. circa C F, hoc est una cum A^3; nempe $\frac{1}{3}R^2P+\frac{1}{16}P^3+A^3$, æqualia solido ex conversione semicycloidis circa C F: cujus itaque ratio ad sphæram circuli genitoris (ex conversione semicirculi circa eandem rectam C F tactam) est ut $\frac{1}{3}R^2P+\frac{1}{16}P^3+A^3$ ad $\frac{2}{3}R^2P$.

83. Verum eadem ratio superius reperta est (§ 78) ut $9A^3+10R^2P$ ad $4R^2P$, hoc est (dividendo utrinque per 6,) ut $\frac{3}{2}A^3+\frac{5}{3}R^2P$ ad $\frac{2}{3}R^2P$: quam jam reperimus (§ 82) ut $\frac{1}{3}R^2P+\frac{1}{16}P^3+A^3$ ad $\frac{2}{3}R^2P$. Sunt igitur $\frac{3}{2}A^3+\frac{4}{3}R^2P=\frac{1}{3}R^2P+\frac{1}{16}P^3+A^3$. Adeoque (subductis utrinque æqualibus) $\frac{1}{2}A^3+R^2P=\frac{1}{16}P^3$. Hoc est, $A^3=\frac{1}{8}P^3-2R^2P$. (Hoc est A F in A F q − C F q. fig. 1. vel 8.) Habemus itaque magnitudinem solidi ex conversione Trilinei restituti C A F fig. 7. circa C F, (nempe $\frac{1}{8}P^3-2R^2P$;) Adeoque ipsius rationem ad Sphæram circuli genitoris (hoc est, ad $\frac{2}{3}R^2P$,) nempe ut $\frac{1}{8}P^2-2R^2$ ad $\frac{2}{3}R^2$, sive ut $\frac{3}{4}P^2-12R^2$ ad $4R^2$, hoc est, ut 3 A F q − 3 C F q ad C F q. [Atque eadem est ratio momenti istius Trilinei, ad momentum semicirculi, respectu C F rectæ. Est utique illud $\frac{1}{8}RP^2-2R^3$; momentum autem Semicirculi $\frac{2}{3}R^3$:) Adeoque (dividendo per magnitudinem Trilinei $\frac{1}{2}RP$) distabit centrum gravitatis Trilinei ab F C, $\frac{1}{4}P-\frac{4R^2}{P}$; & à β B, $\frac{4R}{P}R$. Distat autem (per superius tradita) ab A F, $\frac{3}{4}R$: Cum enim momentum Trilinei ad momentum Semicirculi (respectu A F rectæ) sit ut 3 ad 2, & magnitudo ad magnitudinem ut 2 ad 1; erit propter $\frac{3}{2}$) $\frac{2}{1}$ ($\frac{3}{4}$, distantia ad distantiam ut 3 ad 4. Distantia autem centri gravitatis semicirculi, est R; Ergo distantia centri gravitatis Trilinei ab A F est $\frac{3}{4}R$.]

84. Cum igitur $\frac{2}{3}R^2P$ æquetur Sphæræ circuli genitoris; erit (per § 82) $\frac{1}{3}R^2P+\frac{1}{16}P^3+A^3$, hoc est, $\frac{1}{3}R^2P+\frac{1}{16}P^3+\frac{1}{8}P^3-2R^2P$, hoc est $\frac{3}{16}P^3-\frac{5}{3}R^2P$, æquale solido ex conversione Semicycloidis circa rectam C F.

85. Vel etiam (per § 78,) cum ejusdem solidi ad Sphæram ratio, sit, ut $9A^3+10R^2P$ ad $4R^2P$, hoc est, ut $\frac{3}{2}A^3+\frac{5}{3}R^2P$ ad $\frac{2}{3}R^2P$; sitque $\frac{2}{3}R^2P$ æquale Sphæræ: erit etiam $\frac{3}{2}A^3+\frac{4}{3}R^2P$, hoc est $\frac{3}{16}P^3-3R^2P+\frac{4}{3}R^2P$, hoc est $\frac{3}{16}P^3-\frac{5}{3}R^2P$, æquale solido ex conversione Semicycloidis circa rectam C F, ut prius.

86. Similiter, cum (per § 78) ratio omnium z Z Arithmetice proportionalium, in respectiva Triangula ν F p, ad correspondentes omnes z Y in eadem Triangula, sit ut A^3 ad $2R^2P$; hoc est, $\frac{1}{8}P^3-2R^2P$ ad $2R^2P$, sive ut $\frac{1}{8}P^2-2R^2$ ad $2R^2$, vel $\frac{1}{4}P^2-4R^2$ ad $4R^2$; (hoc est, ut A F q − C F q ad C F q:) Adeoque noncuplum illius ad duplum hujus, $9A^3$ ad $4R^2P$; hoc est, ut $\frac{9}{8}P^3-18R^2P$ ad $4R^2P$, sive ut $\frac{9}{4}P^2-36R^2$ ad $8R^2$; (hoc est ut 9 A F q − 9 C F q ad 2 C F q:) Si adjungatur ratio 5 ad 2, sive $20R^2$ ad $8R^2$: Habetur iterum ratio $\frac{9}{4}P^2-36R^2+20R^2=\frac{9}{4}P^2-16R^2$, ad $8R^2$: Hoc est 9 A F q − 4 C F q ad 2 C F q. Quod supra (§ 30) suscepimus demonstrandum.

Momentum solidi circa A F respectu C F, & circa C F respectu rectæ A F.

87. Ostensum est supra (§ 46,) Momentum solidi ex conversione (vel semiconversione) Semicycloidis circa A F (fig. 1.) respectu rectæ C F, ad momentum solidi annularis ex conversione, (vel semiconversione) semicirculi C b F circa eandem A F respectu ejusdem C F rectæ; esse, ut 7 ad 3, atque insuper ut *decuplum* momenti solidorum ex tali conversione Triangulorum ν F p in distantiis z Z suspensorum, ad *triplum* momenti eorundem solidorum in distantiis z Y respective suspensorum. Cujus rationis investigationem sic aggredimur. Omnes z Z (æquales arcubus in semicirculo Arithmetice proportionalibus) in respectiva solida ex sic conver-

conversis triangulis α F p, ad omnes z Y (arcuum illorum sinus rectos) in eadem respective solida; Hoc est (propter α p ubique æquales) omnes illæ z Z in quadrata altitudinum F Y (hoc est, sinuum versorum residuorum arcuum,) ad omnes illas z Y in eadem respective quadrata; sunt, ut momenta omnium circulorum (vel cylindrulorum) Z ζ (æqualibus intervallis sumptorum) conversione trilinei restituti C A F fig. 7. circa A F factorum, suspensorum in distantiis ζ z (trianguli F A α) hoc est z Z (trilinei restituti;) ad momenta eorundem circulorum (vel cylindrulorum) suspensorum in distantiis ζ ξ (bilinei F $\alpha\alpha$;) Hoc est, ut momentum solidi ex conversione Trilinei restituti C A F (circa A F) respectu rectæ C F, ad *duplum* momenti annuli ex simili conversione C b F semicirculi respectu C F rectæ. (Dico, ad *duplum* momenti annuli; propter, tum magnitudinem solidi ex conversione Parallelogrammi in trilineo, ad magnitudinem solidi ex conversione correspondentis Trianguli in semicirculo, ut 3 ad 2; tum z Y distantium mediæ basis, ad distantiam centri gravitatis solidi ex triangulo sic converso, ut 4 ad 3: Est autem $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$.) Adeoque *decuplum* omnium z Z in dicta solida vel quadrata, ad *triplum* omnium z Y in eadem solida vel quadrata; erit, ut *decuplum* momenti solidi ex conversione Trilinei restituti (circa A F) respectu rectæ C F ad *sextuplum* momenti solidi ex simili conversione semicirculi respectu C F rectæ; sive, ut *quintuplum* illius, ad *triplum* hujus.

Fig. 7.

88. Est autem Annulus conversione Semicirculi factus, $\frac{1}{4}RP^2$, (ex ductu nempe semicirculi $\frac{1}{4}RP$ in P peripheriam centri conversione descriptam;) qui quidem ductus in $\frac{8R^2}{3P}$ (distantiam centri gravitatis semicirculi, adeoque & annuli semicirculi conversione facti, à recta C F,) dat $\frac{2}{3}R^3P$, momentum annuli respectu rectæ C F: (cujus itaque triplum est $2R^3P$.) Momentum autem solidi conversione Trilinei restituti C A F circa A F, respectu C F rectæ, dicamus aliquantisper B^4. Quintuplum igitur hujus, ad Triplum illius, est ut $5B^4$ ad $2R^3P$: Cui rationi si adjungatur ratio 7 ad 3, sive $\frac{14}{3}R^3P$ ad $2R^3P$, habetur ratio momenti solidi ex conversione Semicycloidis ad momentum solidi ex conversione semicirculi (circa AF) respectu rectæ C F; nempe $5B^4 + \frac{14}{3}R^3P$ ad $2R^3P$, vel $15B^4 + 14R^3P$ ad $6R^3P$.

89. Sed (quod § 64 dictum est) eadem plane ratio est momenti, respectu rectæ A F, solidi ex conversione (vel semiconversione) Semicycloidis circa C F, ad momentum solidi ex simili conversione (vel semiconversione) semicirculi, respectu ejusdem A F lineæ æquilibrii. Quod hinc evenit, quia eædem rationes utrobique componuntur; cum hoc saltem discrimine, quod duæ magnitudines reciprocantur; nempe Z Y quæ in hoc solido ingreditur compositionem solidi, in altero notat distantiam à linea æquilibrii; contra vero recta F Y.

90. Hæc autem eadem ratio sic alias colligitur. Nempe (sumptis rectis Z Y fig. 8. æqualiter ab invicem distantibus,) momentum illud solidi ex conversione Semicycloidis, ad momentum solidi ex simili conversione Semicirculi, est ut momentum omnium Circulorum radiis Z Y descriptorum, ad momentum omnium circulorum descriptorum radiis z Y; hoc est, ut momentum omnium z Z q + 2 ▯ Z z Y + z Y q, ad momentum omnium z Y q, (respectu ejusdem A F rectæ:) hoc est, ut momentum respectu ejusdem A F rectæ solidi ex conversione trilinei restituti C A F fig. 7. circa C F (quod, propter quantitatum reciprocationem, æquipollet isti quod jam diximus B^4) una cum momento solidi ex semicirculo sic converso (quod æquipollet nuper invento $\frac{2}{3}R^3P$, § 88,) atque insuper momento solidi ex conversione plani cujus rectæ sint mediæ proportionales inter Zz zY (quod dicamus C^4) bis sumpto; ad momentum sphæræ ex simili conversione semicirculi, respectu ejusdem A F rectæ: Hoc est, ut $B^4 + 2C^4 + \frac{2}{3}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$.

91. Cum igitur hæc ratio $B^4 + 2C^4 + \frac{2}{3}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$ (§ 90) hoc est, $9B^4 + 18C^4 + 6R^3P$ ad $6R^3P$, eadem sit atque illa (§ 88,) $15B^4 + 14R^3P$ ad $6R^3P$; erit $9B^4 + 18C^4 + 6R^3P = 15B^4 + 14R^3P$; adeoque $18C^4 = 6B^4 + 8R^3P$, sive $9C^4 = 3B^4 + 4R^3P$. Hoc est, $C^4 = \frac{1}{3}B^4 + \frac{4}{9}R^3P$. Unde cognito vel B^4 vel C^4, reliquum cognoscetur.

92. Ut autem habeamus B^4, hoc est, momentum solidi ex conversione Trilinei restituti C A F fig. 7. circa A F, respectu rectæ C F, (vel circa C F, respectu A F, quæ tantundem sunt:) Primo pro omnibus circulis radiorum ζ Z, substituamus totidem triangula rectangula super ipsas ζ Z bases constituta, & altitudines (in

ipsis Z punctis) basibus æquales habentia; adeoque portionem prismatis plano oblique secti complentia, basin habentis trilineum illud C A F, altitudinem vero in A F nullam, sed continue crescentem donec ad punctum C altitudinem obtineat æqualem ipsi F C rectæ; adeoque ad singula basis puncta altitudinem habeat æqualem eorundem ab A F distantiæ. Quæ quidem Triangula, tum magnitudine, tum & momento respectu C F rectæ, sunt respectivis illis circulis proportionalia.

93. Deinde in hujus prismaticæ portionis basi C A F, duci intelligamus curvam B F, curvis B C & B A omnino similem. Cui B F curvæ, intelligatur erecta superficies curva insistere, dirimens portionem illam prismatis in duo segmenta; quorum alterum trilineo B F A, alterum trilineo B F C, insistant. Quorum segmentorum momentum, respectu C F rectæ, sic seorsim inquirimus.

94. Est utique (per § 23. ut supra § 76. ostensum est) Trilineum B b C $= R^2$: adeoque Trilineum B F C (quippe istius duplum) $2 R^2$. Hujus autem centrum gravitatis in recta B b jacere, manifestum est; adeoque ipsius ab A F distantia est $R =$ b F. Quæ quidem distantia R in magnitudinem $2 R^2$ ducta, dat $2 R^3$, momentum dicti trilinei B F C, respectu A F rectæ: (Adeoque æquale plane ejusdem momento respectu B b, ut ex § 99 patet.) Sed & (propter portionis altitudines, ut dictum est, distantiis punctorum quibus insistunt ab A F æquales; adeoque altitudinem super basis centrum gravitatis, æqualem rectæ b F $= R$;) idem $2 R^3$ est magnitudo prismaticæ portionis trilineo B F C insistentis.

95. Est autem totius C A F trilinei, momentum respectu A F, (adeoque & prismaticæ portionis toti insistentis magnitudo,) $\frac{3}{8} R^2 P$; (nempe $\frac{3}{8}$ momenti semicirculi, per § 24:) unde si auferatur momentum trilinei B F C, hoc est $2 R^3$; (per præced.) manebit $\frac{3}{8} R^2 P - 2 R^3$ momentum trilinei B F A respectu ejusdem A F rectæ: (unde, si opus est, colligetur distantia centri gravitatis dicti Trilinei B F A ab A F recta, nempe $\frac{3 P - 16 R}{4 P - 16 R} R$ quod provenit ex divisione momenti $\frac{3}{8} R^2 P - 2 R^3$; per trilinei magnitudinem $\frac{1}{2} R P - 2 R^2$; adeoque ejusdem centri à B b distantia, est $\frac{P}{4 P - 16 R} R$; quæ nempe cum illa altera complet rectam B $\beta = R$.) Quod ipsum $\frac{3}{8} R^2 P - 2 R^3$ (ob causam modo dictam) est etiam magnitudo portionis prismaticæ eidem B F A trilineo insistentis.

96. Hujus autem prismaticæ portionis (trilineo B F A insistentis) centrum gravitatis in recta B β jacere, manifestum est. Est itaque ejusdem a C F distantia, β F $= \frac{1}{4} P$. Quæ quidem distantia in portionis magnitudinem $\frac{3}{8} R^2 P - 2 R^3$ ducta, dat $\frac{3}{32} R^2 P^2 - \frac{1}{2} R^3 P$, momentum dictæ portionis (trilineo B F A insistentis) respectu C F rectæ.

97. Porro, cum (per § 94) portio prismatis trilineo B F C insistentis sit $2 R^3$; æquipolleat autem, tum magnitudine tum & momento respectu C F rectæ, prismati super eadem base, altitudinem mediam habenti; hoc est, æqualem ei quam habet dicta portio super basis suæ centrum gravitatis, hoc est, altitudinem R: Centrum gravitatis dictæ portionis tantundem à C F recta distabit (seu potius ab æquilibrii plano super hanc rectam erecto; quod hic loci nobis perinde est; quod & similiter alibi ubi opus est intellectum volo,) quantum inde distat centrum gravitatis æquipollentis prismatis; hoc est, quantum ab eadem C F distat centrum gravitatis Trilinei B F C. Quod quantum sit, sic inquirimus.

98. Trilineum, totum C A F, est $\frac{1}{2} R P$ (nempe duplum Semicirculi per § 22) unde si auferamus trilineum B F C, hoc est, $2 R^2$ (per § 94) manebit $\frac{1}{2} R P - 2 R^2$ æquale trilineo B F A; cujus trilinei centrum gravitatis (in recta B β situm) à recta C F distat $\frac{1}{4} P$. Quæ distantia, in $\frac{1}{2} R P - 2 R^2$ magnitudinem ducta, dat $\frac{1}{8} R P^2 - \frac{1}{2} R^2 P$, momentum trilinei B F A respectu C F rectæ.

99. Totius autem C A F trilinei respectu ejusdem C F, momentum est $\frac{1}{8} R P^2 - 2 R^3$, (per § 83; cum enim solidum ex conversione circa C F, sit $\frac{1}{8} P^3 - 2 R^2 P$; erit, substituendo radios pro peripheriis, $\frac{1}{8} R P^2 - 2 R^3$ momentum plani.) Unde si auferamus $\frac{1}{8} R P^2 - \frac{1}{2} R^2 P$ (momentum trilinei B F A, per præced.) manebit $\frac{1}{2} R^2 P - 2 R^3$ momentum trilinei B F C. Quod momentum si per trilinei magnitudinem $2 R^2$ dividatur, prodibit $\frac{1}{4} P - R$ distantia centri gravitatis dicti Trilinei B F C à recta C F. (adeoque R ejusdem distantia à puncto B.)

100. Cum igitur distantia centri gravitatis, tum B F C trilinei, tum & (§ 97) [illegible] portionis

portionis trilineo huic insistentis à C F, sit $\frac{1}{4}P - R$; sitque dictæ portionis magnitudo (per § 94) $2R^3$: Erit istius, respectu C F, momentum $\frac{1}{2}R^3P - 2R^4$.

101. Huic itaque momento, si adjungamus $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{1}{2}R^3P$ (momentum portionis trilineo B F A insistentis, respectu rectæ C F, per § 96,) habetur $\frac{5}{32}R^2P^2 - 2R^4$ momentum totius portionis trilineo C A F insistentis, respectu rectæ C F. Sin porro, pro triangulis § 92 substitutis, restituamus circulos, (dividendo per R, & multiplicando per P,) habebitur $\frac{5}{32}RP^3 - 2R^3P = B^4$, momentum solidi ex conversione trilinei C A F circa A F, respectu rectæ C F. Quod § 92 proponitur inquirendum.

102. Invenimus autem (§ 88) momentum solidi ex conversione semicycloidis, ad momentum solidi ex conversione semicirculi (circa A F) respectu rectæ C F; esse, ut $15B^4 + 14R^3P$ ad $6R^3P$; sive ut $\frac{5}{3}B^4 + \frac{14}{9}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$: Hoc est, (propter $B^4 = \frac{5}{32}RP^3 - 2R^3P$,) ut $\frac{5}{32}RP^3 - \frac{10}{3}R^3P + \frac{14}{9}R^3P = \frac{5}{32}RP^3 - \frac{16}{9}R^3P$, ad $\frac{2}{3}R^3P$. (Quod § 46, 87, suscepimus ostendendum.) Est autem $\frac{2}{3}R^3P$ momentum annuli ex ea conversione semicirculi: Ergo & $\frac{5}{32}RP^3 - \frac{16}{9}R^3P$ est momentum solidi ex dicta conversione semicycloidis (circa A F) respectu ejusdem C F. Quod momentum si per solidi magnitudinem $\frac{5}{8}RP^2$ (per § 24) dividatur, prodibit $\frac{1}{4}P - \frac{128R^2}{45P}$ distantia centri gravitatis dicti solidi (ex conversione semicycloidis circa A F) à recta C F: (adeoque $\frac{128R^2}{45P}$, ejusdem centri distantia à recta B 2.) *Centrum Gravitatis Solidi circa AF.*

103. Si vero intelligatur idem Semicycloidis planum circa C F converti; momentum solidi inde facti respectu A F rectæ, (propter magnitudinum & distantiarum reciprocationem,) idem plane erit atque momentum jam inventum solidi ex ejusdem plani circa A F conversione, respectu rectæ C F, (ut supra § 64, & 89. dictum est:) nempe $\frac{5}{32}RP^3 - \frac{16}{9}R^3P$. Quod momentum, si per magnitudinem dicti solidi dividatur, hoc est, per $\frac{3}{16}P^3 - \frac{4}{3}R^2P$ (per § 85.) prodibit $\frac{45P^2 - 512R^2}{54P^2 - 384R^2}R$, distantia centri gravitatis istius solidi à recta A F. (vel $\frac{9P^2 + 128R^2}{54P^2 - 384R^2}R$ ejusdem distantia à B G.)* *Centrum Gravitatis Solidi circa CF.*

104. Possunt hæc eadem item inferri ex § 90. Cum enim ratio momenti solidi ex conversione Semicycloidis, ad momentum solidi ex conversione Semicirculi, circa A F ut axem, respectu C F ut lineæ æquilibrii; vel, circa C F ut axem, respectu A F ut lineæ æquilibrii; ibidem esse ostenditur, ut $B^4 + 2C^4 + \frac{2}{3}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$; hoc est, (propter $B^4 = \frac{5}{32}RP^3 - 2R^3P$, per § 101, & $C^4 = \frac{1}{3}B^4 + \frac{4}{9}R^3P$, per § 91; adeoque $2C^4 = \frac{2}{3}B^4 + \frac{8}{9}R^3P = \frac{5}{48}RP^3 - \frac{4}{3}R^3P + \frac{8}{9}R^3P = \frac{5}{48}RP^3 - \frac{4}{9}R^3P$,) ut $\frac{5}{32}RP^3 - \frac{16}{9}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$; (omnino ut supra § 102:) habentur inde tum solidorum momenta, tum centrorum gravitatis distantiæ à respectivis æquilibrii lineis, eodem plane modo quo § 102, 103.

105. Sed & simul colligitur tum momentum (respectu rectæ A F) tum centri gravitatis distantia, solidi cujus omnia plana sunt ipsa Z z Y rectangula, hoc est solidi cylindrici basin habentis semicirculum C b F, altitudines vero Z z (fig. 7. vel 8.) respective. Cum enim (§ 90.) ponatur C^4 momentum solidi ex circulis radiorum √: Z z × z Y: qui sunt itaque ad rectangula Z z Y vel Z z × z Y, ut circulus ad quadratum radii, hoc est ut $\frac{1}{2}P$ ad R, sive ut P ad $2R$; sitque (per præced.) $C^4 = \frac{1}{3}B^4 + \frac{4}{9}R^3P = \frac{5}{96}RP^3 - \frac{2}{9}R^3P$: Si pro circulis substituantur radiorum quadrata (dividendo per P & multiplicando per $2R$,) habebitur $\frac{5}{48}R^2P^2 - \frac{4}{9}R^4$ momentum dicti solidi (ex omnibus Z z Y rectangulis) respectu rectæ A F. Est autem solidi hujus magnitudo $\frac{1}{16}RP^2$ (æqualis utique Cylindro quadrantali, cujus basis b G F quadrans, altitudo F A $= \frac{1}{2}P$; vel Semicylindro cujus basis C b F Semicirculus, altitudo $\frac{1}{2}$ A F $= \frac{1}{4}P$; propter duas ubique altitudines, à medio utrinque æque remotas, rectæ F A simul æquales:) Per quam magnitudinem si dividatur momentum, prodibit, $R - \frac{64R^3}{9P^2}$ distantia centri gravitatis à recta A F; adeoque $\frac{64R^2}{9P^2}R$ ejusdem distantia à b G. *Fig. 8.*

106. At,

106. At, quantum ad rectam CF, vel planum huic insistens; æquipollet, ut magnitudine, sic & momento, Semicylindro ejusdem basis, & altitudinis dimidiæ. Adeoque momentum habet $\frac{1}{3}R^3P$, & $\frac{8}{3}\frac{R^2}{P}$ distantiam centri gravitatis à CF: Nempe dummodo intelligatur Semicirculo CbF recte insistere.

Quæ autem de *Cycloide* primaria ostensa sunt, eadem omnia aliis *Cycloidum* generibus, sive protractis sive abbreviatis facile applicantur. Id siquidem solum interest, ut pro Zz rectis ubique substituantur aliæ quæ sint ad has in eadem ratione qua Basis *Cycloidis* ad Peripheriam Circuli generantis.

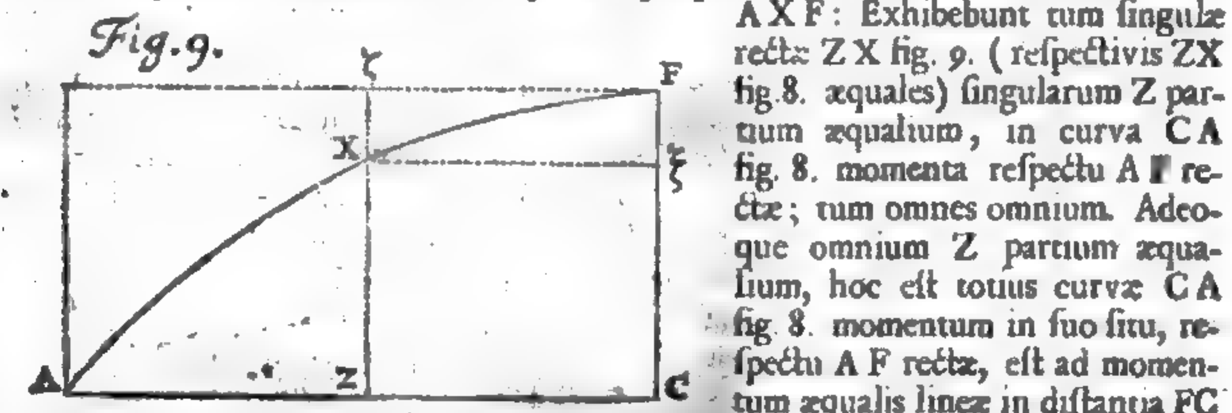
Pars Secunda.

Centrum curvæ CA. Fig. 1. 8. ∽ 1. AD centrum gravitatis curvæ semicycloidis AC fig. 1. hoc est AC fig. 8. inveniendum, assumo tanquam à D. Wren * demonstratum, tum curvam CA duplam esse rectæ CF, tum ubique CZ curvam rectæ Cz duplam esse. Adeoque posita recta Cz $= a$, erit correspondens curva CZ $= 2a$. Et propterea, sumptis chordis circuli Cz Arithmetice proportionalibus, erunt item correspondentes curvæ CZ Arithmetice proportionales; & curva CA in punctis Z in æquales partes divisa.

** Vide ad calcem hujus.*

2. Harum vero partium æqualium (quas supponamus numero infinitas, & totidem Z punctis designatas) distantia ab AF recta est ubique FY $= \frac{D^2 - a^2}{D}$. Nam, propter similia triangula, ut FC $= D$, ad Fz $= \sqrt{:}D^2 - a^2$: sic eadem Fz $= \sqrt{:}D^2 - a^2$: ad FY, quæ igitur est $\frac{D^2 - a^2}{D}$. (Exponendo nempe quantitatem a successive per 1, 2, 3, &c. quarum maxima sit D.)

Centri distantia ab AF. 3. Si igitur curvæ CA fig. 8. æqualis extendatur recta CA fig. 9. quæ intelligatur similiter divisa in punctis Z: atque à punctis Z erigi intelligantur ZX rectæ, respectivis distantiis FY æquales; perque omnia puncta X duci curvam AXF: Exhibebunt tum singulæ rectæ ZX fig. 9. (respectivis ZX fig. 8. æquales) singularum Z partium æqualium, in curva CA fig. 8. momenta respectu AF rectæ; tum omnes omnium. Adeoque omnium Z partium æqualium, hoc est totius curvæ CA fig. 8. momentum in suo situ, respectu AF rectæ, est ad momentum æqualis lineæ in distantia FC maxima suspensæ, (hoc est, ad momentum maximum toties sumptum,) ut trilineum AFC fig. 9. ad sibi circumscriptum parallelogrammum: Hoc est, ut semiparabola (quod mox ostendetur ∽ 6.) ad circumscriptum parallelogrammum; sive ut 2 ad 3. Et consequenter, centrum gravitatis curvæ CA fig. 8. distabit ab AF recta, duabus tertiis rectæ CF, sive $\frac{2}{3}D$.



NB. In citationibus ∽ notat paragraphos hujus partis, & § paragraphos partis præcedentis.

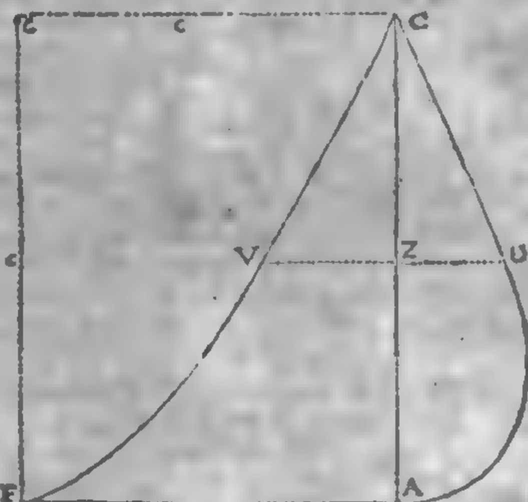
Centrum segmentorum curvæ CA. 4. Et similiter de segmenti cujusvis tum momento, tum centro gravitatis judicandum erit: Habent utique momenta partium curvæ CA fig. 8. respectu AF rectæ, eam inter se rationem, quam respectivæ partes semiparabolæ AFC fig. 9. rectis diametro parallelis abscissæ: quamque habent hæ parabolæ partes ad respectivas partes parallelogrammi circumscripti, eam habent distantiæ centrorum gravitatis earundem partium (ab AF recta) ad totam FC.

Superficies circa AF descripta. 5. Si vero pro singulis rectis ZX fig. 9. hoc est radiis circulorum punctis Z fig. 8. circa AF rectam conversis descriptorum, substituantur ubique rectæ quæ sint ad has ut circuli peripheria ad ejusdem radium: Hoc est, si semiparabola quæ basin jam habet AC $= 2D$, & altitudinem CF $= D$, intelligatur, super eadem

eadem base constituta, altitudinem habere $4 AF = 2 P$; esset ea semiparabola æqualis superficiei conversione curvæ CA fig. 8. circa AF rectam descriptæ; (nempe $\frac{8}{3} DP$, sive $\frac{32}{3}$ circuli genitoris:) ejusque partes respectivæ respectivis partibus hujus æquales.

6. Quod autem FXA fig. 9. sit Parabola, sic ostenditur. Rectæ ZX sunt ubique ut $\frac{D^2 - a^2}{D}$ per ∽ 2. Hoc est, ut $D^2 - a^2$; adeoque residuæ Xζ, hoc est ξF diametri, ubique ut a^2; hoc est in duplicata ratione ZC, hoc est Xξ ordinatim applicatarum. Quod Parabolæ proprium est.

7. Porro, ejusdem curvæ CA fig. 8. divisæ ut prius in punctis Z, omnium punctorum Z (seu partium æqualium his punctis designatarum) distantiæ à CF, sunt ZY, hoc est Zz + zY. *Centri curvæ distantia à CF.*



8. Adeoque si curvæ CA fig. 8. æqualis extendatur recta CA fig. 10. similiter divisa; atque per divisionum puncta Z ducantur rectæ VZυ, ita quidem ut ZV fig. 10. sint respectivis zZ fig. 8. æquales, & Zυ respectivis zY: exhibebunt hæ rectæ VZυ singulæ singulorum curvæ punctorum Z momenta respectu rectæ CF fig. 8. adeoque omnes omnium. Hoc est, figura FVCυA momentum totius AC curvæ (respectu rectæ CF,) & illius partes, partes respectivas hujus.

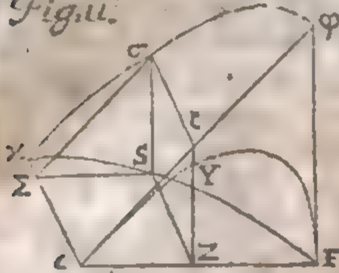
9. Cum vero rectæ CZ fig. 10. hoc est CZ curvæ fig. 8. sint ut Cz chordæ in semicirculo æqualiter crescentes, hoc est, ut sinus recti in quadrante crescentes æqualiter, puta ut BV in trilineo BCc fig. 7. (si nempe intelligatur cB in punctis V æqualiter divisa:) ipsæque rectæ ZV fig. 10. hoc est zZ fig. 8. sive arcus zC, hoc est arcus chordarum in semicirculo (vel sinuum in quadrante) arithmetice proportionalium, ut rectæ VZ trilinei BCc fig. 7. (Nam sicut recta Zz fig. 7. hoc est recta Zz fig. 8 æquatur arcui ZC, sic recta ZV fig. 7. quæ una cum Zz complet totam Vz = Bb, hoc est bC arcum quadrantalem, æquatur arcui ad quadrantem residuo Zb, cujus sinus rectus est zb = BV fig. 7. adeoque omnes VZ trilineum BCc fig. 7. complentes, æqualibus distantiis sumptæ, sunt ut arcus sinuum arithmetice proportionalium in quadrante, sive chordarum æqualiter crescentium in semicirculo; hoc est, ut Zz fig. 8. correspondentes punctis Z æqualibus intervallis in curva CA sumptis:) Erunt omnes VZ trilinei CZAF fig. 10. ad FA toties positam, hoc est trilineum illud ad circumscriptum parallelogrammum; ut trilineum BCc fig. 7. ad parallelogrammum circumscriptum sibi. (Et illius partes partibus hujus respective sumptis proportionales.) *Fig. 7.*

10. Trilinei autem BCc fig. 7. (aut etiam partis hujus cujuslibet) mensura, habetur ex calculo § 23. Est enim $Bb = \frac{1}{2} P$, & $bC = R$; ergo parallelogrammum $BbCc = \frac{1}{2} RP$: trilineum autem $BCb = R^2$ (ut § 76 dictum est,) ergo trilineum reliquum $BCc = \frac{1}{2} RP - R^2 = \frac{1}{8} DP - \frac{1}{4} D^2$; (Hoc est $\frac{1}{4} AF - \frac{1}{2} CF$ in CF.) Unde & trilinei CFA mensura colligitur; quippe ipsius octupla, (propter $AF = \frac{1}{2} P$, & $AC = 2 D = 4 R$, adeoque parallelogrammum $FC = 2 RP$,) nempe $2 RP - 8 R^2$, vel $DP - 2 D^2$. (Et partium similiter mensura, mutatis mutandis, eodem modo colligitur.) Momentum itaque curvæ CZA fig. 8. respectu rectæ CF, quantum ad distantias Zz, esset ad ejusdem curvæ momentum in distantia FA suspensæ; ut CZAF fig. 10. ad circumscriptum parallelogrammum hoc est, ut $DP - 2 D^2$ ad DP, sive ut $P - 2 D$ ad P; hoc est, ut AF — CF ad AF.

11. Tum vero, quantum ad distantias zY fig. 8. (quæ simul cum Zz complent integras ZY,) hoc est, Zυ (bilinei ACυ) fig. 10. Cum rectæ CZ fig. 10. hoc

 est

Fig. 10. est curvæ CZ fig. 8. sint ut chordæ $Cz = a$: erunt respectivæ zY : ($= Z\upsilon$ fig. 10.) $= \frac{a\sqrt{:\mathcal{D}^2 - a^2}}{D}$: Nam (propter similia triangula) ut $CF = D$, ad $Cz = a$, sic $zF = \sqrt{:\mathcal{D}^2 - a^2}$: ad $zY = \frac{a\sqrt{:\mathcal{D}^2 - a^2}}{D}$: Qui itaque est character rectarum $Z\upsilon$ bilinei $AC\upsilon$ fig. 10. posita recta Cz (fig. 8.) $= a$. adeoque curva CZ fig. 8. hoc est, recta CZ fig. 10. $= 2a$.



12. Hujus autem Bilinei, hoc est omnium simul $Z\upsilon$, mensura sic colligitur. Omnes $\sqrt{:D^2 - a^2}$: sunt ut ordinatim applicatæ in Circuli vel Ellipseos quadrante. Adeoque si radio $\mathcal{D} = FC$ describatur circuli quadrans $CF\kappa$ fig. 11. ipsius omnes rectæ ZS, radio $C\kappa$ parallelæ, sunt $\sqrt{:\mathcal{D}^2 - a^2}$: (ponendo $Cz = a$.) Deinde, si super hoc circuli quadrante erigatur quadrans Cylindri recti, altitudinem habens $F\varphi = CF = \mathcal{D}$, qui oblique secetur plano $\varphi C\kappa$; & abscissâ portio secetur plano super ZS recta erecto: sectio $Z\sigma$ erit parallelogrammum, cujus basis $ZS = \sqrt{:\mathcal{D}^2 - a^2}$, altitudo $Z\zeta = Cz = a$; adeoque ipsum parallelogrammum $Z\sigma = a\sqrt{:\mathcal{D}^2 - a^2}$. Cumque hæc omnia parallelogramma numero infinita, portionem Cylindri complentia, sint respectivis rectis $Z\upsilon$ fig. 10. proportionalia, (ut quæ ad eandem $\mathcal{D} = CF$ applicata, dant ipsas $Z\upsilon = \frac{a\sqrt{:\mathcal{D}^2 - a^2}}{\mathcal{D}}$.) Si fiat ubique ut CF fig. 11. ad $Cz = z\zeta$, sic zS ad zY; erunt omnes rectæ zY fig. 11. æquales respectivis rectis $Z\upsilon$ fig. 10. Neque aliter differt Bilineum $AC\upsilon$ fig. 10. à Bilineo FCY fig. 11. quam quod (propter rectam AC duplam rectæ FC) alterum sit alterius duplum. (Et partes illius respectivarum partium hujus duplæ.) Est autem CYF curva, curvæ hujusmodi in se, post decussationem in itinere, recurrentis) pars quarta.

13. Sed & pari ratione Bilinei FCY fig. 11. segmenta CzY, sunt Cylindricæ portionis segmentis $Cz\sigma$ proportionalia. Totumque Bilineum FCY, ad quadratum rectæ CF, eam habet rationem quam exposita portio Cylindrica ad ejusdem rectæ CF cubum. Adeoque ut 1 ad 3. Sunt enim omnia triangula $\Sigma S\sigma$ (triangulo $CF\varphi$ parallela & similia) portionem Cylindri complentia, ad totidem triangulo $CF\varphi$ æqualia, ut omnia quadrata ΣS, ad omnia quadrata CF cubum rectæ CF complentia; nempe ut omnia $\mathcal{D}^2 - a^2$ ad totidem $\mathcal{D}^2$, hoc est ut $1 - \frac{1}{3}$ ad 1, sive ut 2 ad 3. (Vel, quod eodem redit, ut omnes circuli radiorum ΣS ad totidem circulos radii CF; hoc est, ut hemisphærium ad circumscriptum Cylindrum; hoc est, ut 2 ad 3, ut prius:) Adeoque omnia triangula $\Sigma S\sigma$ (quadratorum dimidia) portionem complentia, hoc est ipsa portio cylindrica, ad eundem rectæ CF cubum, ut 1 ad 3. Et consequenter, Bilineum FCY fig. 11. ad eundem CF quadratum, ut 1 ad 3: Et Bilineum $AC\upsilon$ fig. 10. (prioris duplum) ad idem quadratum, ut 2 ad 3. Hoc est, $\frac{2}{3}\mathcal{D}^2$, sive $\frac{8}{3}R^2$.

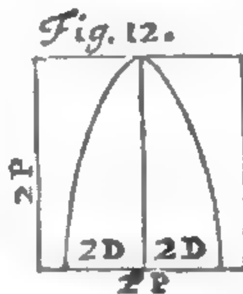
14. Et simile de partibus fiet judicium. Cum enim triangula $\Sigma S\sigma$ fig. 11. sint ad invicem ut circuli in hemisphærio; erit portionis segmentum $\Sigma S\sigma\kappa$, ad totam portionem, ut respectivum hemisphærii segmentum plano abscissum, ad totum hemisphærium; adeoque magnitudinis notæ: Cui portionis segmento $\Sigma S\sigma\kappa$, si addatur prisma $\Sigma S\sigma\zeta zC$, habetur segmentum $\kappa S\sigma\zeta zC$; adeoque & ipsius ratio ad $\mathcal{D}^3$ cubum diametri circuli genitoris: hoc est, ratio segmenti CzY, tum ad totum bilineum FCY, tum ad quadratum rectæ CF. (Bilinei autem illius FCY, latitudo maxima, sive maxima altitudo ratione basis FC, est $R = \frac{1}{2}CF$, quæ quidem illic contingit, ubi sumitur $Cz = CF\sqrt{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}\sqrt{\frac{1}{2}}$; hoc est, ubi Cz ad CF est, ut sinus rectus graduum 45, ad Radium: quod tamen ad præsens negotium cognitu non videtur necessarium.) Potest autem idem etiam sic colligi. Cum $z\sigma$ parallelogramma, sint ubique rectarum zS momentis, respectu rectæ $C\kappa$, proportionalia, (ut patet;) Erunt $\kappa S\sigma\zeta zC$ segmenta, tum inter se, tum ad totam $\kappa\varphi FC$ portionem, ut momenta planorum κSzC respectu rectæ κC, tum inter se, tum ad momentum κFC quadrantis respectu ejusdem κC, (quam § 67 & seqq. exhibendam

exhibendam docuimus;) eadem igitur & ratio planorum C Y z. Et quidem, cum omnium rectarum z S, illa maximum, respectu C α rectæ, sortiatur momentum quæ grad 45 subtendit; ea similiter quæ huic correspondet erit omnium z Y maxima, adeoque bilinei C F Y verticem designabit.

15. Cum igitur habeamus (fig. 10.) tum Trilineum C Z A F $= 2\,RP - 8\,R^2$ per ∽ 9, 10; tum Bilineum C A υ $= \frac{8}{3} R^2$, per ∽ 13: Eorum aggregatum $2\,RP - \frac{16}{3} R^2$, æquatur facto ex omnibus particulis curvæ C A fig. 8. in suas respective distantias Z Y. Tota vero curva C A $= 2\,D = 4\,R$, in rectam A F $= \frac{1}{2} P$ ducta, est $2\,RP$. Momentum igitur curvæ C A fig. 8. in suo situ, ad momentum ejusdem ex puncto A suspensæ (respectu C F rectæ) est ut $2\,RP - \frac{16}{3} R^2$ ad $2\,RP$, vel ut $\frac{1}{2} P - \frac{4}{3} R$ ad $\frac{1}{2} P$; hoc est, ut A F $- \frac{2}{3}$ C F, ad A F. Adeoque centrum gravitatis curvæ C A fig. 8. à recta C F distat, ea parte rectæ F A quæ sit ad totam ut F A $- \frac{2}{3}$ F C ad F A. Hoc est, (ducta A α rectæ F C parallela,) ab A α distat, $\frac{2}{3}$ F C $= \frac{2}{3} D$: Tantundem scilicet quantum supra invenimus (∽ 3.) ab A F distare. Adeoque sumptis tum A δ, tum A Γ, $= \frac{2}{3}$ C F, ductisque δ Δ, Γ γ, (rectis A F, F C, parallelis,) se decussantibus in D, erit D centrum gravitatis C A F fig. 8. Fig. 10.

16. Sin porro, pro rectis omnibus Z V & Z υ fig. 10. substituantur aliæ quæ ad has sint ut peripheria circuli ad ejusdem radium; adeoque pro $2\,RP - \frac{16}{3} R^2$ (quæ est magnitudo figuræ ex trilineo & bilineo fig. 10. compositæ,) substituatur $2\,P^2 - \frac{16}{3} RP$; habetur superficies quæ ex conversione curvæ C A fig. 8. circa C F describitur. Æquat itaque duo quadrata basis integræ Cycloidis (hoc est, peripheriæ circuli genitoris) minus $\frac{32}{3}$ genitoris circuli. Adeoque cum, per ∽ 5, superficies ejusdem conversione circa A F descripta sit $\frac{32}{3}$ genitoris circuli,) superficies duæ ab eadem curva C A fig. 8. descriptæ, (altera circa A F, altera circa C F,) simul sumptæ, æquant præcise duo quadrata basis integræ Cycloidis sive peripheriæ genitoris circuli. Puta, si, ut in fig. 12. intra semissem quadrati cujus latus intelligatur $= 2\,P$, describatur semiparabola æque alta, basin habens $2\,D$; dirimetur semiquadratum illud in duas partes, quarum altera uni, altera reliquæ, superficierum illarum curvarum æquatur. Sin converti intelligatur, illic tota A C D, semicycloidis A C dupla; hic vero ejusdem item dupla, nempe A C infra basin continuata donec productæ C F occurrat; pro semiparabola & semiquadrato, integra prodibunt parabola & quadratum.

Superficies conversione circa C F descripta.



17. Completo autem parallelogrammo F α fig. 8. Quæ C A curva, circa A α conversa, describitur superficies, est æqualis ei quæ ab eadem circa A F conversa describitur; (propter A δ = A Γ:) Quæ autem ab eadem circa C α conversa describitur, est dimidia illius quæ describitur conversione circa A F; (propter D Γ duplam rectæ D γ.) Et universaliter superficies quæ à curva C A circa quamvis rectam (quæ ipsam non secet) conversa describitur, eam rationem habet ad harum quamlibet, vel quamvis aliam sic descriptam, quam inter se habent distantiæ puncti D ab illis rectis. Et quidem (nam & hoc adjungere non erit forsan incommodum) si circa rectam quæ ipsam secet convertatur eadem C A curva; *Differentia* superficierum, quam ea pars curvæ quæ ex uno rectæ secantis latere sita est describit, & quam (vel quas, si binis punctis secet,) describit illius curvæ residuum ex altero secantis latere positum, eam habet rationem ad superficiem circa superius memoratarum rectarum quamvis descriptam, (puta quæ circa A F,) quam habet distantia istius rectæ ad distantiam hujus à centro gravitatis D. Quodque de superficiebus tota curva descriptis dictum est, superficiebus ipsius parte quavis descriptis similiter accommodabitur, invento prius (per jam tradita) istius partis centro gravitatis.

18. Absoluto jam opere de gravitatis centro, tum curvæ semicycloidis C A fig. 8. tum partium ejus, inquirendo; deque superficiebus istius conversione, tum circa A F, tum circa C F, descriptis: de superficierum harum centris gravitatis inquirendum. Incipiemus autem ab ea superficie quæ conversione circa rectam A F describitur. Peripherias autem hanc complentes, adeoque & semiperipherias complentes illius semissem, à singulis curvæ punctis descriptas, proportionales esse diximus (∽ 3.) semiparabolæ rectis Z X fig. 9. diametro parallelis. Earundem autem semiperipheriarum Momenta respectu rectæ A F, cum ex ratione tum magni-

Superficiei semiconversione circa A F factæ, centrum quantum ab A F distat. Fig. 9.

tudinum tum distantiarum centrorum gravitatis dependeant, sintque hæ ipsæ centrorum distantiæ ab A F recta ipsarum peripheriarum radiis, adeoque & magnitudinibus, proportionales; erunt ea momenta in radiorum ratione duplicata; hoc est, in duplicata ratione rectarum Z X fig. 9. semiparabolæ diametro parallelarum; hoc est, in ratione circulorum radiis illis descriptorum. Adeoque ex omnia momenta, ad totidem maximo æqualia; hoc est, momentum superficiei quæ hac curvæ C A semiconversione describitur, in suo situ, ad momentum superficiei Cylindricæ ex æqualis rectæ in distantia F C semiconversione, est ut solidum ex conversione semiparabolæ circa basin suam, ad cylindrum ex conversione circumscripti parallelogrammi circa eandem basin, descriptum; Hoc est, ut 8 ad 15 (per Prop. 119. Arithm. Infin.) superficierum autem magnitudo ad magnitudinem est ut 2 ad 3 (per ∽ 3. Ergo, propter $\frac{2}{3})\frac{8}{15}(\frac{4}{5}$, centrorum gravitatis distantia ad distantiam ut 4 ad 5. Distantia igitur centri gravitatis, dempta curvatura semicirculari, esset $\frac{4}{5}$ F C, $= \frac{4}{5}\mathcal{D}$. Sed, propter illam curvaturam, sumendum adhuc,. ut semiperipheria ad diametrum, sive ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad $\mathcal{D}$, sic $\frac{4}{5}\mathcal{D}$ ad quartam, $\frac{8\mathcal{D}^2}{5\mathcal{P}}$, quæ itaque est distantia centri gravitatis superficiei ex semiconversione curvæ C A circa A F, ab A F;

Fig. 8. nempe ea pars rectæ F C fig. 8. quæ est ad totam, ut 8 F C ad 10 F A. (Et quidem simili processu facile esset idem indicare in aliis integræ conversionis datis partibus; puta non modo in semiconversione, sive $\frac{1}{2}$ conversionis integræ, sed etiam in $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, &c. vel $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}$, &c. integræ conversionis: Nempe sumpta rectæ $\frac{4}{5}$ F C ea parte quæ sit ad ipsam $\frac{4}{5}$ F C, ut chorda ad arcum conversionis.)

Quantum distat à CF. Fig. 9,10.

19. Ut autem ejusdem centri distantia à recta F C (fig. 8.) habeatur; componendæ sunt rationes rectarum Z X fig. 9. atque V v fig. 10. (quarum quidem illæ notant distantias punctorum Z fig. 8. à recta F A, hæ vero eorundem ab F C distantias.) Hoc est, propter V v = Z V + Z v, componendæ sunt rationes illæ Z X, tum cum Z V, tum etiam cum Z v; quæque emergunt binæ rationes compositæ, sunt conjungendæ; earumque aggregata, sunt rationes momentorum peripheriarum, vel semiperipheriarum, punctis Z fig. 8. circa F A descriptarum, respectu rectæ F C.

20. Rationes autem rectarum Z X, hoc est $\frac{\mathcal{D}^2 - a^2}{\mathcal{D}}$, cum rationibus Z v, hoc est $\frac{a\sqrt{:\mathcal{D}^2 - a^2:}}{\mathcal{D}}$ compositæ, sunt ut $\frac{a\mathcal{D}^2 - a^3}{\mathcal{D}^2} \times \sqrt{:\mathcal{D}^2 - a^2:}$ (nempe, ut rectangula ex ductu rectæ Z X fig. 9. in Z v fig. 10.) Quæ omnia ad $\mathcal{D}^2$ toties sumptum, hoc est (propter A C $= 2\mathcal{D}$) ad $2\mathcal{D}^2$: sunt ut 1 ad 5; (quod seorsum probabitur ∽ 52 & seqq.) Adeoque solidum ex Bilineo A C v fig. 10. in altitudines respectivas Z X fig. 9. est $\frac{2}{5}\mathcal{D}^2$.

21. Rationes vero rectarum; Z X fig. 9. cum rationibus Z V fig. 10. compositæ; sunt rationes rectangulorum rectis Z V Z X contentorum; hoc est rectarum Z V in $\frac{\mathcal{D}^2 - a^2}{\mathcal{D}}$ respective ductarum; sive in $\mathcal{D} - \frac{a^2}{\mathcal{D}}$.

22. Omnes autem Z V in $\mathcal{D}$; hoc est, trilineum C Z A F in $\mathcal{D}$; hoc est (per ∽ 10.) $\mathcal{D}\mathcal{P} - 2\mathcal{D}^2$ in $\mathcal{D}$; est, $\mathcal{D}^2\mathcal{P} - 2\mathcal{D}^3$. Unde si auferamus omnes Z V in $\frac{a^2}{\mathcal{D}}$, hoc est $\frac{1}{3}\mathcal{D}^2\mathcal{P} - \frac{4}{9}\mathcal{D}^3$ (ut deinceps ostendetur ∽ 25. & seqq.) manebit $\frac{2}{3}\mathcal{D}^2\mathcal{P} - \frac{14}{9}\mathcal{D}^3$, quod itaque est solidum ex Trilineo C Z A F fig. 10. in altitudines respectivas Z X fig. 9. ducto.

23. Huic igitur solido, si addatur solidum ex Bilineo C A v in easdem respectivas altitudines ducto, nempe $\frac{2}{5}\mathcal{D}^3$ (per ∽ 20;) aggregatum $\frac{2}{3}\mathcal{D}^2\mathcal{P} - \frac{14}{9}\mathcal{D}^3 + \frac{2}{5}\mathcal{D}^3 = \frac{2}{3}\mathcal{D}^2 P - \frac{52}{45}\mathcal{D}^3$, est solidum ex Trilineo C v A F fig. 10. in altitudines Z X fig. 9. respective ducto; sive ex omnibus V v fig. 10. in respectivas Z X fig. 9. sive ex omnibus Z Y in Z X fig. 8. respective.

24. Quam autem rationem habet hoc solidum (ex omnibus Z X fig. 9. in V v fig. 10. respective,) ad solidum ex semiparabola F A C (hoc est, omnibus, Z X) fig. 9. in A F fig. 8. ubique ducta, hoc est, ad $\frac{2}{3}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$: (nam propter A C $= 2\mathcal{D}$, & C F $= \mathcal{D}$, adeoque rectangulum A C F $= 2\mathcal{D}^2$, erit ea semiparabola $\frac{4}{3}\mathcal{D}^2$, quippe $\frac{2}{3}$ rectanguli; quæ semiparabola, ducta in F A $= \frac{1}{2}\mathcal{P}$, dat $\frac{2}{3}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ magnitudinem

dinem solidi, sive prismatis parabolici:) Eam habet momentum superficiei, in suo situ, quæ fit ea semiconversione curvæ CZA fig. 8. circa AF, respectu rectæ CF, (hoc est, factum ex semiperipheriis, ipsis ZX proportionalibus, in distantias $V v$, hoc est ZY, respective,) ad momentum ejusdem superficiei ex puncto A suspensæ, (hoc est, ad factum ex iisdem semiperipheriis in distantiam AF ubique.) Et consequenter, eadem est ratio distantiæ centri gravitatis ejusdem superficiei à recta FC, ad distantiam FA. Nempe ut $P - \frac{16}{15} D$ ad P. Fig. 10.

25. Quod autem omnes ZV in $\frac{a^2}{D}$, fit $\frac{1}{3} D^2 P - \frac{3}{8} D^3$, sic pedetentim ostendetur. Omnes ZV fig. 10. in $4a^2$, hoc est (propter $CA = 2D$) in respectiva quadrata distantiarum CZ; ad easdem omnes in quadratum CA; sunt ut momentum (respectu rectæ cC) portionis prismatis in suo situ, oblique plano secti, super trilineo CZAF erectæ altitudinem habentis in puncto C nullam, at super AF recta æqualem rectæ CA; ad momentum (respectu ejusdem cC) integri prismatis super eadem base, altitudinem habentis rectæ AC æqualem, ex puncto A suspensi. (Omnes enim ZV ductæ tum in $CZ = 2a$ propter distantiam, tum iterum in eandem $CZ = 2a$ propter altitudinem distantiæ æqualem, tantundem est atque in $4a^2$: & similiter, eædem omnes ductæ tum in altitudinem maximam, tum iterum in maximam distantiam, tantundem est atque in quadratum AC ductæ.) Fig. 7. Hoc est, (propter binarum figurarum parallelas rectas proportionales,) ut momentum ejusmodi portionis prismatis super trilineo BcC fig. 7. in suo situ, ad momentum similis prismatis integri ex puncto C suspensi, respectu rectæ Bb. Quam rationem sic investigamus.

26. Distantia Centri gravitatis Trilinei BbC fig. 7. & consequenter trilinei BcC, à recta Bb, sic colligitur. Quadrantis GbC fig. 1. vel 8. centrum gravitatis à recta Gb distat $\frac{2D^2}{3P}$, (quantum scilicet à centro circuli distat centrum gravitatis semicirculi;) à recta igitur AF distat, $\frac{2D^2}{3P} + \frac{1}{2} D$; quæ distantia in ejusdem quadrantis magnitudinem $\frac{1}{16} DP$ ducta, dat $\frac{1}{24} D^3 + \frac{1}{32} D^2 P$, momentum quadrantis GbC respectu rectæ AF; cui si addatur momentum trianguli GbF, (factum utique ex magnitudine in distantiam centri gravitatis) $\frac{1}{24} D^3 = \frac{1}{2} R^2 \times \frac{2}{3} R$; habetur $\frac{1}{12} D^3 + \frac{1}{32} D^2 P$ momentum sectoris FbC respectu AF rectæ.

27. Est autem momentum quadrilinei BβFC fig. 1. ad momentum dicti sectoris FbC (respectu ejusdem AF rectæ) ut 5 ad 2 (per § 26;) Adeoque momentum quinquilinei BβFbC fig. 1. hoc est quadrilinei BβFC fig. 7. ad idem sectoris momentum, ut 3 ad 2; adeoque $\frac{1}{8} D^3 + \frac{3}{64} D^2 P$.

28. Unde si auferatur momentum parallelogrammi BF; nempe $\frac{1}{8} DP \times \frac{1}{4} D = \frac{1}{32} D^2 P$, manebit $\frac{1}{8} D^3 + \frac{1}{64} D^2 P$ momentum trilinei BbC (fig. 1. vel 7.) respectu rectæ AF.

29. Hoc autem momentum, per trilinei hujus magnitudinem $R^2 = \frac{1}{4} D^2$ divisum, dat $\frac{1}{2} D + \frac{1}{16} P$ distantiam centri gravitatis dicti trilinei BbC ab AF recta; Adeoque $\frac{1}{16} P$ ejusdem distantiam à Bb: Et consequenter $\frac{1}{4} D^2 \times \frac{1}{16} P = \frac{1}{64} D^2 P$ momentum dicti trilinei BbC respectu rectæ Bb.

30. Quod quidem momentum $\frac{1}{64} D^2 P$, si ex Parallelogrammi BC momento $\frac{1}{8} DP \times \frac{1}{4} D = \frac{1}{32} D^2 P$ auferatur; manebit $\frac{1}{64} D^2 P$ momentum trilinei BcC respectu ejusdem Bb. (Idem utique atque momentum trilinei BbC respectu ejusdem Bb.)

31. Quod denique trilinei BcC momentum, per ejusdem magnitudinem $\frac{1}{8} DP - \frac{1}{4} D^2$ divisum, dat $\frac{DP}{8P - 16D}$ distantiam centri gravitatis dicti BcC trilinei à recta Bb. Quæ itaque est ea pars rectæ $bC = \frac{1}{2} D$, quæ est ad totam $\frac{1}{2} D$, ut $2P$ ad $8P - 16D$, sive $\frac{1}{2} P$ ad $2P - 4D$; hoc est, ut AF ad 4 AF — 4 FC. Quod ∽ 26 proposuimus inquirendum.

32. Habita vero distantia centri gravitatis trilinei BcC à Bb; adeoque portionis altitudine super idem gravitatis centrum, (ope distantiæ quæ isti æqualis est, propter altitudinem maximam æqualem maximæ distantiæ, adeoque & reliquas

reliquis, utpote proportionales;) nempe $\frac{\mathcal{D}\mathcal{P}}{8\mathcal{P} - 16\mathcal{D}}$: Si hæc altitudo in basis magnitudinem $\frac{1}{8}\mathcal{D}\mathcal{P} - \frac{1}{4}\mathcal{D}^2$ ducatur; habetur $\frac{1}{64}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ dictæ portionis prismatis (trilineo BcC insistentis) magnitudo: (æqualis quidem momento supra invento.)

33. Ejusdem vero portionis prismatis (trilineo BcC insistentis) Momentum, his passibus investigamus. Si super semicirculum FbC fig. 1. erigatur semicylindri portio, qualis FcCYz fig. 5. altitudinem habens in F nullam, in C vero Fig. 5. Cc = CF: Semicirculus basis est $\frac{1}{8}\mathcal{D}\mathcal{P}$; hic in altitudinem super centro gravitatis plani, hoc est in $\frac{1}{2}\mathcal{D}$, ductus, dat $\frac{1}{16}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ magnitudinem expositæ portionis Semicylindri.

34. Hujus vero portionis Semicylindri, centrum gravitatis distat à plano in F tangente, recta Fg = $\frac{5}{8}\mathcal{D}$ (ut supra § 57;) quæ distantia in magnitudinem $\frac{1}{16}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ ducta, dat $\frac{5}{128}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$ momentum expositæ portionis Semicylindri respectu tangentis in F, hoc est FA fig. 1.

35. Ex hac vero Semicylindri portione, auferamus primo eam istius partem quæ quadranti FYz fig. 5. insistit, (hoc est, quadranti FGb fig. 1. vel 7.) cujus magnitudinem primo, deinde momentum, sic investigamus.

36. Quadrantis FYz fig. 5. centrum gravitatis, à recta Yz, distat $\frac{2\mathcal{D}^2}{3\mathcal{P}}$; adeoque ab FA distabit $\frac{1}{2}\mathcal{D} - \frac{2\mathcal{D}^2}{3\mathcal{P}}$; quæ distantia (cum sit altitudini super idem gravitatis centrum æqualis) ducta in basis magnitudinem $\frac{1}{16}\mathcal{D}\mathcal{P}$, dat portionis huic quadranti insistentis magnitudinem, $\frac{1}{32}\mathcal{D}^2\mathcal{P} - \frac{1}{24}\mathcal{D}^3$, vel $\frac{3\mathcal{P} - 4\mathcal{D}}{96} \times \mathcal{D}^2$.

37. Si autem intelligatur hæc portio (quadranti FYz fig. 5. insistens) plano Yzζυ abscindi, & sic super reliquam partem replicari, ut cum ea compleat Cylindrum quadrantalem: Facta hac replicatione, tanto ultra Y constituetur istius replicatæ partis centrum gravitatis, quanto prius citra constitutum erat: ut patet.

38. Momentum vero hujus Cylindri quadrantalis, sic habetur; Centrum gravitatis quadrantis YzC fig. 5. distat ab AF, $\frac{2\mathcal{D}^2}{3\mathcal{P}} + \frac{1}{2}\mathcal{D}$, (quod modo ostensum est ∽ 26;) quæ itaque est distantia centri gravitatis quadrantalis Cylindri (super YzC constituti) à plano φFA: Quæ quidem distantia in quadrantalis Cylindri magnitudinem $\frac{1}{16}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ ducta, dat $\frac{1}{24}\mathcal{D}^4 + \frac{1}{32}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$ ejusdem momentum respectu rectæ FA.

39. Hinc vero si auferamus momentum portionis ante replicationem factam, $\frac{5}{128}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$ (ut supra ∽ 34.) manebit $\frac{1}{24}\mathcal{D}^4 - \frac{1}{128}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$, sive $\frac{16\mathcal{D} - 3\mathcal{P}}{384}\mathcal{D}^3$, augmentum momenti ob promotum gravitatis centrum partis replicatæ. Quod quidem momenti augmentum, per $\frac{3\mathcal{P} - 4\mathcal{D}}{96}\mathcal{D}^2$ replicatæ partis magnitudinem, divisum, dat $\frac{16\mathcal{D} - 3\mathcal{P}}{12\mathcal{P} - 16\mathcal{D}}\mathcal{D}$, mensuram promotionis centri gravitatis: Cujus itaque semissis $\frac{16\mathcal{D} - 3\mathcal{P}}{24\mathcal{P} - 32\mathcal{D}}\mathcal{D}$ est centri gravitatis partis replicatæ distantia à medio: Quæ quidem si ex $\frac{1}{2}\mathcal{D}$ auferatur, quod restat $\frac{15\mathcal{P} - 32\mathcal{D}}{24\mathcal{P} - 32\mathcal{D}}\mathcal{D}$ vel $\frac{15\mathcal{P} - 32\mathcal{D}}{3\mathcal{P} - 4\mathcal{D}} \times \frac{1}{8}\mathcal{D}$, est ejusdem centri distantia à plano φFA. Atque hæc demum distantia, in $\frac{3\mathcal{P} - 4\mathcal{D}}{96}\mathcal{D}^2$ magnitudinem ducta, dat $\frac{15\mathcal{P} - 32\mathcal{D}}{768}\mathcal{D}^3$, sive $\frac{5}{256}\mathcal{D}^3\mathcal{P} - \frac{1}{24}\mathcal{D}^4$, expositæ portionis quadranti FYz insistentis momentum, respectu rectæ FA. Quod ∽ 35. proponitur inquirendum.

40. Hoc igitur momentum, ex $\frac{5}{128}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$ momento totius portionis semicylindri, ablatum,

ablatum, relinquit $\frac{5}{256}\mathcal{D}^3\mathcal{P}+\frac{1}{24}\mathcal{D}^4$, portionis residuæ z Y υ c C, quadranti z Y C insistentis, momentum.

41. Deinde, post hoc ablatum, restituendum est quantum triangulo quadranti F Y z inscripto (hoc est, triangulo F G b fig. 1.) insistit: Nempe Pyramis, basin habens Y υ ζ z $=\frac{1}{4}\mathcal{D}^2$, altitudinem F Y $=\frac{1}{2}\mathcal{D}$, quæ in basin ducta dat $\frac{1}{8}\mathcal{D}^3$, cujus triens $\frac{1}{24}\mathcal{D}^3$ est pyramidis magnitudo; atque hæc in $\frac{3}{8}\mathcal{D}$, distantiam sui centri gravitatis à plano φ F A, ducta, dat $\frac{1}{64}\mathcal{D}^4$ pyramidis momentum respectu F A rectæ: Quod quidem momentum, momento reliquæ partis $\frac{5}{256}\mathcal{D}^3\mathcal{P}+\frac{1}{24}\mathcal{D}^4$ additum, dat $\frac{5}{256}\mathcal{D}^3\mathcal{P}+\frac{11}{192}\mathcal{D}^4$ momentum istius omnis quod sectori F b C fig. 1. insistit, respectu rectæ A F.

42. Cognito autem momento Portionis sic secti prismatis Sectori C F b insistentis; cognoscitur etiam momentum portionis prismatis Quadrilineo C F β B fig. 1. insistentis, eodem plano secti, (respectu ejusdem A F rectæ:) Est utique ad illud, ut 7 ad 3 (per § 45:) Adeoque illius quod Quinquilineo C b F β D fig. 1. hoc est Quadrilineo C F β B fig. 7. (utpote quod ad idem momentum est ut 4 ad 3;) nempe $\frac{5}{192}\mathcal{D}^3\mathcal{P}+\frac{11}{144}\mathcal{D}^4$.

43. Unde si auferatur momentum istius quod Parallelogrammo F B fig. 7. insistit, (hoc est, prismatis basem habentis triangularem, semissem utique quadrati F b, adeoque $\frac{1}{8}\mathcal{D}^2$, altitudinem vero B b $=\frac{1}{4}\mathcal{P}$, cujus itaque magnitudo est $\frac{1}{32}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$, quæ in $\frac{2}{3}$ F b $=\frac{1}{3}\mathcal{D}$ distantiam centri gravitatis à plano rectæ F A insistente ducta, dat $\frac{1}{96}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$ prismatis momentum respectu F A rectæ;) manebit $\frac{1}{64}\mathcal{D}^3\mathcal{P}+\frac{11}{144}\mathcal{D}^4$ momentum istius omnis quod trilineo C B b insistit, respectu rectæ A F.

44. Quod autem Trilineo huic jam insistit, (altitudinem jam nactum in puncto b æqualem ipsi F b $=\frac{1}{2}\mathcal{D}$, & deinceps continue crescentem,) constat ex prismate super illa basi, altitudinis $\frac{1}{2}\mathcal{D}$, & æqualis insuper prismatis portione oblique secti. (Eodem plane modo quo super Y z C quadrante fig. 5. insistit tum z Y υ κ C Cylindrus quadrantalis, tum ejusmodi Cylindri Portio oblique secti ζ υ c κ.)

45. Hujus vero Prismatis momentum respectu rectæ A F, est $\frac{1}{16}\mathcal{D}^4+\frac{1}{128}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$. (Momentum enim trilinei B b C repertum est ∽ 28. esse $\frac{1}{8}\mathcal{D}^3+\frac{1}{64}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$, quod in Prismatis altitudinem $\frac{1}{2}\mathcal{D}$ ductum, dat momentum prismatis dictum.) Quod quidem ex $\frac{1}{64}\mathcal{D}^3\mathcal{P}+\frac{11}{144}\mathcal{D}^4$ (∽ 43.) subductum, relinquit $\frac{1}{128}\mathcal{D}^3\mathcal{P}+\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ momentum portionis prismatis oblique secti trilineo B b C insistentis, respectu A F rectæ. (Adeoque centri gravitatis ab A F distantia est $\frac{1}{2}\mathcal{D}+\frac{8\mathcal{D}^2}{3\mathcal{P}}$; & momentum respectu B b, $\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$.)

46. At vero integri parallelepipedi æque alti parallelogrammo B C fig. 7. insistentis, eodem plano secti, portio, nempe $\frac{1}{32}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$, in sui centri gravitatis a plano rectæ F A insistente distantiam, nempe F b $+\frac{2}{3}$ b C $=\frac{1}{2}\mathcal{D}+\frac{1}{3}\mathcal{D}=\frac{5}{6}\mathcal{D}$, ducta, dat $\frac{5}{192}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$ momentum istius prismatis, sive portionis parallelepipedi, respectu istius A F. Unde si auferamus $\frac{1}{128}\mathcal{D}^3\mathcal{P}+\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ momentum portionis trilineo B b C insistentis, ∽ præced. inventum restabit $\frac{7}{384}\mathcal{D}^3\mathcal{P}-\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ momentum portionis trilineo B c C insistentis respectu rectæ A F.

47. Quod quidem momentum, per solidi magnitudinem $\frac{1}{64}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ (∽ 32. inventam) divisum, dat $\frac{7}{6}\mathcal{D}-\frac{8\mathcal{D}^2}{9\mathcal{P}}$ centri gravitatis ab A F distantiam; adeoque $\frac{2}{3}\mathcal{D}-\frac{8\mathcal{D}^2}{9\mathcal{P}}$ ejusdem distantiam à B b; quæ in magnitudinem $\frac{1}{64}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$ ducta, dat $\frac{1}{96}\mathcal{D}^3\mathcal{P}-\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ expositæ portionis momentum trilineo B c C insistentis, respectu B b rectæ. (Vel etiam, ex prismatis parallelogrammo B C insistentis momento respectu B b, nempe $\frac{1}{32}\mathcal{D}^2\mathcal{P}\times\frac{1}{3}\mathcal{D}=\frac{1}{96}\mathcal{D}^3\mathcal{P}$, subducto $\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ momento portionis insistentis trilineo B b C, restat $\frac{1}{96}\mathcal{D}^3\mathcal{P}-\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ momentum portionis B c C trilineo insistentis respectu B b, ut prius.) Quod ∽ 33. proponitur investigandum.

48. Integri vero Prismatis, eidem B c C trilineo insistentis, ex puncto C suspensi, momentum respectu ejusdem B rectæ, sic habetur. Prismatis hujus basis est ipsum trilineum B c C $=\frac{1}{8}\mathcal{D}\mathcal{P}-\frac{1}{4}\mathcal{D}^2$ (per ∽ 10.) quæ in altitudinem $\frac{1}{2}\mathcal{D}$ ducta, dat $\frac{1}{16}\mathcal{D}^2\mathcal{P}-\frac{1}{8}\mathcal{D}^3$ prismatis magnitudinem, quæ in distantiam b C $=\frac{1}{2}\mathcal{D}$ ducta, dat $\frac{1}{32}\mathcal{D}^3\mathcal{P}-\frac{1}{16}\mathcal{D}^4$ prismatis ex puncto C suspensi momentum respectu rectæ B b.

49. Ratio

49. Ratio igitur momenti Portionis priſmatis in ſuo ſitu, ad momentum priſmatis integri ex puncto C ſuſpenſi, reſpectu ejuſdem B b rectæ, eſt (per ∽ 47, 48.) ut $\frac{1}{96} D^3 P - \frac{1}{72} D^4$ ad $\frac{1}{32} D^3 P - \frac{1}{16} D^4$; hoc eſt, ut $3P - 4D$ ad $9P - 18D$. Quæ ratio ∽ 25. proponitur inveſtiganda.

50. Hanc autem rationem ſic inventam, eandem eſſe atque rationem omnium Z V fig. 10. in $4a^2$ reſpective ductorum, ad eaſdem omnes Z V in quadratum rectæ C A; jam ſupra oſtenſum eſt ∽ 25. At omnes Z V, hoc eſt trilineum C Z A F, hoc eſt $DP - 2D^2$ (per ∽ 10.) in C A $= 2D$ ductæ, dant $2D^2P - 4D^3$ priſmatis magnitudinem; quæ iterum in $2D$ diſtantiam ducta, dat $4D^3P - 8D^4$ momentum dicti priſmatis integri trilineo C Z A F fig. 10. inſiſtentis, ex puncto A ſuſpenſi, reſpectu rectæ C c.

51. Adeoque (propter rationem $3P - 4D$ ad $9P - 18D$, ∽ 49. inventam) erit $\frac{3P - 4D}{9P - 18D}$ in $4D^3P - 8D^4$, hoc eſt $\frac{12P - 16D}{9} D^3$, momentum expoſitæ portionis priſmatis trilineo C Z A F inſiſtentis, in ſuo ſitu, reſpectu C c rectæ; hoc eſt, factum ex omnibus Z V in $4a^2$ reſpective: Et conſequenter (dividendo per $4D$) erit $\frac{3P - 4D}{9} D^2$, hoc eſt $\frac{1}{3} D^2 P - \frac{4}{9} D^3$, factum ex eiſdem omnibus Z V in $\frac{a^2}{D}$ reſpective ductis. Quod ∽ 22, 25. ſuſcepimus oſtendendum.

52. Quod autem omnes $\frac{aD^2 - a^3}{D^2}$ $\surd: D^2 - a^2$; ſint ad D^3 toties ſumptum, ut 1 ad 5, (quod ∽ 20. probandum ſuſcepimus,) ſic oſtenditur, ex principiis noſtræ *Arithmeticæ Infinitorum*. Infinita ſeries Primanorum, ſive Arithmetice proportionalium, ut a, (vel eadem ſeries in 1 ducta,) eſt ad convenientem ſeriem Æqualium, ut 1 ad 2. Eadem Primanorum ſeries in ſeriem Reſiduorum $D^2 - a^2$ (hoc eſt in ſeriem Æqualium mulctatam ſerie ſecundanorum,) nempe $aD^2 - a^3$, eſt ad ſeriem Æqualium, ut $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ ad 1, ſive ut 1 ad 4. Eadem ſeries Primanorum in Reſiduorum Quadrata, hoc eſt, in $D^4 - 2a^2D^2 + a^4$, nempe $aD^4 - 2a^3D^2 + a^5$, ad ſeriem Æqualium, eſt ut $\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6}$ ad 1, ſive ut 1 ad 6. Eadem primanorum ſeries in Cubos Reſiduorum, hoc eſt, in $D^6 - 3a^2D^4 + 3a^4D^2 - a^6$; nempe $aD^6 - 3a^3D^4 + 3a^5D^2 - a^7$, ad ſeriem Æqualium, eſt ut $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{1}{8}$ ad 1, ſive ut 1 ad 8. Et ſic deinceps, (ut ſigillatim probabitur ex prop. 64. Arithm. Infin.) Nempe ſeries Primanorum, reſpective ducta in

ſeriem, 0. Unit. Reſid. Qu: Reſid. Cub: Reſid. Biquad: Reſiduorum, &c.

dat rationes $\frac{1}{0}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$. $\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6}$. $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{1}{8}$. $\frac{1}{2} - \frac{4}{4} + \frac{6}{6} - \frac{4}{8} + \frac{1}{10}$, &c.

Hoc eſt $\frac{1}{0}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{10}$. &c.

53. Sin hi loci pro paribus habeantur, & fiat congrua interpolatio pro locis imparibus, (juxta progreſſionis analogiam,) prodibit ea quæ ſequitur rationum ſeries. Nempe ſeries Primanorum a reſpective ducta in

ſeriem 0.	Recipr: √ Reſid.	Unitatum.	√ Reſiduorum.	Reſiduorum.	√ q Cub. Reſid.	Quadr. Reſid.	√: Surſol. Reſid.	Cub. Reſid.	&c.
dat rationes $\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{7}$.	$\frac{1}{8}$	&c.

54. Adeoque ſeries $a \surd: D^2 - a^2$ (nempe ſeries Primanorum in Radices Quadraticas Reſiduorum,) erit ad ſeriem Æqualium, hoc eſt, ad totidem D^3, ut 1 ad 3; (quod etiam ſuperius demonſtravimus alias ∽ 12, 13.) Et ſeries $aD^2 - a^3$ in $\surd: D^2 - a^2$: ſive $a \surd: D^6 - 3a^2D^4 + 3a^4D^2 - a^6$: (nempe ſeries Primanorum in ſeriem Radicum Quadraticarum Cuborum ex Reſiduis $D^2 - a^2$,) ad ſeriem Æqualium, hoc eſt, ad totidem D^4, eſt ut 1 ad 5. Adeoque, & ſeries $\frac{aD^2 - a^3}{D^2}$, $\surd: D^2 - a^2$; ad totidem D^2, erit item ut 1 ad 5. Quod demonſtrandum ſuſcepimus ∽ 20. Adeoque abſolvimus omnia quæ ad centrum gravitatis ſuperficiei ex ſemiconverſione curvæ A C (fig. 1. vel 8.) circa A F, deſignandum requiruntur.

55. Supereſt,

55. Supereſt, ut centrum gravitatis ſuperficiei, quæ ſemiconverſione ejuſdem CA curvæ circa CF converſæ deſcribitur, inveſtigemus. Quod quidem jam partim peractum eſt. Quum enim (propter binarum quantitatum reciprocationes, ut aliquoties dictum eſt,) idem ſit, reſpectu rectæ AF, momentum ſuperficiei quæ converſione CA curvæ circa CF deſcribitur; atque, reſpectu rectæ CF, momentum ſuperficiei quæ ejuſdem circa AF converſione deſcribitur: Sitque hoc ſuperius inventum ∽ 23; Etiam illud ſimiliter inventum erit. *Superficiei, ſemiconverſione circa CF factæ, centrum; quantum diſtat ab AF.*

56. Invenimus utique (∽ 23) facta ex omnibus ZX in ZY fig. 8. reſpective ductis (curva CA in punctis Z æqualiter diviſa,) eſſe $\frac{2}{3}D^2P - \frac{52}{45}D^3$. Adeoque (pro Radiis reſtituendo ubique Peripherias, hoc eſt, dividendo per $\frac{1}{2}D$ & multiplicando per P,) erit $\frac{4}{3}DP^2 - \frac{104}{45}D^2P$ momentum circulorum omnium punctis Z deſcriptorum, ſive radiis ZX in diſtantiis ZY ſuſpenſorum, ſive radiis ZY in diſtantiis ZX ſuſpenſorum; hoc eſt, ſuperficiei converſione CA curvæ circa AF deſcriptæ, reſpectu rectæ CF; vel, converſione circa CF, reſpectu rectæ AF. Fig. 8.

57. Hoc itaque ſuperficiei momentum converſione circa CF deſcriptæ, ſi per ejuſdem magnitudinem, hoc eſt, per $2P^2 - \frac{16}{3}RP$ (ut ſupra ∽ 16,) vel $2P^2 - \frac{8}{3}DP$, dividatur; habebitur $\frac{30P - 52D}{45P - 60D}D$ diſtantia centri gravitatis ſuperficiei converſione (vel ſemiconverſione) curvæ CA circa CF deſcriptæ, ab AF recta.

58. Quantum autem idem gravitatis centrum (ſuperficiei ex ſemiconverſione CA curvæ circa FC deſcriptæ) ab FC diſtat, ſic inquirimus. Semiperipheriarum punctis Z fig. 8. circa FC deſcriptarum, tum magnitudines, tum & earundem centrorum gravitatis ab FC diſtantiæ, ſunt rectis ZY proportionales. Ergo ſingularum momenta reſpectu ejuſdem FC, ſunt ut quadrata rectarum ZY fig. 8. hoc eſt (per ∽ 8) rectarum Vν fig. 10. Adeoque omnium momenta ſunt ad momenta totidem radio FA deſcriptarum; Hoc eſt, momentum ſuperficiei quæ ſemiconverſione curvæ CA fig. 8. circa FC deſcribitur, ad momentum ſuperficiei ſemicylindricæ recta CA æquali deſcriptæ, diſtantiam à converſionis axe habentis ipſi FA æqualem; ut omnia quadrata Vν fig. 10. ad totidem quadrata AF; hoc eſt, ut omnia VZq + 2VZ×Zν + Zνq, ad totidem AFq. *Quantum diſtat à CF.* Fig. 8. 10.

59. Quam autem habent rationem omnia Zνq ad omnia AFq, ſic colligitur. Eſt recta $Z\nu = \frac{a\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$ (per ∽ 11,) ergo $Z\nu q = \frac{a^2D^2 - a^4}{D^2}$. Sed omnia a^2D^2 ad totidem D^4, ſunt ut 1 ad 3; & omnia a^4 ad totidem D^4, ut 1 ad 5; Ergo omnia $a^2D^2 - a^4$ ad totidem D^4, ut $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ ad 1, ſive ut 2 ad 15. Adeoque omnia $\frac{a^2D^2 - a^4}{D^2}$ ad totidem D^2, hoc eſt (propter CA = 2D) ad 2D^3, ut 2 ad 15. Ideoque $\frac{4}{15}D^3$ aggregatum omnium Zνq. Fig. 10.

60. Deinde omnia VZq ad totidem AFq, ſunt ut omnes circuli radiorum ZV ad totidem circulos radiorum AF: hoc eſt, ut ſolidum converſione trilinei CZAF circa CA deſcriptum, ad ſolidum deſcriptum ſimili converſione circumſcripti Parallelogrammi; hoc eſt, ut momentum ejuſdem Trilinei ad momentum circumſcripti Parallelogrammi, reſpectu ejuſdem CA rectæ; hoc eſt, ut momentum Trilinei BcC fig. 7. ad momentum BC parallelogrammi ſibi circumſcripti, reſpectu rectæ cB; hoc eſt, ut $P^2 - 8D^2$ ad P^2. Nam trilinei CBb magnitudo eſt $\frac{1}{4}D^2$; ejuſque centri gravitatis à cB diſtantia, (eadem utique cum diſtantia centri gravitatis trilinei CBF ab eadem cB,) eſt $\frac{1}{2}D$, (per § 99;) Adeoque momentum $\frac{1}{4}D^2 \times \frac{1}{2}D = \frac{1}{8}D^3$: Quod quidem momentum ſi ex Parallelogrammi CB momento, $\frac{1}{64}DP^2 = \frac{1}{8}DP \times \frac{1}{8}P$, auferatur; relinquit $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$, momentum trilinei BcC reſpectu Bc rectæ. Quod itaque ad $\frac{1}{64}DP^2$ momentum CB parallelogrammi, eſt ut $P^2 - 8D^2$ ad P^2, ſive ut FAq − 2FCq ad FAq.

61. Quod ipſum ſic etiam probamus alias. Si duci intelligatur, in fig. 7. recta CA (quam per B tranſituram certum eſt) Triangulum rectilineum CAF æquale fiet Trilineo CZAF miſtilineo: Quod quidem miſtilineum à rectilineo in hoc tantum differt, quod ſegmentum illud BA curva & recta comprehenſum, à ſitu BA in ſitum BC transfertur. Ex hac autem dicti ſegmenti tranſlatione, quod oritur diſcrimen hoc eſt: Solidum ex converſione trilinei miſti circa FC ortum, eſt Fig. 7.

(per § 83) $\frac{1}{8}P^3 - 2R^2P$, sive $\frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}D^2P$; Solidum seu Conus ex simili conversione trianguli rectilinei est $\frac{1}{12}P^3$, (nam circulus radii R est $\frac{1}{2}RP$; ergo circulus radii $\frac{1}{2}P$, utpote in radiorum ratione duplicata, est $\frac{1P}{8R}P^2$ vel $\frac{P}{4D}P^2$; qui circulus, cum sit coni basis, ductus in $\frac{1}{3}D$ trientem altitudinis, dat $\frac{1}{12}P^3$ magnitudinem coni:) Horum solidorum differentia, nempe excessus coni supra reliquum solidum, est $\frac{1}{2}D^2P - \frac{1}{24}P^3$. Sin utrobique, pro circulorum peripheriis substituamus radios, (facta divisione per P, & multiplicatione per $\frac{1}{2}D$,) habebimus planorum momenta respectu rectæ C F; nempe illic $\frac{1}{16}DP^2 - \frac{1}{4}D^3$, hic vero $\frac{1}{24}DP^2$; adeoque momentorum differentiam $\frac{1}{4}D^3 - \frac{1}{48}DP^2$. Hæc vero differentia per segmenti magnitudinem divisa, hoc est per $\frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{16}DP$, (est enim trilineum mistum B b C $= \frac{1}{4}D^2$, unde si auferatur triangulum sibi inscriptum, quod est circumscripti parallelogrammi dimidium, adeoque $\frac{1}{16}DP$, manebit $\frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{16}DP$ magnitudo segmenti B A vel B C recta & curva comprehensi;) dat $\frac{12D^2 - P^2}{12D - 3P}$ mensuram promotionis centri gravitatis, dicti segmenti translocati, versus F C rectam: cujus itaque semissis $\frac{12D^2 - P^2}{24D - 6P}$ est ejusdem centri distantia à recta c B β: Quæ quidem distantia, in segmenti magnitudinem $\frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{16}DP$ ducta, dat $\frac{1}{8}D^3 - \frac{1}{96}DP^2$ ejusdem momentum respectu c B β rectæ. Momentum autem trianguli rectilinei B c C respectu ejusdem c B rectæ est $\frac{1}{192}DP^2 = \frac{1}{16}DP \times \frac{1}{12}P$. Unde si auferatur segmenti dicti momentum $\frac{1}{8}D^3 - \frac{1}{96}DP^2$; manebit $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$ momentum trilinei misti B c C respectu rectæ c B. Est autem totius B C Parallelogrammi, respectu ejusdem c B, momentum $\frac{1}{64}DP^2 = \frac{1}{8}DP \times \frac{1}{8}P$. (Unde obiter liquet, residui B C b trilinei momentum esse $\frac{1}{8}D^3$; adeoque, propter ipsius magnitudinem $\frac{1}{4}D^2$, distantiam sui centri gravitatis à c B esse $\frac{1}{2}D$; & consequenter, à b C erit $\frac{1}{4}P - \frac{1}{2}D$, ut supra § 99.) Ratio igitur momenti trilinei misti B c C, ad momentum circumscripti Parallelogrammi, (respectu ejusdem c B rectæ,) est ut $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$ ad $\frac{1}{64}DP^2$; sive, ut $P^2 - 8D^2$ ad P^2: ut prius.

62. Vel denique, sic etiam eadem ratio investigabitur. Momentum trilinei misti C Z A F fig. 7. respectu rectæ C F est (ut supra) $\frac{1}{16}DP^2 - \frac{1}{4}D^3$. Momentum autem æqualis parallelogrammi C β, respectu ejusdem C F, est $\frac{1}{32}DP^2 = \frac{1}{4}DP \times \frac{1}{8}P$. Horum momentorum differentia $\frac{1}{32}DP^2 - \frac{1}{4}D^3$ (cum ex sola trilinei B β A in situm B c C translatione oriatur) si per $\frac{1}{8}DP - \frac{1}{4}D^2$ (trilinei B c C magnitudinem) dividatur; prodibit $\frac{P^2 - 8D^2}{4P - 8D}$ mensura promotionis centri gravitatis trilinei B β A in situm B c C translati. Hujus igitur semissis $\frac{P^2 - 8D^2}{8P - 16D}$ erit ejusdem centri à c B distantia: Quæ in $\frac{1}{8}DP - \frac{1}{4}D^2$ magnitudinem ducta; dat $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$ ejusdem B c C trilinei momentum respectu c B rectæ. Vel, quod eodem recidit, differentiæ momentorum inventæ $\frac{1}{32}DP^2 - \frac{1}{4}D^3$, semissis $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$, est trilinei translocati momentum quæsitum. (Nam Quotientis dimidium, in Divisorem, ductum, restituit Dividui semissem.) Unde eadem quæ prius oritur ratio $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$ ad $\frac{1}{64}DP^2$, sive $P^2 - 8D^2$ ad P^2; quæ § 60 quærebatur.

63. Hac itaque ratione inventa, sic procedimus. Quadratum A F fig. 10. est $\frac{1}{4}P^2$ quod ductum in C A $= 2D$, dat $\frac{1}{2}DP^2$ aggregatum omnium A F q. Si fiat itaque (propter rationem modo inventam) ut P^2 ad $P^2 - 8D^2$, sic $\frac{1}{2}DP^2$ ad quartum; erit illud $\frac{1}{2}DP^2 - 4D^3$ aggregatum omnium Z V q.

64. Superest ut inquiramus, quam ad eadem omnia A F q, rationem habeant, omnia bina rectangula 2 V Z $\times$ Z v fig. 10. (§ 58 memorata;) hoc est, omnes V Z in 2 Z v, hoc est (per § 11) omnes V Z in $\frac{2a\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$: Hoc est, omnes V Z in $\frac{\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$: in $2a$. Quam rationem his passibus investigamus.

Fig. 10.

65. Rectæ Z V trilinei C Z A F fig. 10. sunt rectis V Z trilinei B V c C fig. 7. propor-

Fig. 7.

proportionales: Item rectæ CZ $= 2a$ fig. 10. rectis BV fig. 7. Et $\frac{\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$: rectis zY quadrantem CbG complentibus proportionales. Omnes igitur VZ in $\frac{\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$: sunt ut omnia rectangula VZ × zY fig. 7. Quæ iterum in $2a$ ductæ, sunt ut horum rectangulorum momenta respectu rectæ Bh fig. 7. Quantum autem sit horum omnium momentum sic colligimus.

66. Intelligatur primo super planum trilinei CZAF fig. 7. erigi semicirculum CbF ad angulos rectos; ita quidem ut CF diameter semicirculi, congruat CF lateri trilinei. Deinde super idem planum, moveri intelligatur idem semicirculus invariato angulo, à CF ad C 3, & sic deinceps usque ad A; hoc motu describens Semicylindrum: Quem Semicylindrum si secet planum rectæ AC perpendiculariter insistens, abscinditur Semicylindri Portio (super CAF triangulo jacens) ex infinitis Parallelogrammis conflata, quorum bases intelligantur ordinatim-applicatæ in basis Semicylindricæ semicirculo, altitudines arithmetice-proportionales triangulum CAF complentes. Sin eundem semicylindrum secet superficies curvata perpendiculariter insistens curvæ CZA, abscindetur Semicylindri Fragmentum (sic enim, liber, distinctionis causa, vocare) super CZAF trilineo misto jacens, ex Parallelogrammis item infinitis conflatum, quorum bases intelligantur eædem zY ordinatim-applicatæ in semicirculo, altitudines vero Zz trilineum CZAF complentes.

67. Hæc autem duo solida, nempe Portio semicylindri, plano abscissa, & semicylindri Fragmentum, abscissum superficie curvata, sunt quoad magnitudinem inter se æqualia. (Propter, tum binas quasvis rectas zY in base, utrinque à medio æqualiter remotas, invicem æquales; tum binas ubique his basium rectis congruentes altitudines, sive in trilineo misto, sive in triangulo rectilineo, simul æquales rectæ AF.) Utrumvis siquidem Semicylindro ejusdem basis, semialto, æquale.

68. Sunt autem eadem duo solida, quoad momentum respectu AF rectæ, inæqualia: Propter translatum id totum quod in altero insistit bilineo BA, ad situm BC in reliquo.

69. Est autem Portionis, triangulo rectilineo incumbentis, momentum respectu AF rectæ, $\frac{3}{256} D^2 P^2 = \frac{1}{32} D P^2 \times \frac{3}{8} D$. (Est enim semicirculus FbC $= \frac{1}{8} DP$, & semialtitudo $\frac{1}{2}$ AF $= \frac{1}{4} P$, adeoque portionis magnitudo $\frac{1}{32} D P^2$; quæ in $\frac{3}{8} D$ distantiam centri gravitatis ab AF (per § 57) ducta, dat $\frac{3}{256} D^2 P^2$ portionis momentum.) Fragmenti vero, trilineo misto insistentis, momentum respectu ejusdem AF rectæ, est (per § 105) $\frac{1}{16} R^2 P^2 - \frac{4}{9} R^4 = \frac{1}{64} D^2 P^2 - \frac{1}{36} D^4$. Unde si auferatur Portionis momentum $\frac{3}{256} D^2 P^2$, habetur $\frac{1}{256} D^2 P^2 - \frac{1}{36} D^4$ momentorum differentia.

70. Et consequenter (cum hæc momentorum differentia non aliunde proveniat quam ex segmenti bilineo BA insistentis in situm BC translatione,) si illa momentorum differentia intelligatur per magnitudinem translocatæ partis divisa, unde habeatur mensura promotionis centri gravitatis quantum ad AF rectam; hujusque semissis, distantia utique ejusdem centri à Bb, in eandem magnitudinem iterum multiplicata; prodibit Dividui semissis, nempe $\frac{1}{512} D^2 P^2 - \frac{1}{72} D^4$, momentum istius translocatæ partis, bilineo BC insistentis, respectu rectæ Bb.

71. Deinde, super triangulo CBb rectilineo, incumbit cylindri quadrantalis portio, cujus basis CbG quadrans circuli, altitudo Bb $= \frac{1}{4} P$; momentum vero ejusdem respectu rectæ Bb. est $\frac{1}{96} D^3 P - \frac{1}{512} D^2 P^2$. Quod eodem modo colligitur quo supra (☞ 35 & seqq. colligitur momentum ejusmodi portionis FYυζz fig. 5. Cum enim illic ☞ 39 habetur $\frac{1}{24} D^4 - \frac{1}{128} D^3 P$ momenti augmentum (ob dictæ portionis ibidem translationem) respectu rectæ FA, (si nempe intelligatur YFA planum horizonti parallelum) vel rectæ Fφ (si scilicet planum YFφ horizonti parallelum intelligatur:) Adeoque ejusdem semissis $\frac{1}{48} D^4 - \frac{1}{256} D^3 P$, portionis dictæ momentum respectu rectæ Yz vel Yυ (prout hæc vel illa intelligatur horizonti parallela,) posita quidem (quod illic supponitur) segmenti altitudine Yυ $= \frac{1}{2} D$: Unde, si posita fuisset Yυ $= \frac{1}{4} P$ (prout jam in casu simili supponimus super æqualem basem portionis altitudinem Bb $= \frac{1}{4} P$) fuisset ejusdem momentum respectu rectæ Yz vel Yυ, $\frac{1}{96} D^3 P - \frac{1}{512} D^2 P^2$: Quod igitur est momentum por-

tionis Cylindri quadrantalis, triangulo CBb incumbentis, respectu rectæ Bb fig. 7.

72. Totius autem Cylindri quadrantalis, parallelogrammo BC incumbentis, momentum respectu ejusdem Bb rectæ, est $\frac{1}{96}\mathcal{D}^3\mathcal{P} = \frac{1}{64}\mathcal{D}\mathcal{P}^2 \times \frac{2\mathcal{D}^2}{3\mathcal{P}}$. Unde si auferatur tum momentum solidi bilineo BC insistentis, $\frac{1}{512}\mathcal{D}^2\mathcal{P}^2 - \frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ (§ 70;) tum $\frac{1}{96}\mathcal{D}^3\mathcal{P} - \frac{1}{512}\mathcal{D}^2\mathcal{P}^2$ (§ 71) momentum portionis semicylindri triangulo CBb incumbentis; hoc est, $\frac{1}{96}\mathcal{D}^3\mathcal{P} - \frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ momentum solidi totius trilineo misto CBb incumbentis; manebit $\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ momentum (respectu ejusdem Bb rectæ) solidi insistentis trilineo misto BcC fig. 7. nempe solidi ex omnibus VZ×zY fig. 7. Quod § 65 proponitur inquirendum.

Fig. 7, 10. 73. Hoc habito; propter tum AF fig. 10. duplam rectæ cC fig. 7. adeoque & ZV fig. 10. duplas rectarum VZ fig. 7. tum $\sqrt{:\mathcal{D}^2 - a^2}$ (propter $\mathcal{D}$ duplam rectæ GC fig. 7.) duplas rectarum zY fig. 7. adeoque singula $\sqrt{:\mathcal{D}^2 - a^2}$: in ZV fig. 10. quadrupla singulorum Vz×zY fig. 7. Et (propter altitudinem CA fig. 10. quadruplam altitudinis cB fig. 7.) omnia omnium sedecupla, (est enim $4 \times 4 = 16$:) Et denique (propter eandem $AC = 4cB$) distantiam centri gravitatis à cC fig. 10. quadruplam distantiæ à Bb fig. 7. erit (propter $16 \times 4 = 64$) momentum ad momentum ut 64 ad 1. Adeoque omnes *VZ fig.* 10. *in* $\sqrt{:\mathcal{D}^2 - a^2}$: *in* $2a, = \frac{8}{9}\mathcal{D}^4$; (nempe ad momentum omnium VZ×zY×BV fig. 7. hoc est $\frac{1}{72}\mathcal{D}^4$ per præced. ut 64 ad 1.) Et propterea, facta applicatione ad $\mathcal{D}$, omnes VZ (fig. 10.) in $\frac{2a\sqrt{:\mathcal{D}^2 - a^2}}{\mathcal{D}}$: hoc est, omnia 2VZ×Zv bina rectangula (§ 58 memorata) $\frac{8}{9}\mathcal{D}^3$. Quod § 64 proponitur inquirendum.

74. Cum igitur sint omnia Zvq (per § 59.) $\frac{4}{15}\mathcal{D}^3$, & omnia ZVq (per § 63.) $\frac{1}{2}\mathcal{D}\mathcal{P}^2 - 4\mathcal{D}^3$, & denique omnia 2VZ×Zv (per § 73.) $\frac{8}{9}\mathcal{D}^3$. Erunt omnia VZq + 2VZ×Zv + Zvq fig. 10. $\frac{1}{2}\mathcal{D}\mathcal{P}^2 - \frac{128}{45}\mathcal{D}^3$. Omnia vero AFq sunt $\frac{1}{2}\mathcal{D}\mathcal{P}^2 = \frac{1}{4}\mathcal{P}^2 \times 2\mathcal{D}$. Eorum igitur ad hæc ratio constat; nempe ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}^2 - \frac{128}{45}\mathcal{D}^2$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}^2$, sive ut $45\mathcal{P}^2 - 256\mathcal{D}^2$ ad $45\mathcal{P}^2$. Quam quidem eandem esse quam habet momentum superficiei ex semiconversione curvæ CA fig. 8. circa CF, ad momentum curvæ semicylindricæ ejusdem basis, altitudinis vero $2\mathcal{D} = CA$ respectu rectæ CF sive plani per axem; jam § 58. ostensum est. Est autem istius magnitudo (per § 16.) $\mathcal{P}^2 - \frac{8}{3}R\mathcal{P}$ sive $\mathcal{P}^2 - \frac{4}{3}\mathcal{D}\mathcal{P}$; hujus autem $\mathcal{P}^2$ (quod nempe fit ex altitudine $2\mathcal{D}$, in $\frac{\mathcal{P}^2}{2\mathcal{D}}$ semiperipheriam radio $AF = \frac{1}{2}\mathcal{P}$ descriptam:) adeoque illius ad hanc ratio, ut $\mathcal{P} - \frac{4}{3}\mathcal{D}$ ad $\mathcal{P}$, sive ut $3\mathcal{P} - 4\mathcal{D}$ ad $3\mathcal{P}$. Ideoque propter $\frac{3\mathcal{P} - 4\mathcal{D}}{3\mathcal{P}}$) $\frac{45\mathcal{P}^2 - 256\mathcal{D}^2}{45\mathcal{P}^2}$ ($\frac{45\mathcal{P}^2 - 256\mathcal{D}^2}{45\mathcal{P}^2 - 60\mathcal{D}\mathcal{P}}$, distantiarum centrorum gravitatis ratio est, ut $45\mathcal{P}^2 - 256\mathcal{D}^2$ ad $45\mathcal{P}^2 - 60\mathcal{D}\mathcal{P}$. Est autem centri gravitatis expositæ curvæ semicylindricæ à plano per axem distantia $\mathcal{D}$, (nempe radii $AF = \frac{1}{2}\mathcal{P}$ ea pars quæ est ad totam, ut chorda ad arcum, hoc est ut $\mathcal{D}$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}$;) Et propterea $\frac{45\mathcal{P}^2 - 256\mathcal{D}^2}{45\mathcal{P}^2 - 60\mathcal{D}\mathcal{P}}\mathcal{D}$ distantia centri gravitatis superficiei ex semiconversione curvæ CA circa CF ab eodem plano sive à CF recta. Quod erat ultimo inquirendum.

APPENDIX.

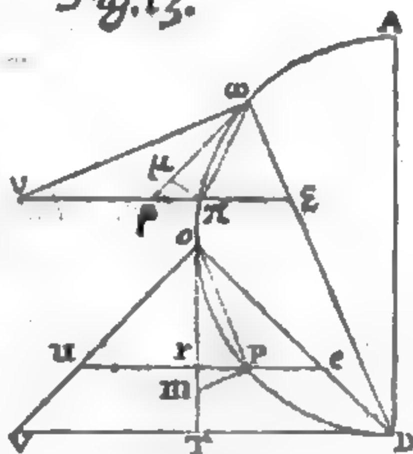
Cum ex Wrennii nostri Demonstratis de Cycloidibus (quæ sub initium Julii anni 1658 amicis quibusdam ostendit) Semicycloidis curvam Axis duplam esse § 1. assumpserim: Istius demonstrationem prout eam ab eodem D. *Christophero Wren*, Socio Collegii *Omnium Animarum* dicti, Oxoniæ, & in Collegio *Greshamensi*, Londini, Astronomiæ Professore, acceperim, visum est hic subjunctam exhibere.

De

De recta Tangente Cycloidem primariam.

Lemma.

SI sit Circulus A o D, Diameter A D, tangens V D, & o V subtensæ cuivis D o ad rectos angulos. Dico Tangentem esse Arcu o p D majorem. Ducatur Tangens o T. Quoniam anguli T o D, T D o sunt æquales, ergo anguli T o V, T V o sunt æquales. Ergo V T D æqualis est O T, T D simul sumptis. Sed ipsæ o T, T D superant arcum o p D. Ergo V D major est Arcu o p D.



II. Iisdem positis si ducatur u r p e (vel υ ρ π ι) tangenti V D parallela: dico segmentum externum u p, esse arcu p o, (vel υ π arcu π ω) majus: segmentum vero internum p e esse arcu p o (vel π ι arcu π ω) minus. Ducatur subtensa p o (vel p ω) & p m (vel π μ) subtensæ ad rectos angulos. Angulus igitur o p u vel acutus est, vel obtusus ut ω π υ.

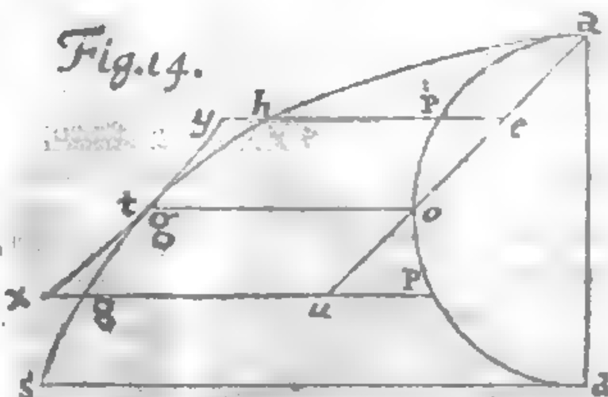
Sit primo obtusus. Quoniam anguli V D ω, ρ ω D sunt æquales, & υ ι parallela ipsi V D, ergo Isosceles est ρ ω ι, ergo υ ρ, ρ ω sunt etiam æquales, & quoniam ω π ρ est obtusus ergo ω μ minor est υ ρ, & adhuc minor ipsa υ π; sed cum ω μ sit tangens, & π μ subtensæ ad rectos angulos, ergo demonstratum est ω μ, majorem esse arcu ω π, ergo υ π major est arcu ω π.

Sit secundo angulus u p o acutus, ergo in triangulo o m p, angulus o m p est æqualis recto minus angulo m o p; & in triangulo r p m, angulus r p m, est æqualis recto minus angulo u p o: sed angulus u p o est major angulo u e o, vel angulo m o D: & ang. m o p est minor angulo m o D, ergo complementum anguli u p o scilicet r p m, est minus complemento anguli m o p, scilicet angulo o m p; ergo in triangulo r p m latus r m, est minus latere r p. Sed u r, r o æquales esse jam demonstrantur, ergo u p major est ipsa o m, & o m major arcu o p: ergo u p est major arcu o p.

Dico postremo segmentum internum p e esse minus arcu o p. Quoniam enim anguli r o e, r e o sunt æquales, ergo minor est angulus p o e angulo p e o, ergo in triangulo p o e latus p e minus est latere p o; recta autem p o minor est arcu p o; ergo p e minor est arcu p o. Similiter demonstratur de π ι.

Problema.

Ad datum punctum t in Cycloide s t a d Tangentem ducere.



Ducatur t o basi parallela, & per punctum o Genitoris ducatur subtensa a o u, cui parallela ducatur x t y, dico rectam x y tangere in puncto t. Nam si non tangat, ergo secat in t, ergo cadit intra curvam aut versus basem, aut versus verticem.

Cadat primo si fieri possit versus Basem & sit punctum aliquod x intra curvam: & ducatur basi parallela x u p, & producta secet curvam in g, & producatur subtensa ad u. Quoniam ergo alibi demonstratur è primis Cycloidis proprietatibus esse quod Parallelæ basi inter Cycloidem & Genitorem terminatæ, sint arcubus Genitoris ad verticem abscissis æquales: ergo g p est æqualis arcui p o p'a, & t o arcui o p'a, ergo t o plus arcu o p æqualis est ipsi g p: sed x u æqualis est ipsi

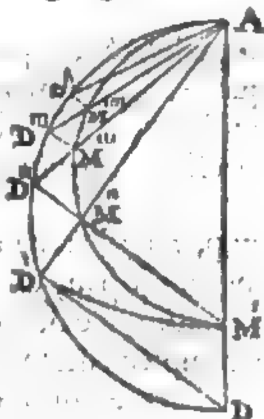
ipsi t o, & segmentum externum u p est majus arcu o p; ergo x u p major est ipsis t o, o p simul sumptis: ergo p x major est ipsa p g: ergo cadit extra punctum g curvæ, ergo idem punctum est intra & extra curvam, quod est absurdum: ergo non est intra. Cadat jam intra curvam versus verticem; & sit punctum aliquod y rectæ t y intra curvam. Ducatur basi parallela y p'e, & producta secet Cycloidem in h. Quoniam ergo y e est æqualis ipsi t o, & h p' plus arcu p o æqualis ipsi t o, & p'e segmentum internum est minus arcu p'o; ergo h p'e minor est ipsis h p', p o simul sumptis, ergo minor est ipsa t o, ergo e y major est ipsa e h. Ergo punctum y est extra & intra curvam, quod est absurdum: ergo non est intra. Similiter demonstratur nullum punctum rectæ x y esse intra curvam, ergo non secat curvam in puncto t; ergo ducta est t y tangens Cycloidem in dato puncto t; quod erat faciendum.

Εὑρισμὸς *Curvæ lineæ Cycloidis primariæ secundum methodum Antiquorum demonstratus.*

Definitio.

Magnitudines in infinitum decrescentes sunt quarum non datur minima.

Fig. 15.



Problema.

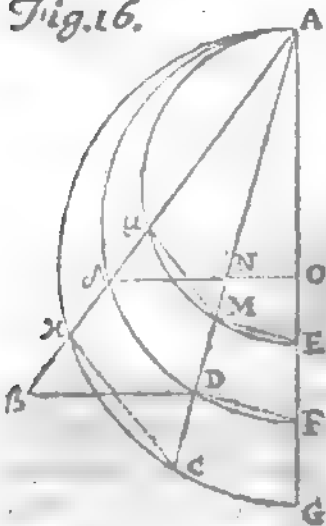
In dato Semicirculo A D D subtensas quotcunque A D in data ratione continua disponere. Sit Ratio A M' ad A D. Ducatur circulus A M''M'; tangens in A; & fiat ubique A D (subtensa majoris circuli) æqualis ipsi A M (antecedenti subtensæ minoris circuli.) Dico ipsas A D esse in continua ratione ipsius A D ad A M'. Junctis M'M, & D D, vel M' M'', & D'D', & sic ubivis; quoniam M M, D D sunt parallelæ, ob æquales in similibus segmentis angulos; ergo patet propositum.

Scholium.

Iisdem positis dico hanc subtensarum rationem in infinitum continuari posse. Nam si non possit, ergo datur minima subtensa, quo minor duci non potest: sit ea verbi gratia A D''', secans minorem circulum in M''''; & ducatur ut prius A δ æqualis ipsi A M'''': ergo A δ est minor minima, quod est absurdum; ergo non datur minima, ergo ratio subtensarum potest in infinitum continuari.

Lemma.

Fig. 16.



Sint tres circuli, tangentes se invicem in puncto A, quorum diametri A E, A F, A G sunt in continua proportione. Circulos autem secet recta AMDC; item recta A μ δ x, ita ut A δ aptetur in medio circulo æqualis ipsi A M minimi Circuli. Per puncta denique δ & D medii circuli, ducatur tam δ N O, diametro perpendicularis, quam D β ipsi δ N parallela. Dico ipsas N M, μ δ esse æquales: item M D, δ x: item D C, x β. Jungantur x C; item μ M: item M E. Quoniam A μ M E est quadrilaterum circulo inscriptum; ergo angulus externus δ μ M æqualis est opposito interno A E M; sed anguli A N O, A E M ob similitudinem triangulorum sunt æquales: ergo anguli δ μ M, δ N M sunt æquales: æqualia sunt ergo Triangula A δ N, A μ M; & quoniam β D parallela

rallela est ipsi δ N, & κ C ipsi μ M, æqualia sunt etiam Triangula A β D, A C κ: æquales sunt igitur A N & A μ; A M & A δ; A D & A κ; A C & A β: quare demptis continuo æqualibus, æquales erunt N M & $\mu\delta$; M D & $\delta\kappa$; D C & $\kappa\beta$.

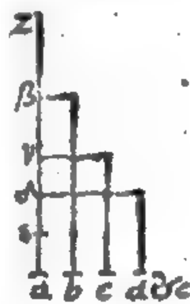
Problema.

Data media trium proportionalium, & differentia extremarum, dare extremas.

Sit media data A D, eique ad rectos angulos ponatur D Z æqualis differentiæ extremarum, & dividatur bifariam in S, centro autem S & intervallo S D describatur circulus D $\mu\kappa$, & per S ducta A μ S κ; ponatur A M æqualis A μ, & A C æqualis A κ. Quoniam A D tangit circulum, ergo quadratum A D æquale est rectangulo μ A κ; ergo A M, A D, A C, sunt in continua proportione, & M C (differentia extremarum) æqualis est ipsi D Z. Fig. 17.

Lemma.

Si fuerint magnitudines in infinitum decrescentes Summa Differentiarum æquatur maximo Termino.



Sint magnitudines a Z, b, c, d, &c. in infinitum: dico omnes earum differentias æquari ipsi a Z. Si negetur; sint majores & fiant a β, a γ, a δ, &c. æquales ipsis b, c, d, &c; erunt ergo Z β, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, &c. partes ipsius a Z; non sunt ergo majores Toto. Sint jam minores, quare æquales sint ipsi Z δ, reliquo autem a δ æqualis ponatur d, ipsa etiam d ponatur a ϵ minor; ergo addita est alia differentia $\delta\epsilon$, quare Z ϵ est æqualis summæ omnium differentiarum, ergo Z δ æqualis est ipsi Z ϵ, major minori, quod est absurdum. Ergo Z a (cum sit neque major neque minor) æqualis est summæ omnium in infinitum differentiarum.

Lemma.

Binarum magnitudinum differentia, æqualis est differentiæ inter summam & duplum utriusvis. Patet addendo utrique magnitudini minimam, vel utrique maximam.

Definitio.

Polygonum Serratum est figura constans alternatim ex lateribus sibi invicem parallelis, & lateribus obliquis. Sola autem latera non parallela vocentur simpliciter Latera.

Polygonum Serratum circulo Circundari dicitur, quando unusquisque angulus internus circulum attingit. Atque idem circulo inseri dicitur, quando unusquisque angulus externus circulum attingit, & angulum internum polygoni circundati ad verticem habet. Fig. 17.

Problema.

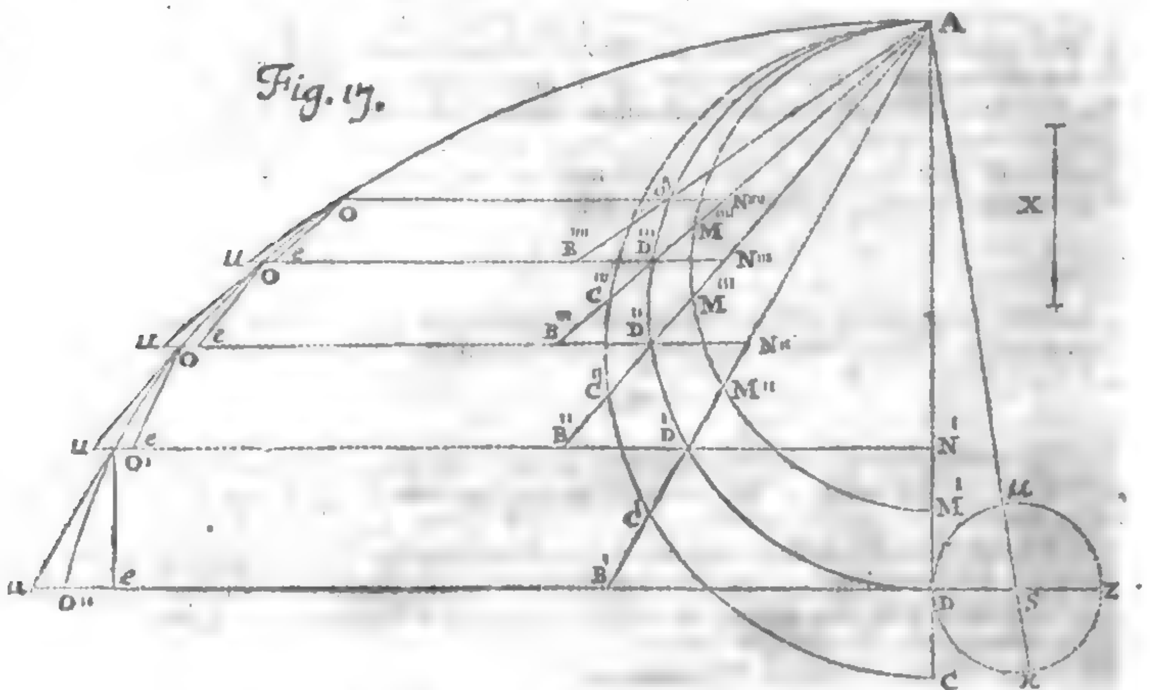
Polygonum Serratum semicirculo dato inserere, cujus summa laterum sit duplo diametri minor; atque aliud circundare cujus summa laterum sit duplo diametri major; ita tamen ut utriusque summæ differentia sit datæ cuicunque magnitudini æqualis.

Sit semicirculus datus A D D, cujus diameter sit A D; magnitudo data X. Data igitur media proportionalium A D, fiant A M', A D, A C continue proportionales, ita ut differentia extremarum M' C, æqualis sit ipsi X. Disponantur autem subtensæ A D ubique in data ratione A D ad A M', & continuetur ratio in infinitum. Productis deinde subtensis, per unumquodque D ducantur parallelæ N D B, ad proximam utrinque subtensam. Patet ex iis quæ dicta sunt, Polygonum semicirculo insertum esse. Atque aliud circundatum. Dico autem insuper latera Inserti simul sumpta (scilicet omnes in infinitum D N) deficere à duplo diametri defectu D M'; Latera vero circundati (scilicet omnes in infinitum B D) excedere duplum diametri, excessu D C: differentiam denique laterum utriusque æqualem esse datæ magnitudini X.

Diametris A M' & A C, ducantur circuli tangentes etiam in A, & secantes subtensas

tensas in M & C ubique. Quoniam ergo subtensæ A D disponuntur in data ratione A D ad A M'; ergo A M' (antecedentis subtensa) æqualis est (consequenti) A D'; ergo M' N' (antecedentis) æqualis est ipsi D M' (consequentis) & sic ubique: ergo differentia ipsarum D M, M' N' (ejusdem subtensæ) æqualis est differentiæ ipsarum D M', D M'' (antecedentis & consequentis:) Ipsæ vero D M cum sint magnitudines in infinitum decrescentes differentiarum summam æqualem habent maximæ D M; ergo summa omnium D M minus M N (ejusdem subtensæ,) æquatur maximæ D M. Sed quoniam D M minus M' N', æqualis est duplo D M' minus D N, & sic ubique; & quoniam summa omnium D M, cum sint differentiæ subtensarum in infinitum decrescentium, æquatur maximæ A D (scilicet diametro:) Ergo duplum summæ ipsarum D M (hoc est duplum diametri) minus summa Laterum D N, æqualis est ipsi D M'. Ergo omnium polygoni Inserti Latera deficiunt à duplo diametri defectu D M.

Rursus quoniam A M', A D, A C sunt in continua proportione; ergo C' D' (antecedentis subtensæ) æqualis est ipsi B'' C'' (consequentis) & sic ubique. Ergo (eodem modo quo supra) demonstratur, quod duplum summæ ipsarum B C (hoc est duplum subtensæ A B') minus summa laterum B D, æqualis sit maximæ B' C'; ergo omnia Polygoni circundati latera deficiunt à duplo subtensæ A B', defectu B' C'. Sed A B' æqualis est ipsi A C, & B C ipsi C D. Ergo omnia Polygoni circundati latera superant duplum Diametri excessu D C.



Addatur demum defectus, & excessus quibus, hinc inde polygona differunt à duplo diametri; ergo C M' est utrisque differentia; & æqualis quidem ponitur ipsi X. Ergo semicirculo A D D polygonum serratum insertum est, & simile est circundatum, hoc majus, illud minus duplo diametri, utriusque autem differentia æqualis est datæ magnitudini X. Quod erat faciendum.

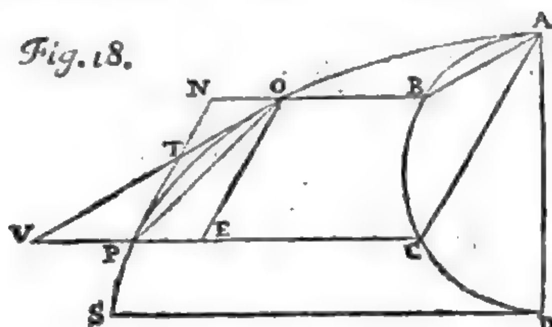
Scholium.

Dato circuli segmento quovis A δ D', eodem prorsus modo polygonum serratum inferitur & circundatur; & demonstratur latera inserti deficere à duplo basis segmenti A D', defectu D' M''; Latera vero circundati excedere duplum ejusdem, excessu D' C'; utriusque vero differentiam esse C M''; quæ cum minor sit quam C M', minor est quam X.

Lemma.

Lemma.

Si à puncto quovis O in Cycloide primaria S P O A D, ducatur Tangens O V versus Basin, item basi parallelæ N O B, & V P C secantes Genitorem in B, C, qui-



bus A jungatur, & ducatur O E parallela ipsi A C. Dico tangentem O V majorem, ipsam vero O E minorem esse portione Curvæ inter parallelas interceptæ O P.

Ducatur P T N ipsi O E parallela, item subtensa portionis P O. Quoniam angulus P E O est obtusus (cum sit æqualis ipsi P C A,) ergo E O minor est recta P O, ergo minor etiam curva P O.

Rursus quoniam P N parallela est ipsi A C, ergo tangit Cycloidem in puncto P, & quoniam angulus V P T est obtusus, ergo T P minor est ipsa T V, ergo O T V major est ipsis O T, T P, simul sumptis, ergo major est portione O P.

Definitio.

Polygonum serratum Cycloidi circumscribi dicitur quando unusquisque angulus internus Cycloidem contingit, atque idem inseri dicitur quando unusquisque externus attingit.

Theorema.

Curva linea Cycloidis primariæ est quadrupla diametri Genitoris.

Sit Curva semicycloidis o o A, cujus Basis sit o D, Diameter A D tam Cycloidis quam Genitoris A ſ D' D. Dico curvam o o A esse duplam ipsius A D. Si negetur sit Curva vel major vel minor duplo A D. Et sit sive excessus, sive defectus X. Fig. 17.

Genitori polygonum serratum inseratur, atque aliud circundetur, ita ut differentia summæ laterum utriusque sit æqualis ipsi X. Et producantur parallela Polygonorum latera N D B ut secent curvam in o o. Et ductis tangentibus o u, o u circumscribatur Cycloidi polygonum serratum infinitum. Et ab iisdem punctis o ductis o e, o e, ita ut quæque parallela sit ei subtensæ A D quæ in eandem e D parallelam incidit, inseratur Cycloidi polygonum serratum infinitum. Quoniam igitur ipsæ o u tangunt Cycloidem, ergo parallelæ sunt & æquales ipsis D B singulæ singulis; & quoniam ipsæ o e parallelæ sunt, & æquales ipsis N D, ergo latera polygoni Cycloidi circumscripti æqualia sunt lateribus polygoni quod Circulo circundatur, & latera polygoni cycloidi inserti, ejus quod circulo inscritur. Quare latera polygoni circumscripti simul omnia excedunt duplum diametri excessu D C, scilicet minore quam X, & curva quidem adhuc minor est: & latera polygoni Cycloidi inserti deficiunt a duplo diametri defectu D M', scilicet minore quam X, & curva quidem adhuc major est. Atque idem demonstratur dato quovis defectu vel excessu X. Ergo Curva semicycloidis non est major neque minor duplo diametri. Ergo curva Cycloidis primariæ est quadrupla Diametri Genitoris. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Eodem prorsus modo demonstratur, portionem quamcunque curvæ, à vertice abscissam, ut o' o A, duplam esse subtensæ A D', scilicet quæ à sectione Basis portionis, & genitoris ducitur.

De Dimensione Cycloidum Contractarum & Protractarum.

Proprietates quædam Cycloidum.

SUper eandem Basem G M constituantur tres Cycloides genere differentes, scilicet G a A M Primaria, cujus genitor est A H D: G o O M Cyclois quædam Contracta, cujus genitor est O F D: & G e E M, Cyclois quædam Protracta, cujus genitor est E K D.

Primo, quoniam Cyclois cujusvis generis fit ex motu æquabili in peripheria genitoris, dum interim genitor motu æquabili transfertur, super datam basem, donec punctum generans circulum absolverit, à puncto contactus incipiens & ad idem rediens: Ergo utrique Motus, tam circularis quam rectus, erunt ubique in eadem ratione. Quare in omni Cycloide, si ducatur Basi parallela à Genitore ad curvam, ut F X, vel H Y, vel K Z; erit ut motus in arcu O F, ad motum in semicirculo O F D, ita motus rectus F X, ad semissem totius motus recti, scilicet semibasem D M. Similiter ut arcus A H ad semicirculum suum A H D, ita H Y ad semibasin. Idem dicitur de arcu E K & recta K Z.

Quare positis in directum punctis D K H F, quoniam arcus O F, A H, E K sunt in eadem ratione ad semicirculos suos, erunt rectæ F X, H Y, K Z, in eadem ratione ad communem basem D M; sunt ergo æquales, & puncta Cycloidum X Y Z in directum posita sunt; rectæ igitur X Y Z N, F H K D, sunt æquales, & similiter sectæ & positæ: sed F D & O D similiter sectæ sunt: ergo *rectæ* X Y Z N, O A E D *similiter sectæ sunt a Curvis Cycloidum.*

Secundo, quoniam angulus O D F est ad rectum, ut arcus O F ad semicirculum suum, seu ut F X vel D N ad D M; ergo, *ut* M N *ad* D M, *ita angulus* M N X *ad Rectum.*

Tertio, jungantur H A, eique parallela ducatur Y Q. Quoniam demonstratum est Y Q tangere Cycloidem primariam in Y: ergo N Y *cadit normaliter in Curvam primariæ.*

Theorema.

Curva Cycloidis primariæ est quadrupla Diametri: & portioni curvis assignatur recta æqualis.

SIt semibasis GD divisa in partes æquales m m indefinite minimas,& à punctis m incidant ubiq; in primariam normaliter rectæ m a,& in proxime majorem m a rectæ m u: ducantur D n (subtensa genitoris) & m z, parallelæ ipsi m' a'; item A n, a' z, a'' s parallelæ: quare a' z tangit Cycloidem in a,& parallela & æqualis est ipsi m u. Quoniam igitur ipsæ m a (quum sint æquales & parallelæ subtensis genitoris) sunt sinus angulorum

angulorum suorum a m G ad Radium A D; & in Triangulis rectangulis m u m, latera m u sinus eorundem angulorum ad Radium m m; ergo est ut A D ad m'' m', ita m' a' ad m' u', vel a' z. Et quoniam anguli a m G æqualiter sese excedunt, ergo in Triangulis similibus A D n, a'' m'' s, est ut A D ad A n ita m'' a'' ad a'' s, & (quum A n sit indefinite minima, & propterea æqualis arcui A n, sive ipsi m'' m') est ut A D ad m'' m', ita m'' a'' ad a'' s; erat autem ut A D ad m'' m', ita m' a' ad a' z; quare est ut m' a' ad m'' a'', ita a' z ad a'' s, sed differentia inter a' m' & a'' m'' est ad a' m' data quavis ratione minor, ergo a' z, a'' s sunt æquales, & simul sumptæ portioni curvæ a'' a' æquales. Est ergo portio a'' a' duplum ipsius m'' u': atque idem ubique demonstratur. Omnes igitur a a sunt duplæ omnium m u. Et si abscindatur à vertice portio quælibet A a'', ea dupla est omnium m u quæ sunt inter D & m''. Sed omnes m u (quum ipsi m u sint sinus complementi, quorum sinus recti sunt u m) sunt æquales omnibus u m: omnes autem u m (quum sint differentiæ ipsarum m a) sunt æquales maximæ m a, hoc est ipsi A D. *Ergo semicurva* A a g *dupla est diametri* A D. Et quoniam omnes u m inter G & m', sunt æquales maximo sinui scilicet m'' a''; ergo omnes m u inter G & m'' sunt æquales sinui complementi ipsius m'' a''. Quare Portio quælibet ut A Y (cujus normalis N Y est sinus rectus anguli Y N M ad radium A D) dupla est sinus complementi A H.

Curvis Cycloidum Protractarum & Contractarum assignantur semiellipses æquales.

IN Cycloide contracta G o O m, demittantur ubique o g perpendiculares in proxime majorem o m, cui parallela ducatur a'' y & junctis o o inscribatur polygonum. Quoniam est ut A D ad A O, ita m' a' ad a'' o'', & in Triangulis similibus m'' a'' s, a'' o'' y, est ut m'' a'' ad a'' o'', ita a'' s ad o'' y; ergo est ut A D ad A O, ita a'' s ad o'' y, & converse ut 2 A D, ad 2 A D + A O, ita 2 a'' s ad 2 a'' s + o'' y, sed 2 a'' s est curvæ portio a'' a', & 2 a'' s + o'' y est o' g': est ergo ut 2 A D ad 2 A D + A O, ita portio a' a' ad o' g'. Quare omnes o g simul sumptæ sunt æquales duplo A D + A O, & unaquæque o g est in eadem ratione ad portionem suam a a; & omnis a o, ad suam m a primariæ, hoc est, sunt a o ut sinus recti angulorum suorum G m o ad Radium A O. Quare si ponatur recta P T æqualis duplo A D plus A O, eique ad rectos angulos P Q æqualis ipsi A O, & fiant P α', P α'', P α''', sinus complementi æqualium angulorum ad Radium P T, & ducantur tam α α, eorundem sinus recti ad Radium P Q, quam γ α ipsi P T ubique parallelæ & jungantur α α; patet ex iis quæ dicta sunt ipsas γ α æquales esse ipsis g o singulæ singulis, & ipsas α α ipsis a o; quare ipsæ etiam γ α æquales erunt ipsis g o, & Triangula rectangula α α γ triangulis rectangulis o o g. Ex vulgaribus autem Ellipseos principiis patet Figuram T α Q P esse polygonum quadranti Ellipseos inscriptum; ergo Polygonum Laterum indefinite minimorum quadranti Ellipseos inscriptum, æquale est Polygono Semicycloidi contractæ inscriptum: Ergo *Cycloidis contractæ curva* G o O M, *æqualis est semiellipsi cujus Axis transversus est duplum* A D *plus* A O, *& Axis minor* A O.

Eodem modo ducta e'' x parallela ipsis m'' s, demonstratur ut 2 A D ad 2 A D — A E, ita esse 2 a'' s ad 2 a'' s — a'' x (sive ad e'' d;) quare procedendo ut supra demonstratur curvam Cycloidis Protractæ æqualem esse semiellipsi cujus Axis transversus est duplum A D minus A E, & Axis minor A E.

Scholium.

PAtet Figuram G o X M Y a, Curvis Primariæ & Contractæ terminatam, esse meram semiellipsin in arcum flexam, ita ut Axis transversus applicetur Cycloidi Primariæ à parte convexa: & Figuram G a Y M Z e, Curvis Primariæ & Protractæ terminatam, esse semiellipsin, cujus Axis transversus applicatur Primariæ à parte Concava; hujus autem axis proportionaliter protrahitur, manente Curvæ Ellipticæ dimensione licet recurvetur, Illius autem proportionaliter contrahitur manente Curva, licet magis curvetur. Patet etiam ipsas o a, & a e esse meras Ellipseon ordinatas. Quare non est per accidens, Ut Clarissimo Detonvilio placuit, quod Curva Primariæ sit rectæ æqualis, ex eo quod Curvæ Reliquarum sint Ellipsibus æquales; sed è contra Curvæ Reliquarum Cycloidum sunt Ellipsibus æquales per *Epist. ad Hugen.* Pag. 7.

per accidens, ex eo quod earum Axes applicentur ejusmodi Curvæ, quæ ex natura sua sit Euthysmi patiens; quod de nulla Curva, hactenus nota (ne quidem assumpta Circuli Quadratura) prius demonstratum fuit, quam ego hæc de Cycloide Primaria amicis communicaveram; nisi quod Illustris Juvenis Gulielmus Nelius, Curvam quandam ita construendam ut sit Euthysmi capax, summa cum laude invenerit.

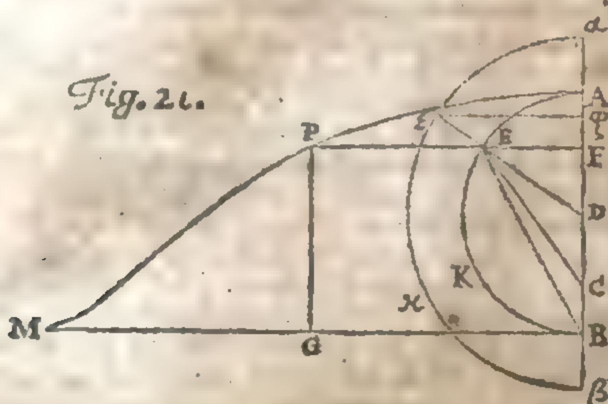
De problemate Kepleriano per Cycloidem solvendo.

Asseruit Keplerus, ex causis physicis, planetas ita ferri circa solem in Orbita Elliptica, ut velocitas planetæ sit ubique distantiæ ejusdem à Sole reciproce proportionalis; unde sequentem Hypothesin ingeniose commentus est. Secat scilicet aream Ellipseos Planetariæ lineis à sole ductis in infinita Triangula Mixtilinea æqualia; unde fit ut Curva Ellipseos dividatur in portiones inæquales, minores quidem circa Aphelium, majores circa Perihelium: per has autem portiones ponit Planetam æqualibus temporibus ferri. Quare ex Medio motu Anomaliam coæquatam ut indagaret, secanda est semiellipsis per Focum in data ratione; vel (quod perinde esse ab eodem demonstratur) secundus est Semicirculus per quodvis punctum Diametri in data ratione. Mirum est quantum in hoc problemate sudaverit Keplerus, Orbitas suas ——————*volvens nitendo neque proficit hilum.* Tandem anhelus, Geometrarum opem implorat; interim veritus ne propter arcuum & sinuum ἑτερογένειαν inveniatur Problema inexplicabile. Quod nihilominus ope Cycloidis protractæ nos olim sic exhibuimus.

Problema.

Semicirculum per datum punctum Diametri in data ratione secare.

SIT Semicirculus AKB, cujus Centrum D. Punctum datum C. Ratio data R ad S. Fiant DC, DB, Dβ continue proportionales; & centro D describatur ακβ,



cui æqualis ponatur recta BM; data autem basi BM, & Genitore AKB, describatur semicyclois Protracta MAB; fiat deinde BG ad BM ut R ad S, & ducatur GP ad angulos rectos secans Cycloidem in P, item PF Basi parallela secans Genitorem in E. Jungantur denique EC. Dico mixtilineum AEC esse ad semicirculum ut R ad S. Ducatur radius Dε; & demittatur εφ; & jungantur EB.

Quoniam segmenta αεφ, AEF sunt similia, ergo ut arcus αε ad εφ, ita arcus AE ad EF; & quoniam arcus AE ductus in semiradium æqualis est sectori AED, & semissis basis BD sive semiradius ductus in altitudinem EF æqualis est Triangulo DEB: ergo ut AE ad EF, ita sector AED ad Triangulum DEB; & ut αε ad εφ ita AED, ad DEB: sed ut εφ ad EF, ita Triangulum DEB ad Triangulum DEC, (quia sunt ut Bases DB, DC:) erit igitur ex æquo ut αε ad EF, ita sector AED, ad Triangulum DEC, & converse simul & inverse erit, ut αε plus EF, ad αε, ita AED plus DEC, ad AED; sed αε est ad semiperipheriam ακβ, ut sector AED ad semicirculum AKB; erit igitur ex æquo ut αε plus EF ad semiperipheriam, ita AED plus DEC ad semicirculum: sed ex iis quæ demonstrata

demonstrata sunt de Cycloide, quoniam E P est ad Basin B M, ut angulus A B E ad rectum, sive arcus $\alpha\iota$ ad semiperipheriam $\alpha\kappa\beta$ quæ quidem æqualis est ipsi B M; ergo $\alpha\iota$ plus E F æqualis est ipsi F P: est ergo ut F P (vel B G) ad B M (sive ut R ad S,) ita Mixtilineum A E C ad semicirculum A K B. Quare semicirculus A K B per punctum datum C ita secatur à linea C E, ut pars sit ad totum in data ratione R ad S. Quod erat faciendum.

Scholia.

Quod si punctum C sit in ipsa extremitate Diametri, puncta C, B, β, coincident, & Basis B M æqualis est peripheriæ Genitoris; Quare Cyclois est Primaria, & ductis G P, P F eodem modo perficitur Problema, & facilius demonstratur.

Quod si punctum C sit extra circulum producta Diametro, Cyclois erit contracta, & Mixtilineum A E C, non solum assignatur semicirculo minor in data ratione, sed potest etiam major esse vel æqualis.

Demonstratur à Keplero ex data sectione semicirculi à puncto Diametri, posse semiellipsin quoque à puncto Axis transversi in data ratione secari; sed idem etiam perficitur à puncto cujusvis Axis.

Hinc Patet ex contemplatione Cycloidum ad eundem modum innumera alia problemata perfici posse de segmentis, Triangulis mixtilineis, & Lunulis, sive componantur ex portionibus circularibus, sive ellipticis. Quod indicasse sufficiat.

Veruntamen, cum Cyclois sit Linea Mechanica non Geometrica; non vere solvuntur problemata, sed Mechanice perficiuntur, non enim magnitudine datur Linea G P; unde intersectio P non datur Geometrice. Fatendum est enim nullas Intersectiones Geometrice dari præterquam Rectarum, & Intersectionem Rectæ & Curvæ (ut quando Recta secat Circulum aut sectionem Conicam) non dari quatenus talis est, sed quatenus est communis intersectio binarum Rectarum in ipsa Curva, ita ut (ex natura Curvæ) uniformem quandam ad invicem habeant ubique Relationem, quæ æquatione aliqua possit exprimi. In Cycloide vero Relatio inter P G & P F, sive inter Arcum majoris circuli Sinumque minoris simul sumptos, & sinum Versum, perpetuo varia est & difformis. Posito autem punctum P dari, non deest contemplationi veritas & pulchritudo Geometrica.

Quicquid perficitur hoc modo per rectam secantem Cycloidem, habetur etiam si circulus secet Evolutæ curvam. Evolutam autem appellamus superficiem Ungulæ Cylindricæ. Sunt aliæ etiam Curvæ quæ tantundem præstant, quarum etiam intersectiones Geometrice non dantur.

Non inutilis est contemplatio Cycloidum quæ generantur ex circulo super Basem circularem revoluto, hujus generis vocentur Epicycloides, tales enim curvas Planetæ in Epicyclis vecti describunt. Quasdam habent proprietates Cycloidum proprietatibus non absimiles, quasdam diversas & magis perplexas, præcipue Epicycloides Planetariæ, in quibus motus non sunt æquales. Verum hæc omnia prosequi non est præsentis Instituti

FINIS.

Nobilissimo Doctissimoque Viro,

D. CHRISTIANO HUGENIO, Const. F.

JOHANNES WALLIS S.

DUM ea quæ cum his accipies, Vir Nobilissime, diutinas preli moras exspectabant; literas Tuas 9° Junii datas, post mensem circiter accipiebam. Quæ partim promissa mea, de hisce tibi communicandis pridem facta, memorant; partim libros aliquot à Dettonvilio sive Pascalio editos, quos Illustrissimus Carcavius distribuendos miserat, huc deferendos curant; quos ego statim atque accepi, cum officiosa Carcavii salutatione, ut imperatum erat, distribuebam.

Dettonvilii tractatus. Promissi mei fidem quod attinet, habes eam his scriptis liberatam. Dettonvillii vero Tractatum, (de quo & sententiam meam sive Tuo sive & Carcavii nomine petis,) tum arripiebam avidus, tum eodem posteroque die evolvebam; & acuminis plenum invenio. Eumque itinere eo minus impedito aut inoffenso pede pervolabam, quia nec à nostris plane dissentientem reperi, nec multum absimili methodo incedentem: quod postquam sua cum nostris contuleris, cito deprehendes.

Cum autem Vir Clarissimus jamdudum de hoc negotio multa meditatus fuerit, (quod Gallos jam à viginti vel etiam quadraginta annis occupavit;) illaque ipse proposuerit problemata, (num sibi tum temporis penitus perspecta nec ne, mihi nondum constat; at magnam saltem eorum partem sibi jam perspectam esse, non dubitandum, credo:) omniumque undecunque ex eo tempore de hoc negotio scripta, atque hac occasione ad D. Carcavium (ut desiderabatur) transmissa, evolvendi nactus opportunitatem, indeque quod ad rem suam faciat transumendi, vel ad sua saltem sensa perficienda ansas non leves arripiendi: non diffiteor, accuratiora longe ab ipso forsan exspectanda; quam à me, qui solus & rudis huc accessi. Præter enim ea quæ apud Toricellium extant, quæque apud Schotenium in suis ad Cartesium annotationibus, (nescio an & quæ apud Tacquetum,) non memini me, ante exposita hæc problemata vel legisse de Cycloide quicquam, vel meditatum esse. At interim non piget, ea quæ & nobis in hoc negotio obvenerunt, palam facere, nec (spero) illarum rerum peritis displicebit.

Verum orandus erit vir Doctissimus, ne plagii nos insimulare velit, (quod de Toricellio insinuatum video; quam juste, nescio, saltem parum candide postquam per tot annos fuerit demortuus:) si forte eadem & sibi & nobis non raro occurrerunt, (præsertim cum ipse mea prius inspexerit quam ego sua:) neque etiam ut inventis nostris derogatum ire velit, si forte horum nonnulla vel ipse vel Robervallius (quem pro conjuncta persona habeo,) prius invenerit. Dummodo enim ipsi sua apud se premunt inventa, nec publici juris faciunt, iniquum plane esset ni & alios patiantur ea quæ ipsi celant itidem invenire, atque interim inveniendi (siqua sit) gloriam reportare. Si enim nobis, verbi gratia, (inter alia) proponatur investigandum (& quidem sub præmio) tanquam res ardua & difficultatis plena & quæ mercedem mereatur; *Quanta sit solidi ex Cycloidis circa basem conversione magnitudo*: Non nobis id obesse debuit aut famæ nostræ, si Robervallius aliquando (ante aliquot forsan annos,) clam nobis, id etiam invenerit; neque si tum ego, tum & alii, id ipsum proprio marte inveniamus (nec interim alius alium incusamus plagii,) minus propterea invenisse censendi sumus, quam ipse Robervallius: (eadem enim in eodem aperto naturæ campo à variis inveniri nihil prohibet.) Quam quidem inveniendi laudem si præripuisse vellent; oportuit id nobis ut jam inventum exhibuisse, non ut nunc investigandum proponere. Quod & de reliquis utrinque inventis pariter dictum, esto.

Et

Et quidem maluissem, vel hoc nomine, ut abstinuisset Author Historiolæ *de la Roulette*, saltem eis quæ in *Torricellium* dicta sunt; (in Torricellium, inquam; nam de *Lalouera* minus sum solicitus, ut qui superstes adhuc est in sui Apologiam;) quam ut meritissimum virum, jam per multos annos demortuum, suggillaret. Torricellium utique ex scriptis novimus tum virum doctum esse & Mathematicum, tum de Mathematicis optime meritum; credo, & ingenuum. Nec video quid apud illum admissum sit, quod Clarissimo Viro, vel Robervallio etiam, cujus partes agit, bilem moveret. Edidit Torricellius, anno 1644, inter alia, demonstrationes suas de Cycloidis area circuli genitoris tripla: quod quidem cur ipsi non liceret, non video. Demonstrationes illas, suas esse, non negant; nec causantur illum Robervallii quicquam pro suo venditasse. Non dixit quidem, (nesciebat enim, vel ipsis id fatentibus,) sed nec negavit, Robervallium hoc etiam demonstrasse. Quod jam tum vel publice notum erat, vel non; Si sic, Robervallio id injurium esse non potest, si post illum alius idem solvat problema, magis quam Archimedi quod post illum idem Torricellius demonstraverit Quadraturam Parabolæ; Si minus, saltem Torricellio succensendum non erit quod ipse nesciverit quid vel in scriniis suis apud se premeret Robervallius, vel etiam amicis suis communicaret. Nos saltem Torricellio plus debemus, qui demonstrationes suas jam palam factas vulgavit, quam, qui suas adhuc supprimit, Robervallio. Et quidem iniquum plane judicamus, ut, si suas nolit Robervallius typis mandare, non igitur liceat Torricellio suas. At Galilæo, inquiunt, id ascribit Torricellius quod Mersenno debetur, &, quod Robervallio, sibi. At bona verba, quæso: Siquidem ego neutrum horum video. Erat utique suarum solutionum Author Robervallius, & Torricellius suarum non minus. Sin sua interesse putaverit Robervallius ut sciat orbis priores suas esse, ut ut id nesciverit Torricellius; liberum id illi fuit, hoc indicasse, nec erat ad hoc necesse ut Torricellium, hujus nescium, suggillet, aut iniquis suspicionibus oneret. Et quidem tantum abest ut, in derogationem Robervallii, se problematis hujus solutionem invenisse *primum* affirmaverit, ut ne quidem se *invenisse* dicat: Sed solummodo propositionis veritatem professus, suis eam demonstrationibus confirmat. Quod quid ni impune possit, non video. At fieri possit, ut inter Galilæi schediasmata, Beaugrandi scriptum viderit, quo demonstrationem Robervallii, celato nomine, ad Galilæum miserat; unde ansam suis arripuisse possit. Nempe hoc suspicantur: Num autem pro comperto habeant, ignoro; nec nisi hoc fassus fuerit ipse, quod non affirmant, unde id sibi constare possit non docent. Sed, ut ut sit; non surreptas inde demonstrationes causantur ipsum pro suis venditasse, nec negant suas esse quas exhibet. Quodnam igitur sit, cujus insimulent criminis, plane non intelligo: nec, præter sinistras suspiciones, quicquam quo id constet afferunt. Imo vero, inquiunt, (quod palmarium est apud eos argumentum,) literas ipsius manu scriptas habent, quas ut κειμήλιον quoddam in hunc diem conservant, (quasi quidem res ipsa tanti esset,) quibus Robervallio primas concedit in hujus Problematis solutione. Nempe Vir ingenuus, cum tandem intellexerit, quod dum librum ederet nesciebat, Robervallium etiam (clam ipso) hoc idem demonstrasse, utut typis illud non vulgaverit, (quod necdum, credo, fecit,) non ægre fassus illud erat. Verum hoc sibi tum innotuisse cum librum ederet, nec illum confessum dicunt, nec affirmant ipsi; imo contrarium docent. Quid itaque culpent nescio, nisi nefas esse velint, ut quisquam vel inveniat alius, vel in publicum emittat, quod sibi forte clam cognitum, apud se premit Robervallius, vel suis solis notum mavult. Mersennum vero quod spectet, cui derogatum insinuant quod Galilæo tribuitur: vel nullo quidem, vel perexiguo, mihi visum est fundamento niti. Esto enim quod volunt ipsi, Mersennum saltem anno 1615 hanc considerasse curvam, *la Roulette* sibi dictam; atque de hac tum temporis Geometras interrogasse: si tamen & verum sit, quod prodit Torricellius (quod quidni sit, non video, nec dicunt illi,) hanc ipsam lineam *à Galilæo jam supra 45 annum*, (adeoque anno saltem 1599, prodiit enim liber ille anno 1644,) *Cycloidem vocatam*: Ecquid, quæso, Mersenno derogatum itur, dum hoc dicitur? Nec quidem aliud de Galilæo dictum, quod huc spectet, apud illum quicquam reperio: de Mersenno, nihil. Et quanquam nolim sibi suum reponere, *ce fut un sujet de rire en France*; at nos certe, qui minus forte sumus quam Galli sui ad risum proclives, miramur saltem (dum Torricellii verba cum hac historiola comparamus,) quid illud tanti sit, quod

quod tantis hisce questibus subsit fundamentum. (Quasi quidem Nelius noster Heuratium vestrum ejusdem insimularet criminis, qui id ipsum se primum proferre putat, quod jam ultra duos annos apud nostros passim innotuit, se tamen inscio, & à pluribus demonstratum.) Sed nimius forte videar in alieno negotio. Ignoscent interim Clarissimi Viri (quos ego veneror, & Mersennum suum) si parcius ista dicta malim, quibus in doctissimi Viri, & bene olim meriti, famam, nulla necessitate involatur. Optassem potius, ut, si quid apud se tanti habent, quod sibi ab aliis præreptum nollent, quo tum id sibi securius asserant, tum in usus publicos magis conducat, divulgent ipsi; ut non sit opus ea sibi tandem ex postliminio vendicandi. Saltem, si, dum hoc ipsi negligunt, id alii aliunde discant, vel tum sibi fieri injuriam non causentur, vel sibi à se factam intelligant. Sed his missis ad Dettonvilium nostrum redeo.

Quam autem sua pleraque, aliis licet verbis, in meis etiam extent, erat quidem mihi aliquando in animo, collatis locis, digito indicare, atque in eum finem jam ante accuratius perlegisse, (vix enim aliter, quam, quod aiunt, tanquam canis ad Nilum, intra biduum illud quod diximus, summa quæque delibando perlegimus;) quod cum per otium hactenus non licuerit, id tibi tamen ubi utrumque perlegeris facile patebit. Quæ tamen non eo animo dicta velim intelligas, quasi Clarissimi Viri meritis derogare velim; vel sinistræ quicquam suspicionis alere; sed saltem ut reipsa constet, quam in rebus hujusmodi mirum non sit, varios, eosque longe dissitos, nec ab invicem edoctos, dum easdem versant res Geometricas, in easdem item speculationes incidere; adeoque non temere alius alium insimulare plagii, (in hoc præsertim, ingeniorum feraci seculo,) vel etiam aliis, quod ipse prior invenerit, vanus insultare debeat. Nam *Invenisse*, quidem Acuminis est; at, *primum invenisse*, Fortunæ: neque enim minore vel subtilitate vel acumine posterior idem non raro invenit, quod alius (se nescio) invenerat primus.

Cur autem existimem Cl. Viro, hæc omnia sua problemata non sibi tunc perspecta esse, cum ea proposuerit; nec antequam aliorum hac de re scripta, ad D Carcavium missa, inspexerit, quæ perpoliendis & perficiendis inventis suis adjumento esse possint: multa sunt quæ suadent. Suscepit utique vir Cl. jam ab initio cum sua primum exposuit Problemata, non quidem se illa posse omnia absolvere; sed saltem, nisi quis alius interea solverit, *se, ea quæ invenerit ipse, non aliis invisurum, unde majora jam inventis nanciscantur*: Quæ quam caute dicta sunt, vides. Fallor etiam, vel ipsius solutiones (quantum ex levi inspectione colligo) dependent ex cognitione longitudinis Cycloidalis lineæ, ejusque in data ratione divisione, (neque enim, citra hæc, illius figura 13. ad præsentes casus omnes accommodabitur;) quarum cum inventionem Wrennio nostro attribuat, non ante inspectas Wrennii literas cognovisse censendus erit. Et quamvis hoc inventum Wrennii extenuatum ire satagat, Gallosque suos istius, cum innotuit, demonstrationem suppeditare posse: non tamen affirmare sustinet, vel id sibi prius innotuisse, vel Gallorum suorum quempiam, ne privatim quidem, cuiquam innuisse perspectam sibi esse istius lineæ vel longitudinem vel in data ratione divisionem. (At interim candorem forte desideremus, cum video exterorum inventa quæ apud D. Carcavium clam reponenda videbantur, cum Gallis suis etiam ante indictum diem statim communicata; quo, si non alias, saltem ex his inspectis valeant quæsita solvere.) Addo insuper, Posteriora quæsita, quæ tandem ipsa proponit Historiola, quæ ex istius curvæ in data ratione divisione dependent, indicio sunt illius longitudinem, & partium suarum, ignoratam prius esse. Neque alia apparet ratio, cur non eadem una cum prioribus proponerentur. Sin mea me hac in re fefellit conjectura, eaque sibi omnia pridem perspecta dixerit, Pascalius dicam? an Dettonvillius; non contendo: nec invidebo sibi, sed gratulor inventa sua.

De singulis autem sententiam sigillatim ferre, ob causam jam memoratam, nondum valeo. Non video tamen quin, quæ aliquatenus perpendi, sana sint, & rite demonstrata. Atque ea speciatim (de quibus interrogas) de lineæ Parabolicæ & Spiralis æqualitate. Quamvis enim istius demonstrationem nondum perlegerim; cum tamen propositio illa vera sit; eamque sic esse, ut alias, sic ex demonstratione per inscriptiones & circumscriptiones figurarum, ipse antehac perspexerim: non pronus sum ut suspicer Cl. Virum demonstrando lapsum esse. Quod eo liberius pronuncio, qui Robervallium antehac conquestum intelligo, me *propositionem illam falsam esse temere affirmasse*: quam quidem ego neque temere nec omnino repudia-

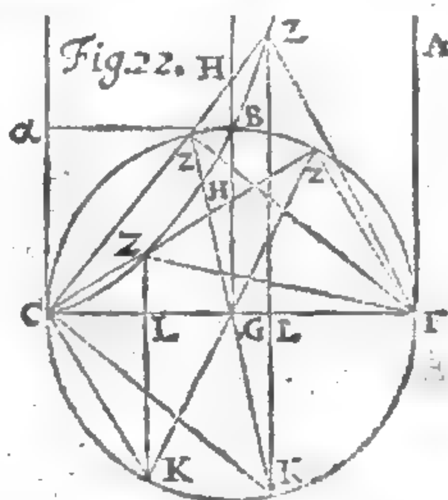
repudiaveram, ſed demonſtrationem tantummodo ut ab Hobbio prolatam, ut inſufficientem improbabam: Propoſitionem ipſam, ubi illam examinaveram, veram deprehendi.

Calculum, quem ille totum omittit, fundamenta tradidiſſe contentus, nos integrum exhibuimus, uſque ad caſum illum quem ipſe ex omnibus ſelegerat, nempe de centro gravitatis ſemiſolidi ſemiconverſione ſemicycloidis circa baſin deſcripti, (& quidem ſolidi integri ejuſdem converſione circa axem facti.) Putaveram etiam ad reliquos item caſus (prius quam rem operæ abſolverint) calculum perduxiſſe; cum ſaltem qui ex § 65, 66, collatis ſupplendus eſt. Sed cum interea temporis prodierit Dettonvilii tractatus, nihil deinceps addendum cenſui; ne ipſius vitula araſſe videar: Adeoque prout Menſe Martio conſcriptus erat, atque ad Honoratiſſ. Vicecom. *Brounker* ſtatim tranſmiſſus, eodem plane ſtatu in publicum jam emiſſum tractatum habes. Potuiſſem quidem prolixius multo, & magis ad pompam, hoc totum opus perduxiſſe, quod & tironibus forſan & rebus hiſce minus exercitatis fuiſſet gratius, ſi per Definitionum, Lemmatum, Problematum, Theorematum, Scholiorum ſolennitates incedere, & longo apparatu lineares ubique demonſtrationes adornare vellem: Sed tibi, credo, non minus placebit concinna brevitas, & in paucis multa; qui, vel digito ad fontes intento monitus, demonſtrationis vim ſuccincte traditam non minus aſſequeris, quam ſi tanta eſſet ſolennitate in longum protracta. Sicubi vero in multiplici calculo (quod omnino eſt poſſibile) numerum pro numero poſitum deprehendes, id indicare non gravaberis & condonare. Atque hæc ſunt quæ tum de Illius tum de Noſtro tractatu monuiſſe viſum erat.

Sed, priuſquam Cycloidem penitus dimittam; non ingratum tibi fore credo ſi magnam illius cum Ciſſoide convenientiam oſtendam.

Propoſuiſti non ita pridem, de Ciſſoide propoſitionem perelegantem; Nempe in expoſita linea Ciſſoide, CZZ, cujus hæc natura eſt, ut rectam Zz ad C tendentem, Ciſſoide & ſemicirculi Czz peripheria interceptam, biſariam ſecet GH recta diametro FC perpendiculariter inſiſtens in centro G: *Spatium* FCZAF *longitudine infinitum*, CZZ *ciſſoidi & FA circulum tangenti interjectum, ſemicirculi* FzC, *triplum eſſe*, aſſeris. Petis autem, Num, ut *Hyperbolas Infinitas* (de quibus cum D. Fermatio paulo ante diſſerueram) ſic & ſpatium hoc *Ciſſoidale* ex noſtra *Infinitorum Arithmetica* ſuppeditare poſſem. *De Ciſſoide.*

Id itaque ſtatim qui fieri poſſit, ſequenti demonſtratione indicabam; quam non pigebit hic repetere.



Si ducantur tum zGK diameter, tum rectæ KC, & KZ (diametro CF in L occurrens:) oſtendit Pappus l. 3. p. 5. propter tum Zz biſectam in H, tum zK in G, rectam KZ rectæ GH parallelam eſſe: Adeoque tum zCK angulum in ſemicirculo, tum angulos ad L, rectos eſſe: Et conſequenter rectas LF, LK, LC, LZ, continue proportionales. Quod quidem non minus valet de puncto Z quovis in Ciſſoidis continuatione extra ſemicirculum, quam (qui Pappi caſus eſt) ubi intra ſemicirculum contingit.

Ponamus jam rectam FC diametrum in æquales partes numero infinitas infinitis punctis L dividi. Erunt itaque omnes CL, ut 1, 2, 3, &c. arithmetice proportionales, quæ ſucceſſive dicantur, a; quarum maxima CF dicatur $\mathcal{D}$. Eritque LK, (quippe media proportionalis inter CL & LF, hoc eſt, inter a & $\mathcal{D} - a$,) $\sqrt{:a\mathcal{D} - a^2}$.

Cumque ſit ut LK ad LC, ſic LC ad LZ; erit $LZ = \frac{a^2}{\sqrt{:a\mathcal{D} - a^2}}$; hoc eſt $\frac{a^2}{\sqrt{a} \times \sqrt{:\mathcal{D} - a}}$ ſive $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{:\mathcal{D} - a}}$, ſive $\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{:\mathcal{D} - a}}$ vel $\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{D} - a}}$. Hoc eſt, omnia quadrata LZ, ſunt ſeries Tertianorum, per ſeriem Primanorum inverſe poſitorum, reſpective diviſa: ipſæque LZ rectæ, in horum quadratorum ratione ſubduplicata.

Quod autem omnes $\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{D}-a}}$ hoc est, omnes L Z spatium F C Z A F complentes, ad omnes $\sqrt{:a\mathcal{D}-a^2}$: vel $\sqrt{a}\times\sqrt{:\mathcal{D}-a}$: hoc est, ad omnes L K complentes semicirculum, sint in ratione tripla; ex principiis *Arithmeticæ Infinitorum* sic colligimus.

Si series subsecundanorum sive $\sqrt{a}$, in seriem primanorum a inversam (hoc est, in $\mathcal{D}-a$) respective ducatur, fiet series $\mathcal{D}\sqrt{a}-a\sqrt{a}$, sive $\mathcal{D}\sqrt{a}-\sqrt{a^3}$; quæ est ad seriem Æqualium sive totidem $\mathcal{D}\sqrt{\mathcal{D}}$ vel $\sqrt{\mathcal{D}^3}$, ut $\frac{2}{3}-\frac{2}{5}$ ad 1, sive ut 4 ad 15. (per prop. 64 & 73 *Arithm. Infin.*) Eodem modo si respective ducatur eadem series $\sqrt{a}$, in seriem a^2 inversam, hoc est in seriem $Q:\mathcal{D}-a$: vel $\mathcal{D}^2-2a\mathcal{D}+a^2$, fiet series $\mathcal{D}^2\sqrt{a}-2\mathcal{D}a\sqrt{a}+a^2\sqrt{a}$, vel $\mathcal{D}^2\sqrt{a}-2\mathcal{D}\sqrt{a^3}+\sqrt{a^5}$, quæ est ad seriem Æqualium, sive totidem $\mathcal{D}^2\sqrt{\mathcal{D}}$ vel $\sqrt{\mathcal{D}^5}$, ut $\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+\frac{2}{7}$ ad 1, sive ut 16 ad 105. Et similiter, si eadem series $\sqrt{a}$ respective ducatur in alias series inversas, prodibunt hæ rationes subjectæ. Nempe si series $\sqrt{a}$ ducatur inverse in

series $1.\quad a.\quad a^2.\quad a^3.\quad a^4.$ &c. prodibunt

rationes $\frac{2}{3}.\quad \frac{4}{15}.\quad \frac{16}{105}.\quad \frac{96}{945}.\quad \frac{768}{10395}.$ &c.

hoc est $\frac{2}{3}.\quad \frac{2\times2}{3\times5}.\quad \frac{2\times2\times4}{3\times5\times7}.\quad \frac{2\times2\times4\times6}{3\times5\times7\times9}.\quad \frac{2\times2\times4\times6\times8}{3\times5\times7\times9\times11}.$ &c.

Si vero hi loci pro paribus habeantur, & suppleantur interjecti loci impares; ponendo, in loco tertio, (inter 1 & a,) pro serie $\sqrt{a}$ in $\sqrt{a}$ inverse ducta, rationem 1 ad $2\square$ (per prop. 167. *Arith. Infin.*) Sicut ratio loci quarti multiplicat rationem secundi per $\frac{2}{5}$, & hanc ratio sexti per $\frac{4}{7}$, &c. manifestum est (ex consecutione seriei) rationem quinti multiplicare rationem tertii per $\frac{3}{6}$; & similiter in reliquis. Nempe series $\sqrt{a}$ ducta inverse in

series $\frac{1}{\sqrt{a}}.\quad 1.\quad \sqrt{a}.\quad a.\quad \sqrt{a^3}.\quad a^2.\quad \sqrt{a^5}.$ &c. dabit

rationes $\frac{1}{4}\Big)\ \frac{1}{2\square}.\quad \frac{2}{3}.\quad \frac{1}{2\square}.\quad \frac{2\times2}{3\times5}.\quad \frac{1}{2\square}\times\frac{3}{6}.\quad \frac{2\times2\times4}{3\times5\times7}.\quad \frac{1}{2\square}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{8}.$ &c.

Unde, in præsens negotium hoc saltem seligendum est, series $\sqrt{a}$ & $\sqrt{a^3}$ invicem inverse ductas, ad seriem æqualium, sive ad $\mathcal{D}^2=\sqrt{\mathcal{D}^4}$ toties sumptum, ut $\frac{1}{2\square}\times\frac{3}{6}$ ad 1; sive ut 1 ad $4\square$.

Deinde, ut seriem $\sqrt{a}$ jam perpendimus, perpendamus similiter seriem $\sqrt{a^3}$. Ea nempe ducta in seriem a inversam, hoc est, in $\mathcal{D}-a$ dat seriem $\mathcal{D}\sqrt{a^3}-a\sqrt{a^3}$, vel $\mathcal{D}\sqrt{a^3}-\sqrt{a^5}$ cui convenit ratio $\frac{2}{5}-\frac{2}{7}$ ad 1, sive 4 ad 35. Et similiter in reliquis. Nempe series $\sqrt{a^3}$ inverse ducta in

series $1.\quad a.\quad a^2\quad a^3\quad a^4$ &c. dabit

rationes $\frac{2}{5}.\quad \frac{4}{35}.\quad \frac{16}{315}.\quad \frac{96}{3465}.\quad \frac{768}{45045}.$ &c.

hoc est $\frac{2}{5}.\quad \frac{2\times2}{5\times7}.\quad \frac{2\times2\times4}{5\times7\times9}.\quad \frac{2\times2\times4\times6}{5\times7\times9\times11}.\quad \frac{2\times2\times4\times6\times8}{5\times7\times9\times11\times13}.$ &c.

Si vero hi loci pro paribus habeantur, & suppleantur loci impares, ponendo (per inquisitionem modo factam) loco tertio (inter 1 & a) rationem $\frac{1}{4\square}$: Ut ratio loci quarti multiplicat rationem secundi per $\frac{2}{7}$; & illam ratio sexti per $\frac{4}{9}$; sic rationem loci tertii multiplicabit ratio loci quinti per $\frac{3}{8}$, ratio tertii rationem primi per $\frac{1}{6}$; & de reliquis similiter. Nempe series $\sqrt{a^3}$ inverse ducta in

series $\frac{1}{\sqrt{a}}.\quad 1.\quad \sqrt{a}.\quad a.\quad \sqrt{a^3}.\quad a^2.\quad \sqrt{a^5}.$ &c. dat

rationes $\frac{1}{6}\Big)\ \frac{1}{4\square}.\quad \frac{2}{5}.\quad \frac{1}{4\square}.\quad \frac{2\times2}{5\times7}.\quad \frac{1}{4\square}\times\frac{3}{8}.\quad \frac{2\times2\times4}{5\times7\times9}.\quad \frac{1}{4\square}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{10}.$ &c.

Cum

Cum igitur series $\sqrt{a^3}$ in seriem $\frac{1}{\sqrt{a}}$ inverse ducta; hoc est series $\sqrt{a^3}$ per seriem $\sqrt{a}$ inverse divisa, hoc est divisa per $\sqrt{:}\,\mathcal{D}-a$, fit ad seriem æqualium, sive $\mathcal{D}$ toties sumptum, ut $\frac{1}{6}\big)\frac{1}{4\Box}$ ad 1, hoc est, ut 6 ad $4\Box$, vel 3 ad $2\Box$; Erunt omnes $\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{D}-a}}$, hoc est omnes LZ, hoc est FCZAF spatium, ad $\mathcal{D}$ toties sumptum, hoc est ad $\mathcal{D}^2$, ut 3 ad $2\Box$. Sed (per prop. 167. Arith. Infin.) omnes $\sqrt{:}\,a\mathcal{D}-a^2$: hoc est LK, hoc est CzF semicirculus, est ad $\mathcal{D}^2$, ut 1 ad $2\Box$. Ergo Spatium illud est Triplum Semicirculi. Quod erat ostendendum.

Sed & ex abundanti ostendebam, Dicti spatii lineam centri gravitatis rectæ FA parallelam ab eadem distare sexta parte diametri: Item, solidum factum ex conversione dicti spatii circa FA ut axem, æqualem esse solido ex conversione FzC semicirculi circa eandem FA tangentem, hoc est, semicylindro cujus basis sit idem semicirculus, & altitudo æqualis totius circuli peripheriæ: Item, solidum ex ejusdem conversione circa rectam Cα solidi prioris quintuplum: Solidum vero ejusdem conversione circa CF, magnitudine infinitum: Centrum denique gravitatis nusquam esse. Nempe hoc modo.

Posita linea æquilibrii Cα, erunt momenta rectarum LZ, series composita ex serie magnitudinum LZ, hoc est $\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{D}-a}}$ & distantiarum CL hoc est a; adeoque series momentorum $a\sqrt{.}\frac{a^3}{\mathcal{D}-a}$, vel $\sqrt{\frac{a^5}{\mathcal{D}-a}}$. Cujus ratio ad seriem æqualium, hoc est ad momentum quadrati diametri ex puncto F suspensi, sic colligitur. Series $\sqrt{a^5}$ inverse ducta in

series $1.\quad a.\quad a^2.\quad a^3.\quad a^4.$ &c. dabit

rationes $\frac{2}{7}.\ \frac{2\times2}{7\times9}.\ \frac{2\times2\times4}{7\times9\times11}.\ \frac{2\times2\times4\times6}{7\times9\times11\times13}.\ \frac{2\times2\times4\times6\times8}{7\times9\times11\times13\times15}.$ &c.

Adeoque cum series $\sqrt{a}$ in seriem $\sqrt{a^5}$ inverse ducta, rationem exhibeat (supra inventam) $\frac{1}{2\Box}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{8}$ ad 1. hoc est 5 ad $32\Box$; supplebimus interjecta loca vi analogiæ, ad hanc formam. Nempe series $\sqrt{a^5}$ inverse ducta in

series $\frac{1}{\sqrt{a}}.\quad 1.\quad \sqrt{a}.\quad a.\quad \sqrt{a^3}.\quad a^2.\quad \sqrt{a^5}.$ &c. dabit

rationes $\frac{1}{8}\big)\frac{5}{32\Box}.\ \frac{2}{7}.\ \frac{5}{32\Box}.\ \frac{2\times2}{7\times9}.\ \frac{5}{32\Box}\times\frac{3}{10}.\ \frac{2\times2\times4}{7\times9\times11}.\ \frac{5}{32\Box}\times\frac{3}{10}\times\frac{5}{12}.$ &c.

Momenta itaque omnium LZ, (hoc est spatii FCZAF) in suo situ, ad momentum totidem CF, sive $\mathcal{D}$, hoc est $\mathcal{D}^2$, in distantia maxima, hoc est ex puncto F suspensi, ut $\frac{1}{8}\big)\frac{5}{32\Box}$ ad 1; sive ut 5 ad $4\Box$: Adeoque (propter magnitudinem semicirculi ad diametri quadratum, ut 1 ad $2\Box$) ad momentum semicirculi ibidem suspensi, ut 5 ad 2; vel suspensi ex G centro, hoc est, in suo situ, ut 5 ad 1. Spatium igitur FCZAF in suo situ, æquiponderat quintuplo semicirculi in situ suo, sive in distantia CG suspenso; adeoque semicirculo in distantiæ CG quintupla. Et consequenter (propter distantias magnitudinibus reciproce proportionales) cum spatium sit semicirculi triplum, erit distantia distantiæ subtripla, hoc est $\frac{5}{3}$ CG, vel $\frac{5}{6}$ CF, nempe à recta Cα: Adeoque $\frac{1}{3}$ CG vel $\frac{1}{6}$ CF à recta FA. Tantundem itaque distat istius spatii linea centri gravitatis, (&, siquod est, ipsum gravitatis centrum) à rectis illis Cα, FA. Quod erat ostendendum. Fig. 22.

Idem eodem modo colligitur, sumpta ab initio, æquilibrii linea FA. Nempe cum series magnitudinum LZ sit $\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{D}-a}}$, & distantiarum $\mathcal{D}-a$; est ex utris-

 que

que composita series momentorum $\sqrt{\frac{a^3}{D-a}}$ in $D-a$: hoc est $\sqrt{a^3}$ in $\sqrt{:D-a}$: hoc est series $\sqrt{a^3}$ in seriem $\sqrt{a}$ inverse ducta; cui convenit (ut supra) ratio 1 ad $4\square$. Momentum itaque dicti spatii in suo situ (respectu FA rectæ) est ad momentum quadrati FC in distantia FC suspensi, ut 1 ad $4\square$; adeoque ad momentum semicirculi sic suspensi, ut 1 ad 2: Hoc est, æquiponderat semicirculo suspenso in distantia $\frac{1}{2}$ FC, hoc est ex puncto G centro, hoc est in suo situ. Cum igitur spatium illud Cissoidale in suo situ æquiponderat Semicirculo in suo, (respectu rectæ FA;) sitque spatium illud Semicirculi triplum: Erit distantia distantiæ subtripla; hoc est $\frac{1}{3}$ FG, vel $\frac{1}{6}$ FC, nempe à recta FA; Adeoque $\frac{5}{3}$ FG, vel $\frac{5}{6}$ FC, à recta Cα. ut prius.

Atque hinc statim colligimus; Solidum ex conversione dicti spatii Cissoidalis, ad solidum ex conversione semicirculi, circa eandem rectam Cα, esse ut 5 ad 1, (nempe ut planorum momenta respectu ejusdem Cα rectæ:) Circa rectam autem FA (propter æqualia planorum momenta, respectu hujus rectæ) æqualia esse solida.

Si quis autem quærat, de solidorum hujusmodi semiconversione factorum, centri gravitatis linea, sive ejusdem ab FA vel Cα distantia: Id eodem plane modo investigabitur. Quippe cum semicylindricæ superficies rectarum LZ semiconversione factarum, sint rectarum illarum momentis proportionales, hoc est (respectu rectæ Cα) ut $\sqrt{\frac{a^3}{D-a}}$; suorumque centrorum ab eadem recta, in ratione radiorum CL, hoc est a: erunt omnia momenta superficierum illarum semicylindricarum, series $a\sqrt{\frac{a^3}{D-a}}$, vel $\sqrt{\frac{a^5}{D-a}}$. Cujus seriei ratio ad seriem æqualium, sic colligitur. Series $\sqrt{a^5}$ inverse ducta in

series $1.\quad a.\quad a^2.\quad a^3.\quad a^4.$ &c. dabit

rationes $\frac{2}{9}.\ \frac{2\times2}{9\times11}.\ \frac{2\times2\times4}{9\times11\times13}.\ \frac{2\times2\times4\times6}{9\times11\times13\times15}.\ \frac{2\times2\times4\times6\times8}{9\times11\times13\times15\times17}.$ &c.

Adeoque cum series $\sqrt{a}$ in seriem $\sqrt{a^5}$ inverse ducta (ut ex inquisitione primum facta colligitur) sit ut $\frac{1}{2\square}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{8}\times\frac{7}{10}$ ad 1. hoc est ut 7 ad $64\square$; supplebimus interjecta loca ad hanc formam. Nempe series $\sqrt{a^5}$ inverse ducta in

series $\frac{1}{\sqrt{a}}.\quad 1.\quad \sqrt{a}.\quad a.\quad \sqrt{a^3}.\quad a^2.\quad \sqrt{a^5}.$ &c. dabit

rationes $\frac{1}{10})\ \frac{7}{64\square}.\ \frac{2}{9}.\ \frac{7}{64\square}.\ \frac{2\times2}{9\times11}.\ \frac{7}{64\square}\times\frac{3}{12}.\ \frac{2\times2\times4}{9\times11\times13}.\ \frac{7}{64\square}\times\frac{3}{12}\times\frac{5}{14}.$ &c.

Momentum igitur superficierum omnium ex rectarum LZ circa Cα semiconversione factarum, in suo situ; hoc est, solidi ex semiconversione spatii Cissoidalis circa Cα momentum in suo situ, respectu Cα rectæ; est, ad totidem Æqualia, nempe momenta totidem superficierum, rectis CF æqualibus in distantiis CF semiconversis factarum, in distantia maxima suspensarum, ut $\frac{1}{10})\ \frac{7}{64\square}$ ad 1, sive ut 35 ad $32\square$. Est autem magnitudo ad magnitudinem, ut 5 ad $4\square$, (momentis utique planorum proportionales:) Ergo distantia ad distantiam ut 7 ad 8: Nempe $\frac{7}{8}$ istius distantiæ quam habet centrum gravitatis semicirculi radio CF descripti ab ipso C: quæ quidem non est tota CF recta, sed (propter curvaturam semicircularem) illa ejus pars quæ est ad totam ut Diameter ad Semiperipheriam.

Similiter, facta conversione circa FA, semicylindricæ superficies rectis LZ descriptæ sunt $\sqrt{a^3}$ in $\sqrt{:D-a}$: (quippe momentis rectarum proportionales;) distantiæ vero centrorum superficierum illarum sunt ut radii conversionis, sive distantiæ $D-a$; Ergo superficierum illarum momenta sunt ut $\sqrt{a^3}$, in $D-a$, in $\sqrt{:D-a}$. sive ut $D\sqrt{a^3}-\sqrt{a^5}$ in $\sqrt{:D-a}$. Est autem (per supra demonstrata) series $D\sqrt{a^3}$ in $\sqrt{:D-a}$: sive series $D\sqrt{a^3}$ in seriem $\sqrt{a}$ inverse, ad seriem æqualium ut 1 ad $4\square$: Et $\sqrt{a^5}$ in $\sqrt{a}$ inverse, ut 5 ad $32\square$: Ergo $D\sqrt{a^3}-\sqrt{a^5}$ in

in $\sqrt{a}$ inverſe; ut $\frac{1}{4\square} - \frac{5}{32\square}$ ad 1; hoc eſt, ut 3 ad $32\square$. At ſeries magnitudinum ad æqualium ſeriem, inventa eſt ut 1 ad $4\square$. Ergo propter $\frac{1}{4\square}) \frac{3}{32\square} (\frac{3}{8}$, diſtantia ad diſtantiam, ut 3 ad 8. Diſtantia itaque lineæ centri gravitatis hujus ſemiſolidi circa F A, ab ipſa F A, $\frac{3}{8}$ iſtius rectæ quæ eſt ad F C ut diameter ad ſemiperipheriam circuli.

Denique, Si ſpatium illud Ciſſoidale F C Z A F converti intelligamus circa rectam C F: Circuli radiorum L Z (quippe in radiorum ratione duplicata) erunt ſeries $\frac{a^3}{\mathcal{D} - a}$; quæ ad ſeriem æqualium, nempe totidem circulos radiorum $\mathcal{D}$ vel CF, rationem habent infinitam; adeoque eſt infinitæ magnitudinis. Quod ſic colligitur. Series a^3 inverſe ducta in

ſeries, $1. \quad a. \quad a^2. \quad a^3. \quad a^4.$ &c. dabit

rationes, $\frac{1}{4}. \frac{1 \times 1}{4 \times 5}. \frac{1 \times 1 \times 2}{4 \times 5 \times 6}. \frac{1 \times 1 \times 2 \times 3}{4 \times 5 \times 6 \times 7}. \frac{1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4}{4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}.$ &c.

Cum igitur rationes continuentur (ut patet) multiplicando proxime præcedentes per $\frac{1}{5}, \frac{2}{6}, \frac{3}{7}$, &c. harum prima multiplicare debet præcedentem per $\frac{0}{4}$, quæ igitur eſſet $\frac{0}{4}) \frac{1}{4} (\frac{4}{0}$. Adeoque ſeries eadem a^3 inverſe ducta in ſeriem $\frac{1}{a}$, (hoc eſt, ſeries $\frac{a^3}{\mathcal{D} - a}$) rationem haberet ad ſeriem æqualium 4 ad 0: quæ eſt infinita. Ipſumque ſolidum propterea eſſet magnitudinis infinitæ. Quod item oſtendendum erat.

Sed & propterea, momentum plani Ciſſoidalis F C Z A F reſpectu F C rectæ, eſſet ad momentum quadrati F C, vel $\mathcal{D}^2$, ut 4 ad 0, (propter planorum momenta ſolidis converſione factis proportionalia,) hoc eſt infinitum. Et conſequenter, cum ſpatium ſit magnitudinis finitæ, diſtantia centri gravitatis eſſet infinita: quod igitur nuſquam eſt. Quod ultimo ſuſcepimus oſtendendum.

Sin de ſolidorum hujuſmodi ſemiconverſione circa F C centro gravitatis inquiratur. Cum ſemicirculorum radiis L Z deſcriptorum momenta reſpectu ejuſdem F C rectæ, ſint in radiorum ratione triplicata: erunt igitur ut Series $\frac{a^3}{\mathcal{D} - a} \sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{D} - a}}$, ſive ut ſeries $\sqrt{\frac{a^{27}}{\mathcal{D}^3 - 3a\mathcal{D}^2 + 3a^2\mathcal{D} - a^3}}$: hoc eſt ut ſeries $\sqrt{a^{27}}$ in ſeriem $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$ inverſe ducta. Series autem $\sqrt{a^{27}}$ inverſe ducta in

ſeries $1. \quad a. \quad a^2. \quad a^3. \quad a^4.$ &c. dabit

rationes $\frac{2}{29}. \frac{2 \times 2}{29 \times 31}. \frac{2 \times 2 \times 4}{29 \times 31 \times 33}. \frac{2 \times 2 \times 4 \times 6}{29 \times 31 \times 33 \times 35}. \frac{2 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8}{29 \times 31 \times 33 \times 35 \times 37}.$ &c.

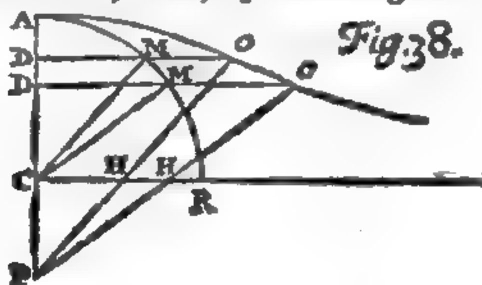
Cum igitur, (ut ex prima inquiſitione continuata patebit,) ſeries $\sqrt{a^{27}}$ & $\sqrt{a}$ inverſe multiplicatæ rationem exhibeant $\frac{1}{2\square} \times \frac{3}{6} \times \frac{5}{8} \times \frac{7}{10} \times \frac{9}{12} \times \frac{11}{14} \times \frac{13}{16} \times \frac{15}{18} \times \frac{17}{20} \times \frac{19}{22} \times \frac{21}{24} \times \frac{23}{26} \times \frac{25}{28} \times \frac{27}{30}$, quæ (ſupplendo loca intermedia) interponenda erit inter 1 & a; eadem ratio per $\frac{1}{30}$ diviſa convenit ſeriei $\sqrt{a^{27}}$ in $\frac{1}{\sqrt{a}}$ inverſe ductæ, atque hæc iterum per $\frac{-1}{28}$ diviſa conveniret ſeriei momentorum expoſitæ, nempe ſeriei $\sqrt{a^{27}}$ in $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$ inverſe ductæ, ſive per $\sqrt{a^3}$ inverſe diviſa. Ex qua denique ratione ſi eximatur item ratio magnitudinum $\frac{4}{0}$ modo reperta, prodibit

$\frac{4}{0} \times \frac{-1}{28} \times \frac{1}{30}) \frac{1}{20} \times \frac{3}{6} \times \frac{5}{8} \times$ &c. *usque ad* $\times \frac{27}{30}$ *ut supra*; vel $\frac{0}{4} \times \frac{28}{-1} \times \frac{30}{1} \times \frac{1}{20}$ &c. quæ etiam adhuc (propter — 1 quantitatem negativam) erit ratio infinita; nempe ut o ad numerum negativum; (quæ non minus eſt ratio infinita quam ut numerus poſitivus ad o:) Adeoque centrum gravitatis nuſquam.

Vides itaque quomodo ex *Infinitorum Arithmetica* Expoſitam propoſitionem (cum lucro) abſolvimus. Atque hæc fere ſunt quæ directa methodo hac de re jam (anno ſuperiori 1658) ad te ſcripſeram.

Hæc autem hic repetendi anſam dedit, quod ſecutis literis & ipſe mones; Nempe non modo totum illud ſpatium FCZAF, totius FCz ſemicirculi triplum eſſe; ſed & particulatim ſegmentum FCZF (Ciſſoidali CZ & rectis FC ZF comprehenſum) reſpectivi ſegmenti circularis FzF, ubique triplum eſſe. Nos autem jam ſupra demonſtravimus § 22, ſimilis ſegmenti circularis FzF fig. 1. vel 8, triplum eſſe ſegmentum Cycloidale ζZA. Id ipſum itaque præſtat in ſpatio Ciſſoidali FZ, atque in Cycloidali ζZ; utraque ſiquidem ſegmentum abſcindit ſegmenti circularis Fz correſpondentis triplum. Mirum igitur vides, ſed qui non diſplicebit, figurarum tam diſſimilium conſenſum. Atque de Ciſſoide quidem hactenus.

Conchoides. Eſt autem & magna, inter Conchoidem & Cycloidem, convenientia. Reſumpta enim, quæ eſt *Epiſt.* 39. *Commercii Epiſtolici*, figura; Manifeſtum eſt, rectam MD, Sinum eſſe anguli MCD, ad radium CA; & rectam MO, hoc eſt (propter parallelas) CH, ejuſdem anguli Tangentem, ad radium PC. Ut igitur Ordinatim-applicata in *Cycloide*, eſt *Sinus & Arcus, ejuſdem anguli, Aggregatum*, (ejuſdem circuli, in Primaria; ſed, in Secundariis, diverſorum:) Sic, in *Conchoide*, Ordinatim-applicata eſt *Aggregatum Sinus & Tangentis*, ejuſdem anguli; (& quidem ejuſdem circuli in Primaria, *viz.* ubi PC = CA; ſed diverſorum in aliis:) Quod nos, quod ſciam, primi detegimus.



Conchoidis Solidum. Hinc autem porro colligimus, utut Conchoidis Planum OACH, infinite continuatum, infinitæ ſit magnitudinis, eſſe tamen Solidum hujus converſione circa axem CH genitum, magnitudinis finitæ. Quod utique ſic converſo quadrante ARC deſcribitur, hemiſphærium eſſe liquet. Quod autem reliquo RAO infinito deſcribitur, æquatur Cylindro, cujus baſis ARC quadrans, altitudo æqualis peripheriæ radio CP deſcriptæ. Quod ſic probamus. Quoniam eſt ut CD ad DM, ſic PC ad CH hoc eſt MO; erit ubique MD×PC = CD×MO; Hoc eſt, factum ex DM in PC vel peripheriam hoc radio deſcriptam, æquale facto ex MO in CD ſeu peripheriam hoc radio deſcriptam: Ergo & omnia omnibus æqualia; hoc eſt, dictus Cylindrus, dicto ſolido converſione facto. Quod nos, credo, primi demonſtramus.

Centrum gravitatis. Plani vero centrum gravitatis, nuſquam eſt: utpote cujus diſtantia à CA intelligenda erit infinita, & à CH infinite exigua: Sed neque Solidi aut Semiſolidi. Diſtat utique Semiſolidi Centrum gravitatis, à CH, diſtantia finita, & facile aſſignabili; ſed, à CA, diſtantia infinita. Hæc autem, & hiſce gemina, fuſius proſequi, non eſt hujus loci. Tempus eſt ut ad ea redeam quæ noviſſima tua ſuggerit Epiſtola.

Curvarum Εὔθυνσις. Heuratii veſtri, quod memoras, nuperum inventum, (ſub initium præſentis anni, vel præcedentis finem, quod ex tuis literis conjicio, excogitatum,) quo curvam rectæ æqualem invenit; confirmat id quod ſuperius inſinuavimus; Nempe, plurium non raro, in iiſdem rebus inveniendis συμφωνεῖν: Et ſimul, ut de curvarum (Εὐθύνσεως dicam? an) Εὐθυσμῶ, pauca diſſeram, anſam ſubminiſtrat.

Tradideram ego jampridem, in Scholio prop. 38. *Arith. Infinitorum*, methodum curvas cum rectis comparandi; Nempe, *continuas ſubtenſas inſcribendo quarum quadrata, quadratis differentiarum ordinatim-applicatarum, quadratis invicem æqualibus auctis, æquentur*: Et ſpeciatim in Parabola (propter ordinatim-applicatas in Parabolæ complemento, ut numeros quadraticos, adeoque illarum differentias ut 1, 3, 5, 7, &c. arithmetice proportionales,) ſubtenſas illas eſſe ut $\sqrt{:A^2+1}$. $\sqrt{:A^2+9}$. $\sqrt{:A^2+25}$. hoc eſt, ut *quadratorum æqualium*, *quadratis arith-*

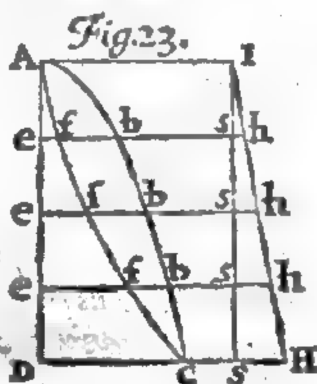
arithmetice-proportionalium auctorum, *radices quadraticas*: (Quas esse ut ordinatim-applicatas ad conjugatum axem hyperbolæ, prius demonstraveram prop. 35, & 41, *Con. Sect.*) In Paraboloidibus autem Cubicalibus, Biquadraticalibus, &c. ut *radices quadraticas quadratorum æqualium auctorum quadratis differentiarum Cuborum, Biquadratorum*, &c. Quarum quidem subtensarum omnium aggregatum cum perpetuo minus sit ipsa curva, sed ad eam ita propius semper accedat ut differentia, data quavis minore, tandem deficiat: Et Tangentium pariter ope haberi simili modo possit rectarum summa quæ differentia, data quavis minore, eandem curvam excedat: Posse hinc terminos veris quantumvis proximos inveniri intra quos curvæ longitudo vera caderet: (Adeoque in infinitum procedendo, ipsam curvam exhibitum iri:) docuimus.

Et quidem, quum scholium illud ibidem inserebam, currente prelo, (unde in Propositionum censum non erat redactum,) animum habebam speculationem illam, cum per otium liceret, resumendi & perficiendi. (Animadvertebam enim jam tum, rectas ad curvas esse, ut Figuras congruas ad figurarum quasi Truncos: sed, ut quas figuras ad quos truncos, prout cujusque curvæ natura postulet; ut &, quænam ex figuris illis cum truncis respondentibus notam rationem subeant; considerandum adhuc restabat.) Sed (ut clavus, quod aiunt, clavum pellit,) aliis se subinde interponentibus speculationibus, priorem illam resumere negligebam, donec prævertens Nelius noster me excitavit.

Selegit autem D. *Gulielmus Nelius*, Equitis *Pauli* filius, Curvam eam quæ ordinatim-applicatarum differentias habeat ordinatim-applicatis in parabola proportionales; quarum itaque quadrata quadratis æqualibus aucta, erunt item Arithmetice-proportionalia, eorumque radices ut ordinatim-applicatæ in parabolæ trunco; & propterea, ut parabolæ truncus ad parabolam, sic curva illa ad rectam. Nelium secutus *Wrennius* item, & post illum Illust. *Brounckerus* id ipsum demonstrarunt, & tandem ego; nescio an & alii. Quo primum tempore invenit Nelius, non certus scio: vulgavit autem sub Julii vel saltem Augusti mensem Anni 1657, primus (credo) omnium qui ulli curvæ æqualem rectam assignavit.

Vertente Anno, mense Julio 1658, Curvam Cycloidis, axis sui quadruplam, demonstravit Cl. V. Chr. *Wren*; Quod post illum ab aliis item demonstratum est. Tandem, quod prius Nelius noster, *Heuratius* item vester (nescius, puto, id nostris passim prius innotuisse) invenit denuo, quod *Schotenius* vester scriptis suis hoc anno editis inseruit.

Nelii demonstratio, quam (ut dictum est) ante duos annos vulgavit, hæc erat. [A *Wrennio*, quod post audivi, aliquantulum immutata & reformata.] *Curva Paraboloidis Semicubicalis.*



Sit AbCD *parabola recta*; *cujus axis* AD *dividatur in æquales partes minimas* ee; *atque ad puncta* e *ordinatim-applicentur* ef *rectæ*, *parabolis* Aeb *proportionales. Et fiat* DSI *rectangulum*, *ad parabolam* ADC, *ut* AD *ad* DC. *Denique sit* eh *ubique æqualis potentia utrique* es, eb.

Dico primo, eandem esse inter se proportionem figuræ ADHI, *rectanguli* DI, *&* *parabolæ* ADC, *quæ est linearum* AfC *curvæ*, *&* *rectarum* AD, DC.

2°. *Rectas* eh *esse ordinatim-applicatas in Parabola.*

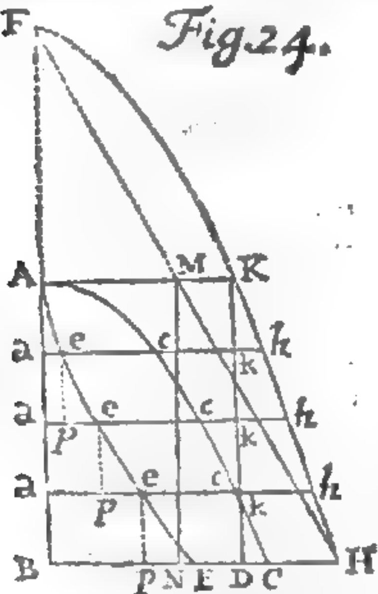
Sunt enim rectæ ef, *per constructionem*, *parabolis* Aeb *proportionales*; *&* *propterea rectarum differentiæ*, *commode repræsentantur per rectangula* eeb. *Rectangula* ees *sunt æqualia*: (*eorumque omnium summa, ad summam omnium* eeb, *ut* AD *ad* DC;) *repræsentant itaque rectas* ee. *Rectæ* ff *sunt æquales potentia tum rectis* ee *tum rectarum* ef *differentiis. Et rectangula* eeh *sunt ubique in eadem proportione ad quantitatum illarum repræsentativas. Constat itaque propositionis pars prior.*

Quadrata rectarum eb *sunt Arithmetice-proportionalia. Quadrata rectarum* ee *sunt*

ee *sunt æqualia. Ergo & quadrata* eh *sunt Arithmetice-proportionalia; ipsæque* EH *rectæ quadratorum Arithmetice-proportionalium latera: adeoque sunt ut series ordinatim-applicatarum in parabola.*

Et consequenter; Exhiberi poterit linea recta æqualis curvæ AFC.

Hanc D. Nelii demonstrationem ubi conspexerat Illustriss. *Brounkerus*; suam ille statim, quæ sequitur, non absimilem concinnavit, & impertivit mihi, quam jam ultra duos annos apud me habui. Et parum abfuit quin eam *Commercio Epistolico* a me non ita pridem edito inseruerim; (eodem siquidem tempore accepi primo, quo inter nos & DD. Fermatium, Frenicliumque, alternabantur illæ literæ.) Sed, cum ipsius Nelii (qui primus invenit) demonstrationem nondum videram; non commodum videbatur, ipsius intermissâ, aliorum demonstrationes edere; sed vel sibi permittendum ut suam ipse edat Nelius, vel aliam saltem exspectandam opportunitatem. Hæc autem erat.



Sit ABC *parabola recta; cujus diameter* AB$=a$, *basis* BC$=b$, *sitque* BE$=c$; *& fiat ubique, ut parabola* ABC *ad parabolam* Aac, *sic* BE *ad* ae; (*num autem coincidant necne puncta* C, E, *perinde est.*) *Dico rectam* AB *ad* AeE *curvam, esse ut* $27ac^2$, *ad* $4a^2+9c^2$, *in* $\sqrt{:4a^2+9c^2}$. *minus* $8a^3$.

Cum enim sint ubique ut Aac, Aac, *parabolæ; sic* ae, ae, *rectæ: erunt etiam* pe, pe, *rectarum differentiæ; ut* acca, acca, *differentiæ parabolarum; hoc est,* (*sumptis* aa *infinite exiguis,*) *ut* ac, ac, *rectæ; sive ut* aac, aac, *rectangula.*

Fiat autem, ut AB *ad* BE, (*sive ut* a *ad* c;) *sic* BK *rectangulum æque altum, ad* ABC *parabolam.*

Cum igitur sit $\frac{\square BK}{AK}=AB$, *erit* $\frac{Par.\ ABC}{AK}=BE$, & $\frac{Par.\ Aac}{AK}=ae$, & $\frac{\square aac}{AK}=pe$.

Ducantur ah *rectæ, quæ utrisque* ak, ac, *æque possint;* (*quæ propterea parabolæ segmentum complent:*) *Eritque* $\frac{\square aah}{AK}=ee$.

Ut igitur omnes ak, *hoc est rectangulum* BK; *ad omnes* ah, *hoc est parabolæ segmentum* AKHB: *sic omnes* aa, *hoc est* AB *recta, ad omnes* ee, *hoc est* AeE *curvam.*

Est autem BK *rectangulum, ad segmentum parabolæ* AKHB, *ut* $27ac^2$, *ad* $4a^2+9c^2$, *in* $\sqrt{:4a^2+9c^2}$: *minus* $8a^3$. *Quod sic ostenditur.*

Parabola ABC *est* $\frac{2}{3}ab$. *Ideoque* BK *rectangulum est* $\frac{2a^2b}{3c}$: & AK$=$BD $=\frac{2ab}{3c}$. *Ergo* BH $(=\sqrt{:BCq+AKq:})=\sqrt{:b^2+\frac{4a^2b^2}{9c^2}:}=\frac{b}{3c}\sqrt{:9c^2+4a^2}$.

Fiat autem, ut BHq, *ad* AKq; (*hoc est, ut* $b^2+\frac{4a^2b^2}{9c^2}$, *ad* $\frac{4a^2b^2}{9c^2}$; *sive, ut* $9c^2+4a^2$, *ad* $4a^2$;) *sic* BH$=\frac{b}{3c}\sqrt{:9c^2+4a^2}$, *ad* AM; *quæ est igitur* $\frac{4a^2b}{27c^3+12a^2c}\sqrt{:9b^2+4a^2}$. *Et propterea* NH $(=$BH$-$AM$)=\frac{3bc}{9c^2+4a^2}\sqrt{:9b^2+4a^2}$. *Et quoniam, ut* NH *ad* AM: (*hoc est, ut* $9c^2$ *ad* $4a^2$;) *sic* NM *sive* BA$=a$, *ad* AF: *erit* AF$=\frac{4a^3}{9c^2}$: *Et* FB$=\frac{9c^2a+4a^3}{9c^2}$. *Adeoque parabola* FAK$=\frac{16a^4b}{81c^3}$: *Et parabola* FBH$=\frac{18abc^2+8a^3b}{81c^3}\sqrt{:9c^2+4a^2}$. *Ideoque*

parabolæ

parabolæ segmentum AKHB $= \frac{18abc^2 + 8a^3b, \text{ in } \sqrt{:}\, 9c^2 + 4a^2. \text{ minus } 16a^4b}{81c^3}$.

Est autem rectangulum BK $= \frac{2a^2b}{3c}$. *Ergo Rectangulum* BK, *ad parabolæ segmentum* AKHB; *adeoque* (*ut supra probatum est*) AB *recta, ad curvam* AcE; *ut* $27ac^2$, *ad* $9c^2 + 4a^2$, *in* $\sqrt{:}\, 9c^2 + 4a^2$. *minus* $8a^3$. *Quod erat demonstrandum.*

Meam denique hanc habe.

Esto ADP parabola recta; cujus latus rectum dicatur L. Adeoque, sumptis diametris Ad, Ad, &c. arithmetice proportionalibus, quæ sigillatim dicantur d; ipsaque AD, $\mathcal{D}$: Erunt ordinatim-applicatæ dp $= \sqrt{dL}$; ipsaque DP $= \sqrt{\mathcal{D}L}$:

Fig. 25.

Et parabolæ abscissæ Adp $= \frac{2}{3} d\sqrt{dL}$; adeoque ad invicem, ut $d\sqrt{d}$, vel $\sqrt{d^3}$: Et ddp rectangula (quæ, sumptis dd particulis infinite exiguis, quæ dicantur $\mathcal{A}$, parabolarum differentiis æquipollent) $\mathcal{A}\sqrt{dL}$; quæ itaque sunt ad invicem, ut $\sqrt{d}$, (sive ut ipsæ dp ordinatim-applicatæ;) atque ad parabolas suas, ut $\mathcal{A}$ ad $\frac{2}{3}d$.

Ducatur denique curva AcE (parabolæ in P occurrens,) ea lege ut singulæ de rectæ, sint Adp parabolis proportionales; adeoque ut $d\sqrt{d}$, sive $\sqrt{d^3}$. Quam igitur curvam, ex Paraboloeidum genere esse constat; quam *Semicubicalem* appellemus: utpote cujus Ordinatim-applicatæ Diametrorum, si ponatur AD diameter; vel, Diametri Ordinatim-applicatarum, si ponatur diameter A△; sunt in ratione *subduplicata-triplicatæ*.

Cum igitur sint de ad invicem, ut $d\sqrt{d}$; sitque DE $=$ DP $= \sqrt{\mathcal{D}L}$: Erunt de $= \frac{d}{\mathcal{D}}\sqrt{dL}$. Nempe, ut $\mathcal{D}\sqrt{\mathcal{D}}$ ad $d\sqrt{d}$; sic $\sqrt{\mathcal{D}L}$ ad $\frac{d}{\mathcal{D}}\sqrt{dL}$.

Cumque sint de, parabolis Adp proportionales; erunt & differentiæ differentiis proportionales: Adeoque differentiæ fe, tum inter se, tum ad integras de; easdem habebunt rationes, quas parabolarum differentiæ, tum inter se, tum ad suas parabolas: Nempe illic, ut $\sqrt{d}$ ad $\sqrt{d}$; hic, ut $\mathcal{A}$ ad $\frac{2}{3}d$. Adeoque FE $= \frac{3\mathcal{A}}{2\mathcal{D}}\sqrt{\mathcal{D}L}$; (nempe ut $\frac{2}{3}\mathcal{D}$, ad $\mathcal{A}$, sic DE $= \sqrt{\mathcal{D}L}$, ad $\frac{3\mathcal{A}}{2\mathcal{D}}\sqrt{\mathcal{D}L}$ $=$ FE:) & fe $= \frac{3\mathcal{A}}{2\mathcal{D}}\sqrt{dL} = \sqrt{\frac{9\mathcal{A}^2}{4\mathcal{D}^2}dL}$. Quibus igitur si ponantur æquales dc erit ADC parabola, cujus latus rectum $\frac{9\mathcal{A}^2L}{4\mathcal{D}^2}$: quod nempe in diametros d ductum, quadratis ordinatim-applicatarum dc æquabitur.

Earundem vero fe quadrata $\frac{9dL\mathcal{A}^2}{4\mathcal{D}^2}$, quadratis dd hoc est $\mathcal{A}^2$ addita, exhibent rectarum ee quadrata $\mathcal{A}^2 + \frac{9dL\mathcal{A}^2}{4\mathcal{D}^2}$. Quorum quidem quadratorum augmenta supra $\mathcal{A}^2$ cum sint ipsis d proportionalia; si rectis ee ponantur æquales db, erit AbBD truncus parabolæ, cujus latus rectum est idem $\frac{9\mathcal{A}^2L}{4\mathcal{D}^2}$, ordinatim-ap-

Aaaa plicata

plicata minima $A b = A$; adeoque altitudo abscissa $AV = \frac{4 D^2}{9 L}$. (Nempe $\frac{9 A^2 L}{4 D^2}$) $A^2 (\frac{4 D^2}{9 L}$.) Quam quidem altitudinis designationem cum A quantitas neutiquam ingrediatur; eadem plane futura est, quantulacunque ponatur A=dd diametri particula.

Denique, propter tum fe=dc, tum ee=db; erit, ut ADC parabola ad ADBb truncum; hoc est (propter idem utrobique latus rectum) ut $\sqrt{}$ dA *cub.* ad $\sqrt{}$ dV *cub.* — $\sqrt{}$ AV *cub.* (ut latus quadraticum cubi dA, ad latus quadraticum cubi dV minus latere quadratico cubi AV:) sic omnes fe, hoc est de recta; ad omnes ee, hoc est curvam Aee. Quod erat investigandum.

Exempli gratia. Si ponatur $AD = 4$, & $DE = \frac{16}{3}$; erit $AV = 1$, & $AeE = \frac{10\sqrt{5}, -2}{3}$.

Quodque de hac Paraboloeidis curva demonstratum est, id aliis non paucis curvarum generibus, quatenus res feret, mutatis mutandis accommodabitur.

Vides itaque quod Heuratius vester, id ipsum nostri demonstrarunt; & quidem priores. Eadem enim est linea quam Nelius noster, vesterque Heuratius considerarunt, (quod tibi, ubi animadverteris, ignotum esse non potest.) Id maxime interest, quod per Tangentes vester, nostri per Inscriptas demonstrarunt. Fundamentum utriusque methodi, nos in dicto Scholio prop. 38. Arith. Infin. tradideramus.

Quamquam autem non minore forsan jure licuisset, rectarum hanc curvis æqualium inventionem ex postliminio mihimet ascribere; quam quo alios video eorum avide sibi asscribentes inventionem quorum ipsi fundamenta se jecisse putaverint; præsertim si familiarium aliquibus hæc fundamenta patefecerint, ut ut scripto edito nondum divulgaverint; saltem si suspicio aliqua esse possit hæc sua fundamenta inventoribus illis perspecta fuisse, aut illos inde ansam nactos: Nolim tamen, quum in ipsa praxi me præverti video, hanc suam Nelio nostro εὑτυχίαν invidere; nequidem si constet (quod jam intelligo) ex nostris traditis se ansam accepisse: Neque enim alio fine nostra edimus, quam ut aliis usui esse possint. Quantillum autem inde abfuerim, ex dictis vides.

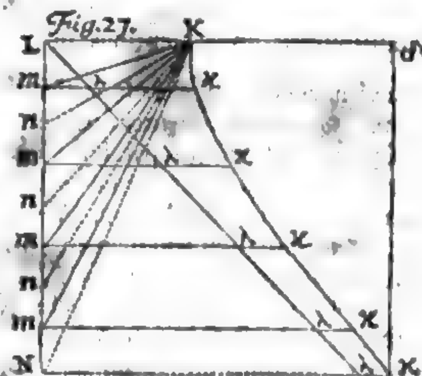
Hoc interim addamus: Eadem opera haberi etiam convexam Conoeidis superficiem, conversione curvæ AeE circa axem suum A△ descriptam. Cum enim *Superficies Conoeidis.* rectæ dc, db, ipsis fe rectarum differentiis, & ee subtensis, hoc est, (processu in infinitum continuato,) curvæ particulis, proportionales; atque in iisdem ab A△ di- *Fig. 25.* stantiis: Erit ut solidum ex AeD parabola, ad solidum ex AbD trunco, circa bA△ converso factum: sic superficies ex omnibus fe in suis distantiis (quæ est ut series $a\sqrt{a}$) sive $\frac{3}{5}$ (tres quintæ) superficiei Cylindricæ quæ describitur recta DE, (hoc est, omnibus fe in maxima distantia, quæ itaque est ut series $\sqrt{a}$;) ad superficiem convexam quæ ab AeE curva sic conversa describitur. Est autem solidorum eorum ratio (ex nostræ Arithmeticæ Infinitorum principiis) nota: (cognitis enim tum magnitudinibus, tum momentis, adeoque & centris gravitatis, parabolarum ADC, VAb, VDB, adeoque & trunci AbBD, solidorum conversione factorum magnitudo pariter innotescet:) Ergo & harum superficierum.

De ipsius trilinei Aed magnitudine, aut centro gravitatis, aut solidis istius conversione factis, nihil adjicio: nota utique sunt ea omnia; & ex principiis in nostra Infinitorum Arithmetica & alibi traditis facile deducuntur.

Sed ad Parabolam reverto; quam (ut dictum est) in memorato Scholio prop. *Curvæ Parabolæ.* 38. Arith. Infin. speciatim consideravimus. Resumpta igitur quæ ibidem est figura; ostendimus, propter dd vel os (rectarum ot in parabolæ complemento *Fig. 26.* ordinatim applicatarum differentias) ut 1, 3, 5, &c. subtensas oo esse ut $\sqrt{:A^2+1}$: $\sqrt{:A^2+9}$. $\sqrt{:A^2+25}$. &c. hoc est, ut ordinatim applicatas ad Hyperbolæ conjugatum axem: ipsas autem os vel dd, ut ordinatim applicatas in Triangulo esse, notius est quam ut dictu opus sit.

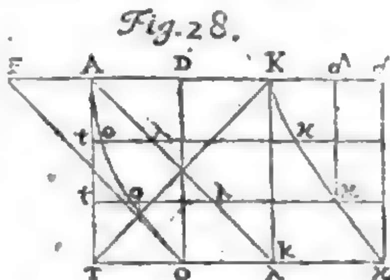
Sin quæratur adhuc, quænam cuique parabolæ conveniant Triangulum & Hyperbola: quamquam ea nullius difficultatis res sit: paucis tamen expediam. Intelligantur KL, Lm, ad angulos rectos constitutæ; omnesque Lm, Lm, &c. ut 1, 3, 5, 7, &c. differentiis dd vel os æquales, vel saltem proportionales; ut &

KL



KL ipsi tt vel A: Erunt omnes Km, subtensis oo similiter æquales vel proportionales; illis nempe singulæ quæ cum ordinatim applicatis do angulos faciunt respectivis mKL angulis æquales; hoc est, sumptis tt infinite exiguis, curvæ particulis quarum vel subtensæ vel tangentes angulos faciunt iisdem mKL vel nKL æquales. Si fiat igitur NKL triangulum rectangulum, simile triangulo FOD (fig. 26.) quod semiparabolæ circumscribitur: Erit ut omnes Km, ad omnes Lm; sic omnes oo subtensæ, hoc est AO curva, ad omnes os vel dd differentias, hoc est AD diametrum. Hoc est, (sumptis parallelis $m\kappa = mK$, & $m\lambda = mL$,) ut omnes $m\kappa$ (hyperbola $K\kappa$, ejusque conjugato axe LN interceptæ) complentes $LN\kappa K$ quadrilineum, ad omnes $m\lambda$ complentes $L\lambda N$ triangulum; sive, ut quadrilineum illud, ad hoc triangulum; sic expositæ parabolæ curva AO, ad AD diametrum. Et consequenter, Data Parabolicæ lineæ longitudine, dabitur Quadratura Hyperbolæ; & vice versa. Quod & tu aliunde observasti.

Vel sic etiam, (ut uno schemate totum complectar,) si fiat ut FD, ad DO, & OF; sic DO vel TA, ad AK; & $T\kappa = KT$: & describatur $K\kappa$ Hyperbola, verticem habens K, centrum A: &, sumpta $T\lambda = TA$, fiat $AT\lambda$ triangulum: Erit ut $AT\lambda$ triangulum, ad $AT\kappa K$ quadrilineum; sic axis AD, ad AO curvam Parabolæ. Addo, Et partes partibus respective sumptis proportionales esse: ut ex demonstratis patet. (Habet autem hæc Hyperbola latus rectum lateri transverso æquale, & utrumvis lateri recto Parabolæ æquale, duplum autem rectæ AK: Estque A, Hyperbolæ centrum; K, vertex; AT, axis conjugatus; $A\lambda$, Asymptota; $K\delta$, axis interceptus; & $\delta\kappa = AT$ ordinatim applicata basis.) Atque hactenus de Parabolæ curva.



Sed & eadem opera, de Conoidis Parabolici superficie judicandum erit. Cum enim singulæ rectarum to differentiæ, ad respectivas curvæ particulas, sint ut $t\lambda$ ad $t\kappa$, sintque in iisdem ab axe distantiis: Erit ut solidum ex conversione $AT\lambda$ trianguli, ad solidum ex conversione $AT\kappa K$ quadrilinei, circa AK rectam; sic superficies ex omnium curvarum to differentiis sic conversis, ad conoidis superficiem ex conversis curvæ particulis. Quæ autem ex differentiarum illarum, arithmetice proportionalium, in distantiis itèm arithmetice proportionalibus, conversione describitur; ad superficiem earundem arithmetice proportionalium, in distantia maxima, conversione descriptam, (series Secundanorum ad seriem Primanorum;) hoc est, ad curvam Cylindri circumscripti; est ut 2 ad 3. Ergo, ut solidum ex $AT\lambda$ trianguli conversione, ad solidum ex conversione $AT\kappa K$ quadrilinei, circa AK, descriptum; sic $\frac{2}{3}$ superficiei curvæ Cylindri circumscripti, ad curvam conoeidis Parabolici superficiem. Est autem quod fit ex illa trianguli conversione, $\frac{2}{3}$ Cylindri altitudinis $T\lambda$: Quod autem ex quadrilineo sic converso efficitur, est Cylindrus (ejusdem basis) altitudinis $T\kappa$, dempto Conoide Hyperbolico. Est autem Conoides illud Hyperbolicum (per prop. 163, 164. Arith. Infin.) ad circumscriptum Cylindrum, ut $\frac{1}{2}\mathcal{T} + \frac{1}{3}\mathcal{D}$ ad $\mathcal{T} + \mathcal{D}$, (semissis lateris transversi una cum triente diametri interceptæ, ad ejusdem lateris transversi & diametri aggregatum:) Hoc est, ut $AK + \frac{1}{3}K\delta$ ad $AK + T\kappa$ seu $2AK + K\delta$: Adeoque cylindrus sic hyperbolice excavatus, ad eundem plenum; ut $\frac{1}{2}\mathcal{T} + \frac{2}{3}\mathcal{D}$ ad $\mathcal{T} + \mathcal{D}$, sive ut $AK + \frac{2}{3}K\delta$ ad $AK + T\kappa$. Ergo (propter æquales omnium bases,) Ut $\frac{2}{3}T\lambda$; ad $T\kappa$ minus $\frac{AK + \frac{1}{3}K\delta}{AK + T\kappa}K\delta$; vel ad $AK + \frac{AK + \frac{1}{3}K\delta}{AK + T\kappa}K\delta$: sic $\frac{2}{3}$ superficiei curvæ Cylindri circumscripti, ad curvam Conoeidis parabolici superficiem: Et

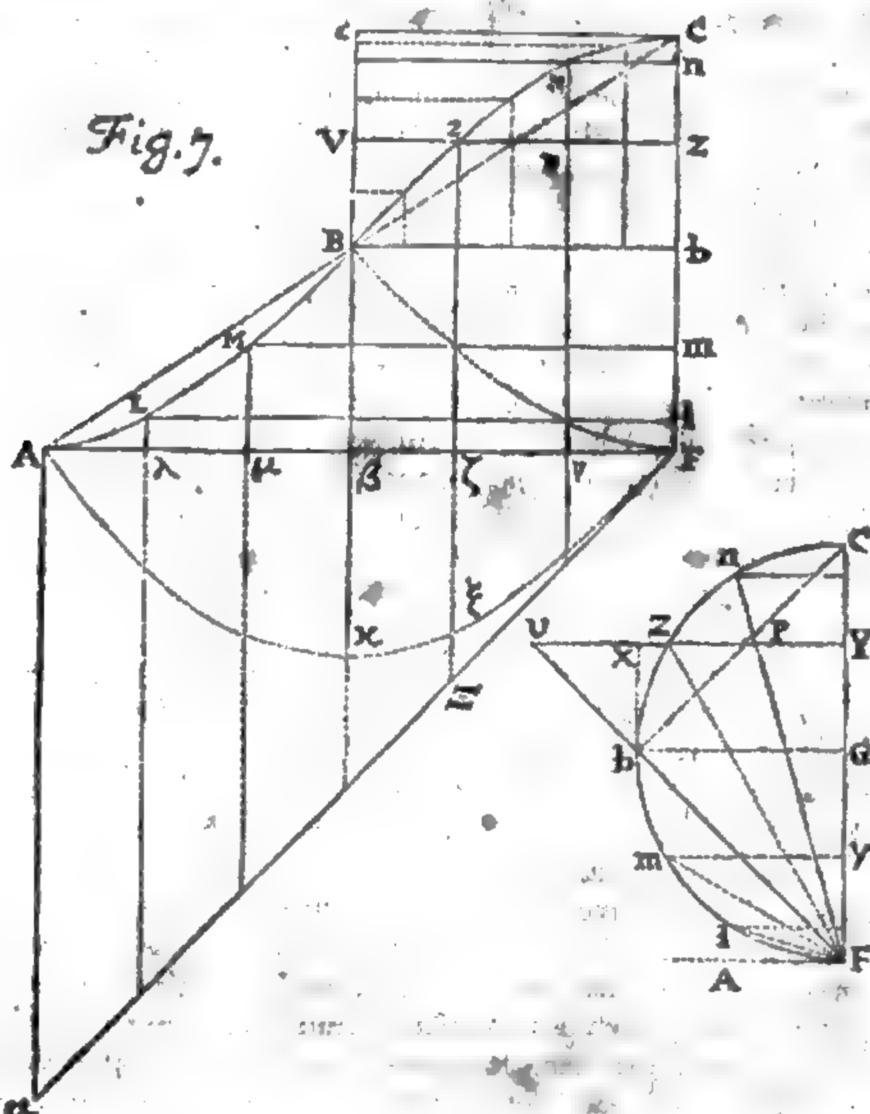
Conoidis Parabolici superficies.

(multi-

(multiplicatis antecedentibus in $\frac{2}{3}$, ut $T\lambda$, ad eandem $AK + \frac{AK+\frac{2}{3}K\delta}{AK+T\kappa}K\delta$; sic cylindri circumscripti superficies curva, ad curvam Conoeidis parabolici superficiem. Quæ num inventis tuis consentiant, vide sis.

Quam vero eadem parabolæ curva circa A T conversa superficiem describit, (propter tum differentiarum rectarum t o, tum particularum curvæ, ab A T distantiam t o, in earundem ab A K distantiæ ratione duplicata,) erit ea superficies curva, ad circulum semidiametri A D; non quidem ut ipsa solida modo dicta, (ex conversione quadrilinei A K κ T, & trilinei A λ T, circa A K,) sed ut semisolidorum horum momenta respectu A K rectæ; vel ut omnes t κ ad omnes t λ, in respectivarum suarum ab A K distantiarum quadrata. Quæ quidem ratio, non magis explicabilis est, quam ipsa Quadrilinei ad Trilineum ratio.

Ellipsis expansa. Verum (ut ad alia etiam, extra Paraboloeidum genera, transeamus:) Perpendamus curvam A B C fig. 7. quam *Ellipsin expansam* dicimus. Quadrata parti-

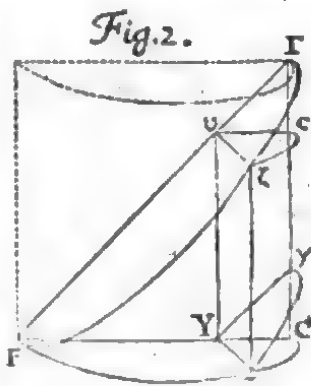


cularum hujus, vel earundem subtensarum, sunt ut quadrata differentiarum sinuum versorum (incipiendo ab A vel C,) sive differentiarum sinuum rectorum (utrinque à B procedendo,) quadratis æqualibus aucta. (Quod ex ipso Schematis inspectu patet.) Quam igitur rationem habent eorundem quadratorum sic auctorum latera quadratica, vel ad quadratorum æqualium latera, vel ad omnes illas sinuum differentias, eam habet A B C curva, vel ad A F vel ad F C. (Quod & de partibus respectivis intelligendum est.) Quæ tamen ratio non magis explicabilis est, quam perimetri Ellipseos, ad peripheriam Circuli, vel hujus diametrum. Quæ enim erant in fig. 2. F z C, F ζ Γ, Circuli & Ellipseos semiperimetri in superficie Cylindrica; eædem sunt in eadem expansa, fig. 7. A F recta, & A B C curva. Ut igitur A F recta, ad A B C curvam; sic semiperimeter Circuli, ad semiperimetrum Ellipseos, cujus minor axis æqualis sit diametro circuli; major, ejusdem duplum possit. Uti &, in fig. 10. F A, & F C, sunt ut quadrans perimetri circularis, ad quadrantem Ellipseos, cujus major Axis minoris posset quintuplum. Et in aliis similiter, variata curvaturæ mensura, pro varia conjugatorum axium ratione.

Estque

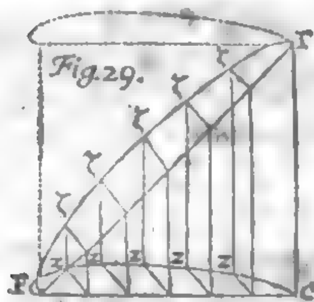
Estque hæc, ni fallor, ea curva quam *Cycloidis Comitem vel Sociam* (*la Compagne de la Roulette*) appellat Author Historiolæ, utut aliter apud ipsum atque me generata. Quam enim ille dimidiam *ductu circini in superficie Cylindri recti*, descriptam dicit; nos simplicius *sectione Cylindri plano facta*, totam describimus. Nescivisse siquidem videtur, curvam ABC fig. 7. non aliam esse quam Ellipsin F ζ Γ fig. 2. in planum expansam. Si autem centro C, distantia CF, in superficie cylindri fig. 2. circini ductu describatur linea, non erit illa F ζ Γ Ellipsis, (communi plani & Cylindri sectione facta,) sed alia curva, communi Sphæræ & Cylindri sectione facta, quæ in planum expansa omnino similis erit curvæ BC fig. 7. prioris semissi. Si enim intelligatur, (in fig. 2.) F ζ Γ circini ductu descripta, adeoque C ζ recta, ubique ipsi CF æqualis, unde demissa ζ z in superficie cylindri occurrat basi in z: Quia tum C z & z F subtensæ, tum C z & z ζ, æque possint ipsi C ζ rectæ, hoc est CF; erit z F subtensa æqualis ipsi z ζ; Adeoque omnes z ζ (divisa F z C in partes æquales in punctis quotlibet z) erunt ut chordæ arcuum in semicirculo arithmetice proportionalium, hoc est, ut sinus recti in quadrante, hoc est, ut rectæ trilineum B b C fig. 7. complentes, ipsi B b ordinatim applicatæ.

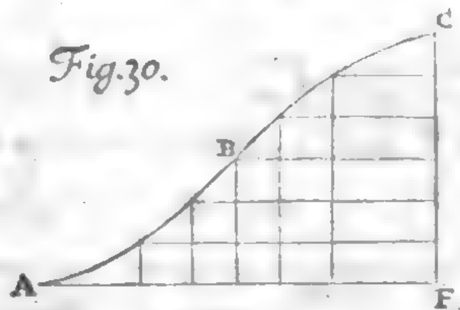
Cycloidis socia.



Adeoque si intelligatur semicylindro F z C Γ fig. 2. similis alius cujus basis diameter sit semissi hujus F C æqualis; Curva ut F ζ Γ circini ductu descripta in superficie minoris; & semissis F ζ Γ semiellipseos in superficie majoris, si in planum utraque expandatur, congruent.

Porro si intelligatur, non jam F A ut in fig. 7. hoc est F z C fig. 2. sed F C ut in fig. 30. sive C Γ, vel C F recta, vel etiam F Γ, fig. 29. dividi æqualiter; Curva Ellipseos.





adeoque F A fig. 30. hoc est F z C fig. 29. dividi pro ratione arcuum ordinatim applicatis sive sinubus rectis æqualiter distantibus respondentium: Erunt (in partibus infinite exiguis) quadrata particularum ABC curvæ, huic divisioni respondentium; ut quadrata differentiarum horum arcuum, quadratis æqualibus aucta. (Quorum omnium radices, ad omnes illas vel differentias, vel diametri particulas æquales, sunt, ut ABC curva ad rectam AF, vel ad FC: quibus quidem aggregatis proportionales superficies planas, facile est concipere; sed non ita facile ratione nota explicare, magis quam rationem curvæ Ellipseos, ad Circuli vel peripheriam, vel diametrum.) Sunt autem illæ arcuum differentiæ (propter arcuum infinite exiguorum & chordarum quasi-coincidentiam, adeoque & centrorum gravitatis, utpote quæ arcui & chordæ interjecta esse debent,) ut $\frac{RA}{s}$, hoc est factum ex R radio & diametri aliquota parte exigua A, per sinum rectum s divisum; (Quod ex Archimedis & aliorum demonstratis, qui superficierum, Sphæricæ & circumscriptæ Cylindricæ, segmenta, parallelis planis abscissa, æqualia esse ostenderunt, facile colligitur: nempe $RA = sc$, factum ex Radio in A, æquale esse facto ex s ejusdem distantia à diametro, in c correspondentem curvæ particulam:) Adeoque illarum quadrata $\frac{R^2 A^2}{s^2}$; quæ quadratis æqualibus A^2 (prop-

ut FC = CΓ) aucta, exhibent $\frac{R^2 A^2}{s^2} + A^2$, quadrata particularum curvæ ABC; eorumque omnium radices, curvam ipsam: Hoc est, (propter $s = \sqrt{:R^2 - a^2}$: sumptis a utrinque à medio, ut 1, 2, 3, &c. successive,) $\frac{R^2 A^2}{R^2 - a^2} + A^2 = \frac{2R^2 A^2 - a^2 A^2}{R^2 - a^2}$ ipsa quadrata; eorumque radices $A\sqrt{:\frac{2R^2 - a^2}{R^2 - a^2}}$. Ipsæ autem arcuum circularium differentiæ $\frac{RA}{s} = A\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - a^2}}$. Adeoque ut illæ omnes, ad omnes has; sic Ellipseos expositæ perimeter, FζΓ, vel ABC, ad peripheriam circuli FzC, vel AF. (Quod & aliis Ellipsium speciebus facile accommodabitur, ut mox docebitur.)

Sphæroeidis oblongi superficies. Deinde, Si intelligantur tum Ellipseos illæ, tum hæ perimetri Circularis particulæ, in iisdem respective à suis axibus distantiis converti; unde fiat illic, Sphæroeidis oblongi; hic, Sphæræ superficies: Erit superficies illa ad hanc; ut omnes $A\sqrt{:2R^2 - a^2}$: ad totidem AR; sive, ut omnes $\sqrt{:2R^2 - a^2}$: ad totidem R: Hoc est, (si intelligatur in parallelogrammo (fig. 31.) AB = $R\sqrt{2}$, & AR = R, adeoque ar = a, reliquaque ut in schemate constructa,) ut RCBA quadrantis circuli segmentum, ad quadratum AR minoris semidiametri. Sunt enim omnia brb rectangula, hoc est $R\sqrt{2} + a$ in $R\sqrt{2} - a$, hoc est, $2R^2 - a^2$; ut rectarum rc quadrata: adeoque omnes rc rectæ, ut $\sqrt{:2R^2 - a^2}$. Quod etiam ex prop. 124. Arith. Infin. fusius patebit.

Fig. 31.

Eodem modo, ad alias Ellipsium species res accommodabitur. Si hoc saltem advertatur; In præsenti casu, propter FC = CΓ fig. 2. vel 29. aliquotas partes tum rectæ FC tum rectæ CΓ, eodem symbolo A designari. Sin recta CΓ (quæ potest excessum quadrati axis longioris supra brevioris quadratum) vel longior esset vel brevior quam FC (circuli diameter, vel Ellipseos axis minor,) puta ut H ad R; posita A aliquota parte diametri circularis (ut prius,) erit $\frac{H}{R}A$ eadem pars rectæ CΓ: Adeoque pro $\frac{R^2 A^2}{R^2 - a^2} + A^2$, sumendum erit $\frac{R^2 A^2}{R^2 - a^2} + \frac{H^2}{R^2}A^2$. Adeoque Sphæroeidis illa superficies, ad superficiem Sphæræ, erit ut omnes $\sqrt{:R^2 + H^2 - \frac{a^2 H^2}{R^2}}$: ad totidem R. Ideoque ponendum erit, fig. 31. AB = $\sqrt{:R^2 + H^2}$: & AR = H (semissi rectæ CΓ fig. 29.) quare & ar = $\frac{aH}{R}$. Eritque, ut prius, Ut ABCR quadrantis circularis segmentum, ad totidem R, hoc est ad $H \times R$: sic superficies illa Sphæroeidica ad Sphæricam. (Et partes partibus respective proportionales.) Est autem, ut patet, AB, Ellipseos semiaxis major; RC, semiaxis minor; AR, distantia foci à centro, sive recta quæ potest differentiam quadratorum semiaxium.

Dico igitur, *Si in circuli quadrante cujus radius* AB *ellipseos semiaxis major, ordinatim-applicetur* RC *semiaxi minori æqualis, & complicatur* ARC *rectangulum: Erit ut* RCBA *quadrilineum, ad* ARC *rectangulum; sic Sphæroeidis oblongi superficies, ad superficiem inscriptæ Sphæræ.*

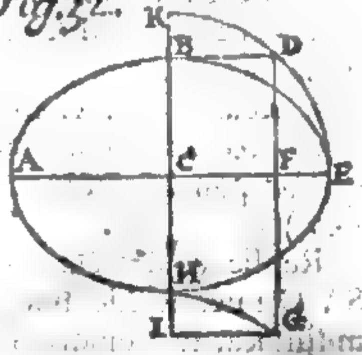
Sphæroeidis lati superficies. Intelligatur jam Cylindrus FΓCz fig. 29, obliquus esse, cujus basis FζΓ circulus; & FzC Ellipsis, axi recta, cujus minor axis FC. Cum igitur, divisa FΓ circuli diametro in partes æquales numero infinitas, quorum qualibet dicatur A, & particulæ peripheriæ (ut prius ostensum est) $\frac{RA}{s}$ vel $\frac{RA}{\sqrt{:R^2 - a^2}}$, & harum particularum quadrata $\frac{R^2 A^2}{R^2 - a^2}$; unde si auferantur quadrata æqualium particularum

rectæ

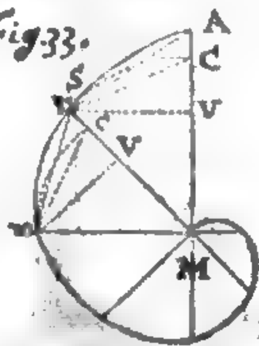
rectæ $C\Gamma$, puta $\frac{H^2}{R^2}A^2$ (sumpto scilicet, ut $C\Gamma$ ad $F\Gamma$, sic H ad R;) erunt $\frac{R^2a^2}{R^2-A^2}-\frac{H^2}{R^2}A^2$ quadrata particularum Ellipseos $F\alpha C$; eorumque radices $\sqrt{:}\frac{R^2A^2}{R^2-a^2}-\frac{H^2}{R^2}A^2$: ipsæ particulæ. Quæ quidem utræque particulæ (tum Peripheriæ, tum Ellipseos,) si in suas easdem à suis axibus respectivas distantias $s=\sqrt{:}R^2-a^2$: ducantur: Facta (superficiebus harum conversione circa suos axes proportionalia) sunt, illic RA; hic, $A\sqrt{:}R^2-H^2+\frac{a^2H^2}{R^2}$: Adeoque Sphæroeidis lati superficies (conversione Ellipseos circa minorem axem descripti) ad superficiem Sphæræ circumscriptæ, ut omnes $\sqrt{:}R^2-H^2+\frac{a^2H^2}{R^2}$; ad totidem R. Hoc est, ut quadrilineum A T κ K fig. 28. hyperbolæ suoque axi conjugato interjectum (cujus semilatus transversum $AK=\sqrt{:}R^2-H^2$: & A T H, T κ $=R$;) ad A T κ rectangulum. Fig. 28.

Hoc est, *Si, ab Hyperbola cujus semilatus tum rectum tum transversum* A K, *Ellipseos semiaxi minori æquetur; ad conjugatum axem ordinatim applicetur* κ T *semiaxi Ellipseos majori æqualis; & compleatur* A T κ *rectangulum; Erit, ut* A T κ K *quadrilineum, ad* A T κ *rectangulum; sic superficies Sphæroeidis lati, ad circumscriptæ Sphæræ superficiem.*

Vel sic, elegantius paulo, utrumque simul efferamus. *Sint ellipseos axes conjugati,* A C E *major,* B C H *minor, &* B D (*parallela* C E) *circumscripti circuli quadranti* E K *occurrens in* D: *& compleatur* C B D F *rectangulum. Sumatur, in* D F *continuata,* F G *æqualis* C E. *Denique centro* C *vertice* H, *scribatur* H G *hyperbola; & compleatur* C F G I *rectangulum. Intelligatur autem tum axe* A E *sphæroeides oblongum, tum axe* B H *sphæroeides latum, ellipseos conversione describi. Erit, ut* C F D K *quadrilineum, ad inscriptum rectangulum* C F D B; *sic Sphæroeidis oblongi superficies, ad superficiem inscriptæ Sphæræ: Atque, ut* C F G H *quadrilineum, ad rectangulum circumscriptum* C F G I; *sic superficies sphæroeidis lati, ad circumscriptæ sphæræ, superficiem.* Addo etiam, *& partes partibus respective sumptis proportionales esse,* (nam & de partibus etiam procedit demonstratio:) Hoc est, si in eadem ratione, ordinatim applicatis secta intelligatur recta C F, qua sphæroideos & comparatæ Sphæræ Axes secantur plano: Data vero ratione quam habet Sphæroeideos superficies ad Sphæræ superficiem, vel etiam istius partes ad partes hujus; rationem item ad circuli planum dari nemo nescit. Sed de his hactenus.



Accedo ad Spiralem, quam & memorato loco (Schol. prop. 38. Arith. Infin.) consideravimus. Intelligatur, intra Spiralem lineam inscribi, figura ex similibus sectoribus conflata. Horum arcus, propter æqualia radiorum augmenta (ut $CA=A$) arithmetice proportionales esse ostendimus: Adeoque & arcuum horum (quippe similium) tum chordas ($SC=c$,) tum sinus rectos ($SV=s$) & versos ($VC=v$) arithmetice item proportionales esse: Et propterea Subtensarum Spiralis quadrata, $SAq=SVq+VAq=s^2+v^2+2vA+A^2=c^2+2vA+A^2$, ut quadrata Æqualia, tum quadratis arithmetice proportionalium, tum planis arithmetice proportionalibus, aucta: (Quod ibidem fusius ostensum est.) Hoc est, ut quadrata ordinatim-applicatarum in hyperbola, quadratis æqualibus aucta. Adeoque, dummodo determinatus est numerus Sectorum, unde & angulus ad centrum determinatæ magnitudinis, manifestum est has spiralis subtensas subtensis in parabola supra memoratis (quarum utique quadrata, quadratis æqualium arithmetice-proportionalium sive ordinatim-applicatarum in triangulo auctis, æqualia supra diximus,) minime convenire. Quoniam vero, in minoribus *Lineæ Spiralis longitudo.*



Linearum Spiralis & Parabolicæ æqualitas.

bus angulis ratio sinus versi ad rectum minor est, eaque semper prout minuuntur anguli diminuitur, adeo ut eo tandem perveniatur ut data qualibet minor sit; unde in angulis infinite exiguis, propter rationem sinus versi ad rectum infinite exiguam, evanescere intelligendus est V C sinus versus (coincidentibus quasi tum arcu tum chorda tum sinu recto; quod quidem intelligendum erit, ubi S A subtensæ pro Spiralis particulis reputantur;) adeoque quantitas v, & propterea $2vA$, pro nulla reputanda: Erit, hoc casu, $c^2 + 2vA + A^2$ tantundem atque $c^2 + A^2$; Adeoque particulæ Spiralis, non minus quam Parabolæ, erunt, ut quadratorum æqualium, quadratis Arithmetice proportionalium auctorum, latera, sive ut rectæ t z fig. 28. Unde linearum Spiralis & Parabolicæ æqualitatem manifestam esse constat.

Quæ quidem inventio, num Hobbio, an Robervallio, debeatur, (uterque enim vendicat,) non determino; an inter utrumque dividenda. Certum est, Mersennum Robervallio tribuere: contendit autem Hobbius se primum invenisse, prætendit utique (quam suam prætensionem cum *Elenchum* meum scripsi non audiveram) se Robervallio rem totam pridie communicasse, eum autem, hac ansa data, postridie demonstrationem suam adornasse. Quicquid sit, cum res facti sit, nolo ego me arbitrum interponere. Propositionem autem, cujuscunque demum sit, veram esse, comprobat hæc nostra demonstratio.

Hanc autem demonstrationem nostram, figurarum inscriptione & circumscriptione ad morem veterum, fusius tradi posse, non opus est ut ego te moneam; qui probe noris quam facile hujusmodi demonstrationes contractæ, ad operosas illas veterum reduci possint, modo quis id tanti esse putaverit. Atque hactenus de Spirali Archimedea.

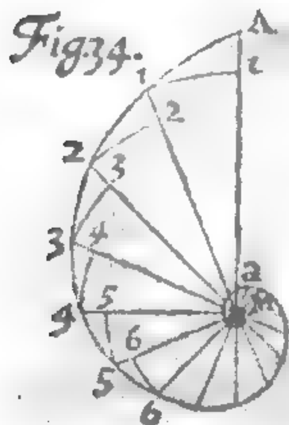
Spiralis alia. Fig. 33.

Intelligamus jam alius generis Spiralem describi; in qua, verbi gratia, radiorum incrementa C A non sint æqualia, sed eadem ratione continue crescant qua crescunt arcus S C, vel M S radii. Id autem fiet si intelligamus, vel, manente circumductæ rectæ M A motu æquabili, punctum lineans moveri ab M ad A motu æqualiter accelerato; vel, manente puncti lineantis ab M ad A motu æquabili, rectam M A circumduci motu æquabiliter retardato, nempe ut quo longius a medio recesserit punctum lineans, eo tardius circumferatur recta; (unde consequetur puncti lineantis, in ipsa curva descripta, motus æquabilis, vel æque velox.)

Re sic constructa, manifestum est, tum omnia similium sectorum triangula S V C inter se esse similia, tum omnia S V A, vel S C A, triangula rectilinea vel mistilinea, tum omnia S M A, item inter se similia. Unde & angulus ad A, quem vel S A curva, vel ejusdem subtensa S A, vel etiam tangens, cum M A faciat, tum quivis esse potest (pro varia motuum inter se ratione) tum ubique idem erit.

Erunt autem omnes S A rectæ, hoc est (in partibus exiguis) omnes S A curvæ ad omnes A V, hoc est (in partibus exiguis) ad omnes A C, hoc est ad A M rectam, ut A S ad A V; sive ut Hypotenusa ad Basin Trianguli rectanguli, angulum habentis ad basin, angulo A æqualem; illi nempe, quem curvæ Tangens cum Radiis constituit.

Construetur autem hujusmodi Spiralis; si sumptis, (ut in fig. 34,) rectis M A, M 1, M 2, M 3, &c. continue proportionalibus, radiis hisce describantur totidem sectores similes, eisque circumscribatur A 1 2 3, &c. curva.



Si fiat autem, ut fig. 35, super æquali M A basi, triangulum rectangulum M A S, angulum A æqualem habens: Erunt curvæ A 1, 1 2, 2 3, &c. in spirali, rectis A 1,

A 1, 1 2, 2 3, &c. in trianguli hypotenusa, singulæ singulis respective æquales, & omnes omnibus: Adeoque A 1 2 3 &c. curva, rectæ A S æqualis. Spatia vero trilinea Spirali adjacentia A M 1, 1 M 2, 2 M 3, &c. trapeziorum in triangulo subdupla. Totumque triangulum, totius spatii Spiralis duplum; si nempe intelligantur convolutiones interiores toties repeti quoties novis circulationibus iterato describuntur.

Nam revera; uti Spiralis Archimedea, non aliud est quam Parabola convoluta; aut etiam Circulus vel Circuli Sector, convolutum Parallelogrammum, (quod prop. 16. Arith. Infin. ostendimus:) Sic spiralis hæc, fig. 34, non aliud est quam ipsum M A S triangulum (fig. 35.) convolutum; contracta nempe in punctum recta S M, adeoque parallelogrammis (sive inscriptis sive circumscriptis numero infinitis) in totidem triangula redactis.

Notandum autem hic est; Tum propter radiorum M A, M 1, M 2, &c. (vel rectarum in triangulo his respondentium) continue proportionalium processum in infinitum, decrescendo; tum etiam propter eundem ubique Tangentis angulum cum recta circumducta factum, (unde, circuendo, ad punctum M medium, nunquam perveniri poterit;) Manifestum est, Spiralem hanc introrsum (non minus quam extrorsum) esse interminabilem. Neque enim ab A per 1 2 3 &c. quotcunque demum circulationibus peractis, ad medium unquam pervenietur, magis quam, sumptis A 1, 1 2, 2 3, &c. proportionalibus, exhaurietur unquam A S recta. Ut autem hæ omnes in infinitum continuatæ, sic A 1 2 3 &c. continuata introrsum in infinitum, æquabit rectam A S. Habes itaque *curvam interminabilem terminatæ rectæ æqualem*.

Sed & fatendum erit, Tangentem Spiralis hujus, non magis duci posse Geometrice, quam Spiralis Archimedeæ, (ut quæ ex quadratura circuli dependeat, ut & Spiralium omnium Tangentes;) adeoque nec angulum A geometrice assignari. Linea tamen interminabilis terminatæ rectæ æqualis, non minus sine hoc assignabitur: Si nempe, sumatur triangulum, non rectangulum, ut A S V fig. 33. sed triangulo A S C simile; ut enim A C ad A S, sic A M ad omnes A S rectas arcubus A S numero infinitis inscriptas.

Hanc ipsam curvam, alia occasione, contemplatus item est Wrennius noster. Nec tantum curvæ longitudinem, partiumque ipsius, & magnitudinem adjacentis plani: sed &, ipsius ope, Limacum & Conchiliorum domunculos metitur. Existimat utique, magna verisimilitudine, domunculos hosce non alios esse quam Pyramides convolutas; quarum Axis sit, istiusmodi Spiralis; non quidem in plano jacens, sed sensim in convolutione (circa erectum axem) assurgens: pro variis autem curvæ, sive ad rectam circumductam, sive ad subjacens planum, angulis; variæ Conchiliorum formæ enascantur. Atque, hac hypothesi, mensurata Pyramide, metitur etiam ea conchiliorum spatia. Et quidem de hac Spirali hactenus.

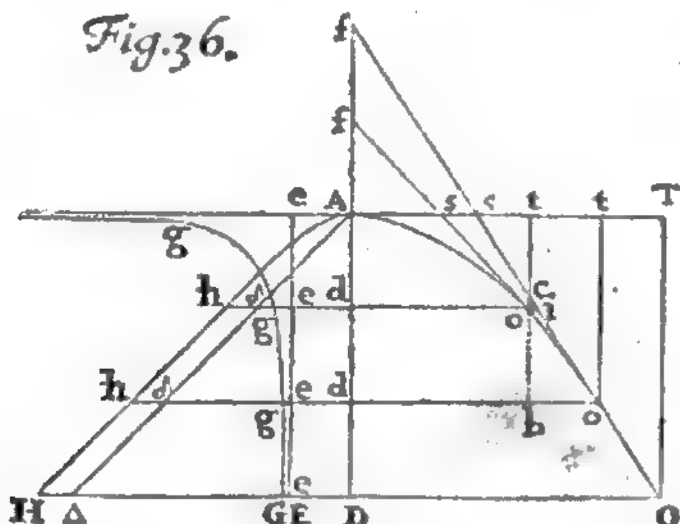
Putaram hic aliam Spiralis speciem tradidisse; eam nempe quæ ex convoluta Paraboloeide Semicubicali ortum duceret. Cujus itaque curva quum Paraboloeidis illius curvæ æquetur, quam æqualem esse rectæ jam ostendimus; etiam Curva Spiralis inde oriundæ, æqualis rectæ ostenderetur. Sufficiet autem universim dixisse, Spirales omne genus, ex hujusmodi planis (sive triangula sint, sive trapezia, vel parallelogramma, sive parabolæ, aut paraboloeides, aut etiam hyperbolæ, aliæve vel rectilineæ vel mistilineæ figuræ,) sic convolutis oriundas, curvas habere curvatis planorum sic convolutorum lateribus, ut A S, æquales; & quidem, opposito latere, ut S M, in punctum contracto, spatium spirali adjacens, figuræ nondum convolutæ semissem. *Spirales aliæ.* Fig. 35.

Atque hactenus specimina tradidimus methodi nostræ, subtensarum ope, rectificandi curvas.

Quoniam vero, Tangentium ope (in memorato Scholio *prop.* 38. *Arith. Infin.*) id etiam fieri posse insinuavimus: libet & hujus item aliquot specimina exhibere.

Atque à Parabola initium desumam, id ipsum Tangentium ope demonstraturus, quod supra per Inscriptas ostendimus. Intelligatur itaque in fig. 36. AT, parabolam rectam in vertice tangens, in punctis t quotlibet æqualiter divisa; adeoque A t, sive d o, arithmetice proportionales, quæ dicantur p; earumque communis excessus b o = t t dicatur A: Erit autem ó t = d A $= \frac{p^2}{L}$; adeoque (propter t s $= \frac{1}{2}p$) *Curva Parabolæ.* Fig. 36.

tangens $os = \sqrt{:\frac{1}{4}p^2 + \frac{p^4}{L^2}:} = \frac{p}{2L}\sqrt{:L^2 + 4p^2}$. Occurrat autem quælibet o t,



proximæ tangenti o s, in c. Eritque ut $st = \frac{1}{2}p$, ad so; sic $bo = tt = A$, ad $oc = \frac{A}{L}\sqrt{:L^2 + 4p^2}$. Sive AL, ad $A\sqrt{:L^2 + 4p^2}$: vel L, ad $\sqrt{:L^2 + 4p^2}$: aut $\frac{1}{2}L$ ad $\sqrt{:\frac{1}{4}L^2 + p^2}$. Adeoque ut omnes $\sqrt{:\frac{1}{4}L^2 + p^2}$: ad totidem $\frac{1}{2}L$; sic omnes o c tangentes, hoc est, (in partibus exiguis) o o curvæ, hoc est A O curva, ad omnes t t, hoc est rectam A T vel D O. Hoc est, si fig. 28. ponatur A K $= \frac{1}{2}L$ semilatus tum rectum tum transversum hyperbolæ K κ; & A T ut in parabola: Erit, ut T A K k rectangulum, ad T A K κ quadrilineum: sic A T tangens, vel basis D O, ad A O curvam parabolæ. Et partes partibus respective proportionales. Quod quidem supra inventis convenit, ubi axem A D ad A O curvam esse ostendamus, ut T A λ triangulum, ad idem T A K κ quadrilineum. Nam ut Triangulum T A $\lambda = \frac{1}{2}dL$, ad rectangulum T A K $= \frac{1}{2}L\sqrt{dL}$; hoc est, ut d ad $\sqrt{dL}$: sic A D ad A T.

Fig. 28.

Conoeidis Parabolici superficies.

Sed & hinc simili modo atque supra, inveniemus superficiem convexam conoeidis parabolici. Nempe (ob easdem particularum t t & κ κ distantias ab A K,) Erit ut Cylindrus ex conversione T K parallelogrammi, ad Cylindrum ex simili conversione parallelogrammi T δ minus conoeide hyperbolico ex conversione K δ κ hyperbolæ, (circa eandem A δ rectam;) sic circulus radio A T descriptus, ad conoeidis superficiem conversione A O curvæ descriptam. Quod & supra traditis etiam convenit. Nam eadem est ratio circuli radio A T descripti, ad duas tertias superficiei cylindricæ recta T O descriptæ, quæ est solidi ex conversione T A K rectanguli, ad solidum ex conversione trianguli T A λ, circa eandem A K. Quare & eadem superficies Conoeidis utrovis modo proveniet.

Curva Parabola.

Fig. 36.

Sed intelligamus jam (non A T, sed) A D in punctis d æqualiter divisam: adeoque $dA = d$ arithmetice proportionales, & $dd = A$ æquales, & $do = \sqrt{dL}$, & (propter d f duplam rectæ d A) tangentes $of = \sqrt{:4d^2 + dL}$. Item (continuatis d o donec proximæ quæque tangenti o f occurrat in i) ut $df = 2d$, ad fo: sic $dd = A$, ad $oi = \frac{A\sqrt{:4d^2 + dL}}{2d} := \frac{A\sqrt{:d^2 + \frac{1}{4}dL}}{d}$. Adeoque si ad eundem A D axem construatur tum A D Δ triangulum isosceles rectangulum, tum A D H hyperbola (cujus tum latus rectum tum transversum sit $\frac{1}{4}L$,) atque A D E rectangulum cujuscunque latitudinis, (adeoque singulas e d singulis A vel æquales vel saltem proportionales;) Et fiat, ubique, ut $d\delta = d$, ad $de = A$, sic $dh = \sqrt{:d^2 + \frac{1}{4}dL}$: ad d g: erit ut A D E rectangulum, ad A D G g quadrilineum (interminabile quidem, sed magnitudine finitum:) sic axis A D, ad A O curvam parabolæ. Et partes partibus respective proportionales.

Conoeidis superficies.

Porro, si ducantur omnes tum d d, tum i o, in suas easdem à vertice respectivas distantias d: reperiuntur momenta (respectu A T rectæ) rectarum dd ad momenta rectarum o i, hoc est (in partibus exiguis) curvarum o o; ut dA ad $A\sqrt{:d^2 + \frac{1}{4}dL}$: sive ut d ad $\sqrt{:d^2 + \frac{1}{4}dL}$: Hoc est ut d δ ad d h. Omnium igitur o b, hoc est d d, hoc est A D rectæ, momenta, ad momenta omnium o i, hoc est o o, hoc est A O curvæ,

(respectu

(respectu ejusdem A T ;) est, ut triangulum A D △, ad A D H hyperbolam : Et consequenter (utpote momentis proportionalium) eadem est ratio Circuli radio A D descripti, ad curvam Conoeidis superficiem (convexo-concavam) curvæ A O circa A T conversione descriptam.

Denique, Quoniam n b (rectarum t o differentiæ) & o o, in iis reputandæ sunt ab A D distantiis; adeoque & superficies earundem respective circa A T conversione descriptæ, in iisdem item distantiis nempe d o $= \sqrt{dL}$; sintque superficies illæ, ad has, (quod modo ostensum est,) ut d δ $= d$, ad d h $= \sqrt{:d^2 + \frac{1}{4}dL}$: Ductis utrisque in eandem $\sqrt{dL}$ distantiam; reperitur superficierum omnium rectis illis o b, ad superficierum omnium curvis o o, sic descriptarum momenta, ut omnes $d \times \sqrt{dL}$, ad omnes $\sqrt{:d^2 + \frac{1}{4}dL} : \times \sqrt{dL}$; hoc est ut, $\sqrt{d^3 L}$, ad $\sqrt{:d^3 L + \frac{1}{4}d^2 L^2}$: hoc est ut $d\sqrt{dL}$, ad $d\sqrt{:dL + \frac{1}{4}L^2}$: Hoc est, ut momentum parabolæ qualis A D C fig. 25. ad momentum trunci, qualis A D B b, respectu ejusdem A b rectæ : (Si nempe intelligatur A V altitudo abscissa fig. 25. æquare $\frac{1}{4}L$ quadrantem recti lateris parabolæ expositæ fig. 36. Et axis A D utrobique æqualis : & latus rectum L.) Manifestum utique est, omnes $\sqrt{dL}$ esse ut ordinatim-applicatas in parabola, & omnes $\sqrt{:dL + \frac{1}{4}L^2}$ ut ordinatim-applicatas in parabolæ trunco : quæ utræque in d ductæ exhibent rationes momentorum : Quæ quidem ratio, (propter cognitas tum magnitudines, tum centra gravitatis, parabolæ & trunci,) cognita est. Habetur autem momentum planorum rectis o b, circa A T conversis descriptorum ; est utique (propter plana ipsa æqualibus rectis o b in distantiis ab A T arithmetice proportionalibus conversis descripta, arithmetice proportionalia ; eorumque distantias ab A D in illarum ratione subduplicata ; adeoque ipsorum momenta ut series $a\sqrt{a}$: eorundem vero planorum in distantiis maximæ æqualibus, hoc est circuli radio T O descripti , momentum, ut series a :) ad momentum circuli radio T O descripti respectu A D rectæ : ut series $a\sqrt{a}$, ad seriem a : adeoque ut $\frac{2}{5}$, ad $\frac{1}{2}$: sive ut 4, ad 5. Et propterea, data superficiei magnitudine, dabitur ejusdem centrum gravitatis. *Centrum gravitatis.*

Cum autem (ut vides) in demonstrationibus assumpserim, nunc o c, nunc o i, tangentium particulas, in divisionibus exiguis ipsi o o curvæ particulis coincidere : ne hæsites tamen num hoc temere fecerim ; id tuto factum intelligas, modo animadvertas rectas o i, o c, angulo contactus subtensas, pro diminutione o c, o i, tangentium, ita minui, ut illæ ad has rationem tandem subeant data quavis minorem, (secus enim, angulus rectilineus assignari posset angulo contactus minor,) ideoque evanescentibus o i, o c, tangenti & curvæ interjectis, coincident , tum o c, tum o i, tangentis particulæ, particulis curvæ o o.

In *Paraboloeide semicubicali*, quam supra memoravimus, similiter atque in Parabola, per Tangentes item id ipsum expediri posse, quod per subtensas superius absolvimus, paucis ostendam. *Paraboloeides semicubicalis.*

Intelligatur itaque A O fig. 36. (non jam Parabola , sed) Paraboloeides semicubicalis : cujus nempe ordinatim-applicatæ d o = A t, sint in diametrorum d A ratione *subtriplicatæ duplicata* : (adeoque d A diametri in ipsarum A t ratione *subduplicatæ triplicata* :) Et propterea d f ad d A , ut 3 ad 2 ; & t s ad t A, ut 2 ad 3. Sumptis itaque A t, A t, arithmetice-proportionalibus, quæ dicantur p, earumque communis excessus $A =$ t t, diameter vero d A $= d = \sqrt{\frac{p^3}{L}}$: Erit tangens o s $= \sqrt{:\frac{4}{9}p^2 + \frac{p^3}{L}} = p\sqrt{:\frac{4}{9} + \frac{p}{L}}$. Item ut t s $= \frac{2}{3}p$, ad o s : sic b o $=$ t t $= A$, ad o c $= \frac{3}{2}A\sqrt{:\frac{4}{9} + \frac{p}{L}} = A\sqrt{\frac{L + \frac{9}{4}p}{L}}$. Ergo, ut omnes A, ad omnes $A\sqrt{\frac{L + \frac{9}{4}p}{L}}$; hoc est, ut omnes $\sqrt{L}$, ad omnes $\sqrt{:L + \frac{9}{4}p}$, hoc est, ut omnes L, ad omnes $\sqrt{:L^2 + \frac{9}{4}pL}$: sic A T recta, ad curvam A O. Hoc est, ut parallelogrammum cujus latitudo L, altitudo $P =$ A T : ad truncum parabolæ æquealtum , cujus latus rectum $\frac{9}{4}L$, ordinatim-applicata minima L, adeoque altitudo abscissa $\frac{4}{9}L$. Quæ quidem cum supra traditis convenire, qui examinaverit, deprehendet. (Notandum interim L quo hic designatur latus rectum paraboloeidis Semicubicalis , illic designari latus rectum Parabolæ, unde Paraboloeides illa originem ducit.) Atque hinc etiam Conoeidis superficies simili modo colligitur, atque illic ; ut non sit opus repetere. Fig. 36.

Paraboloeidum aliarum Curvæ.

Idem ſimiliter in aliis non paucis Paraboloeidum generibus obtinebitur. Verbi gratia. Sunto ordinatim-applicatæ d o $=$ A t, in diametrorum ratione *ſubquintuplicata quadruplicata*. Et propterea d f ad d A, ut 5 ad 4: & t s ad t A, ut 4 ad 5. Sumptis A t, A t, arithmetice proportionalibus, quæ dicantur p, earumque communis exceſſus $A =$ t t, diameter d A $= d = \sqrt[4]{\frac{p^5}{L}} = p\sqrt[4]{\frac{p}{L}}$. Erit tangens o s $= \sqrt{:\tfrac{16}{25}p^2 + p^2\sqrt{\frac{p}{L}}:} = p\sqrt{:\tfrac{16}{25} + \sqrt{\frac{p}{L}}}$: Item, ut t s $= \tfrac{4}{5}p$, ad o s: ſic b o $=$ t t $= A$, ad o c $= A\sqrt{:1 + \tfrac{25}{16}\sqrt{\frac{p}{L}}}$. Ergo, ut omnes A, ad omnes $A\sqrt{:1 + \tfrac{25}{16}\sqrt{\frac{p}{L}}}$: hoc eſt, ut totidem L, ad totidem $\sqrt{:L^2 + \tfrac{25}{16}L\sqrt{pL}}$: ſic A T recta, ad curvam A O. Nempe, ut Parallelogrammum, ad figuræ truncum, cujus ordinatim-applicatæ ſint $\sqrt{:L^2 + \tfrac{25}{16}L\sqrt{pL}}$. Similiter: Si eſſent ordinatim-applicatæ in diametrorum ratione *ſubſeptuplicatæ ſextuplicata*, aut *ſubnoncuplicatæ octuplicata, &c.* in infinitum: Quas omnes pariter εὐθύνσεως capaces recte aſſerit Heuratius. (Hæ autem omnes, à Paraboloeide Biquadraticali, Bicubicali, Triquadraticali, cæteriſque quarum poteſtates à numero pari denominantur, eodem plane modo derivantur, quo ſupra, ab ipſa Parabola, Semicubicalis: Si enim intelligatur A p P fig. 25. Paraboloeides Biquadraticalis, vel Bicubicalis, *&c.* adeoque d p, ut $\sqrt[4]{dL^3}$, $\sqrt[6]{dL^5}$, *&c*; erit d e, ut $d\sqrt[4]{dL^3}$, $d\sqrt[6]{dL^5}$, *&c.* hoc eſt, ut $\sqrt[4]{\frac{d^5}{L}}$, $\sqrt[6]{\frac{d^7}{L}}$ *&c.*

Εὐθύνσεως autem eas capaces, (ne gratis dictum videatur) paucis oſtendemus. Ponamus autem (quia generatim agendum eſt) n numerum poteſtatum quemvis, & $m = n + 1$, $i = n - 1$, & $s = \tfrac{1}{2}n$. & $n = 2i$. Eſto autem curva rectificanda A O (fig. 28. vel 36.) parabola vel paraboloeides quævis quæ ita conſtituatur ut d o vel A t ſit $p = \sqrt[m]{d^n L}$, adeoque A d vel t o, $d = \sqrt[n]{\frac{p^m}{L}} = \frac{p}{L}\sqrt[n]{pLi}$: Ponamus item (quo fractiones vitentur) ut n ad m, ſic K ad L. Invenietur, eodem proceſſu quo nuper, fig. 36. (propter d A ad d f, ſive t s ad t A, ut n ad m; quod univerſaliter demonſtravimus ad prop. 23. 46. 49. *Con. Sect.*) t t, ad o o vel o c, ut K ad $\sqrt{:K^2 + \sqrt[s]{pLi}}$: Adeoque, ſi ponatur fig. 28. AK $= K$, & t κ $= \sqrt{:K^2 + \sqrt[s]{pLi}}$: Erit ut TAK rectangulum ad T A K κ quadrilineum; ſic recta A T, ad A O curvam. Atque hoc quidem univerſaliter, ſive ſit n numerus par, ſive impar, ſive etiam fractus.

Quoties autem n eſt numerus par; trilineum K κ δ, (adeoque T A K κ quadrilineum,) quadrari poſſe, (adeoque & A O rectificari) ſic oſtendimus.

Ponamus K δ quotlibet æqualiter creſcentes, quæ ſigillatim dicantur a (quarum maxima ſit Δ:) quibus reſpondeant totidem δ κ trilineum K κ δ complentes. Eſt autem a ($=$ t κ $=$ A K) $= \sqrt{:K^2 + \sqrt[s]{pLi}:} - K$; adeoque $a + K = \sqrt{:K^2 + \sqrt[s]{pLi}}$: Et $a^2 + 2aK + K^2 = K^2 + \sqrt[s]{pLi}$; & $a^2 + 2aK = \sqrt[s]{pLi}$; Cujus æquationis utraque pars multiplicata ſecundum exigentiam poteſtatis s, dat $S{:}a^2 + 2aK{:} = pLi$: adeoque $\frac{S{:}a^2 + 2aK}{Li} = p =$ A t $=$ δ κ, quæ omnes complent K κ δ trilineum: quod itaque (quantacunque ſit poteſtas S numero integro deſignanda) quadrari poterit. Ergo *&c.*

Exempli gratia. Si $S = 2$ (quadratum deſignans) adeoque $n = 4$, $i = 3$, & $K = \tfrac{4}{5}L$: erit $\frac{S{:}a^2 + 2aK{:}}{Li} = \frac{a^4 + 4a^3K + 4a^2K^2}{L^3}$: Adeoque Trilineum ad circumſcriptum Parallelogrammum; ut $\frac{1\Delta^4}{5L^3} + \frac{4\Delta^3K}{4L^3} + \frac{4\Delta^2K^2}{3L^3}$, ad A T $= \sqrt[5]{\mathcal{D}L^4}$; ſive, ut $\tfrac{1}{5}\Delta^4 + \Delta^3K + \tfrac{4}{3}\Delta^2K^2$, ad $L^3\sqrt[5]{\mathcal{D}L^4}$.

Si $S = 3$, adeoque $n = 6$, & $i = 5$, & $K = \tfrac{6}{7}L$: Erit $S{:}a^2 + 2aK{:} = a^6 + 6a^5K + 12a^4K^2 + 8a^3K^3$: Adeoque Trilineum ad circumſcriptum Parallelogrammum ut $\tfrac{1}{7}\Delta^6 + \Delta^5K + \tfrac{12}{5}\mathcal{D}^4K^2 + 2\Delta^3K^3$, ad $L^5\sqrt[7]{\mathcal{D}L^6}$. Et in reliquis ſimiliter.

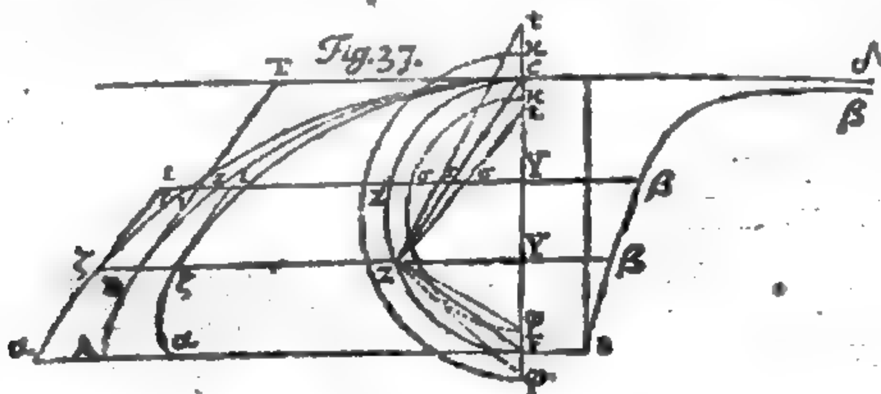
Sin $n = 2$, adeoque tum S, tum i, $= 1$, poteſtatem primam deſignans, multiplicatione

plicatione opus non erit; (cum ipsa quantitas exposita, ejusque potestas prima tantundem sunt:) sunt itaque omnes p (trilineum complentes,) omnibus a^2+2aK sigillatim proportionales, hoc est, ut quadrata ordinatim-applicatarum in hyperbola; sive, ut ipsæ rectæ (diametro parallelæ) in complemento trunci parabolici, (quod nempe cum ipso trunco complet circumscriptum parallelogrammum,) quæ quidem rectæ, quadratis ordinatim-applicatarum in hyberbola sunt proportionales.

Quoties vero n est numerus impar; adeoque s numero integro non assignabilis: Pro $\frac{S:a^2+2aK}{Li}:=p$, sistendum erit in $\frac{N:a^2+2aK}{Lu}=p^2$. Quo casu, licet K κ δ quadraturæ capax non sit, adeoque nec A O ἰσωδεῖσα: Est tamen Conoeides, istius conversione circa Kδ, magnitudinis notæ; adeoque & complanari poterit superficies curva conoeidis quæ recta A O circa A D describitur. Sed non & exinde, propterea exhibetur etiam semisuperficiei Conoeidicæ momentum respectu Axis. Quoties vero n est numerus par; poterunt ea omnia exhiberi. Atque de his hactenus.

Denique, ut totum hoc de paraboloeidibus negotium simul & semel absolvam. Sit n numerus quilibet, $m=n+x$, $i=n-x$, sitque $z=2x$, & $u=2i$: designet autem ipsius n ad m respectus, quota potestas diametri quotæ ordinatim applicatæ potestati proportionalis sit. Habebitur $\frac{N:a^2+2aK}{Lu}:=p^2$. Adeoque aggregatum omnium pz exhiberi poterit; ut & omnium potestatum ipsius p, quæ denominantur à numeri z multiplici. Si vero insuper n & z numeri, communem aliquem divisorem admittant, puta f; sitque $f)N(S$, & $f)z(e$. Exhibebitur etiam omnium p^e aggregatum, ut & potestatum ipsius p quæ à numeri e multiplo denominantur. Atque hinc dijudicandum erit, quatenus vel ipsa A O curva, vel conoeidis superficies ab hac descripta, aut hujus semisuperficiei momentum respectu axis, aliave hujusmodi, exhiberi possint vel non possint. Atque de Paraboloeidibus hactenus.

Tandem, Coronidis loco, ipsam Cycloidis curvam ad examen revocabimus. Notum est Cycloidis tangentes Z T, subtensis Circuli Genitoris z C, parallelas *Curva Cycloidis.*



esse, & æquales; Adeoque & earum particulas Z I, ipsis z s. Quæ quidem tangentium particulæ (in partibus exiguis) ipsis Z Z Cycloidis particulis (ob rationes supra insinuatas) coincidere censendæ sunt. Divisa autem C F in partes æquales quotlibet in punctis Y, quæ dicantur $A=YY$; unde fiant C Y arithmetice-proportionales, quæ dicantur d, totaque $CF=D$: Erunt ubique $zC=\sqrt{dD}$. Item, ut $CY=d$, ad $zC=\sqrt{dD}$; sic Y Y vel A, ad $zs=ZI=\frac{A\sqrt{dD}}{d}=A\sqrt{\frac{D}{d}}$.

Adeoque, omnes A, ad omnes $A\sqrt{\frac{D}{d}}$ vel $\frac{A\sqrt{D}}{\sqrt{d}}$; hoc est, C F recta, ad curvam C Z A; ut series Æqualium, ad seriem Reciprocam subsecundanorum. Hoc est (per prop. 87. & seqq. Arith. Infin.) ut C F B rectangulum, ad congruam figuram interminabilem C F B β δ C: (& partes partibus respective proportionales.) Hoc est (per prop. 102. Arith. Infin.) ut 2 ad 1. Et propterea C Z A semicycloidis curva, diametri genitoris circuli C F, dupla.

(Habentur autem ipsæ Y β, si intelligantur tum semiparabola (cujus vertex C, axis C F, & basis axi æqualis, adeoque & lateri recto,) tum huic circumscriptum

 quadratum;

quadratum; & fiat, ut rectæ in parabola, ad rectas in quadrato; (hoc est, ut $\sqrt{dD}$, ad D,) sic FB, vel A, ad quartam; erit ea $Y\beta = \frac{AD}{\sqrt{dD}} = A\sqrt{\frac{D}{d}}$. Vel etiam, si intelligatur eadem parabola inverse posita, (verticem habens F, axem, basin, & latus rectum, $= D$,) & sumatur ut ordinatim-applicata in semicirculo, ad ordinatim-applicatam in parabola; hoc est ut $\sqrt{: dD - d^2}$: ad $\sqrt{: D - d}$, in $\sqrt{D} = \sqrt{: D^2 - dD}$: sic FB, vel A, ad $Y\beta$ vel $A\sqrt{\frac{D^2 - dD}{dD - d^2}} = A\sqrt{\frac{D}{d}}$. Utrovis modo eadem prodibit $Y\beta$ recta.

Porro; Ductis tum ipsis A, tum $\frac{A\sqrt{D}}{\sqrt{d}}$ in $d = CY$, (distantiam à vertice,) habetur ratio momentorum respectu rectæ CT tangentis in vertice; nempe ut omnes dA, ad totidem $A\sqrt{dD}$; series primanorum, ad seriem subsecundanorum; hoc est (per prop. 64. Arith. Infin.) ut $\frac{1}{2}$, ad $\frac{2}{3}$; vel 3 ad 4. Quæ eadem est & ratio Circuli radio CF descripti, ad superficiem curva CZA circa CT descriptam.

Deinde; propter linearum rectæ & curvæ magnitudines, ut 1 ad 2; & momenta ut 3 ad 4; Erit, propter $\frac{3}{1}) \frac{4}{2}$ ($\frac{2}{3}$, distantia centrorum gravitatis à CT, ut 3 ad 2; adeoque curvæ centrum gravitatis distat $\frac{2}{3}$ radii, hoc est $\frac{1}{3}$ diametri, à CT; adeoque $\frac{1}{3}$ radii, vel $\frac{1}{6}$ diametri ab FA.

Et consequenter; (propter centrorum distantias ut 3 ad 4, & magnitudines linearum ut 1 ad 2;) circulus radio FC descriptus, ad superficiem curva CZA circa AF descriptam, ut 3 ad 8.

Quod ipsum similiter colligitur, ductis tum A, tum $A\sqrt{\frac{D}{d}}$; in $D - d$ distantiam ab FA. Erunt utique momenta, ut $AD - dA$, ad $\frac{A\sqrt{D}}{\sqrt{d}}$ in $D - d$, vel $\frac{AD\sqrt{D} - Ad\sqrt{D}}{\sqrt{d}}$ vel $\frac{AD\sqrt{D}}{\sqrt{d}} - A\sqrt{dD}$: Adeoque, ut $1 - \frac{1}{2}$, ad $2 - \frac{2}{3}$; Hoc est, ut 3 ad 8.

Similiter de centris gravitatum semisuperficierum tum circa CT, tum circa FA, constabit. Ductis nempe superficiebus, tum rectis YY, tum curvis ZZ, descriptis, in distantias suas, sive à CT, sive ab AF; habetur ratio momenti semisuperficiei curvæ, ad momentum semicirculi. Reliquaque facilius quam ut iis opus sit insistere.

Nempe, ductis tum dA, tum $A\sqrt{dD}$, in d; reperitur momentum (respectu rectæ CT) Semicirculi, ad momentum semisuperficiei curvæ circa eandem CT; ut series d^2A, ad seriem $Ad\sqrt{dD}$; hoc est, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{2}{5}$, sive ut 5 ad 6.

Item, ductis tum $AD - dA$, tum $\frac{AD\sqrt{D}}{\sqrt{d}} - A\sqrt{dD}$, in $D - d$. habetur ratio momenti (respectu rectæ AF) semicirculi, ad momentum semisuperficiei curvæ, circa eandem AF; ut series $AD^2 - 2dAD + d^2A$, ad seriem $\frac{AD^2\sqrt{D}}{\sqrt{d}} - 2AD\sqrt{dD} + Ad\sqrt{dD}$. Hoc est, ut $1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}$, ad $2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}$. Hoc est, ut 5 ad 16.

Habitis autem, tum magnitudinum, tum momentorum rationibus, & unius centro gravitatis; distantia centri gravitatis alterius non latebit.

Sed de partibus similiter instituetur judicium. Diviso utique quadrilineo interminabili in ratione data (quod per *Arith. Infin.* facile fiet,) dividitur & CZA curva in eadem ratione. Nempe, sumpta CY ad CF, in ratione p^2 : ad P^2. erit tum CY$\beta\delta$ ad CFB$\beta\delta$, tum CZ ad CZA, in ratione p ad P. (Et consequenter, sumptis CY, CY, &c. quotlibet, in duplicata ratione Arithmetice proportionalium; erunt correspondentes CZ, CZ, &c. arithmetice proportionales, ipsaque CZA, in æquales partes in punctis Z divisa.) Distat autem à TCδ recta verticis,

ticis, sive CY βδ figuræ, sive CZ curvæ, centrum gravitatis, $\frac{1}{3}$ (parte tertia) rectæ CY : (per regulam generalem quam *Epistolæ* 16 *Commercii Epistolici* subjecimus.) Unde reliqua facile investigantur.

Vides itaque quam facile fluant horum Problematum solutiones.

Si vero ad Cycloeides Protractas aut Contractas libeat procedere; etiam sic res non infeliciter succedet. Esto enim, eodem CzF circulo genitore, semicyclois, sive contracta, sive protracta, $\alpha\zeta$C ; cujus basis αF æquet semiperipheriam $\varphi\kappa$, (majorem in protracta, minorem in contracta ;) ducantur Fz, φz, rectæ ; eisque ad rectos angulos zC, zt. His autem parallelas esse ZI, $\zeta\iota$, Cycloidum tangentes ; ex Torricellio, Schotenio, aliisque notum est. Adeoque (protracta proxima Yz per puncta s, σ, I, ι,) erunt ZI, $\zeta\iota$, ipsis zs, zσ, æquales.

Cycloides secundariæ.

Divisa jam, ut prius, CF in partes quotlibet æquales in punctis Y ; positisque $CF = \mathcal{D}$, $FY = \mathcal{D} - d = a$; erit $Yz = \sqrt{:a\mathcal{D} - a^2:}$ quæ dicatur s : & propter FY, ad Yz, ut Yz ad YC, erit $YC = \frac{s^2}{a}$; adeoque $zC = \sqrt{:\frac{s^4}{a^2} + s^2:} = \sqrt{\frac{s^4 + s^2a^2}{a^2}} = \frac{s}{a}\sqrt{:s^2 + a^2}$. Item, ut YC, ad zC ; sic $YY = A$, ad $zs = \frac{A\sqrt{:s^2 + a^2}}{s}$.

Ponamus deinde, $\varphi Y = \alpha$. Adeoque, propter φzt angulum rectum, ut $\varphi Y = \alpha$, ad $Yz = s$; sic Yz, ad $Yt = \frac{s^2}{\alpha}$: & $zt = \sqrt{:\frac{s^4}{\alpha^2} + s^2:} = \frac{s}{\alpha}\sqrt{:s^2 + \alpha^2}$. Item, ut Yt ad zt, sic $YY = A$, ad $z\sigma = \frac{A\sqrt{:s^2 + \alpha^2}}{s}$.

Et consequenter, ut $\sqrt{:s^2 + a^2}$: ad $\sqrt{:s^2 + \alpha^2}$ (hoc est, ut Fz ad φz;) singulæ zs vel ZI, ad singulas zσ vel $\zeta\iota$. Et, si sic fiat ubique, Yβ ad aliam ; erit, ut CFB rectangulum ad figuram sic constructam, sic CF ad curvam semicycloidis secundariæ, (sive protractæ sive contractæ ;) & partes partibus respective proportionales.

Fatendum interim est, figuram, sic constructam, non magis quadraturæ capacem esse, quam est ellipsis curva capax [illegible].

Sin libeat paulo adhuc explicatius rem efferre ; ponamus $F\varphi = B$, adeoque $\alpha = a \pm B$, & $\alpha^2 = a^2 \pm 2aB + B^2$; Ideoque (propter $s = \sqrt{:a\mathcal{D} - a^2:}$) erit $s^2 + \alpha^2 = a\mathcal{D} \pm 2aB + B^2$; & $\frac{A\sqrt{:s^2 + \alpha^2}}{s} = \sqrt{\frac{a\mathcal{D} \pm 2aB + B^2}{a\mathcal{D} - a^2}}$. Sunt autem omnes $a\mathcal{D} \pm 2aB + B^2$ quadrata ordinatim applicatarum in parabolæ trunco cujus altitudo $\mathcal{D} = FC$: latus rectum parabolæ, $\mathcal{D} \pm 2B = \varphi\kappa$; ordinatim applicata infima & minima, B ; adeoque altitudo abscissa $\frac{B^2}{\mathcal{D} \pm 2B}$. Si igitur fiat ubique, ut $Yz = \sqrt{:a\mathcal{D} - a^2:}$ ordinatim-applicata in semicirculo, ad $\sqrt{:a\mathcal{D} \pm 2aB + B^2:}$ ordinatim-applicatam in hoc trunco parabolæ ; sic A vel FB, ad quartam, quæ itaque est $A\sqrt{\frac{a\mathcal{D} \pm 2aB + B^2}{a\mathcal{D} - a^2}}$: Quæ ex hisce quartis conflatur figura, est ea quam diximus ad CFB parallelogrammum sic esse, ut est curva semicycloidis protractæ contractæve ad CF circuli genitoris diametrum ; & partes partibus respective proportionales.

Hoc igitur interest inter curvam Cycloidis primariæ, & secundariæ ; quod faciendum est, Ut ordinatim-applicatæ in semicirculo ; ad ordinatim-applicatas, illic in parabola ; hic, in parabolæ trunco : sic data recta ; ad quartas.

Si vero libeat curvæ cycloidis secundariæ particulas comparare, non ad axis CF partes æquales, sed ad æquales partes curvæ cycloidis primariæ : dividenda erit CZA curva in partes quotlibet æquales in punctis Z ; adeoque CF inæqualiter in punctis Y ; puta (sumptis p arithmetice-proportionalibus, quarum maxima $P = \mathcal{D}$,) $CY = \frac{p^2}{\mathcal{D}}$; Et YY, ut 1, 3, 5, &c. arithmetice proportionales, quæ omnes æquent ipsam CF, dicantur autem y. Positis igitur ubique $\mathcal{D} - \frac{p^2}{\mathcal{D}}$, prp

$a = \mathcal{D}$

$a = \mathcal{D} - d =$ FY; & y, pro A; (& congrua reductione facta:) Pro $A\sqrt{\frac{a\mathcal{D} \pm 2aB + B^2}{a\mathcal{D} - a^2}}$, prodibit $\frac{y}{p}B\sqrt{:\frac{\mathcal{D}^2}{\mathcal{D}^2 - p^2} + \frac{\mathcal{D}^2 \pm 2B\mathcal{D}}{B^2}}$: (ejusdem plane formæ cum $A\sqrt{:\frac{R^2}{R^2 - a^2} + \frac{H^2}{R^2}}$: qua quadrantis Ellipseos particulas, earumve subtensas, æqualibus semiaxis longioris partibus respondentes, designandas supra docuimus:) Unde liquet, curvæ semicycloidis secundariæ particulas, primariæ partibus æqualibus respondentes, esse ut particulas curvæ quadrantis Ellipseos respondentes longiori semiaxis partibus æqualibus; Ellipseos, inquam, cujus semiaxis minor, est $\mathcal{D} =$ CF; & $\mathcal{D}\sqrt{\frac{\mathcal{D}^2 \pm 2B\mathcal{D}^2}{B^2}}$ distantia foci à centro; (cujus quadratum quadrato semiaxis minoris additum, dat quadratum semiaxis majoris;) adeoque $\frac{\mathcal{D} \pm B}{B}\mathcal{D}$ semiaxis major; (nempe, si fiat, ut F$\phi = B$, ad ϕC $= \mathcal{D} \pm B$; sic FC $= \mathcal{D}$, ad quartam; erit hæc quarta, semiaxis major:) Quod ex supra traditis patet.

Hujus autem quadrantis Ellipseos particulis, quibus particulas semicycloidis secundariæ diximus proportionales, non tamen æquales dicimus, (adeoque nec totam toti;) sunt utique ad illas, ut $\frac{y}{p}B$, ad A (partem aliquotam ipsius $\mathcal{D} =$ FC:) ut ex jam traditis patet: Hoc est, ut $\frac{2A}{\mathcal{D}}B$ ad A; (est enim y ad p, ut $2A$ ad $\mathcal{D}$, quod mox ostendetur:) sive ut $2B$ ad $\mathcal{D}$. Adeoque si fiat quadrans ellipseos cujus conjugati axes, ad axes conjugatos ellipseos modo dictæ, sint ut $2B$ ad $\mathcal{D}$: (hoc est cujus semiaxis minor sit $2B = 2$Fϕ; major $2\mathcal{D} \pm 2B =$ FC $+ \phi\kappa$:) Erit quadrans ille, curvæ semicycloidis secundariæ, æqualis; & partes partibus respective. Quæ Wrennii nostri traditis comparata, invenio convenire.

Quod autem y ad p, sit ut $2A$ ad $\mathcal{D}$; sic, si opus est, probabitur. Omnes p (tot numero quot in $\mathcal{D}$ supponuntur partes æquales A) sunt series arithmetice proportionalium quarum maxima $\mathcal{D}$; cujus semissis (propter terminum minimum infinite exiguum) ductus in numerum terminorum $\frac{\mathcal{D}}{A}$, exhibet $\frac{\mathcal{D}^2}{2A}$, omnium summam. Sunt autem omnes y arithmetice proportionales, & quidem totidem numero, quarum item terminus primus est infinite exiguus; omnium vero summa est ipsa $\mathcal{D}$. Adeoque (cum utraque sit progressio arithmetica, ab infinite exiguis inchoata) erunt tum omnes y ad omnes p, tum ad singulas singulæ, ut $\mathcal{D}$ ad $\frac{\mathcal{D}}{2A}$, hoc est, ut $2A$ ad $\mathcal{D}$. Quod dictum erat.

Atque hæc sunt, Vir Nobilissime, methodi nostræ, curvas & rectas comparandi, (adeoque tum Lineas *Rectificandi*, tum *Complanandi* Superficies *Curvas*,) aliquot specimina; cujus (ut vides) examini, tum tuorum quædam, tum & aliorum nupera inventa subjeci. Putaram alia quædam addidisse; sed ne in volumen exeat Epistola, prospiciendum est.

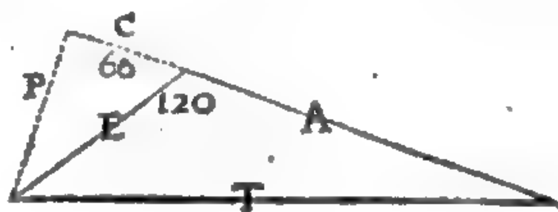
Methodum, quam memoras, *de Maximis & minimis*, ejusque ad Tangentes utilitatem; vide an non & apud nos, utut nominis ignaros, istius passim existent specimina; tum *Con. Sect. prop.* 23. 27. 28. 30. 36. 39. 46. 49. *&c.* tum de *Angulo contactus* aliquoties; sic *Operis Arithmetici* pag. 121. 122. tum alibi sæpe. Quod autem tu de hac re commentus es, si placeat proferre, non dubito quin Mathematicis gratum sit futurum, ut tua solent esse omnia.

Item *Elementa Conica seorsum a Cono*, nos etiam tradidimus, uti nosti, in meo *De Conicis Sectionibus* tractatu, parte saltem posteriori. Sed non eo minus gratum erit, *D. de Witt*, quod memoras proditurum opus.

Horologium tuum ingeniosissimum; & felicissimum *De Saturni facie* Systema, (de quibus antehac ad te scripsimus;) intacta jam prætereo.

Quod habes de Theoremate meo de Pyramidis seu Coni frusto, quod expositum

tum est Commercii Epistolici Ep. 23. nempe *proprietatem Trianguli amblygonii grad. 120. brevius posse demonstrari*; omnino verum est, neque id ignorabam. Sed illam ex variis quæ præ manibus erant demonstrationem selegi, quæ à trisectione anguli dependet (tanquam elegantem utut non brevissimam) depromptam ex tractatu quem ante decem annos, de Angulorum Sectione, exercitationis gratia conscripseram; ubi consimiles aliorum triangulorum tum Amblygoniorum tum Oxygoniorum proprietates simili plane methodo demonstro. Sin breviorem malis, hanc habeas.



Sit C continuatio lateris utriusvis, puta A, usque ad perpendiculum P. Erit (propter externum angulum grad. 60.) $C = \frac{1}{2}E$. Adeoque $Pq = Eq - \frac{1}{4}Eq = \frac{3}{4}Eq$. Et $Q: A + C := Aq + AE + \frac{1}{4}Eq$. Ergo $Tq = Aq + AE + Eq$. Quod erat demonstrandum.

Superest, ut tædio, quo te hactenus detinui, tandem liberem. Valeas interim, oro, nobisque faveas, & amare pergas.

F I N I S.

MECHANICA:
SIVE,
De MOTU,
TRACTATUS GEOMETRICUS.

PARS PRIMA.

IN QUA,

De Motu Generalia.
De Gravium Descensu, & Motuum Declivitate.
De Libra.

Anno 1669. typis edita.

HONORATISSIMO DOMINO D. *GULIELMO BROUNCKER*,

EQUITI AURATO;

Baroni BROUNCKER de *Newcastle*, Vicecomiti BROUNCKER de *Lions*; Serenissimæ REGIÆ Majestatis, pro Re NAUTICA Commissario; Serenissimæ REGINÆ Cancellario: *Regalis Societatis* LONDINI, *pro Scientia Naturali promovenda*, Præsidi Dignissimo.

EN habes tandem (Honoratissime Domine,) eorum partem, quæ, Tuis Regiæque Societatis (cui Tu jam à pluribus annis summo cum honore Præsides) mandatis obsequens, anno ab hinc secundo, prelo commiseram. Speraram equidem Opus integrum breviore tempore absolvendum fore: Sed, partim ob eam, quam causantur Typothetæ, rei difficultatem, & insolentiorem typos ponendi modum; partim ob meam (Oxonio agentis) perpetuam fere à prelo absentiam; partim quod aliis subinde occurrentibus negotiis impediti Typothetæ non huic potuerint semper intenti esse; factum est, ut in longius protractum sit negotium quam speraverim. Hinc est, quod, quem totum una vice proditurum Tractatum destinaveram, jam particulatim prodeat. Cujus jam habes Partem Primam, *quæ totius Fundamenta continet; &, speciatim, De* Libra *doctrinam. Quam propediem sequetur* Secunda, *(quæ De* Centro Gravitatis *erit; ejusque* Calculo, *in figuris quam plurimis curvilineis, atque ex his oriundis solidis, & superficiebus curvis, satis intricato:) Utpote cujus partem maximam jam absolverunt operæ. Et, post illam,* Tertia*; quamprimum per Preli difficultates licebit. Hoc autem, quicquid est, Tuo potissimum nomini dicandum duxi; non tantum ob eam quam Tibi debemus observantiam, (quæ tamen maxima est,) eamque quam à pluribus annis expertus sum tuam in me propensam*

Amicitiam: Sed & ob eam, quam cum summa Nobilitate conjunctam habes, summam hujusmodi rerum Intelligentiam. Quanquam enim gravissimis negotiis alias occupatus; tum quæ Rem Nauticam *spectant, quibus Serenissimo* Regi *inservis; tum quæ Serenissimam* Reginam, *cujus tu curas negotia; tum quæ, cui Tu Præsides,* Societatem Regiam*: Ea tamen in rebus Mathematicis perspicacia, summoque ingenii acumine fretus es, quasi tu huic tantum negotio intentus esses, & nulli secundus. Verum quidem est, tum ea quæ hic habes, tum eorum quæ mox insecutura sunt partem maximam, ante plures annos scripta fuisse, (quod norunt saltem ii in quorum privatos usus exscripta fuerunt exemplaria; & quibus jam urgentibus prodeunt:) Sed eo audacius in lucem jam emitto: quod Tibi antehac perlustrata non displicuerint, & Te jubente prodeant. Tu porro perge, quod facis, rem literariam & ornare & promovere: Nec averseris interim,*

Tui Observantissimum

Novemb. 10. 1669.

Joh. Wallis.

Mechanica:

MECHANICA:

SIVE,

De MOTU

Tractatus Geometricus.

CAP. I.

DE MOTU GENERALIA.

DEFINITIONES.

I. MECHANICEN, *appello*, *Geometriam de Motu.*

M*Echanicæ artes*, per contemptum dici solent illiberales illæ Cerdonum artes, & his similium, quas rude vulgus exercet: ad quas Labore magis quam Ingenio videtur opus. Et distingui solent, non a Geometria tantum, sed ab aliis etiam *Ingenuis*, (quæ mente magis quam manu exerceri solent; atque acumen animi vel postulant vel faciunt;) *Liberalibus* dictis; ut quæ *Liberos* deceant; ut, *Servos*, Serviles illæ & illiberales.

In re Geometrica; *Mechanice* quid factum, non Geometrice, dici solet; quando rudi χειρουργίᾳ, vel materialis instrumenti applicatione, aliisve mediis non absimilibus, aliquid metimur: non, ἀποδεικτικῶς. Puta; Si quis, admoto Filo, ad Diametrum primo, deinde ad Perimetrum Circuli, quam hæc ad illam rationem habeat, investigatum iret; eamque, experimento facto, tripla paulo majorem inveniret, vel triplam sesquiseptimam proxime: *Mechanice* factum diceretur. Secus autem; quum *Archimedes*, modo Geometrico, & Demonstrationibus ab ipsa Circuli natura petitis, eandem in libro περὶ τῆς κύκλου μετρήσεως inquisivit.

Nos neutro dictorum sensu *Mechanicen* dicimus. Sed eam Geometriæ partem intelligimus, quæ *Motum* tractat: atque Geometricis rationibus, & ἀποδεικτικῶς, inquirit, Qua vi quisque motus peragatur.

Nomen ἀπὸ τῆς Μηχανῆς sortitur: quia *Machinis* construendis maxime inserviat. An autem *Mechanica*, *Mechanicæ*, dicatur, (numero singulari,) an (pluraliter) *Mechanica*, *Mechanicorum*; perinde est. Id est, τὰ περὶ τῶν Μηχανῶν, an Ἡ περὶ τῶν Μηχανῶν, (scil. τέχνη, vel ἐπιστήμη, vel διδασκαλία.) Nam ad eandem formam dicuntur, *Grammatica*, *Logica*, *Physica*, &c. ut intelligatur, vel ἡ γραμματική, λογική, φυσική vel τὰ γραμματικά, λογικά, φυσικά. Hoc est, Ἡ περὶ τῶν γραμμάτων, περὶ τοῦ λόγου, περὶ τῆς φύσεως, (τέχνη, ἐπιστήμη, διδασκαλία,) aut τὰ περὶ τῶν, &c. Qua de re videatur, si libet, *H. Stephanus*, *De abusu Græcæ Linguæ.*

Sed & (ab ἵστημι, *pendo*, *pondero*,) etiam *Statica*, dici solet, vel Mechanice tota, vel ea saltem pars quæ de *Ponderibus* agit; quæ, quanta sint, ad *Libram* (σταθμόν) solent examinari.

II. *Per* Motum *intelligimus*, *Motum localem.*

QUanquam enim de pluribus Motuum generibus agant Logici, aliique; puta Generatione, Augmentatione, Alteratione, &c. (quæ omnes an ad Motum Localem reduci possint, non libet hic disquirere:) Nos *Motum* hic in famosiori significatu intelligimus de Motu Locali; quæ φορά, *Latio*, dici solet.

Circa Motum autem, multa consideranda veniunt: ut Vis, Tempus, Resistentia, Longitudo, Momentum, Impedimentum, Celeritas, Gravitas, Pondus, &c.

III. Momen-

III. Momentum, *appello, id quod motui efficiendo conducit.*

IV. Impedimentum, *id quod motui obstat, vel eum impedit.*

MOmentum, eadem ratione à verbo *Moveo* descendit, atque *Impedimentum* ab *Impedio*: Eadem scilicet Analogia, qua & alia Verbalia, in *men* & *mentum* finita, à suis verbis. Nam, ut à *Luceo*, *Lumen*: à *Fluo*, *flui*; *Flumen*: à *Nuo*, *Numen*: à *Lego*, *legumen*: à *Fulgeo*, *fulsi*; *Fulmen*: à *Fulcio*, *fulcivi*, *fulcitum*, *Fulcimen*, & *fulcimentum*: à *Doceo*, *docui*; *Documentum*: à *Moneo*, *monui*, *Monumentum*: & à *Monitum*, *Monimentum*: à *Juvo*, *juvi*, *jutum*; *Jumentum*: ab *Adjuvo*, *adjuvi*, *adjutum*; *Adjumentum*: à *Juvatum*, *Juvamen*; à *Stando*, *Stamen*: à *Sterno*, *Stravi*, *Stratum*; *Stramen*, *Stramentum*: à *Flo*, *flavi*, *flatum*; *Flamen*: à *Fari*, *fatum*; *Famen*: à *Frango*, *fregi*, *fractum*; *Fragmen* & *Fragmentum*: à *Rego*, *rexi*, *rectum*; *Regimen*: ab *Ago*, *egi*, *actum*; *Agmen*: ab *Arceo*, *arcui*, *arctum*; *Armentum*: à *Rado*, *rasi*, *rasum*; *Ramentum*: à *Caedo*, *cecidi*, *caesum*; *Caementum*: à *Torqueo*, *torsi*, *tortum*; *Tormen*, *Tormentum*: à *Nosco*, *novi*, *notum*; *Nomen*, & *Nobile*: Sic, à *Moveo*, *movi*, *motum*; *Momen*, *Momentum*, & *Mobile*. Sed & *Moles*, *molior*, *molimen*: nisi quis hæc à μοχλεύω, deducta malit.

Ad *Momentum* refero, *Vim motricem*, & *Tempus*. Quæ, quo majora sunt, eo magis efficitur motus.

Ad *Impedimentum*, refero, *Resistentiam*, & *Distantiam*. Quæ, quo majora sunt, eo magis motus *Impeditur*.

V. Vim motricem, *vel etiam* Vim *simpliciter*, *appello Potentiam efficiendi motum.*

VI. *Per* Tempus, *intelligo*, *Temporis spatium id, in quo motus transigitur.*

VII. Resistentiam, *sive* Vim resistendi, *Potentiam Motui contrariam*; *sive quæ motui resistit.*

VIII. *Per* Distantiam *sive* Longitudinem motus, *intelligo*, *Longitudinis spatium illud quod motu transigitur.*

IX. Celeritas, *est affectio motus ex comparatione Longitudinis & Temporis resultans*: *Utpote quæ*, *Quo tempore quanta Longitudo transigitur*, *determinat.*

X. Æqualis Celeritas, *est*, *quæ Æqualem Longitudinem*, *Æquali tempore*, *transigit.*

XI. Major Celeritas, *est*, *quæ Majorem Longitudinem Æquali Tempore transigit*: *vel*, *in Minori Tempore*, *Longitudinem Æqualem. Et quidem*, in ea ratione Major, *qua*, *vel illa Longitudo*, *Major est*; *vel Tempus*, *Minus.* Minor; *quæ contra.*

XII. Gravitas, *est vis motrix*, *deorsum*; *sive*, *ad Centrum Terræ.*

QUodnam sit, in consideratione Physica, Gravitatis principium; non hic inquirimus. Neque etiam, An Qualitas dici debeat, aut, Corporis Affectio; aut, quo alio nomine censeri par sit. Sive enim ab innata qualitate in ipso gravi corpore; sive à communi circumstantium vergentia ad centrum; sive ab electrica vel magnetica Terræ facultate, quæ gravia ad se alliciat; & effluviis suis, tanquam catenulis, attrahat; sive alias undecunque proveniat; (de quo non est ut hic moveamus litem:) sufficit, ut Gravitatis nomine, eam intelligamus, quam sensu deprehendimus, Vim deorsum movendi, tum ipsum Corpus grave, tum quæ obstant minus efficacia impedimenta.

Et quidem, quanquam de Naturali Gravitate (prout concipi solet) seu ipsa corporis affectione, qua, sua sponte (ut solet dici) deorsum tendit, directe intelligatur. Tamen, quoniam nihil incommodi inde proventurum videtur in sequente propositionum serie, etiamsi de externa vi continua deorsum premente recta ad Centrum Terræ velit quis eas interpretari; non eram folicitus vel hanc ex Gravitatis definitione excludere. Quæ enim de Gravitate affirmantur, de quacunque Vi

Vi continua, recta ad Terræ Centrum movente, perinde vera sunt; sive sit ea vis innata, sive adventitia.

Quæ autem de Gravitate dicta sunt, respectu Centri Terræ; perinde de quavis alia motrice Vi continua poterunt intelligi, respectu sui quo tendit termini. Adeoque si vox ea, particulari significatui hactenus accommodata, quatenus Terræ Centrum respicit, latiori sensu intelligatur, de quavis vi motrice continua, recta ad suum terminum movente: non minus vera erunt quæ traduntur; sed & forsan magis accurate dicta; dum generalia generaliter efferuntur. Sed quoniam de Gravitate solent ea speciatim tradi, quæ continuæ Vi Motrici universaliter conveniant: Ego etiam communi errori eatenus me accommodavi, ut interim moneam, generaliter esse vera, quæ speciatim efferuntur. Ut mox dicetur fusius.

XIII. *Per* Pondus *intelligo gravitatis mensuram.*

PEndo seu *Pendeo*, & *Pondus*, parem habent inter se cognationem atque apud nos *Weigh* & *Weight*; (quæ à Latinorum *Veho* videntur descendisse: sicut etiam *Wayn* & *Wagon*, quæ Latinis *Vehes* & *Vehiculum* dicuntur.)

An vero *Pondus* à *Pendo*, an hoc ab illo dicatur, non magni interest; an quod ego malim, utrumque.

Est utique Verborum *Pendo* & *Pendeo* duplex significatus. Prior est *To Hang*: A quo significatu *Pondus* dictum puto; (sicut à *Tego*, *Toga*; à πέμπω, *Pompa*; à ῥέμβομαι, *Rhombus*, &c.) idemque significare quod Græcis Ὁλκὴ, & proprie de *Gravi pendente* dictum: Adeoque, ab *Onere* distingui, quod Græcis Ὄγκος, (unde & *Onus* descendisse videtur;) ut *Pondus*, sit quod *Appendet*; *Onus*, quod *Incumbit*, Grave: Βάρος, utrumque. Sed &, ab ἄγω, Ἄχθος etiam adhuc latius videtur; *quod quocunque Adigit*, vel impellit; cum illa tria Gravium nomina (ὁλκὴ, ὄγκος, βάρος,) non nisi *deorsum tendentia* designent: utut laxiori sensu promiscue non raro usurpentur omnia.

Posterior Verborum significatus, qui est *To Weigh*, à Pondere ortum traxisse videtur: ut quod sit, *Appensa ad libram Pondera examinare.*

A priori significatu, dicimus, *Appendo*, *Suspendo*, *Dependeo*, *Pendulus*, &c. A posteriori, *Perpendo*, *Expendo*, *Impendo*, *Rependo*, *Pensum*, *Pensio*, &c. (ex more veterum, qui *Pendere* solebant Nummos, quos nos *Numeramus*.) Sed & *Perpendo*, *Expendo*, &c. sensu Metaphorico, ad Animum transferuntur; à posteriori significatu; quando ut ad Libram Pondera, sic Res Animo pensitamus: sicut à priori, dicitur, *Animi pendere*, *suspensus animus*, *spe pendulus*, &c.

Differunt autem *Pendo*, & *Pendeo*, non aliter quam Transitivum ab Intransitivo. Quod in ejusmodi formæ Verbis, usu venit. Ut *Pando*, *Pateo*; *Mando*, *Maneo*; *Tendo*, *Teneo*; (*carceri Mando*, *in carcere Maneo*; *morem Obtendo*, *mos Obtinet*; *Tenet sententia*, *ad me Attinet*, *Pertinet*, &c.). *Vendo*, *Veneo*; *Venundo*, *Venum eo*; *Circundo*, *Circumeo*; reliquaque fere à *Do* & *Eo* composita; ut *Subdo*, *Subeo*; *Prodo*, *Prodeo*; *Reddo*, *Redeo*; *Trado*, *Transeo*; *Edo*, *Exeo*; *Condo*, *Coeo*; *Abdo*, *Abeo*; *Addo*, *Adeo*; *Indo*, *Ineo*; *Obdo*, *Obeo*; *Perdo*, *Pereo*; & siqua sunt similia.

Ego autem, neglecto si quod est inter *Pondus* & *Onus* discrimine, (quo *Libram*, illud; hoc, *Vectem*, magis spectet;) per *Pondus* jam intelligo, illam, in utrovis, Gravitatis mensuram, quam ad Libram solemus examinare.

Pondus sic intellectum, aut Gravitas etiam; prout vel in Movente, vel in Mobili, consideratur; ita vel ad Movendi, vel ad Resistendi vim pertinebit: Adeoque nunc ad Momentum, nunc ad Impedimentum referetur.

Et quidem, cum ex omnibus Virium generibus, non aliud sit quod accuratius ad examen revocari solet, quam Pondus; solemus, ad hujus normam, reliquas tum Vires tum Resistentias æstimare; easque tantas reputare, quanto Ponderi æquipollent.

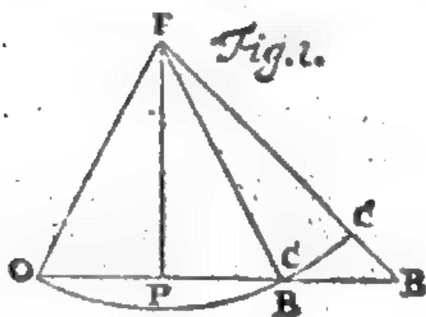
Et quamquam tum Pondus, tum Vis etiam, ex æquo respiciant, vel vim Movendi, vel vim Resistendi: cum tamen, ut plurimum, quod motum itur Pondus sit, seu Grave; Vis autem, quæ efficiendo motui adhibetur, sit non raro Vis Humana, aut Animalium, aut Ventus etiam, aut vis Elastica, aliæve plures, non minus quam Grave Pondus: Ponderis nomine, plerumque, vim Resistentiæ, in sequentibus designabimus; &, Virium nomine, vim Motricem. Ubi secus erit intelligendum; dictorum series satis indicabit.

XIV. Directionem Mobilis, *aut etiam* Motus, *appello, rectam qua tendit Mobile.* (*Motusque mensuram secundum hanc æstimatam*, Motus Longitudinem *appello.*) *Sin curva feratur Mobile,* (*cujus Directio in singulis punctis immutetur;*) *ea est, pro singulis punctis, motus Directio, quæ curvam in illis punctis Recta contingit.*

XV. Directionem Virium, *seu* Moventis, *appello, Rectam qua tendit vis Motrix. Motusque mensuram secundum hanc æstimatam, appello* Motus Altitudinem.

EStque hæc Virium directio in Descensu Gravium, Recta deorsum ad Centrum Terræ, quo Gravia sponte sua tendunt. Quales quidem Rectæ, quamquam in Centro coeant omnes, pro Parallelis tamen haberi solent: Tum quod sensuum judicio tales sint (non enim valent sensus distinguere inter vere parallelas, & quæ tantillum à parallelismo declinant;) Tum etiam quia si intelligatur, verbi gratia, Libræ Jugum adhuc longius à Terra removeri, ad infinitam distantiam; erit ea declinatio quavis assignabili minor.

XVI. Declivitatem, *seu* Gradum Declivitatis, *appello, Respectum illum, qui ex motus Altitudine & Longitudine comparatis,* (*ob variam Directionis Motus ad Directionem Moventis positionem,*) *emergit. Atque* Acclivitatem *similiter; quæ à Declivitate non aliter differt quam quod altera Descensum, Ascensum altera respiciat.*



Puta, FO, declivis; OF, acclivis recta.

XVII. Æqualem Declivitatem, *appello, quæ, æquali peracta Longitudine, æqualem Altitudinem peragit. Atque* Acclivitatem, *similiter.*

XVIII. Majorem Declivitatem, *vel* Acclivitatem, *dico, quæ, æquali peracta Longitudine, majorem Altitudinem peragit; vel, minori Longitudine, Altitudinem æqualem. Et quidem,* ea ratione majorem, *qua vel Altitudo illa major est, vel Longitudo, minor.* Minorem; *quæ contra.*

VErbi gratia. Sit FP, directio moventis, (puta, recta ad Horizontem perpendicularis;) FO, FB, vel FC, directio motus, (puta, obliqua quælibet, per quam descendat Grave.) Si FO, FC, longitudine æquales, sint Æque-altæ: *Æqualiter declives*; dico: sin vero, Longitudine æqualium altera, ut FO, sit Altior; eandem & *Magis declivem* dico. Similiter; si Æque-altæ FO, FB, (quarum altitudo sit ipsi FP, æqualis,) sint & Longitudine æquales; *Æqualiter declives* dico: Sin altera, ut FO, sit brevior; eandem & *Magis declivem* dico. Et utrobique, *eadem ratione magis declivem,* qua vel FO est Altior quam FC, vel Brevior quam FB.

XIX. Obliquitatem *vero, hujusve mensuram, appello, Angulum quem facit cum Perpendiculo,* (*vel Directione Moventis,*) *Directio Motus, seu Linea qua fertur Mobile.*

Puta, OFP.

XX. Inclinationem *vero ad* Horizontem, *appello, obliquitatis complementum, sive quem facit Angulum ad Horizontem, aut ad rectam Directioni moventis perpendicularem.*

Ut FOP.

Decli-

D*Eclivitatem* autem ab *Obliquitate*, & *Inclinatione*, (quamquam ex una reliquæ dependeant,) distinguere necesse duxi; quoniam *Obliquitas* & *Inclinatio* Angulis mensurari solent; Ea vero *Declivitatis* ratio mihi tractanda videbatur, quæ rectarum inter se rationes respiciat. Quippe, quæ inde dependent, non quidem vel Obliquitatis vel Inclinationis Angulo, sed Altitudini rectarum longitudine æqualium proportionalia, vel in reciproca ratione Rectarum Altitudine æqualium, in sequentibus deprehendentur.

Porro; Cum ea quæ de Gravitate diserte dicta sunt in sequentibus, non ita Gravitati sint peculiaria, quin ut plurimum alii cuivis continuæ vi motrici accommodanda veniant; adeoque & universaliter tradi debere videantur, (ut modo dictum est:) Cur illud nominatim de Gravitate protulerim, causa est, quod, cum Gravium motus frequentius considerationi hominum exponi soleat, adeoque vocabula huic accommoda, menti familiarius se offerant, citius animo percipienda duxerim quæ de hoc motu (qui ex multis unus est, sed præ cæteris magis notabilis,) traderentur, atque ad hujus deinde normam intelligerentur reliqui.

Ea vero fient generalia (nec minus interim demonstrata) interposita laxiori hac Gravitatis (cum connexis) definitione.

XXI. *Per* Gravitatem, *laxius acceptam, intellige, Vim quamvis continuam in quamcunque plagam motricem*: *Per* Terræ Centrum, *intellige, Terminum quo tendit vis illa motrix*: *Per* Perpendiculum, *vel* Rectam ad Terræ Centrum, *vel etiam* Rectam Horizonti perpendicularem, *intellige, Lineam Directionis Vis motricis*: *Per* Descensum & Ascensum; *Appropinquationem & Elongationem à Termino Vis Motricis*: *Per* Rectam Horizontalem, *vel* Horizontale Planum; *Rectam, seu Planum, lineæ directionis moventis ad angulos rectos*: *Per Descensum, vel Ascensum* Obliquum; *Lationem secundum Lineam quæ Lineam Directionis moventis oblique secat, ad moventis Terminum Accedendo, vel inde Recedendo. Cateraque similiter accommodanda sunt.*

XXII. Machinas, *appello, Instrumenta motibus examinandis, vel etiam facilitandis, forinsecus adhibita.*

QUalia sunt *Libra*, *Vectis*, *Trochlea*, *Cochlea*, *Axis in Peritrochio*, *Cuneus*, & similia. Quorum Definitiones suis locis sequentur.

Priusquam autem ad Machinas illas separatim considerandas accedamus, quas Mechanicorum scriptores tractare solent: Præmittenda erunt communia quædam, quæ omnes ex æquo spectant. Quæ sint Principiorum loco, & à quibus reliqua dependent, quæ de singulis postea tradenda erunt.

Idque eo magis mihi faciendum incumbere videatur: Quia qui antehac tractandum hoc suscepere negotium, videntur citra Principia constituisse: nec ab imis eruta fundamentis, etiam ea quæ sana sunt, tradidisse: Sed postulasse potius, quæ, utut vera sint, Demonstratione tamen aliqua videntur indigere: Unde, tum, in iis quæ consequuntur, minus acquiescat animus ἀποδείξεως avidus, tum & ea minus valeat, in nova materia, ampliare.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

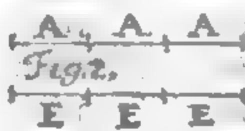
Quæ ad æqualia eandem habent rationem, sunt inter se æqualia. Et contra.

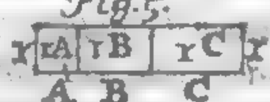
Fig. 2. $A = E.\ 2A = 2E.\ 3A = 3E.\ rA = rE.$

PUta; Si A, E, sint inter se æqualia; erunt & inter se æqualia 2 A, 2 E; item 3 A, 3 E; Et, universaliter, *r* A, *r* E; cujuscunque rationis Index sit *r*. Per 7, 9, 11. *Prop.* 5. El. *Euclidis.*

PROP. II.

Ubi ratio ex duabus pluribusve componitur; Datis componentibus, datur composita. Nempe, Multiplicatis invicem exponentibus componentium, ut habeatur Exponens Compositæ.





$a \times e = ae = æ.$ $2 \times 3 = 6.$

Fig. 3. $\frac{l}{r} \times \frac{m}{s} \times \frac{n}{t} = \frac{lmn}{rst}$ $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$

SUnto, datarum Rationum componentium, dati Indices seu Exponentes (rationum πηλικότητας appellat *Euclides*; quod *Quantitates* exponunt Interpretes; malim *Quotientes*; id enim vult quod ex termini Antecedentis per consequentem divisione emergit,) *a, e.* Datur, inquam, Ratio ex his composita; Ea nempe cujus Exponens est $æ = a \times e$. (per 5. *Def.* 6. Elem.) Quod erat demonstrandum. Similiter ostendetur si plures essent rationes componentes, puta *l* ad *r*, *m* ad *s*, *n* ad *t*; quæ ex his componitur, est ratio *lmn* ad *rst*. Propter $\frac{l}{r} \times \frac{m}{s} \times \frac{n}{t} = \frac{lmn}{rst}$.

SCHOLIUM.

QUo hæc rectius intelligantur, notandum erit (quod non pauci perperam accipiunt,) Rationes, puta Dupli, Tripli, &c. Indices seu Exponentes habere 2, 3, &c. Unde Denominationem sumunt: Nempe Quotientes terminorum Antecedentium per suos Consequentes divisorum. Adeoque Rationis 4 ad 2, Exponens est 2; quia 2) 4 (2: quam itaque *Dupli* rationem dicimus. Rationis 6 ad 2, Exponens est 3; quia 2) 6 (3: quæ propterea dicitur *Tripli* ratio. Et universim, Rationis *l* ad *r*, Exponens est $\frac{l}{r}$: nempe Quotiens Antecedentis *l* per Consequentem *r* divisi.

Hos Indices sive Exponentes, appellat *Euclides*, *Rationum* πηλικότητας; quod *Quantitates* exponunt Interpretes; exposuissent tutius *Quotientes*. Quippe illud vult *Euclides*, quod ex Antecedentis per consequentem divisione emergit. Dixit autem πηλικότητας potius quam ποσότητας, ut illos etiam Quotientes comprehenderet quæ

quæ non essent numeri Integri, sed Fracti, aut Surdi, &c. Nam *Quotientis* sive ποσότητος vocem, stricte sumptam, non de aliis Quotientibus usurpabant quam qui essent numeri integri; qui ostenderent *Quotuplus*, ποσαπλάσιος, esset Antecedens Consequentis: At πηλικότης de Quotiente quolibet, utcunque Fracto, vel Irrationali, dicebatur; qui non modo *Quotuplus*, (puta, *Duplus, Triplus, Quadruplus, &c.*) Sed & πηλικοπλάσιος *Quantuplus* esset Antecedens Consequentis, ostenderet: puta *Duplus cum semisse, Triplus cum quadrante, Quadruplus cum besse*, &c.

Definit autem *Euclides*, 5 *Def.* 6. *El. Rationem ex Rationibus compositam*, dici, *quando illius Exponens* (πηλικότης) *ex harum Exponentibus invicem multiplicatis conficitur*. Adeoque, *ex Rationibus Dupli & Tripli, componi, Rationem Sextupli*; (quia scilicet $2 \times 3 = 6$:) nihil aliud est quam quod vulgo dicimus, *Duplum Tripli, esse Sextuplum*. Item, *Ex Dupli & Sesquialterius rationibus, componi rationem Tripli* (quia $2 \times \frac{3}{2} = 3$,) idem est atque, *Duplam Sesquialterius, Triplum esse*. Quoniam vero hoc in omnibus rationum compositionibus non ita commode, ad posteriorem hanc formam, proferri possit; priorem itaque adhibere solent. Puta; *Rationem 9 ad 4, ex rationibus 3 ad 4 & 3 ad 1, componi*; potius dicunt, quam *Duplum Sesquiquartum* ($\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$.) *esse, Subsesquitertii Triplum*; quia scilicet $\frac{9}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{1}$. Id ipsum tamen utrobique significatur. Quod quidem qui probe advertunt, tum *Euclidis* definitionem rectius intelligent, tum & de perplexa in componendis rationibus difficultate minus fortasse conquerentur. Saltem quid nos in hac & sequentibus propositionibus intellectum volumus, satis assequentur; qui Rationes solemus per earum Indices vel Exponentes designare. Puta, 2 A, Duplum quantitatis A; 3 A, Triplum A; $\frac{3}{2}$ A, Sesquialterum; $2 \times \frac{3}{2}$ A, Duplum Sesquialterius; $\frac{l}{r}$ A, quod est ad A, in ratione l ad r; $\frac{l}{r} \times \frac{m}{s}$ A, quod est ad A, in ratione quæ ex l ad r, & m ad s, componitur. Et in reliquis similiter.

PROP. III.

Ubi Ratio ex duabus componitur; Data Composita, & Componentium una; datur altera. Nempe, Diviso exponente Compositæ, per Datæ componentis Exponentem, ut habeatur Exponens reliquæ. Similiter; si ex quotlibet componitur; Data composita, & vel una, vel quotlibet componentium, vel ex his composita; datur composita ex reliquis.

$a)\,æ\,(e.$ $\qquad 2)\,6\,(3$

$\frac{l}{r})\,\frac{lmn}{rst}\,(\frac{mn}{st} \qquad \frac{lm}{rs})\,\frac{lmn}{rst}\,(\frac{n}{t}$ Fig. 3.

Sit Rationis Compositæ Exponens datus $æ$; datusque unius ex componentibus Exponens a: Datur, inquam, reliquæ Exponens e. Cum enim (per præced.) Sit $a \times e = æ$: si dividatur $æ$ per a; prodibit e, Exponens reliquæ componentis.

Similiter; Si compositæ ex pluribus Exponens $\frac{lmn}{rst}$ detur, uniusque ex componentibus $\frac{l}{r}$; illo per hunc diviso, prodit exponens compositæ ex reliquis $\frac{mn}{st}$. Datisque tum Exponente compositæ $\frac{lmn}{rst}$, tum aliquot componentium, aut ex his compositæ, $\frac{l}{r}$ & $\frac{m}{s}$ vel $\frac{lm}{rs}$; datur exponens reliquæ, vel ex reliquis (si plures sint) compositæ, $\frac{n}{t}$.

SCHOLIUM.

MOnendum interim est; Intelligendam esse hanc Propositionem (& quæ hinc dependent) de ejusmodi Ratione Componente data, cujus Exponens est vere quantitas, & finita: Non o, vel Infinitum.

Quippe, si quæ supponitur componentium altera data, sit nullius quantitatis (puta, ut o ad 1;) quæcunque sit Componens reliqua, Composita etiam nullius erit quantitatis: Adeoque, ex composita, & illa componente, quæ fuerat Componens reliqua non constabit. Est enim tam $0 \times 1 = 0$, quam $0 \times 2 = 0$, aut $0 \times 3 = 0$, &c. *Nullies Unum*, perinde *nullum* est, atque *Nullies Duo*, vel *Nullies Tria*, &c.

Similiter; Si sit Componentium altera, ratio *Infiniti*, (cujus index sit ∞.) Est enim tam $\infty \times 1 = \infty$, quam $\infty \times 2$, vel $\infty \times 3$, *&c.* *Infinities Unum*, pariter sunt *Infinita*, atque *infinities Duo*, vel *infinities Tria*, &c. Non constabit itaque, ex his datis, quænam sit illa Ratio, quæ intelligitur, cum *Infinita* composita, etiam *Infinitam* exhibere.

PROP. IV.

Si Ratio quævis cum Æqualitatis ratione componatur; eadem manet quæ prius ratio. Et contra; Quæ cum alia ratione composita, illam non immutat; est Æqualitatis ratio.

$$2 \times 1 = 2. \qquad 3 \times 1 = 3. \qquad r \times 1 = r.$$

Fig. 4. $$\frac{A}{E} \times \frac{1}{1} = \frac{A}{E}. \qquad \frac{A}{E} \times \frac{r}{r} = \frac{rA}{rE} = \frac{A}{E}.$$

PUta; Quæ ex Æqualis & Dupli rationibus componitur, est Dupli ratio: Quæ ex Æqualis & Tripli, est Tripli ratio, &c. Sive; Quod est Duplo Æquale, Duplum est: Quod Triplo, Triplum, &c.

Sequitur ex 2 hujus. Exponens utique Rationis Æqualium est 1; (Nam Æquale quodvis per suum Æquale divisum, Quotientem exhibet 1:) Qui quemvis alium exponentem multiplicans, eundem restituit; (quippe $r \times 1 = r$.) Adeoque constat Propositum.

Conversa similiter patet. Quippe si $\frac{A}{E} \times r = \frac{A}{E}$; erit $r = 1$.

PROP. V.

Quantitates quælibet, in eadem ratione vel auctæ vel diminutæ; in eadem qua prius ad invicem ratione constituuntur.

Fig. 5, 6. $$A.B.C :: 2A.2B.2C :: \tfrac{1}{2}A.\tfrac{1}{2}B.\tfrac{1}{2}C : rA.rB.rC.$$

SEquitur ex præcedente. Est utique $\frac{rA}{rB} = \frac{A}{B} \times \frac{r}{r} = \frac{A}{B}$. Item $\frac{rA}{rC} = \frac{A}{C} \times \frac{r}{r} = \frac{A}{C}$. Et $\frac{rB}{rC} = \frac{B}{C} \times \frac{r}{r} = \frac{B}{C}$. Adeoque $rA.rB.rC$. in eadem ad invicem ratione atque A. B. C.

Idem demonstrabitur ex 16 Element. 5. Cum enim sit, ex hypothesi, ut rA ad A, sic rB ad B; erit (permutando) rA, ad rB, ut A ad B. Et de reliquis similiter.

PROP. VI.

Quæ ex Reciprocis Rationibus componitur Ratio, est ratio Æqualitatis. Et contra; Æqualitatis Ratio, ex Reciprocis componitur.

Fig. 7, 8. $$\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1. \qquad \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6}. \qquad \frac{A}{E} \times \frac{E}{A} = \frac{AE}{AE} = 1.$$

Puta;

Puta; Dupli Dimidium, Triplum Trientis, Quadrantis Quadruplum; Sesquialterius Subsesquialterum, &c. tantundem valent atque Æquale. Fig. 7, 8.

Sequitur ex 2 hujus. Quippe si ratio A ad E, cum ejusdem reciproca E ad A, componatur: prodibit ratio A E ad E A, quæ æqualitatis est.

SCHOLIUM.

Hæc quæ præcedunt Lemmata, ex Rationum doctrina desumpta, huc transtulimus, ob frequentem eorum in sequentibus usum.

Demonstrationes vero ita comparatæ sunt (tum hic tum in sequentibus passim,) ut & Praxin Arithmeticæ quam *Speciosam* vocant, directe respiciant; & ad appositas figuras lineares (si cui id gratius videbitur) accommodentur.

Exempli gratia. Ad propositionem primam; perinde est sive A & E habeantur pro Symbolis sive speciebus Arithmeticis; sive pro linearum adscriptarum, his notis designatarum, indiciis. Utrovis enim modo procedit demonstratio, sive de Lineis, sive de Literis.

Sic ad Prop. 2 & 3 perinde succedit demonstratio, sive sint *a*, *e*, Symbola Arithmeticæ speciosæ, adeoque *æ* quod ex harum invicem multiplicatione oritur: sive designet *a* Altitudinem, *e* Basin, Parallelogrammi *æ*. Quippe, Parallelogramma in ratione ex Basium & Altitudinum rationibus composita constitui, notum est. Adeoque, ut Parallelogrammorum similium Lateribus homologis repræsentari solent rationes Componentes; ita Parallelogrammis ipsis, eorumve Areis, rationes Compositæ.

Sic ad Prop. 4. Perinde est, sive intelligamus quantitates A, E, per eandem *r* multiplicatas, ipsas *r* A, *r* E (multiplicatione factas) in eadem ratione exhibere cum ipsis A, E; sive Parallelogramma *r* A, *r* E, (propter æquales Altitudines *r*,) esse ad invicem ut eorum Bases A, E.

Et similiter ad Prop. 5. Sive dicamus quantitates A, B, C, per eandem *r* multiplicatas, producere *r* A, *r* B, *r* C, ipsis A, B, C, proportionales; Sive parallelogramma *r* A, *r* B, *r* C, (propter æqualem altitudinem) Basibus proportionalia; Sive etiam, in similibus triangulis latera A, B, C, & *r* A, *r* B, *r* C, in eadem ad invicem esse ratione: perinde est.

Item in Prop. 6. Perinde est sive intelligamus A × E = E × A = Æ: sive æqualia dicamus Parallelogramma quorum Altitudines sunt ut A ad E, Bases vero his reciprocæ, nempe ut E ad A.

Id saltem interest; Quod demonstrationes, si tanquam Arithmeticæ habeantur; Universaliores sunt, & de quocunque Quantitatum genere pariter concludunt: Si vero ad Lineas vel Parallelogramma speciatim respiciant; de his solum directe concludunt, (idque ex vi Propositionum particularium de his in Elementis demonstratarum: quales sunt, *Parallelogrammorum rationes componi ex rationibus Laterum Homologorum circa æquales angulos*; *Parallelogramma æquialta, esse ut Bases*; *Parallelogramma quorum Bases & Altitudines sunt reciproce proportionales, esse Æqualia*, &c.) de aliis vero, non nisi accommodando ad alias quantitates (puta, Vires, Pondera, Velocitates, Declivitates, &c.) easdem analogias quas in Lineis vel Parallelogrammis, &c. demonstratæ fuerant.

Ego interim, utut Demonstrationes hujusmodi, prout Arithmeticæ speciosæ praxin directe respiciunt, (adeoque universaliores existunt,) potiores existimem; adeoque adscriptas figuras, non nisi unum aliquem ex multis casum, qui sub Universali propositione continetur, (cui reliqui tamen, in aliis quantitatibus sunt conformes,) exhibere: Si tamen malint alii (quibus Demonstrationes Lineares magis arrident) ut rationes omnes, in quibuscunque quantitatibus (quamquam Lineis sint Heterogeneæ) Lineis utcunque exhibeantur; atque hinc ad ipsas de quibus agitur quantitates transferantur, His etiam satisfieri vellem. Idque eo magis, ut quam inter se conjunctæ sint hæ binæ demonstrandi methodi, perspiciatur; & quam facili negotio, demonstrationes Rationum Lineares, Lineis exutæ, simplicius simul & universalius exhiberi possint.

PROP.

PROP. VII.

Effectus sunt, causis suis adæquatis, proportionales.

C.E::2C.2E::3C.3E::rC.rE.

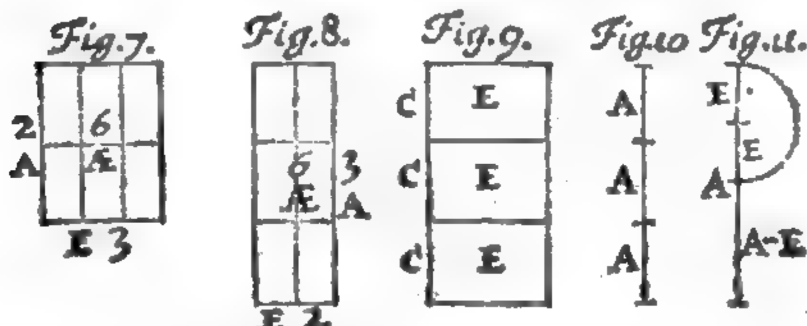


Fig. 9. NAm, si Causa ut C, efficit ut E; etiam altera C, cæteris paribus, alterum E efficiet; tertia tertium, &c. Adeoque 2 C, 2 E; 3 C, 3 E; & quotlibet C, totidem E. Hoc est Dupla C, duplum E; tripla triplum; & similiter in quavis alia *Multiplicium* ratione.

Sin dicatur; Propter circumstantias evenire posse, ut C altera, priori parem non producat effectum: Jam non erit hæc aut illa C, ut C, adæquata Causa; sed potius, hæc vel illa C, his aut illis circumstantiis adjuta vel impedita; Quod est contra Hypothesin.

Atque idem ostendetur, de quavis ratione *Submultiplicium*. Verbi gratia: Si 2 C efficiat ut 2 E; etiam C efficiet ut E. Si enim C efficiat vel plus vel minus quam E; etiam 2 C similiter efficeret plus vel minus quam 2 E, (per primam partem hujus demonstrationis:) Quod est contra hypothesin. Similiter ostendetur, de quavis alia submultiplicium ratione; Puta, Si 3 C efficiat ut 3 E; etiam C efficiet ut E, &c.

Idem de quavis *Commensurabilium* ratione, sic ostenditur. Esto, verbi gratia, exposita Causarum ratio 2 ad 3, sive *n* ad *m*: erit eadem & Effectuum ratio. Nam si causa ut 2 C, efficiat ut 2 E; etiam Causa ut C, efficiet ut E; (per secundam partem hujus;) adeoque (per partem primam) 3 C, ut 3 E. Quod erat propositum. Et similiter de quavis commensurabilium ratione ostendetur, assumpta in demonstrationem communi mensura. Puta; Si causa ut *n* C efficiat ut *n* E; etiam C efficiet ut E; adeoque *m* C, ut *m* E.

Quodque de Commensurabilibus ostenditur; Cum nulla causa concipi possit, cur non de *Incommensurabilibus* similiter verum sit; (possitque etiam, de his, si opus sit, Demonstratione Apagogica evinci;) de omnibus pariter verum erit, Effectus Causis suis adæquatis proportionales esse. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

UNniversalem hanc Propositionem præmittendam etiam duxi; quoniam viam aperit, qua, ex pure Mathematica speculatione, ad Physicam transeatur; seu potius hanc & illam connectit.

PROP. VIII.

Contrariorum, quatenus contraria sunt, Aggregatum; æquipollet Excessui præpollentis: Congruentium vero; eorundem Summæ.

	$+A$	$+3A$	$-3A$	$+A$	$-A$	$+3A$	$-3A$
Fig. 10.	$-A$	$-2A$	$+2A$	$+A$	$-A$	$+2A$	$-2A$
	$+0$	$+1A$	$-A$	$+2A$	$-2A$	$+5A$	$-5A$

SUnto Contrariorum Signa + & —. Adeoque; Si illud *Sursum* designet; designabit hoc *Deorsum*: Si illud, *Addendum*; hoc, *Auferendum*, designabit: Et

Et de aliis contrariis similiter. Sintque contrariorum quantitates A, 2 A, 3 A, &c. Erit $+A-A=0$. $+3A-2A=+A$. $-3A+2A=-A$, &c. (Ut ex Additionum legibus constat.) Hoc est, Aggregatum æquivalet Excessui præpollentis. Quod erat propositum.

At $+A+A=+2A$. $-A-A=-2A$. $+3A+2A=+5A$. $-3A-2A=-5A$. (ut ex Additionum legibus similiter constat.) Quod item erat propositum.

Exempli gratia. A sursum, & A deorsum; se mutuo destruunt: 3 A sursum, & 2 A deorsum; tantundem valent atque 1 A sursum: 3 A deorsum & 2 A sursum; æquivalent atque 1 A deorsum: Adeoque, Qui (verbi gratia) unum passum ascendit, & tantundem descendit; nihilo est vel altior vel humilior: Qui ascendit 3 passus, & 2 passus descendit; est uno passu altior: Qui 3 passus descendit iterumque ascendit 2 passus, est uno passu humilior.

Item; Qui unum Addit, & tantundem Aufert; nihilo vel Auget vel Minuit: Qui addit 3, & Aufert 2; uno Auget: Qui 3 Tollit, & 2 Restituit; uno Minuit. Et de Contrariis aliis similiter judicandum.

Contra vero: Qui 3 passus ascendit, & insuper 2 alios; est 5 passibus altior: Qui 3 passus descendit, & deinde 2 alios; est 5 passibus humilior.

Item: Qui 3 Addit, & insuper 2; quinario auget: Qui tum 3, tum 2 Tollit; quinario minuit. Et de reliquis similiter.

PROP. IX.

Æquipollens si vel Augeatur, vel Contrarium Minuatur; fit Præpollens: Si Minuatur, vel Contrarium Augeatur; fit minus-pollens.

$A+E>A$. $A-E<A$. Fig. 11.

Quia Totum est sui Parte majus. Puta: Totum $A+E$, præpollet ipsius parti A. Et Totum A, ipsius parti $A-E$.

SCHOLIUM.

Suntque hæ Propositiones Novem, totidem Lemmata; quæ non magis spectant præsentem Motuum Doctrinam, quam quamvis aliam; Sed frequentissimi usus erunt in sequentibus; quare in vestibulo demonstrandas duxi.

PROP. X.

Ubi conjuncta sunt Momentum & Impedimentum: Si Momentum præpollet, pro Momento simul habenda sunt; pro Impedimento vero, si præpollet Impedimentum; Et utrobique Tanto, quantus est præpollentis Excessus; Sin æquipollent, pro Neutro.

Sin plura sint conjuncta vel Momenta, vel Impedimenta: Tanta simul habenda sunt, quanta est eorundem summa.

Cum enim Contraria sint Momentum & Impedimentum; hoc est, Causa ut sit, &, Causa ne sit: Constat propositum, per 8 hujus.

PROP. XI.

Si Momentum Impedimento præpollet: Motum efficit. Adeoque; Si nullus fuerit, Inchoatur: Si jam fuerit, Augetur.

Si præpollet Impedimentum: Impedit. Adeoque Motum, siquis jam sit, vel Tollit, vel saltem Minuit.

Et quidem in ea ratione plus minusve Efficit aut Impedit, qua major est vel minor Excessus præpollentis.

Si Æquipollent: Neque Ponitur motus, neque Tollitur. Adeoque quæ prius erat vel Quies vel Motus, perseverat.

SEquitur ex præcedente. Nam prout utriusque Aggregatum pro vel Momento, vel Impedimento, vel Neutro habendum est; ita vel motum Efficit, vel Impedit, (& quidem in ea ratione,) vel Neutrum, per 7 hujus.

SCHOLIUM.

POstremam hujus Propositionis partem; Nempe, Inceptum Motum, (nisi obstaculum ponatur,) suapte sponte (sine continuo motore,) non minus quam jam existentem Quietem (nisi accedat Motor) perseverare; *Galilæus*, *Cartesius*, *Gassendus*, aliique, videntur Postulare; atque hinc non levis momenti multa inferunt: Qui autem Demonstret, non memini me vidisse quempiam. Eratque hoc nobis, in sequentibus, asserendum, ubi de Motuum Acceleratione dicetur: tam propere tamen, in ipso statim vestibulo, asserendo abstinuissem, nisi consequentiæ necessitate viderem me coactum jam statim affirmare; non parvi postea momenti futurum.

PROP. XII.

Vis vi contraria, si æquipollet, sustinebit: Si minus pollet; ne hoc quidem: Si præpollet, (neque aliud adsit impedimentum;) movebit. Et contra: Si movet; præpollet: Si non movet; tum vel minus pollet, vel saltem æquipollet, vel aliud quid impedit.

$$+A-A=0. \quad +2A-3A=-A. \quad +3A-2A=+A.$$
$$+S-D=0. \quad +S-D=- \;. \quad +S-D=+\;.$$

SIt, verbi gratia, S, vis sursum; D, deorsum. Si invicem æquipollent; nullis æquivalent, (per 8 hujus;) Adeoque motum non efficiunt; (per 7 hujus.) Si S præpollet; fit motus sursum: Si D; deorsum. Æquivalent utique Excessui præpollentis: per 8 hujus; Eritque motus consonus; per 7 hujus. Et similiter de quibusvis aliis Viribus contrariis ostendetur.

Dico tamen, *Nisi aliud adsit Impedimentum.* Quoniam fieri potest, ut vel Medii densitas, vel durities, vel Obex aliquis obstet, quo minus à præpollente moveatur vis inferior; utut Obex ille, vim in contrarium Motricem non habeat, sed simpliciter Impediat. Ut, quum grave pavimento incumbit: quod vim habeat Impediendi ne descendat; non autem Motivam sursum; quia nec ipsum sursum nititur.

SCHOLIUM.

PRocedit hæc tum Propositio, tum Demonstratio potissimum de Mobili jam in Quiete constituto. Si vero jam sit in Motu; Hoc ipsum, esse in motu, accensendum erit causis ejusdem motus continuativis, vel impeditivis contrarii. Quippe Sublatio motus, tam causam efficientem postulat, quam motus Positio; uti ex Prop. præced. constat. Unde est, quod Motus Penduli, verbi gratia, à gravitate inchoatus, non quidem à gravitate sola continuatur, sed ab ipso impetu seu motu jam existente continuatur, etiam ultra perpendiculum, adeoque ascendendo; non obstante ipsius gravitatis in contrarium nisu, aliisque forsan non contemnendis obstaculis, quod & in aliis motibus ab impetu inchoato continuatis passim obtinet. Quodque ad hanc Propositionem monemus; etiam in sequentibus, prout res tulerit, intelligendum erit.

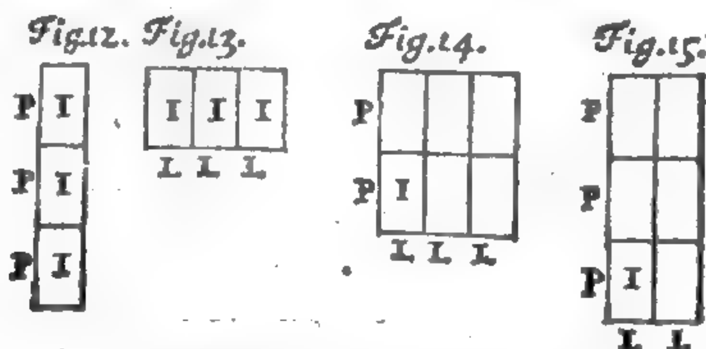
Hoc autem fundamento nititur, de contra-ponderantibus, seu contra-moventibus judicium: Adeoque vel Quietis, ob æquilibrium seu contra-moventium æquipollentiam; vel Motus, ob præponderantiam, seu præpollentiam.

PROP.

PROP. XIII.

Quæ ex Mobilium Pondere resultant motus Impedimenta, (cæteris paribus,) sunt Ponderibus proportionalia.

Quodque de Pondere dicitur, de quavis alia contraria Vi, similiter intelligendum, quæ ponderis instar erit. Et similiter in sequentibus.



P . I :: 2 P . 2 I :: 3 P . 3 I :: *n* P . *n* I.

Fig. 12.

NAm si pondus ut P, impedit ut I; etiam alterum P, cæteris paribus, ut alterum I impediet; tertium, ut tertium; &c. Adeoque 2 P, ut 2 I; 3 P, ut 3 I; & quotlibet P, ut totidem I. Quare & tantundem Ponderis, tantundem impedit; duplum, duplo; triplum, triplo, &c. Et in reliquis similiter proportionibus: per 7 hujus.

SCHOLIUM.

DIco autem, *Ceteribus paribus*; Quoniam idem Pondus, pro vario situ, aliisve circumstantiis, potest varie impedire. Ubi autem cætera sunt paria; tota quæ oritur diversitas, à sola Ponderis diversitate, ut ab adæquata causa, profluit. Cæteraque, cum Æqualium rationem subeunt, proportionem non immutant. Per 4 hujus.

Quodque hic dictum est, etiam in aliis propositionibus pariter intelligendum erit, licet non diserte dicatur. Quod semel monuisse sufficiat.

PROP. XIV.

Quæ ex Longitudine transigenda, resultant motus Impedimenta; sunt Longitudinibus proportionalia.

Quodque de Longitudinibus, dicitur; de Medii densitate, tenacitate, aut simili quovis Impedimento, pariter dicendum erit. Et similiter in sequentibus.

L . I :: 2 L . 2 I :: 3 L . 3 I :: *m* L . *m* I.

Fig. 13.

PUta; Æqualis Longitudo transigenda, æqualiter Impedit; dupla, duplo; tripla, triplo, *&c.* Nam si Longitudo ut L, impedit ut I; Etiam altera L, ut alterum I impediet; & tertia, ut tertium, *&c.* Adeoque; Dupla, duplo; Tripla, triplo; & in reliquis similiter proportionibus. Per 7 hujus.

PROP. XV.

Quæ ex Pondere simul, & Longitudine transigenda, resultant motus Impedimenta; sunt in ratione ex Ponderum & Longitudinum rationibus composita.

$$\frac{\begin{matrix}P.\\L.\end{matrix}}{PL.}\ I :: \frac{\begin{matrix}2P.\\2L.\end{matrix}}{4PL.}\ 4I :: \frac{\begin{matrix}2P.\\3L.\end{matrix}}{6PL.}\ 6I :: \frac{\begin{matrix}nP.\\mL.\end{matrix}}{mnPL.}\ mnI.$$

Fig. 14.

Puta;

PUta; Duplum Pondus, per Duplam Longitudinem ferendum, est Impedimentum Quadruplum; per Triplam, Sextuplum: Triplum Pondus, per Longitudinem Triplam, est Impedimentum Noncuplum; per Quadruplam, Duodecuplum, &c. Nam, si Pondus P, per Longitudinem L ferendum, impedit ut I; etiam alterum P, per eandem Longitudinem ferendum, impediet ut I alterum; tertium, ut tertium, &c. Adeoque; Duplum, duplo; Triplum, triplo, &c. per eandem Longitudinem ferendum. per 13 hujus. Cum itaque Pondus ut 2 P, per Longitudinem L ferendum, impediat ut 2 I: Pondus idem per Longitudinem 2 L ferendum, impediet ut 4 I; per 3 L, ut 6 I, &c. per præced. Item; Cum Pondus 3 P, per Longitudinem L ferendum, impediat ut 3 I: idem per 3 L ferendum, impediet ut 9 I; per 4 L, ut 12 I, &c. per præced. Et, universaliter, Si Pondus P, per Longitudinem L ferendum, impediat ut I: Pondus n P, per eandem L ferendum, impediet ut n I (per 13 hujus;) Adeoque, per m L, ut $m n$ I; (per præced.) Hoc est, in ratione ex Ponderum & Longitudinum rationibus composita, (per 2 hujus.) Quod erat propositum.

PROP. XVI.

Si, in duobus motibus, Pondera & Longitudines, vel utraque sint Æqualia, vel sint Reciproce proportionalia; Quæ hinc resultant Impedimenta, sunt Æqualia. Et contra: Si quæ inde resultant impedimenta sunt æqualia, Pondera & Longitudines sunt vel utraque Æqualia, vel saltem Reciproce proportionalia.

Fig. 14, 15.

P.	2P.	2P.	3P.	nP.	mP.
2L.	L.	3L.	2L.	mL	nL.
2PL. I ::	2PL. I.	6PL. I ::	6PL. I.	mnPL. I ::	mnPL. I.

PUta: Æquale Pondus, per Æqualem Longitudinem ferendum, Æqualiter Impedit. Item, Pondus Duplum per Æqualem Longitudinem, & Æquale Pondus per Longitudinem Duplam ferendum, Æqualiter impediunt. Sic, Pondus Triplum per Longitudinem Æqualem, &, Æquale Pondus per Longitudinem Triplam. Item, Pondus Duplum per Longitudinem Triplam, &, Triplum Pondus per Longitudinem Duplam, &c.

Sunt enim Impedimenta, in ratione ex Ponderum & Longitudinum rationibus composita; (per præced.) Adeoque, (cum hæ sint reciprocæ,) æqualia sunt: (per 6 hujus.) Unde & conversa patet.

SCHOLIUM.

POsset quidem ea clausula, *Vel utraque æqualia*, tuto omitti, utpote quæ in sequenti, *Reciproce proportionalia*, continetur. Nam, ut Dimidio Duplum, sic &, Æquale Æquali, reciprocum est. Mallem tamen, perspicuitatis gratia, tum in hac Propositione, tum in sequentibus aliquoties, illud etiam diserte inserere. Quod quidem non tantum ex 6 hujus, sed & 4 hujus, perinde patet.

Ex his autem quatuor Propositionibus proxime præcedentibus, æstimatur *Motuum* perficiendorum *Magnitudo*. Ea scilicet quæ ex mobilium Pondere, & motus Longitudine, simul consideratis emergit.

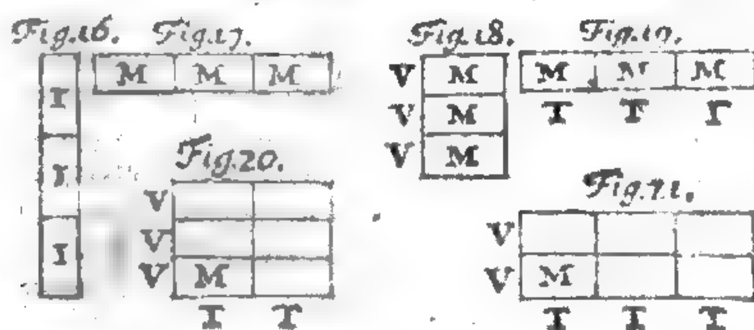
PROP. XVII.

Quæ respectivis Impedimentis æquipollent Momenta, sunt Impedimentis proportionalia.

(Adeoque Ponderibus, si reliqua sint paria; vel Longitudinibus, si reliqua sint paria; vel quæ ex Pondere & Longitudine resultant Impedimentis, si reliqua sint paria.)

Eaque Momenta, si augeantur, vel minuantur Impedimenta; movebunt.

M.



M . I :: 2 M . 2 I :: 3 M . 3 I :: r M . r I.

PUta; Æquale Momentum, Æquali Impedimento æquipollet; Duplum, Duplo; Triplum, Triplo, &c. Nam si Momentum ut M, æquipollet Impedimento ut I; etiam alterum M, alteri I æquipollebit; & Tertium, Tertio, &c. Adeoque, Duplum, Duplo, Triplum, Triplo, &c. per 7 hujus. Fig. 16, 17.

Adeoque; vel Ponderibus, vel Longitudinibus, vel quæ ex utrisque simul resultant Impedimentis, (cæteris paribus,) sunt proportionalia. Nam his proportionalia sunt, quæ ex his resultant Impedimenta. per 13, 14, 15. hujus.

Sin augeatur Momentum Æquipollens, vel Impedimentum minuatur; Momentum præpollebit; adeoque, movebit. per 9, 10. hujus.

SCHOLIUM.

ATque hinc dependet de Æquilibrio, seu contra-nitentium Æquipollentia, judicium; &, quæ hinc sequitur, Quiete: quique ex Præpollentia procedit, Motu.

PROP. XVIII.

Virium momenta, cæteris paribus, sunt Virium gradibus proportionalia.

V . M :: 2 V . 2 M :: 3 V . 3 . M :: *n* V . *n* M.

PUta; Vis æqualis, tantundem movendo pollet; Dupla, duplo; Tripla, triplo, &c. Nam, si vis ut V, moveat ut M: etiam vis ut 2 V, movebit ut 2 M; 3 V, ut 3 M; *n* V, ut *n* M, &c. per 7 hujus. Fig. 18.

PROP. XIX.

Virium, gradu æqualium, Momenta; sunt cæteris paribus, Temporibus proportionalia.

T . M :: 2 T . 2 M :: 3 T . 3 M :: *m* T . *m* M. Fig. 19.

NAm, si vis exposita, Tempore T, moveat ut M: etiam altero T, tantundem efficiet; tertio, tantundem, &c. Adeoque, in 2 T, ut 2 M; in 3 T, ut 3 M; in *m* T, ut *m* M, &c. Hoc est, Duplo tempore, duplum efficiet; Triplo, triplum, &c. per 7 hujus.

PROP. XX.

Quæ ex Virium gradu, simul & applicationum Tempore resultant Momenta; sunt in ratione ex Virium & Temporum rationibus composita.

V.	2 V.	2 V.	*n* V.	
T.	2 T.	3 T.	*m* T.	Fig. 20,
VT. M ::	4VT. 4M ::	6VT. 6M ::	*mn*VT.	*mn* M. 21.

PUta; Vis Dupla, duplo Tempore, Quadruplum potest; triplo, Sextuplum: Tripla, triplo tempore, potest Noncuplum; quadruplo, Duodecuplum, &c.

 Nam,

Nam, si Vis ut V, Tempore T, moveat ut M: Vis ut 2 V, eodem Tempore, movebit ut 2 M; & 3 V, ut 3 M, &c. per 18 hujus. Cum itaque Vis ut 2 V, Tempore T, moveat ut 2 M; Vis eadem, Tempore 2 T, movebit ut 4 M; & tempore 3 T, ut 6 M, &c. Per 19 hujus. Item, Cum Vis ut 3 V, Tempore T, moveat ut 3 M; Vis eadem, Tempore 3 T, movebit ut 9 M; Tempore 4 T, ut 12 M, &c. Et universaliter, Si Vis V, tempore T, moveat ut M; Vis *n* V, eodem Tempore T, movebit ut *n* M, (per 18 hujus:) Adeoque, Tempore *m* T, ut *mn* M, (per 19 hujus.) Hoc est, in ratione ex Virium & Temporum rationibus composita, (per 2 hujus.) Quod erat propositum.

PROP. XXI.

Si Vires & Tempora, sint vel utraque Æqualia, vel sint Reciproce proportionalia; quæ hinc resultant Momenta sunt Æqualia. Et contra: Si Momenta illa sint Æqualia; Vires & Tempora, sunt, vel utraque æqualia, vel saltem Reciproce proportionalia.

Fig. 20, 21.

$$\begin{array}{cccccc} V. & 2\,V. & 2\,V. & 3\,V. & n\,V. & m\,V. \\ 2\,T. & T. & 3\,T. & 2\,T. & m\,T. & n\,T. \\ \hline 2VT.\ M :: & 2VT.\ M. & 6VT.\ M :: & 6VT.\ M. & mnVT.\ M :: & mnVT.\ M. \end{array}$$

PUta; Vis æqualis, æquali Tempore, tantundem efficit. Item, Vis dupla æquali tempore, &, Vis æqualis duplo Tempore, tantundem efficiunt. Sic, Vis dupla triplo Tempore, &, Vis tripla duplo Tempore, &c. Sunt enim Momenta in ratione ex Virium & Temporum rationibus composita; (per præced.) Adeoque (cum hæ sint Reciprocæ) Æqualia sunt. (per 6 hujus.) Unde & conversa patet.

SCHOLIUM.

EX his quatuor Propositionibus proxime præcedentibus, æstimantur, quæ ex Viribus & Temporibus simul consideratis emergunt, *Momentorum Magnitudines.*

PROP. XXII.

In quibusvis Motibus invicem comparatis; Momenta sunt Impedimentis proportionalia.

$$VT = M.\ PL = I :: 2\,VT = 2\,M.\ 2\,PL = 2\,I :: nVT = nM.\ nPL = nI.$$
$$M = VT.\ \mu = \upsilon\tau :: I = PL.\ \iota = \pi\lambda.$$

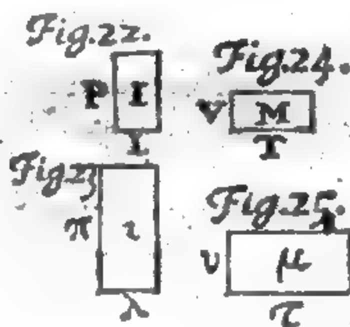


Fig. 22, 23, 24, 25.

PUta; si Vis V, Tempore T; sive, quod ex his resultat, Momentum M; movet Pondus P, per Longitudinem L; sive tollit, quod ex his resultat, Impedimentum I: Duplum Momentum, tollet Duplum Impedimentum; Triplum, Triplum, &c. Nam, si Momentum M, tollit Impedimentum I; etiam alterum M, alterum I tollet; tertium, tertium, &c. Adeoque Duplum Momentum, tollet, Duplum Impedimentum; Triplum, Triplum; & in reliquis similiter proportionibus. Per 7 hujus. Quod erat propositum.

Sive, (ut in *Aurea Regula composita* dici solet,) Ut, Factum ex Pondere & Longi-

Longitudine, in uno Motu; ad, Factum ex Pondere & Longitudine, in alio Motu: sic, Factum ex Vi & Tempore, in priori motu; ad, Factum ex Vi & Tempore, in posteriori motu; cæteris paribus.

SCHOLIUM.

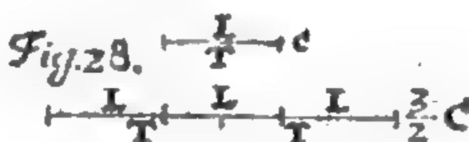
Ex hac Propositione potissimum dependet Motuum interse comparatio, quoad Vires, Tempora, Pondera, & Longitudines.

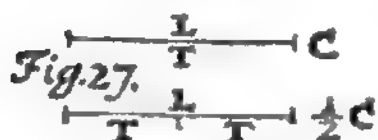
PROP. XXIII.

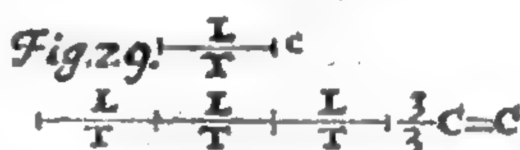
In Comparatis Motibus; Si Lationum Tempora sint æqualia; Celeritatum gradus sunt transactis Longitudinibus proportionales.

$$L.\lambda :: C.\kappa.$$

$$L.C :: 2L.2C :: nL.nC.$$







Hoc est: Ut Longitudo prima ad secundam, eodem tempore transactam; sic Celeritas prima ad secundam. Fig. 26.

Puta; Dupla Celeritate, (eodem Tempore,) Dupla Longitudo transigitur; Dimidia Celeritate, Subdupla Longitudo. Et similiter in aliis proportionibus. Per Celeritatum definitiones.

PROP. XXIV.

In comparatis Motibus; Si transactæ Longitudines sint æquales; Celeritatum gradus sunt Temporibus reciproce proportionales.

$$\tau.T :: C.\kappa.$$

$$\frac{L}{T}.C :: \frac{L}{2T}.\frac{1}{2}C :: \frac{L}{nT}.\frac{1}{n}C.$$

Hoc est; Ut Tempus secundum, ad tempus primum; sic (reciproce) Celeritas prima ad secundam. Fig. 27.

Puta; Dimidio Tempore, dupla Celeritate, transigitur æqualis Longitudo: Duplo Tempore, dimidia Celeritate. Et similiter in aliis proportionibus. Per Celeritatum definitiones.

PROP. XXV.

Comparatorum Motuum Celeritates, sunt in ratione ex directa Longitudinum & reciproca Temporum rationibus composita.

$$\begin{array}{ll} L. & \lambda \\ \tau. & T \\ \hline L\tau. & \lambda T :: C.\kappa. \end{array} \qquad \begin{array}{c} T. \\ L. \\ \hline 2TL. \end{array} \mathrm{X} \begin{array}{c} 2T \\ 3L \\ \hline \end{array} C :: 3TL.\tfrac{3}{2}C. \qquad \begin{array}{c} mT. \\ L. \\ \hline TL. \end{array} \mathrm{X} \begin{array}{c} T \\ nL \\ \hline mnTL \end{array} :: C.mnC.$$

Fig. 28.

$$\frac{L}{T}.C :: \frac{3L}{2T}.\frac{3}{2}C :: \frac{nL}{mT}.\frac{n}{m}C.$$

Puta;

Fig. 28. PUta: Longitudo dupla, dimidio Tempore transigitur, Celeritate Quadrupla: Tripla Longitudo dimidio Tempore, Celeritate Sextupla: Tripla Longitudo duplo Tempore, Celeritate Sesquialtera, &c.

Nam, si Longitudo L, Tempore T, absolvatur Celeritate ut C: Longitudo 2 L, eodem Tempore T, absolvetur Celeritate ut 2 C; (per 23 hujus:) Adeoque dimidio Tempore seu $\frac{1}{2}$ T, duplo adhuc celerius, sive Celeritate ut 4 C. (per præced.) Similiter, Longitudo 3 L tempore T, celeritate ut 3 C; (per 23 hujus:) Adeoque Tempore $\frac{1}{2}$ T, Celeritate ut 6 C; & Tempore 2 T, Celeritate $\frac{3}{2}$ C: per præced. Et, universaliter; Si Longitudo L, tempore T, transigatur Celeritate C: Longitudo n L eodem tempore transigetur Celeritate n C, (per 23 hujus:) adeoque Tempore m T, celeritate $\frac{n}{m}$ C; (per præced.) Hoc est, in ratione quæ ex directa Longitudinum & reciproca Temporum rationibus componitur. Quod erat propositum.

PROP. XXVI.

In comparatis Motibus; Si transactæ Longitudines, sint Temporibus proportionales: Celeritates sunt æquales. Et contra.

Fig. 29. $L.T :: 2L.2T :: 3L.3T :: nL.nT$.

SEquitur ex præcedente. Quoniam, hoc casu, Reciproca Temporum (quæ eadem est cum reciproca Longitudinum) cum directa Longitudinum, composita; æqualitatis ratio est, per 6 hujus.

Vel ex definitionibus Celeritatum. Cum enim Æqualis Celeritas, æquali Tempore, æqualem Longitudinem absolvit (per Def. 10.) Etiam Duplo tempore, duplam Longitudinem; Triplo, triplam, &c. absolvet. Et contra. per 7 hujus.

PROP. XXVII.

In comparatis motibus, Virium gradus (cæteris paribus) sunt in ratione quæ ex Ponderum & Celeritatum rationibus componitur.

$$VT.\nu\tau :: PL.\pi\lambda.$$

$$V.\nu :: \frac{PL}{T}.\frac{\pi\lambda}{\tau} :: PL\tau.\pi\lambda T :: PC.\pi\kappa.$$

$$\frac{T}{\tau}\Big)\ \frac{VT}{\nu\tau} = \frac{PL}{\pi\lambda}\ \Big(\frac{V}{\nu} = \frac{PL\tau}{\pi\lambda T} = \frac{PC}{\pi\kappa}.$$

CUm enim (per 22 hujus) Momentorum ratio, quæ ex Virium & Temporum rationibus componitur; eadem sit cum ea, quæ ex Ponderum & Longitudinum rationibus componitur, ratione Impedimentorum: Si eximatur utrinque ratio Temporum, vel (quod eodem recidit) illius Reciproca accedat; Relinquetur Virium ratio, ea quæ componitur ex rationibus Ponderum, & Longitudinum, & reciproca Temporum; Hoc est, (per 25 hujus) ea quæ ex Ponderum & Celeritatum rationibus componitur. Quod erat propositum.

SCHOLIUM.

EX hac Propositione dependet Problematum aliquot, in Mechanicis maxime celebrium, generalis solutio. Nempe,

PROP.

PROP. XXVIII.

Datum Pondus, data Vi movere.

$$\begin{array}{ll} P. & nP. \\ C. & \frac{1}{n}C. \\ \hline PC.V :: & PC.\ V. \end{array} \qquad \begin{array}{ll} P. & 2P. \\ C. & \frac{1}{2}C. \\ \hline PC.V :: & PC.\ V. \end{array}$$

SIt exposita Vis V, quæ movere potis sit Pondus P, celeritate C: & requiratur, ut eadem vel æquali Vi, moveatur Pondus n P.

Dico; Si, cæteris paribus, res ita comparetur (interposita Machina) ut, qua ratione Pondus n P majus sit minusve quam Pondus P; eadem, contra, minor fiat majorve Celeritas, puta $\frac{1}{n}$ C: eadem Vis V, expositum Pondus n P, movebit celeritate $\frac{1}{n}$ C.

Cum enim rationes n P ad P, & $\frac{1}{n}$ C ad C, sint reciprocæ; quæ ex his componitur est Æqualitas; (per 6 hujus:) Adeoque (per præced.) æqualis Vis requiritur ad movendum Pondus P celeritate C, atque Pondus n P celeritate $\frac{1}{n}$ C. Quod erat propositum.

SCHOLIUM.

HUic igitur potissimum negotio se applicet Mechanicus, ut istiusmodi machinas excogitet, easque in usum redigat, quibus Vi & Ponderi interpositis, motuum celeritatem ita moderetur, ut Ponderum Magnitudinem Tarditate motus compenset; seu, Temporis Longitudine, Defectum Virium.

PROP. XXIX.

Datum Pondus, data Celeritate movere.

$$\begin{array}{lll} P. & P. & \\ C. & nC. & \\ \hline PC.V :: & nPC. & nV. \end{array}$$

SIt expositum Pondus P, quod, celeritate C, movere potis sit Vis V: & requiratur, ut Celeritate n C, moveatur.

Dico: Si, cæteris paribus, qua ratione augenda sit aut minuenda celeritas, eadem similiter augeatur vel minuatur Vis adhibita: expositum Pondus data celeritate movebitur.

Cum enim (propter idem utrobique Pondus) eadem sit Celeritatum ratio, cum illa quæ ex hac & Ponderum rationibus componitur, (per 4 hujus;) eadem erit & Virium requisitarum ratio; (per 27 hujus.) Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

NOtandum interim: Cum non ita in promptu sit, Vires pro arbitrio augere, atque Celeritatem motus minuere; non ita facile erit præsens Problema, atque illud quod proxime antecedit, magnis Ponderibus actu applicare.

PROP. XXX.

Data Vi, data Celeritate, motum efficere.

$$P. \quad \frac{1}{n}P.$$
$$C. \quad nC.$$
$$PC.V :: PC. \quad V.$$

SIt exposita Vis V, quæ Pondus P, celeritate C movere potis sit: requiratur autem, ut Celeritate n C fiat motus.

Dico: Si, cæteris paribus, qua ratione augenda sit aut minuenda Celeritas; eadem, vice versa, minuatur vel augeatur Pondus: Eadem Vi, data celeritate, movebitur. Puta, Pondus $\frac{1}{n}$ P, eadem Vi, celeritate n C movebitur.

Cum enim Ponderum $\frac{1}{n}$ P ad P, & Celeritatum n C ad C, rationes sint reciprocæ: Quæ ex his componitur ratio, Æqualitatis est; (per 6 hujus;) Adeoque & Virium requisitarum. per 27 hujus,

SCHOLIUM.

NOtandum denique; Ita calculum his Propositionibus institui, ac si in Medio Vacuo peragendus sit motus: Quare nec Resistentiæ in medio, vel Magnitudinis aut Figuræ rei Mobilis, habita est consideratio: Sed conditione hac, *Cæteris paribus*, tum hæ tum aliæ circumstantiæ sic excludi intelliguntur, ut vel nullæ sint, vel ita saltem comparatæ ut non immutent aut turbent rationes. Adeoque, ubi adsunt, opus erit (quo calculi Mathematici ἀκρίβεια conservetur, vel ab ea quam minimum recedatur,) ut earum vel accurata consideratio etiam habeatur, & calculo æstimetur; vel saltem, ut eo modo comparentur quo minimum turbentur reliquæ rationes.

CAP. II.

De Gravium Descensu, & Motuum Declivitate.

PROP. I.

Gravia, cæteris paribus, gravitant in ratione Ponderum. Et, universaliter, Vires Motrices quælibet, agunt pro Virium ratione.

$$P.G :: 2P.2G :: 3P.3G :: rP.rG.$$

PUta; Si Pondus ut P, Gravitat ut G: Etiam alterum P, ut alterum G gravitabit: tertium, ut tertium, *&c.* Adeoque 2 P, ut 2 G; 3 P, ut 3 G; & quotlibet P, ut totidem G, *&c.*

Est enim Gravitas, Vis Motrix; ejusque mensura, Pondus: (per 12, 13. Def. Cap. 1.) Movet igitur Gravitas, pro Ponderum ratione; per 18. Cap. 1. Et similiter in Motibus aliis ostendetur.

PROP.

PROP. II.

Grave, quatenus non impeditur, Descendit; seu propius ad Terræ Centrum appropinquat.

Et, universaliter, Vis quævis Motrix, secundum Directionem suam, quatenus non impeditur, procedit.

NAm (per Def. Gravitatis) Gravitas est Vis deorsum movens, seu versus Terræ Centrum. Hac igitur, quatenus non impeditur, feretur Grave, gravitate sua. per 11 cap. 1.

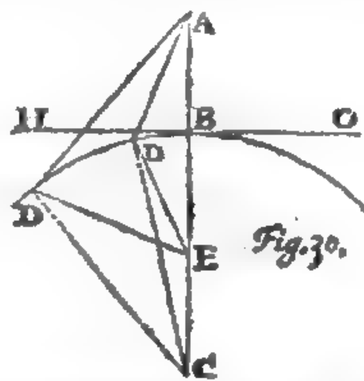
Et similiter in aliis motibus ostendetur.

PROP. III.

Grave tantundem Descendit, quanto fit Terræ Centro propius: Tantum Ascendit, quanto remotius.

Et, universaliter, Cujusvis Vis Motricis Progressus tantus est, quantum secundum Directionem suam movetur; Regressus, contra.

$$CD = CB. \quad CA - CD = CA - CB. \quad CD - CE = CB - CE.$$



SIt C, Terræ Centrum: unde ducantur æquales rectæ CB, CD. Continuetur CB ad A; & jungatur AD. Item, sumpto ubivis in CB, puncto E; jungatur ED. Dico; Grave ab A, puncto altiore, ad B vel D motum; tantundem Descendisse, quanto B vel D, minus quam A, distat à Centro C: Motum vero ab E, puncto quovis humiliore, ad B vel D; tantum Ascendisse, quanto B vel D, magis quam E, à Centro distat.

Est enim (per Def. Gravitatis) Descensus gravium, (seu Motus secundum Directionem suam,) Motus versus Centrum Terræ. Tanto igitur Descendisse dicetur Grave, quanto ad Terræ Centrum propius accesserit. Puta, quanto Brevior est CB vel CD, quam CA. Adeoque tanto Ascendisse, quanto fuerit contrario motu latum; hoc est, quanto à terræ Centro remotius abcesserit; puta, quanto Longior est CB, vel CD, quam CE. Quod erat propositum.

Adeoque: Quamquam AD vel ED recta, Longior sit quam AB vel EB; non tamen Altior seu major Descensus est vel Ascensus, Gravis per illam, quam per hanc lati.

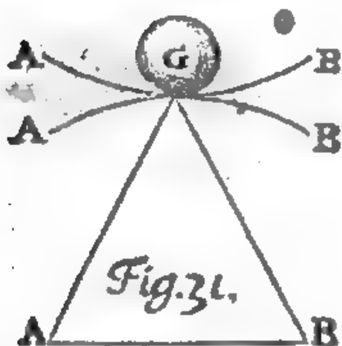
Quodque de Gravitate ostensum est, similiter de alia Vi Motrice intelligendum erit. Quod enim est, respectu Gravitatis, Descensio: idem est, respectu cujusvis Vis Motricis, Latio secundum Directionem suam: Et contra. per Def. 21. Cap. 1.

SCHOLIUM.

NOtandum interim; pro peripheria BD, indifferenter ut plurimum sumi Rectam Horizontalem BH; quæ, propter immensam Centri distantiam, & planorum quibus maxime versamur parvitatem, cum illa quasi coincidens haberi solet. Si quando tamen vel immensa plana tractanda veniant, vel accuratius philosophandum sit; secernenda erunt.

Necui interim mirum videatur; quod de Gravi, tanquam in uno Puncto, verba faciamus; cum interim Grave non sit nisi Corpus solidum: Monendum erit, considerare nos hic loci, *Grave* ut abstractum à *Magno*, (abstractione, ut loquuntur, Mathematica.) Consideramus utique, non quam Grande Corpus, nedum qua Figura sit, sed quanta Ponderis Vis hoc in puncto applicatur: Perinde habentes, mole magna sit, an parva, aut etiam nulla sed Punctulo vis illa insit; Item, planum sit, an rotundum; plenum, an excavatum; quod ita ponderat. Quamquam enim, in *Hydrostaticis*, aut alias etiam ubi de Medii resistentia agatur, aut alibi aliis de causis; magni intersit, qua mole quave figura, sit Grave ponderans: ea tamen omnia hic secludimus, (eadem libertate qua, post *Archimedem*, alii, de Planorum, Linearum, aut etiam Puncti gravitate philosophantur; quod & nos inferius facturi sumus.) Atque hoc ipsum ne à veritate Physica nimis abhorrere videatur; ostendetur, in sequentibus, (ubi de Centro Gravitatis agetur,) Gravis quantumvis magni vim totam ita distribui ut perinde omnino ponderando valeat atque si in unico illius puncto esset. Verum ea consideratione posthabita, quæ hujus loci non est; (quippe quum nondum definivimus Centrum gravitatis, nedum esse demonstravimus, aut quanta vis huic insit; adeoque, utut in Scholio, ubi laxius agimus, illius mentionem faciamus; in Demonstrationibus tamen non ea libertate utimur;) sufficit hic loci monuisse, nos id saltem hic inquirere, quid futurum sit, si hoc aut illo puncto tanta vis Ponderis (aut etiam quæ ponderis instar erit,) adhibeatur, undecunque demum fuerit. Quod & subinde sæpius, in sequentibus, intelligendum erit.

PROP. IV.



Eà, cæteris paribus, propendet Grave, vel ex pluribus gravibus Aggregatum; (Hoc est, ea ea potius fertur:) qua plus Descenditur: idque in eadem ratione qua plus Descenditur. Eaque magis repugnat, & in eadem ratione magis, qua plus Ascenditur. Et contra.

Qua vero æqualiter vel Descenditur vel Ascenditur; æqualiter vel Propendet vel Repugnat. Et contra.

Cæterisque motibus idem similiter accommodabitur. Ea potius feretur Mobile, (& in ea ratione potius,) qua magis secundum virium Directionem proceditur.

Cum enim tendat Grave (per def. Gravitatis) simpliciter *Deorsum*; adeoque, quam potest maxime; (Naturaliter siquidem agentia, non agunt ex delectu, sed cæco impetu pro summa virium:) Ea potius feretur, cæteris paribus, qua magis erit Deorsum, seu minus Sursum; puta per G A fig. 31. si hac declivius sit quam G B. (adeoque contrario motui magis repugnat:) Hoc est, qua plus Descenditur, quaque Ascenditur minus, (& contra; Qua minus Descenditur, quaque Ascenditur magis, ægrius feretur.) Et quidem (per 7 cap. 1.) in eadem ratione. Quod erat propositum.

Qua vero æqualiter vel Descenditur vel Ascenditur: (puta, ut Grave G indifferentur ad A vel B:) Æqualiter vel Propendet vel Repugnat. A Gravitate siquidem (per def. Gravitatis) non nisi Descensus ergo, vel omnino fertur, vel hac magis quam illac fertur.

Fig. 31. Contra vero; Qua, cæteris paribus, æqualiter vel Propendet vel Repugnat; æqualiter vel Descenditur vel Ascenditur. (Nam siqua vel magis Descenderet, vel minus Ascenderet; ea magis propenderet, minusve repugnaret; per jam Demonstrata.) Quod itidem erat propositum.

Et eadem ratione ostendetur conversa primæ partis; Nempe, qua plus propendet Grave, ea magis Descenditur; & qua plus repugnat, ea magis Ascenditur, &c. Cæteris paribus.

Et similiter in aliis motibus ostendetur.

PROP.

PROP. V.

Gravium Deſcenſus, invicem comparati, in ea ratione pollent, quæ ex Ponderum ratione & ratione Altitudinum Deſcenſuum componitur. Atque Aſcenſus ſimiliter.

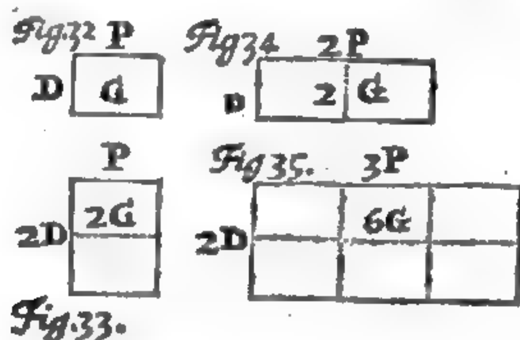
Adeoque; Si Pondera ſint æqualia; in ratione Altitudinum: Si Altitudines ſint æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera & Altitudines, vel utraque ſint æqualia, vel ſint Reciproce proportionalia; Æquipollent.

Et, univerſaliter, Virium Motricium quarumcunque Progreſſus Regreſſuſve, pollent in ratione, quæ, ex ratione Virium, & Progreſſuum Regreſſuumve ſecundum lineam Directionis Virium æſtimatorum, componitur:

$$\frac{\begin{array}{c}P.\\ D.\end{array}}{PD.}\,G :: \frac{\begin{array}{c}nP.\\ D.\end{array}}{nPD.}\,nG. \qquad \frac{\begin{array}{c}P.\\ D.\end{array}}{PD.}\,G :: \frac{\begin{array}{c}P.\\ mD.\end{array}}{mPD.}\,mG.$$

$$\frac{\begin{array}{c}P.\\ D.\end{array}}{PD.}\,G :: \frac{\begin{array}{c}nP.\\ mD.\end{array}}{mnPD.}\,mnG. \qquad \frac{\begin{array}{c}P.\\ nD.\end{array}}{nPD.}\,G :: \frac{\begin{array}{c}nP.\\ D.\end{array}}{nPD.}\,G.$$

$$\frac{\begin{array}{c}P.\\ D.\end{array}}{PD.}\,G :: \frac{\begin{array}{c}nP.\\ D.\end{array}}{nPD.}\,nG :: \frac{\begin{array}{c}P.\\ mD.\end{array}}{mPD.}\,mG :: \frac{\begin{array}{c}nP.\\ mD.\end{array}}{mnPD.}\,mnG :: \frac{\begin{array}{c}nP.\\ \frac{1}{n}D.\end{array}}{PD.}\,G.$$



PUta; Si Grave ut P, per D deſcenderis, valet ut G; etiam alterum P (cæteris paribus) tantundem deſcendens, valebit ut G alterum; tertium, ut tertium, &c. Adeoque *n*P, ut *n*G; in ratione Ponderum. per 7 cap. 1. Fig. 32, 33, 34, 35.

Item; Si Ponderis ut P, deſcenſus per D, valet ut G: ejuſdem Ponderis (cæteris paribus) per D alterum deſcenſus, tantundem valebit; adeoque ut alterum G: per tertium, ut tertium, &c. Adeoque per *m* D, ut *m* G; in ratione Altitudinum. per 7 cap. 1.

Si itaque Pondus P, per D deſcendens, valet ut G: etiam *n* P, per D deſcendens, valebit ut *n* G; Adeoque, per *m D* deſcendens, ut *m n* G; (ut oſtenſum eſt:) Hoc eſt; in ratione ex Ponderum & Altitudinum rationibus compoſita, (per 2 cap. 1.) Quod erat probandum.

Quæ quidem rationes ſi ſint Reciprocæ; quæ ex his componitur, Æqualitas eſt. per 4, 6, cap. 1.

Similiter de Aſcenſu judicandum.

Et, in alia quavis Vi Motrice, ſimiliter oſtendetur.

SCHOLIUM.

POſſet quidem hæc, & ſubſequentium Propoſitionum aliquot, in plures diſtrahi, & ſimiliter demonſtrari, atque in capite præcedente factum eſt, in Prop. 13, 14, 15, 16. item, 17, 18, 19, 20. item, 22, 23, 24, 25. Quum autem illud ſemel iterumque,

iterumque, perspicuitatis gratia, factum fuerit; malebam tum hic tum in sequentibus succinctius agere, ne videar vel nauseam creare, vel propositionum numerum præter necessitatem in immensum augere velle. Ob quam rationem etiam Corollaria Propositioni principali toties subnectere visum est.

Ex hac autem Propositione (quæ Descensuum Ascensuumque *Magnitudinem*, ex Gravium Pondere simul, & Motuum Altitudine, æstimat,) potissimum dependet, de Machinarum quarumvis Potentia, judicium.

PROP. VI.

Conjunctis invicem Descensu & Ascensu; Si præpollet Descensus, pro Descensu simpliciter habendi sunt: Pro Ascensu vero, si Ascensus præpollet: (Et quidem utrobique tanto, quanta est Præpollentia:) Sin æquipollent, pro Neutro.

Si vero vel plures Ascensus conjuncti sint, vel plures Descensus: tantundem simul pollent atque eorundem summa.

Idemque motis ab alia Vi Motrice, mutatis mutandis, accommodabitur.

Patet ex Prop. 8. cap. 1.

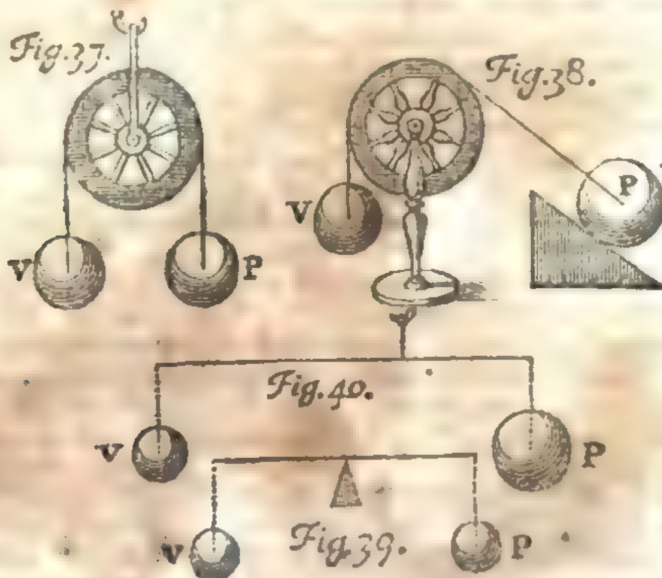
PROP. VII.

Comparata Gravia, cæteris paribus, ea ratione Ponderant (Descensum moliendo, aversando Ascensum,) qua pollent eorum si moveantur Descensus Ascensusve; sive, quæ ex Ponderum & Altitudinum rationibus componitur.

Idemque aliis motibus, mutatis mutandis, accommodabitur.

PUta; Tantundem ponderant Unum Pondo per Duo Spatia, atque Duo Pondo per unum Spatium, sursum deorsumve (eodem tempore) ferenda. (Quippe utrobique Duplum Unius Pondo per Unum Spatium.) Adeoque Duo Pondo per Duo spacia, quadruplum ponderabunt; Unius Pondo per Unum Spatium eodem tempore ferendi. Et in reliquis proportionibus similiter.

Cum enim ea ratione plus ponderant Gravia, cæteris paribus, qua sunt majoris Ponderis, (per 1 hujus;) quaque plus Descenditur, (per 4 hujus;) Ea ratione ponderabunt (utriusque ratione habita) qua pollent eorum (secundum utramque considerationem) Descensus Ascensusve: Hoc est, (per 5 hujus,) ea quæ ex Ponderum & Altitudinum rationibus componitur. Quod erat demonstrandum.



Exempli

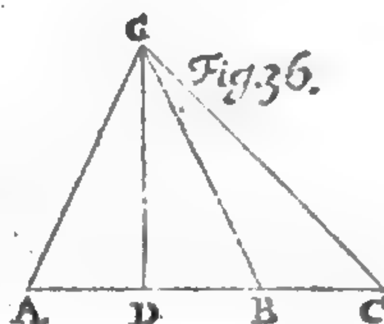
Exempli gratia: Si duo Gravia (seu Vires Motrices) V, P, sint, vel Pondere æqualia, & (pro situ quo ponuntur) æqualiter (dum moventur) aut Descensura aut Ascensura; vel, quod Gravius est, in eadem ratione (eodem tempore) minus sit Descensurum; Æquiponderabunt: (propter Descensus Ascensusve æquipollentes, per 5 hujus.) Sin alterius præpolleat, quæ ex Pondere & Altitudine oritur, Descensus magnitudo: præponderabit illud; atque in eadem ratione cum illa præpollentia. Puta; Descensus Ponderis 2 P per Altitudinem 3 D, cum Descensu Ponderis 3 P per Altitudinem 2 D comparatus, Æquipollebit; (propter $2 \times 3 = 3 \times 2$;) adeoque quæ sic movenda sunt, Æquiponderabunt. At, Descensus Ponderis 2 P per Altitudinem 4 D, Descensui Ponderis 3 P per Altitudinem 2 D, præpollebit, (propter $2 \times 4 > 3 \times 2$;) Adeoque, quod sic movendum erit, præponderabit. Et in aliis similiter. Fig. 37, 38, 39, 40.

PROP. VIII.

Si (cæteris paribus) ad duos (pluresve) motus æqualiter propendeat Grave, (vel ex pluribus conjunctis Gravibus Aggregatum,) neque ad alium ullum magis propendeat: Nullo feretur.

Sin ad unum aliquem, præ cæteris, maxime propendeat: illo (nisi alias impeditum) feretur.

Idem intellige, mutatis mutandis, de quacunque Vi Motrice.



PUta; Si ad A, B, æqualiter propendeat Grave G: neutra feretur. Nam (per 12 Cap. 1.) propensiones contrariæ (siquidem utrinque simul ferri non possit) cum sint Æquales, se mutuo perimunt. (Et similiter si ad plures adhuc motus æqualiter propenderet.) Sed nec alio feretur motu (siquis sit) cui minus propendeat; puta ad C. Nam (per eandem) huic præpolleret utravis duarum ad A, B, Propensio; & grave præriperet. Adeoque, si ad nullum magis propendeat, nullo feretur. Quod erat primo probandum.

Sin ad unum aliquem motum, puta ad D, quam ad cæterorum ullum, magis propendeat: singulis hæc præpollebit; Adeoque (nisi alias impeditum) hac feretur Grave: (per eandem 12 Cap. 1.) Quod itidem probandum erat.

SCHOLIUM.

AT interim, nequis metuat, imperfectam esse hanc Demonstrationem, eo quod, utut conatus seu Propensio ad D uni cuivis ex reliquis præpolleat, non inde tamen sequatur, quod præpolleret itaque & simul omnibus, cum tamen omnes huic adversentur: Monendum hic erit; non cum simul omnibus reliquorum comparandum esse conatum hunc ad D, sed cum singulis sigillatim; eo quod non simul omnibus illis ferri possit, sed nec pluribus simul, sed uno saltem ex omnibus: Adeoque, conatus ad D, si sigillatim singulis præpolleat, omnibus præripiet grave.

Secus autem omnino est, ubi plures consentientes conatus, uni alicui adversantur. Puta, si plura Minora gravia, uni alicui (singulis quidem, sed non omnibus) Majori, in opposita Libræ lance, contra-ponderarent. Quamquam enim Majus illud in una lance, reliquorum singulis in altera, præpolleat; Minora tamen hæc simul sumpta, Libram in suas partes trahent; Quia, cum simul omnes illi conatus minores in eundem motum conspirant, pro Conjunctis habendi sunt conatibus, non Disparatis. Contra quam hic obtinet.

Quodque hic monemus, alibi (siqui similes occurrunt casus) intelligendum erit.

PROP.

PROP. IX.

Gravis in superficie Sphærica, Terræ concentrica, utcunque moti, nullus est vel Descensus vel Ascensus.

Idem dicendum est, de Plano Horizontali; dummodo, propter Parvitatem plani & immensam à Centro distantiam, quasi cum illa Sphærica superficie coincidens habeatur.

Idem intellige, mutatis mutandis, in alia Vi motrice.

Fig. 30. CB=CD. CB−CD=0.

PUta; Si à B ad D, in superficie Sphærica, Terræ concentrica, moveatur grave: (vel etiam in Horizontali Plano, quousque hoc cum illa coincidens habeatur;) Nihilo fit vel Propius vel Remotius à Centro Terræ; (propter æquales CB, CD, Sphæræ radios:)

Adeoque (per 3 hujus) non vel Descendit quicquam vel Ascendit sic latum Grave. Quod erat propositum.

Idem in motis ab alia Vi Motrice, mutatis mutandis, similiter ostendetur. Nempe, nihil vel profecisse, vel contra, Vim illam; dummodo secundum Vis Motricis Directionem nihil vel processerit vel recesserit, utcunque alias moveatur.

PROP. X.

Gravis per rectam Horizonti perpendicularem Descendentis, Descensus tantus est quanta est ea recta per quam fertur. Et similiter Ascendentis Ascensus.

Adeoque Oblique vel Descendentis vel Ascendentis, tantus quanta est perpendicularis æque alta.

Idem intellige, mutatis mutandis, de alia Vi motrice.

ABC−BC=AB=ABC−DC.

Fig. 30. DC−EC=BEC−EC=BE.

PUta: Si in ABE recta, quæ ad Horizontalem rectam HB perpendicularis sit, (adeoque ad C centrum Terræ recta tendit, per 19 Elemen. 3.) feratur Mobile, ab A vel E, ad B: Manifestum est, tanto vel propius vel remotius à Centro fieri, quanta est ipsa AB, vel EB, recta qua fertur, (per 3 Elemen. 1.) Adeoque (per 3 hujus) tantundem vel Descendere vel Ascendere. Quod erat propositum.

Adeoque; Si utcunque Oblique, ab A vel E, feratur ad D punctum, quod tantundem atque ipsum B à Centro distet: tantundem utrobique vel Descendisse vel Ascendisse censendum erit; per 3 hujus: Hoc est (per modo demonstrata) quanta est AB, vel EB, perpendicularis æque alta. Quod item probandum erat.

Idem, mutatis mutandis, de motis ab alia Vi, similiter ostendetur.

PROP. XI.

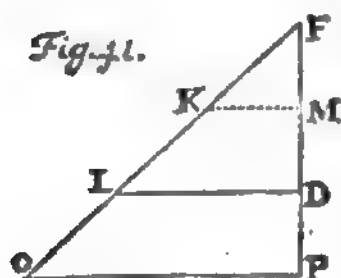
Gravis, per rectam utcunque declivem descendentis, Descensuum Altitudines sunt emensis Longitudinibus proportionales. Atque Ascensuum similiter.

(Intellige; Dummodo planum Horizontale, cum superficie Sphærica, Terræ concentrica, coincidens habeatur. Et similiter in sequentibus aliquot, quæ hinc dependent.)

Idem de alia Vi, mutatis mutandis, intelligendum.

FO.

FO. FL :: FP. FD.



SIt PO, Horizontalis recta; FP ad Horizontem perpendicularis; FO, inclinata recta, per quam vel Descendit vel Ascendit Grave; Et rectæ PO, parallela DL, (trianguli crura secans proportionaliter, per 2 Elem. 6.) Ergo: ut FO, ad FL, Longitudo ad Longitudinem; sic FP, ad FD: Hoc est, (per 3 & 10 hujus,) Descensus ad Descensum (si Deorsum,) vel (si sursum moveatur) Ascensus ad Ascensum. Quod erat propositum.

Idem, mutatis mutandis, de motis ab alia Vi quavis, similiter ostendetur.

SCHOLIUM.

Supponit hæc Demonstratio: Horizontalis rectæ PO, puncta omnia, ut P, O, æque-alta: adeoque PO rectam, quasi in superficie Sphærica, Terræ concentrica, jacere. Sin ἀκριβῶς loquamur, pro rectis PO, DL, substituendi sunt arcus circulares, Terræ concentrici; (& quidem pro singulis in FO punctis, mutabitur Perpendiculi positio, & inclinatio declivis rectæ:) Sed tantillum à Rectis differunt Arcus illi, ut pro Rectis tuto usurpari soleant, ob causas ad Def. 15. Cap. 1. memoratas.

PROP. XII.

Rectis, sive ad Horizontem perpendicularibus, sive utcunque inclinatis; Si per Æquales Longitudines feratur Grave: Descensuum Ascensuumve Altitudines, sunt Longitudinibus portionum æque-altarum reciproce proportionales.

Si, per Inæquales Longitudines ferantur: Descensuum Ascensuumve Altitudines, sunt in ea ratione quæ componitur ex ratione Longitudinum per quas fit motus, & reciproca Longitudinum portionum æque-altarum.

Adeoque; Si emensæ Longitudines, sint Longitudinibus æque-altis proportionales: Descensus Ascensusve sunt æquales.

Idem intellige, mutatis mutandis, de alia Vi motrice.

FO. FP :: FL = FP. FD :: FK. FM.

$mL. \quad L :: M = D. \frac{1}{m}D :: nM. \frac{n}{m}D.$ Fig. 41.

SIt FP, ad Horizontem recta; FO, inclinata: per FP, descendat P Grave: in FO, grave L; per Longitudinem FL, rectæ FP æqualem. Jungatur PO Horizontalis recta, (abscindens portiones FP, FO, æque-altas:) &, huic parallela, LD. Descensus itaque gravis P, tantus est quanta recta FP; gravis L, quanta est recta FD; (per 10 hujus.) Estque (per 2 Elem. 6.) ut FO (longitudo portionis obliquæ,) ad FL, vel huic æqualem FP, (longitudinem perpendiculi æque-alti:) Sic, vice versa, FP (altitudo Descensus, in perpendiculo descendentis, P,) ad FD (altitudinem descensus, oblique descendentis L, per longitudinem æqualem.) Idemque de Ascendentium per easdem LF, PF, Ascensibus, similiter ostendetur. Quod erat probandum.

Adeoque; Si per Inæquales Longitudines ferantur; (puta, per FP; & FK = ½ FP;) erunt Descensus Ascensusve, in ratione quæ ex illa, & longitudinum per quas feruntur, composita; (nempe FM = ½ FD.) per præced. Quod porro probandum erat.

Ideoque; (per 6 Cap. 1.) Si rationes illæ, (nempe, reciproca portionum æque-altarum, & directa longitudinum emensarum,) sint invicem reciprocæ; Hoc est, si longitudines emensæ, sint longitudinibus æque-altis proportionales; (Puta, FL, FD, longitudines emensæ, ipsis FO, FP, longitudinibus æque altis, proportionales:)

les:) Descensuum Ascensuumve Altitudines, æquales erunt. Quod erat ultimo probandum.

Idem viribus aliis motricibus facile accommodabitur.

PROP. XIII.

Gravium, per rectas utcunque ad Horizontem inclinatas, Descensus, in ea ratione pollent, quæ componitur ex rationibus & ponderum, & Longitudinum emensarum, & Reciproca Longitudinum æque-altarum. Atque Ascensus similiter.

Idemque motis ab alia Vi motrice facile accommodabitur.

Valent enim (per 5 hujus) in ratione ex Ponderum & Altitudinum rationibus composita: Hoc est, (per præcedentem,) ex rationibus Ponderum, & Longitudinum emensarum, & Reciproca Longitudinum æque-altarum. Quod erat probandum.

PROP. XIV.

Rectarum Declivitas Longitudine æqualium, est Altitudinibus proportionalis.

Rectarum Declivitas Æque-altarum, est Longitudinibus Reciproce proportionalis.

Adeoque; Rectarum quarumvis Declivitas, est in ea ratione, quæ ex ratione Altitudinum & Reciproca Longitudinum componitur.

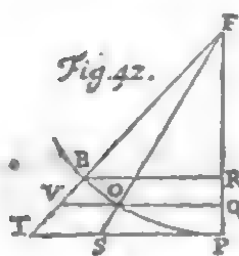
Atque; Si Rectarum Longitudines sint Altitudinibus proportionales; earum Declivitas æqualis est.

Quod & aliis perinde ac gravium motibus accommodabitur.

$$\frac{A}{L},\ D.\ \frac{A\quad A}{L},\ \frac{2}{1}D.\ \frac{A}{L\quad L},\ \frac{1}{2}D.\ \frac{A\quad A\quad A}{L\quad L},\ \frac{3}{2}D.\ \frac{A\quad A}{L\quad L},\ \frac{2}{2}D=D.$$

$$\frac{A}{L}.D :: \frac{mA}{L}.mD :: \frac{A}{nL}.\frac{1}{n}D :: \frac{mA}{nL}.\frac{m}{n}D :: \frac{mA}{mL}.\frac{m}{m}D=D.$$

A Puncto F, ducantur æquales rectæ quotlibet F P, F O, F B, quæ continuatæ occurrant Horizontali Rectæ (vel Plano saltem) in punctis P, S, T.



Rectarum F P, F O, F B, longitudine æqualium, Declivitates, sunt earum Altitudinibus, puta, F P, F Q, F R, proportionales. per Def. 17, 18. Cap. 1.

Rectarum F P, F O S, F B V T, æque-altarum, Declivitates, sunt earum Longitudinibus, hoc est, ipsis F P, F S, F T, Reciproce proportionales. per easdem Def. 17, 18. Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

(Quas quidem rationes easdem esse; adeoque geminam quæ habetur Def. 18. Cap. 1. *Majoris Declivitatis* definitionem tantundem valere, (& *Minoris* similiter;) hinc constat: Quoniam, Sive sumantur rectarum F P, F O S, portiones longitudine æquales F P F O, quarum Altitudines sint F P, F Q; Sive portiones æque-altæ F P, F S, quarum longitudines reciprocæ sunt F S, F P, hoc est F S, F O; Eadem utrobique provenit Declivitatum ratio. Nam, ut F P, ad F Q: sic est F S ad F O: per 2 Elem. 6. Similiter, in rectis F P, F B T; portionum æqualium F P, F B, altitudines F P, F R; & portionum æquealtarum F P, F T, longitudines reciprocæ F T, F P, hoc est F T, F B; proportionales sunt: per 2 Elem. 6. Item; rectarum F O, F B V, portionum æqualium F O, F B, altitudines F Q, F R; & portionum æque-altarum F O, F V, longitudines reciprocæ F V, F O, hoc est F V, F B; proportionales sunt: per 2 Elem. 6.)

Ideoque;

Ideoque; rectarum, puta F P, F V, Declivitates sunt in ratione F P ad F R: nempe in ratione quæ componitur, ex Altitudinum ratione, puta F P ad F Q; atque F Q ad F R, sive F V ad F B, hoc est F V ad F P, reciproca Longitudinum. Quod itidem demonstrandum erat.

Adeoque (per 6. Cap. 1.) Si rationes illæ (directa altitudinum, & reciproca Longitudinum) sint invicem reciprocæ; hoc est, si Altitudines sint Longitudinibus directe proportionales; Declivitates sunt æquales. Quod erat ultimo demonstrandum.

SCHOLIUM.

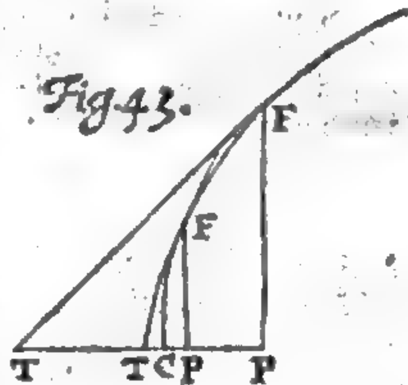
Notandum hic; Dummodo Terræ Centrum intelligatur tanquam infinite distans; eadem est ubique ejusdem rectæ, puta F B T, Declivitas; propter parallelam Perpendiculorum positionem: Si vero intelligatur ut in certa distantia finita; varia est in singulis punctis Declivitas: Quippe cum Perpendicula omnia in Centro coeant; quanquam eadem sit directio Motus, Motricis tamen vis directio subinde mutatur: adeoque alia erit illius ad hanc Positio, aliusque ad perpendiculum Angulus, puta in B quam in F puncto: Quæque ex præsenti Figura & demonstratione colligitur Declivitas, soli F puncto convenit; aliaque pro aliis, ut B, V, T, punctis similiter colligenda erit; demissis inde ad Terræ Centrum Perpendiculis.

PROP. XV.

Lineæ curvæ Declivitas, in singulis respective punctis, eadem est atque rectæ ibidem contingentis. Et superficiei curvæ, eadem atque ibidem contingentis Plani.

Quod aliis perinde atque Gravium motibus accommodabitur.

Sit F P, perpendiculum; F C, curva; F T, recta contingens. Cum eandem curvam in variis sui partibus varie declivem esse constet, (decliviorem alibi, alibi minus declivem:) Eandem dico, in F puncto, declivitatem F C curvæ, atque contingentis rectæ F T, censendam esse. Cum enim C F T angulus contactus (sive Circulorum, per 16 Elem. 3. sive Conicarum sectionum, per 32 Lib. 1. *Apollonii*; sive, quod similiter ostendetur, curvarum quarumvis;) sit vel nullius magnitudinis, (quod nos, peculiari Tractatu, *De Angulo Contactus*, multis ostendimus;) vel saltem, infinite exiguæ, (utpote qui sit vel minimo possibili rectilineo minor; quod apud omnes in confesso est:) eadem erit, in puncto F, Directio, sive F C curvæ, sive F T contingentis rectæ; (saltem, differentia quavis assignabili minor erit:) Adeoque, & eadem utriusque in illo puncto Declivitas. Quod erat propositum.



Idemque de superficiei curvæ punctis singulis, similiter ostendetur.

PROP. XVI.

Si ad duos motus ita sit comparatum Grave, cæteris paribus; ut, altero si feratur, Descensurum sit; Ascensurum, si altero: Ea præponderat, qua Descensurum est.

Si, altero latum, plus Descendet; altero, minus: Ea præponderat, qua plus descendet.

Si, altero, plus Ascendet; altero, minus: ea minus Repugnat, qua minus Ascendet.

Sin æqualiter, utrovis feratur, vel Descendet, vel Ascendet: Æquiponderat utrinque.

Contra vero: Qua, cæteris paribus, Præponderat, vel minus Repugnat; Ea vel plus Descensurum est, vel Ascensurum minus: Sin neutra; Æqualis utrinque futurus est vel Descensus vel Ascensus.

Fig. 31. PUta; Si in puncto G sit constitutum Grave; vel per G A, vel per G B ferendum: sitque G A, cæteris paribus, vel magis deorsum, vel minus sursum, quam G B: Per illam potius quam per hanc feretur. Sin æqualiter; neutra propendet magis. Et contra.

Sequitur ex 4 hujus.

PROP. XVII.

Ea præponderat Grave, cæteris paribus, & in ea ratione, qua motus est Declivior: Quaque est Acclivior, magis repugnat.

Adeoque, omnium maxime in perpendiculo.

(Quare & Ponderis simpliciter tanta Vis censeri solet, quantam in Perpendiculo habet.)

Quaque æqualiter vel Declivis est vel Acclivis, æqualiter vel Propendet vel Repugnat.

Suntque hæc perinde vel Gravium motibus, vel aliis, accommodanda.

Fig. 42. PUta; In rectis F P, F O S, F B T; ea ratione ponderat Grave, qua sunt Declives illæ rectæ. Est enim Declivitas in Reciproca ratione Longitudinum æquo-altarum; sive, quod eodem recidit, in Directa Altitudinum æque-longarum; (per 14 hujus.) Hoc est, in ratione Descensuum (Ascensuumve) cæteris paribus; (per 10, 12, hujus:) Adeoque, in ea ratione ponderant; per 4 hujus. Quod erat propositum.

Quare &, in perpendiculo, omnium maxime: ut quæ ex æque-altis Brevissima est; & ex æque-longis Altissima.

Et propterea (quod Definitionis instar esto) tantam Ponderis cujusvis Vim censemus, quantam in Perpendiculo habet.

Quodque de F T recta ostensum est; idem de curvæ F C puncto F, intelligendum est. Utpote cujus Declivitas, adeoque Tendentia deorsum, eadem est atque
Fig. 43. Contingentis rectæ F T: (per 15 hujus:) Adeoque & gravitatio; per 4 hujus.

SCHOLIUM.

Fig. 43. MOnendum tamen est: In rectarum, ut F T, punctis singulis, eandem intelligendam esse gravis Ponderationem, dummodo intelligatur Centrum Terræ tanquam infinite distans; adeoque, propter Perpendiculorum quasi parallelismum, eandem ubique Declivitatem. Si tamen (quod ad Prop. 14. monuimus) Centrum intelligatur in certa distantia finita; mutabitur, in singulis punctis, rectæ Declivitas; adeoque & Gravis, in eo puncto, ponderatio. Quo casu; quod de Curva modo dictum est, idem de recta pariter dicendum; Nempe eam esse Gravis, *in rectæ* F T *puncto* F, Ponderationem, quæ ex rectarum F T, F P, reciproca ratione colligitur: Atque in aliis punctis similiter judicandum. Quippe, ut in curvis, sic rectis, pro mutata in singulis punctis Declivitate, mutabitur & Ponderatio.

Verum cum Centrum soleat, tanquam infinite distans, reputari; & Perpendicula parallela; tuto solent (quoad sensum) & rectæ in singulis sui punctis pariter Declives æstimari. Quanquam (quod & subinde antea monuimus,) si tantæ longitudinis rectæ, Planave tantæ amplitudinis, consideranda veniant; ut notabile hinc discrimen emergat; etiam hujus mutatæ Declivitatis, adeoque & Ponderationis, habenda erit ratio.

PROP.

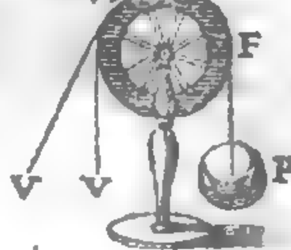
PROP. XVIII.

Si Grave, ubivis in eodem Perpendiculo, vel Incumbat, vel Dependeat, vel in ipso sustentationis puncto intelligatur, (vel cum ipso ita utcunque connexum, ut vel simul quiescant, vel simul æqualiter moveantur contrariæ vires; altera secundum, altera contra directionem suam:) Quo sustineatur, requiritur, æqualis Ponderi, vis Impediens; atque hæc sufficit.

Idemque intellige, mutatis mutandis, de quacunque Vi motrice.

INtelligatur Pondus (seu Vis qualibet Motrix) in P; atque ibidem vis Impeditiva motus V. Si Vis Ponderis (seu Motiva) Major sit; præpollebit: adeoque descendet (sive secundum Directionem suam feretur,) non sustinebitur. Si Æqualis, æquipollebit: adeoque sustinebitur Pondus. (per 11. Cap. 1.) Unde constat propositum. (Si Vis Impediens sit major; eo fortius impediet: Non requiritur tamen; quia æqualis sufficit.)

Idem ostendetur; Si ubivis in eodem perpendiculo (sive Directionis Linea) constituatur P; dummodo quantum Descendit (sive secundum directionem suam movetur) P, tantum deprimatur (seu contra directionem suam revellatur) contraria Vis V. Nam (per 5 hujus) æqualium virium æquales progressus æquipollent: Adeoque, cum sint contrariæ, (puta, secundum directionem suam altera, altera contra suam,) propter Impedimentum Momento æquipollens, non fit motus; (nedum si Impedimentum majus sit:) Fit autem; si minus valet impedimentum, per 11 Cap. 1.



Idem ostendetur; Si utcunque cum Pondere, seu Vi Motrice, ita connectatur Vis Impediens, ut contrarii motus (alter secundum, alter contra Virium Directionem,) sint æquales. Puta; Si intelligatur P Pondus, ex funiculo P F (brevi an longo perinde est) libere dependens, qui orbiculo circumpositus ex adversa parte pertingat ad V; ibique æquale Pondus seu Vis æqualis applicetur; ita quidem ut, descendente P pondere, tantundem ascenderet, vel contra directionem suam revelleretur, pondus seu Vis V; (sive contra; ascendente P, tantundem descenderet V, &c.) Nam (per 5 hujus) æqualium Virium, æquales progressus, æquipollent: Adeoque, contrariæ cum sint, non fiet motus; fiet autem, si Vis Impediens minor sit. Per 11 Cap. 1.

SCHOLIUM.

HInc sequitur; Gravia ex filo longiori an breviori dependentia, tantundem ponderare: Item, propius an remotius distens quæ incumbunt pondera, aut dependent; dummodo in eodem perpendiculo.

Hinc etiam sequitur; In construendis Machinis; Vectes, Juga, Fulcra, Funes, cæteraque Machinarum armamenta, tantæ firmitudinis intelligenda esse singula, ut oneri quod respective sustinent sint ferendo paria. Alioqui citius rumpetur Machina, vel incurvabitur, quam perficietur exspectatus motus.

PROP. XIX.

Gravia, cæteris paribus, in ea ratione gravitant, quæ componitur ex rationibus Ponderum & Declivitatum; (sive Ponderum & Altitudi-

num rectarum longitudine æqualium; vel Ponderum & reciproca Longitudinum rectarum æque-altarum.)

Adeoque; Si Pondera sint Æqualia; in ratione Declivitatum; Si Declivitates sint Æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera sint Declivitatibus reciproce proportionalia, (sive proportionalia Longitudinibus æque-altis;) æqualiter gravitant.

Idemque aliis Viribus Motricibus accommodabitur.

$$\begin{array}{ccccc} P. & nP. & P. & nP. & nP. \\ D. & D. & mD. & mD. & {}^{1}D. \\ \hline PD.\,G :: & nPD.\,nG :: & mPD.\,mG :: & mnPD.\,mnG :: & PD.\,G. \end{array}$$

PUta: Si Pondus P, in Declivitate D, gravitet ut G: Pondus *n* P, in eadem declivitate, gravitabit ut *n* G, (per 1 hujus:) Adeoque, in Declivitate *m* D, gravitabit ut *m n* G, (per 17 hujus:) Hoc est, in ratione ex Ponderum & Declivitatum rationibus composita, (per 2 Cap. 1.) Hoc est, (per 14 hujus,) ex Ponderum & Altitudinum rectarum Longitudine æqualium, vel ex Ponderum & reciproca Longitudinum æque-altarum. Quod erat probandum.

Corollaria constant, ex 4 & 6 Cap. 1.

Alia Demonstratio.

Fig. 41. Idem sic alias demonstrabitur. In F P ad Horizontem recta; sit Pondus D; & huic æquale L, in inclinata F O æque alta. Et connecti intelligantur Pondera D, L, filo flexili D F L, punctum F immobile ambiente: ut moto D, versus P, tantundem moveatur L versus F; & contra. Erit ut F P ad F O; puta ut *m* ad 1; sic vice versa, Descensus Ascensusve ponderis L in hac, ad Descensum Ascensumve ponderis æqualis D in illa; (per 12 hujus:) adeoque & (quæ huic proportionalis est, per 5 & 17 hujus,) Gravitatio Ponderis in L, ad æqualis ponderis D gravitationem. Hoc est, si D gravitat ut G; æquale pondus L, gravitabit ut *m* G; hoc est, in reciproca Longitudinum æque-altarum; sive in Declivitatum ratione.

Adeoque; Si Inæqualia sint L, D, pondera; Puta L = *n* D: gravitabit illud L, ut *m n* G: (per 1 hujus:) Hoc est, in ratione quæ ex Ponderum & Declivitatum rationibus componitur; sive ex ratione Ponderum & reciproca Longitudinum æque-altarum.

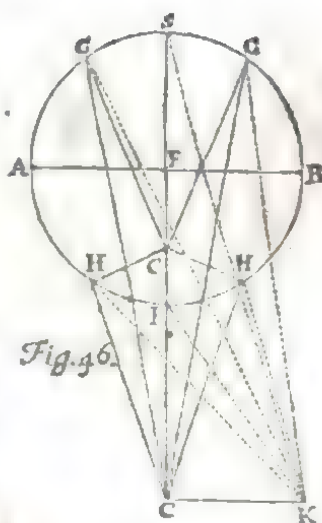
Quapropter; Si Pondera sint Declivitatibus reciproce proportionalia, sive Proportionalia Longitudinibus æque-altis; æque gravitant. per 6 Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

PROP. XX.

Si, circa Punctum quodvis (extra Terræ Centrum) in Horizontali recta, ut Centrum, Recta linea, manente uno extremo, altero describat Circuli peripheriam, in plano ad Horizontem sive recto, sive utcunque inclinato: Altissimum peripheriæ punctum, illud est, quod supra Horizontalem rectam est in recta ad illam perpendiculari; Humillimum, illud quod est in eadem perpendiculari infra Horizontalem rectam: Punctorum vero in peripheria intermediorum, illud Altius est, quod est supremo propius; Inferius, illud quod est propius infimo, seu à supremo remotius: Quæ autem æqualiter utrinque vel à summo vel ab imo distant; sunt æque-alta.

Idem, mutatis mutandis, aliis motibus accommodabitur.

Circa



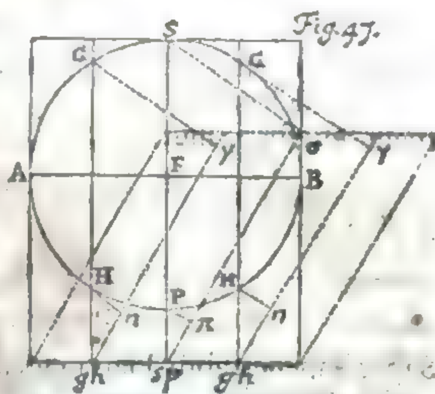
Circa Punctum F (quod Terræ Centrum non sit) in Horizontali recta AB, (cui ad rectos angulos insistit SFP recta,) conversa recta FA intelligatur peripheriam ASBP describere, in plano ad Horizontem vel recto vel utcunque inclinato. Erit, inquam, peripheriæ punctum Altissimum, S; Infimum, P: Intermediorum vero, ut G, H; quod propius ab S distat, ut G, Superius; quod propius a P, ut H, inferius; Quæque æqualiter vel ab S, vel à P distant; puta G, G; vel H, H; æque-alta.

Sit primum ASBP peripheria, in plano ad Horizontem recto: Adeoque Centrum Terræ in eodem plano, (per 19 Elem. 3.) puta, in C, extra Circulum. Ductis, ab assignatis punctis, lineis rectis, in C Terræ Centro coeuntibus: constabit propositum; per 8. Elem. 3.

Sin tantæ magnitudinis intelligatur Circulus ASBP, ut ad ipsum Terræ Centrum, vel ultra, pertingat; sitque C, verbi gratia, vel intra Circulum, vel in ipsa peripheria. Constabit propositum, per 7 Elem. 3.

Sit deinde, Circuli planum ASBP non ad Horizontem rectum, sed utcunque inclinatum: Adeoque nec Centrum Terræ in eodem Circuli plano, puta in C; sed extra planum, ut in K: Unde, ad obliquum Circuli planum, duci intelligatur KC perpendicularis, (punctum C, omnium in obliquo Circuli plano punctorum, proximum ad Terræ Centrum, adeoque omnium infimum designans.) Et jungantur tum SC, GC, HC, PC; tum SK, GK, HK, PK. Ostendetur, ut prius, (sive contingat C intra vel extra Circulum,) omnium ad C ductarum, longissimam esse SC; brevissimam, PC; item GC, longiorem quam HC; æquales autem tum GC, GC; tum HC, HC. Adeoque, sumptis quadratis; Quadratum SC, maximum; PC, minimum; GC, majus quam HC; Quadrata GC, GC, item HC, HC, invicem æqualia. Ideoque, addito communi augmento, quadrato CK; erunt quadratorum SC, CK, aggregatum, hoc est (per 47 Elem. 1.) quadratum SK, omnium maximum; quadratorum PC, CK, hoc est quadratum PK, minimum; quadratorum GC, CK, hoc est quadratum GK, majus quam quadratorum HC, CK, hoc est quadratum HK; quadratorum GC, CK, & GC, CK, hoc est quadrata GK, GK, invicem æqualia; & similiter, quadratorum HC, CK, & HC, CK, hoc est quadrata HK, HK, invicem æqualia. Ergo &, sumptis lateribus; Recta SK, omnium ad K ductarum, maxima; PK, minima; GK, longior quam HK; & GK, GK, item HK, HK, invicem æquales. Adeoque, punctum S, omnium à Terræ Centro Altissimum; P, Infimum; G, altius quam H; & G, G, vel H, H, æque-alta. Quod erat propositum.

Alia Demonstratio.



Idem ostendetur, Si intelligatur Centrum Terræ tanquam infinite distans. Nam, ductis à punctis S, P, G, H, ad subjectam rectam Horizontalem quamvis perpendicularibus: Si planum Circuli sit, ad Horizontem Rectum; constabit propositum, ex Prop. 15. Elem. 3.

Si vero planum Circuli ad Horizontem sit Obliquum. Intelligantur ab assignatis punctis S, P, G, H, demitti ad planum Horizontale quodvis subjectum perpendiculares $S\sigma$, $P\pi$, $G\gamma$, $H\eta$; & ab iisdem punctis, ad communem planorum Horizontalis & Inclinati Sectionem, totidem ad angulos rectos Ss, Pp, Gg, Hh; (& compleantur Triangula) Ostendetur, (ex 10 Elem. 11.) has illis (propter similia triangula $S\sigma s$, $P\pi p$, $G\gamma g$, $H\eta h$.) proportionales esse. Adeoque; quæ à communi Sectione *gsph* longius distant puncta in obliquo plano

plano posita, eadem ab illo Horizontali plano longius distabunt, eruntque (secundum perpendiculum) altiora. Ostenso igitur ut prius (ex 15 Elem 3.) à communi sectione *g s p b* (quæ ipsa est Horizontalis recta;) ostendetur etiam, ab ipso subjecto plano Horizontali *g s b γ ε*; punctum S, maxime; P, minime; G,G, & H,H, æqualiter; & G, magis quam H, distare. Unde constat propositum.

SCHOLIUM.

QUoniam (ut supra monitum est aliquoties) consideratur Terræ Centrum nunc quasi infinite distans, nunc autem tanquam in distantia finita; adeoque perpendicula, nunc ut parallela, nunc ut in puncto concurrentia. Visum est propositionem hanc secundum utramque suppositionem demonstrare.

Notandum interim in propositione diserte dici, *In plano ad Horizontem vel Recto, vel utcunque Inclinato*: Quoniam in Horizontali plano, hoc est, in plano Horizonti parallelo, nullum erit peripheriæ vel Altius vel Humilius punctum, sed æque-alta omnia.

PROP. XXI.

Descendens Grave, cæteris paribus, recta ad Horizontem Perpendiculari feretur: Ex obliquis vero, ea potius quæ minus est obliqua.

Ascendens; contra.

Ponderat autem (pro varia Ascensuum Descensuumve obliquitate) in ratione Rectorum Sinuum, Inclinationis ad Horizontem, sive Complementi Obliquitatis.

Idemque aliis motibus accommodabitur.

Fig.42. OStendetur enim (ex præcedente) rectarum longitudine æqualium, perpendicularem (ut F P) esse omnium altissimam; adeoque, & maxime declivem (per 14 hujus.) Hac igitur, præ cæteris feretur Descendens grave; contra vero, Ascendens. per 17 hujus.

Ex obliquis vero, ut F O, F B; similiter ostendetur (ex præced.) illam quæ minus est obliqua, Puta F O, altiorem esse; adeoque (per 14 hujus) & magis declivem. Ideoque (per 17 hujus) per hanc potius latum iri Descendens Grave; Ascendens, contra.

Utrobique vero ponderat Grave (Descensum promovendo, adeoque Ascensum impediendo) in ratione F P, F Q, F R, altitudinum rectarum Longitudine æqualium F P, F O, F B, (per 14 & 17 hujus.) Hoc est (quod ex Trigonometricis constat) in ratione Sinuum rectorum, angulorum Inclinationis F P S, F O Q, FBR; qui sunt angulorum Obliquitatis P F P, P F O, P F B, complementa. Quod erat propositum.

PROP. XXII.

Grave, quatenus non impeditur; per rectam Horizonti perpendicularem descendet.

Idem intellige, mutatis mutandis, in aliis motibus.

DEscendet enim, quatenus non impeditur; per 2 hujus. Et, hac præ cæteris; per præcedentem.

PROP. XXIII.

Super impenetrabili Plano Horizontali constitutum Grave, vel superficie Sphærica, Terræ concentrica; Gravitate sua non movebitur.

Idem intellige, mutatis mutandis, quæcunque sit Vis motrix. Nempe quum planum est Directioni virium ad angulos rectos.

Sit,

SIt, in B, Grave; impenetrabili Plano Horizontali HBO incumbens; vel superficiei Sphæricæ, quæ sit Terræ concentrica, DDB. Manifestum est (propter æquales Sphæræ radios) nullum in ipsa DDB Sphærica superficie punctum, (nedum quod supra ipsam est, aut etiam supra planum Horizontale,) propius à Terræ Centro distare, quam ipsum B punctum. Adeoque; si nec superficiem illam (sive Sphæricam, sive Horizontalem,) penetrare possit, (quod supponitur;) in nullas movendo partes, descendet, (per 3 hujus.) Cum itaque (per Def. Gravitatis) non nisi Descensus ergo, gravitate sua moveatur grave, nec possit (per jam demonstrata) descendere: Non movebitur, gravitate sua, sic constitutum Grave. Quod erat Demonstrandum. Fig. 30.

SCHOLIUM.

IDem ostenderetur de Gravi, in B, superficiei concavæ incumbenti quæ in B tangat Horizontale planum; seu cujus punctum infimum sit ipsum B. Item, de convexa Sphærica cujus Centrum sit ultra Centrum Terræ, quam tamen in B continget planum Horizontale; utpote cujus punctum infimum sit ipsum B. Idem verum est de superficie minoris Sphæræ quam sic contingat B: non autem ob hanc causam, quia punctum illud non sit reliquis altius, (est enim;) sed propter Prop. 8. hujus: quippe non est una aliqua declivitas, reliquis omnibus major.

Per *Impenetrabile planum*, &c. illud intelligimus, quod, ea saltem quæ adhibetur Vi, non penetrabitur; utut Vi majore penetrari possit.

Notandum est hic porro; Dummodo, ob immensam Centri Terræ distantiam, & expositi plani parvitatem, intelligatur Horizontale planum, cum superficie Sphærica, terræ concentrica, coincidere; adeoque ipsius puncta singula: quasi-æqualiter à Terræ Centro distare: perinde est, sive in B, sive in H, aliove Horizontalis plani HBO puncto, intelligatur Grave constitutum. Sin ἀκριβῶς consideretur; non erit illud, nisi unius B puncti respectu, planum Horizontale. Quare & in H constitutum grave, poterit ad B moveri gravitate sua; utpote punctum inferius.

PROP. XXIV.

Super impenetrabili plano ad Horizontem sive recto, sive utcunque inclinato, constitutum Grave; nec alias impeditum; per illam Plani rectam descendet quæ est rectæ Horizontali ad angulos rectos, deorsum. Quæ quidem recta, in erecto plano, est ipsum *Perpendiculum*; in obliquo plano, *Perpendiculi succedaneum*, appello.

(Adeoque; eadem est, Descensus Gravis in Declivi plano, ipsiusque Declivis plani, tum Declivitas, tum Obliquitas, & Inclinatio.)

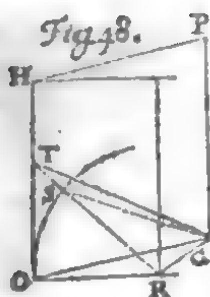
Et, universaliter; in quacunque superficie Declivi, illo præ cæteris ductu feretur (siquis sit,) qui est reliquis omnibus Declivior.

Idem intellige, mutatis mutandis, de motis ab alia quavis Vi motrice; Nempe secundum illam plani rectam feretur Mobile, (nisi alias impeditum,) quæ est ad angulos rectos illi rectæ quæ Lineam Directionis Virium ad angulos rectos secat.

SIt, in Declivis Plani puncto F, constitutum Grave; rectæque Horizontali AFB ad angulos rectos FP recta, in eodem Plano, deorsum. Ostendetur (ex 20 & 14 hujus) omnium quæ in illo plano sunt (nedum quæ supra planum) longitudine æqualium, ad F ductarum, Unicam FP rectam, maxime declivem esse. Adeoque (cum, propter impenetrabile planum, ad illas infra Planum ne transeat, impediri intelligatur) per ipsam FP (per 17 & 5 hujus,) nisi alias impediatur, descendet Grave. Quod erat demonstrandum. Fig. 46, 47.

Idem aliis superficiebus accommodandum erit, pro re nata; Nempe, cæteris paribus, illo semper ductu (siquis sit) latum iri Grave, qui est cæteris omnibus declivior: per 17 & 5 hujus. Sin talis nullus sit (reliquis omnibus declivior) ductus; non movebitur. per 8 hujus.

Alia Demonstratio.



Potest hoc idem demonstrari, ex Prop. 21. propter Obliquiorem alibi Descensum: hoc modo.

In Declivis Plani P G O H puncto G, constitutum intelligatur Grave: Atque, in eodem plano, tum Horizontalis recta P G (nempe ea recta secundum quam Horizontale planum, per G transiens secat Declive planum,) tum huic ad angulos rectos G O: Indeque ad subjectum Planum Horizontale H O R, demissa perpendicularis G R: (Per quam itaque, nisi impediatur, descendet Grave; per 22 hujus.) Intelligatur autem, ob duritiem Declivi Plano subjectam, impediri ne penetret. Dico per G O descensurum Grave.

Cum enim duo Plana Horizontalia, adeoque Parallela, alterum in H O, alterum in P G, secet idem declive planum P G O H (per constructionem:) erunt H O, P G, parallelæ rectæ. per 16 Elem. 11.

Item, propter P G rectam, rectis G O, G R, ad angulos rectos, (per constructionem,) erit ad planum O G R recta, (per 4 Elem. 11.) Adeoque & (huic parallela) H O, eidem O G R plano recta erit, (per 8 Elem. 11.) rectisque O G, O R, ad angulos rectos; per 3 Def. Elem. 11.

Et, si Centro R in plano H O R, ducatur per O, peripheria O S; eam contingens H O, extra peripheriam jacebit; per 16 Elem. 3.

Si itaque ad rectæ H O, aliud quam O, punctum quodvis T, ducatur G T recta, & R T jungatur; secabit hæc peripheriam; Puta in S. Et, juncta G S, erit (propter G R ad planum Horizontale rectam; adeoque angulos G R O, G R S, æquales rectos; & R O, R S, æquales radios; rectamque G R communem) S G recta, æqualis rectæ O G; & angulus S G R æqualis angulo O G R; per 4 Elem. 1.

Est autem angulus T G R, major angulo S G R (parte sui,) ergo & (huic æquali) angulo O G R major est. Adeoque Descensus obliquior est per G T, quam per G O.

Cum igitur Grave, quam potest recta ad Centrum descendat, (per 21 hujus;) per G O potius quam G T feretur.

Atque similiter de aliis ejusdem Plani rectis ostendetur. Adeoque à fortiori, de rectis ultra planum, aut etiam curvis.

Ideoque (cum nec Planum penetrare possit) per rectam G O (nisi alias impeditum) descendet Grave in G, (ut qui reliquis rectior est Descensus:) Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Hanc Demonstrationem præcedenti subjungere visum est, propter ea quæ apud Mechanicorum Scriptores de Obliquitate Descensuum occurrunt, Angulique Obliquitatis magnitudine. At priorem ego prætulerim, quæ ex Declivitate, hoc est, ex Altitudine rectarum longitudine æqualium, vel Longitudine æque-altarum, dependet: tum ut simpliciorem; tum, præcipue, quoniam quod ex Obliquitate hac oritur Gravitationis impedimentum, Augmento longitudinis Descensuum æque-altorum proportionale est; & non Obliquitatis Angulo; (quod ex jam dictis & post dicendis manifestum erit:) Adeoque illi potius, quam huic, ut veræ causæ referendum.

Hinc autem sequitur; Eandem esse Descensus Gravis in Declivi Plano, ipsiusque Declivis Plani, ad Horizontem Inclinationem; (Nam, per Def. 5 & 6, Elem. 11. Angulus G O R est Inclinationis Mensura, tum rectæ G O, tum plani P G O, ad Horizontem H O R:) Adeoque eandem utriusque tam Obliquitatem, tam Declivitatem. Nempe idem Obliquitatis Angulus O G R; eademque Declivitas sive rectæ G O ad G R, ratio.

PROP.

PROP. XXV.

Obliquitas motus, ea ratione minuit Gravitationem, (adeoque Descensum impedit, adjuvat Ascensum;) qua Longior est obliqua recta, illam determinans, quam perpendicularis æque-alta; sive Secans Anguli Obliquitatis, quam Radius.
Idemque aliis motibus accommodabitur.

NAm (per 17 hujus) Grave, pro varia Declivitate, gravitat in ipsa Declivitatis ratione; hoc est (per 14 hujus) in reciproca ratione rectarum æquealtarum. Puta, qua ratione longior est F S vel F T obliqua, quam F P perpendicularis æque-alta; sive (quod in Trigonometricis dicitur) F S vel F T Secans Anguli Obliquitatis P F S vel P F T, quam F P Radius; Ea minus gravitat in F S vel F T ferendum grave, quam in F P. Quod erat probandum. Fig. 42.

Adeoque (per 17 Cap. 1.) in eadem ratione minus Descensum promovet, vel Ascensui repugnat; sive (quod eodem recidit) in ea ratione Descensus Obliquitate impeditur, & facilitatur Ascensus. Quod itidem probandum erat.

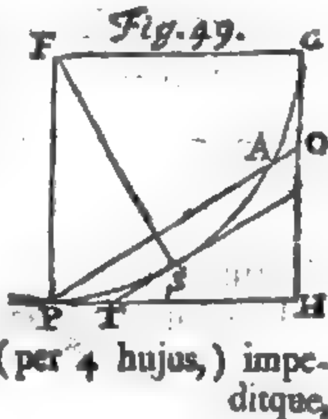
PROP. XXVI.

Obliquatio Plani in quo fit Motus; in eadem ratione minuit omnium in illo ferendorum Gravitationem: ea nempe quam ipsa Plani Obliquitas postulat.
Et in aliis motibus similiter.

SIt in Obliquo Plano G O T, recta quævis G T. Atque à puncto G, demittatur, ad Horizontale Planum T O R, perpendicularis G R. Atque, ad communem Planorum intersectionem T O normalis G O; (ut sit G O R Inclinatio Plani, per Def. 6. El. 11. & O G R Obliquitas.) Si igitur intelligatur G O T planum, super Horizontalem rectam O T erectum esse; erit utriusque rectæ G O, G T, communis Altitudo G O: In eodem vero Plano Obliquato, Communis Altitudo est G R. Ideoque, qua ratione G R brevior est quam G O, (hoc est, Radius quam Secans Anguli Obliquitatis,) eadem ob Plani Obliquationem minuitur Altitudo, (adeoque Declivitas, & Gravitatio, per 14. & 17 hujus) sive per G O, sive per G T, ferendi Gravis. Quod erat probandum. Fig. 48.

PROP. XXVII.

Grave, situ Declivi ferendum, sponte sua movebitur: Situ Horizontali (sive secundum Superficiem Sphæricam Terræ concentricam) Vi quantumvis exigua: Situ Acclivi; ea Vi movebitur quæ Impedimento ex Acclivitate (cum Pondere comparata) orto præpollet.
Idem aliis motibus accommodabitur.



PEr Declivem ductum, ut F P, F S, (adeoque Descendentem, per Def. 16. Cap. 1.) sponte sua (nisi alias impeditum,) feretur grave; per 2 hujus. Per Horizontale Planum, vel superficiem Sphæricam, Terræ concentricam, ut P H, (cum nullus sit vel Descensus vel Ascensus; per 9 hujus;) nec sponte sua movebitur, (per 23 hujus;) nec tamen motui adversatur, (per 4 hujus;) adeoque Vi quantumvis exigua movebitur, per 11 Cap. 1. Per Acclivem ductum, ut P F, P O, (adeoque Ascendentem, per Def. 16. Cap. 1.) motui adversatur Gravitas, (per 4 hujus,) impeditque,

ditque, (per 8 vel 10 Cap. 1.) Huic tamen Impedimento Vis præpollens, movebit; per 11 Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

SCHOLIUM.

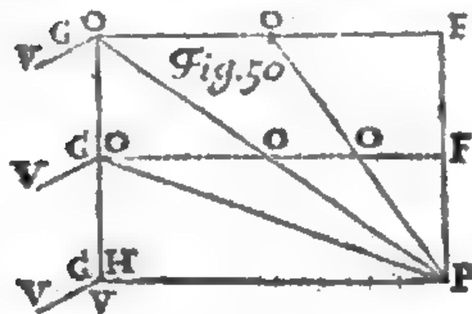
NOtandum vero, tum hic, tum toto hoc Capite, (aut etiam alibi,) ubi variam planorum motuumve, sive Declivitatem, sive Acclivitatem (quodque hinc oritur motus vel Adjumentum vel Impedimentum) consideramus: Nullam omnino habitam esse rationem vel Resistentiæ medii, vel Asperitatis aut scabritiei planorum aut superficierum super quibus movetur, & siqua sunt ejusmodi Impedimenta alia: Sed solius, quod ex Obliquitate Descensuum Ascensuumve oritur, Impedimenti vel Adjumenti: tanquam si in medio vacuo peragendus esset motus, nullaque aliunde remora adveniret. Quippe illa omnia sunt huic considerationi plane extrinseca; & seorsum, si opus est, perpendenda. Quanquam igitur, verbi gratia, super Horizontali Plano, aut etiam aliquantum Declivi, nonnisi magna Boum aut Equorum Vi trahatur Plaustrum: Non tamen illud ex plani Positione oriri censendum est; sed ex aliis insuper superandis motus impedimentis, quorum hic rationem non habemus.

PROP. XXVIII.

Datum Pondus, data Vi, movere; pro varia motuum Acclivitate.
Idem Intellige, de quavis alia Vi Impediente, per aliam quam Directionis suæ lineam revellenda.

V . G :: *n* V . *n* G.

SInt PH, FG, rectæ Horizontales; FP, GH, perpendiculares. Atque intelligatur elevandum Pondus, in P: & huic affixum Filum flexile, seu Funiculus, PFGV; puncta fixa F, G, ambiens: & in V, Vis Motrix applicata. Adeo ut, quantum trahatur funiculi extremum, secundum Vis applicatæ directionem GV; tantundem elevetur, contra directionem suam, pondus P, in PF perpendiculari. Atque intelligatur Vis V, Vi ponderis P æqualis. Æquipollebit igitur, (per 7 hujus;) Adeoque sustinebit; &, si vel augeatur, vel Ponderis Vis minuatur (recta PF vel tantillum reclinata, puta in situm PO, per 25 hujus;) movebit. per 9, 11. Cap. 1.



Requiratur autem, ut idem vel Æquale Pondus, Vi minore moveatur, (Nam de Æquali, vel Majore, jam constat:) Puta Vi *n* V; quæ nempe sit ad V, in minoritatis ratione data *n* ad 1.

Dico; Si aptetur angulo PFG, recta PO, quæ sit ad PF, ut 1 ad *n*, (nempe, in reciproca ratione virium,) & movendum Pondus, super Acclive Planum, in PO recta, per POGV Filum flexile trahatur: Vis data *n* V, ponderi P, in hoc situ Æquipollebit; &, si tantillum adhuc augeatur Obliquitas, movebit.

Nam, propter PO ad PF, in ratione 1 ad *n*; Si P in PF Gravitet ut G, idem in PO gravitabit ut *n*G, (per 14 & 17 hujus:) Ideoque, cum illi æquipolleat Vis V, huic æquipollebit Vis *n* V, (per 17 Cap. 1.) Adeoque (per 25 hujus) si fiat PO adhuc vel tantillum longior, Vis præpollebit, adeoque movebit; per 9, 11, Cap. 1.

PROP. XXIX.

Datum Pondus, per Datam Acclivitatem movere.
Idem intellige, de quavis alia Vi impediente.

V . G ::

V . G :: *m* V . *m* G .

Reliquis, ut prius, constructis: Intelligatur Vis V, æquipollens Ponderi P, per Acclivitatem P O movendo. Et requiratur, ut per Acclivitatem Majorem (nam de Minore satis constat) puta P F, moveatur. Fig. 50.

Dico; Si, qua ratione Brevior est P F quam æqui-alta P O, eadem augeatur Vis V; æquipollebit; Adeoque, si ulterius augeatur; movebit.

Nam, ut P O ad P F; puta ut *m* ad 1; Sic, vice versa, Gravitatio ponderis P in P F, ad ejusdem gravitationem in P O: (per 14 & 17 hujus.) Adeoque, cum Vis ut V, æquipolleat huic; Vis ut *m* V, æquipollebit illi; (per 17 Cap. 1.) &, aucta, movebit. per, 11. Cap. 1.

PROP. XXX.

Dati Vi, in Acclivitate data, motum efficere.
Idem intellige, mutatis mutandis, quæcunque sit Vis impediens.

V . P :: *n* V . *n* P .

Cæteris, ut prius, constructis: Intelligatur Vis V, Ponderi P, per Acclivitatem datam P O movendo, æquipollens. Et requiratur, ut data Vi, *n* V, (puta quæ sit ad V, ut *n* ad 1,) fiat motus. Fig. 50.

Dico; Si pro P pondere, substituatur *n* P, (quæ nempe sit ad P pondus, in eadem ratione qua data Vis *n* V ad V;) huic æquipollebit data Vis (per 17 Cap. 1.) Adeoque, Si tantillum adhuc minuatur Pondus; Vis præpollebit, adeoque movebit. per 9, 11. Cap. 1.

SCHOLIUM.

Si porro in tribus proxime præcedentibus Problematis, Celeritatis ratio habenda erit; ut non tantum motus utcunque fiat, sed & data celeritate fiat. Huic satisfactum erit ex Prop. 29, 30, Cap. 1. Nempe invento (per tres Propositiones præcedentes, respective,) quo pacto motus fieri possit aliqua saltem celeritate: Qua ratione augenda erit celeritas; eadem augenda erit, in Prop. 28. hujus inventa longitudo rectæ P O; &, in Prop. 29, inventa Vis; &, in Prop. 30, eadem minuendum erit inventum Pondus.

PROP. XXXI.

Grave, ex puncto fixo libere dependens; Si in Perpendiculo constituatur; manebit: Si extra Perpendiculum, ad Perpendiculum feretur, (Et quidem per arcum circuli in plano ad Horizontem recto.)
In plano autem ad Horizontem obliquo; ad eam rectam feretur quæ est Horizontali rectæ ad angulos rectos; (quam *Perpendiculi Succedaneum* appello:) & in ea si ponatur, consistet.
Idem intellige, mutatis mutandis, in alia Vi Motrice.

Sit F G, Horizontalis recta; F P, perpendicularis. Atque ex F puncto fixo, dependeat, per F P filum, pondus P. Adeoque; Si extra perpendiculum quocunque moveatur, puta ad S; describet (propter eandem fili longitudinem) arcum circuli P S, (saltem aliquod in superficie Sphærica, centro F descripta, punctum S designabit, quod P S circuli arcum terminabit:) Est autem (per 20 hujus.) Punctum P (utpote omnium in illa peripheria, aut etiam Sphæra; infimum) ipso S humilius. Non igitur ad S feretur; per 2 hujus. Quod demonstrandum erat. Fig. 49.

Si vero extra P constituatur: Propter punctum P omnium infimum, ductumque S P continue descendentem, (per 20 hujus:) omniumque maxime (utpote per circuli peripheriam in Sphæra maximi, in perpendiculari plano positi,) per 24, 25, 26. hujus; eo feretur; per 4 & 8 hujus. Quod itidem erat demonstrandum.

Idem similiter ostendetur: Si in FPG plano ad Horizontem obliquo ferendum intelligatur Grave; propter punctum P omnium in illo plano infimum, per 20 hujus: ductumque circuli, maxime Declivem, per 24, 25, 26. hujus. Quod erat ultimo demonstrandum.

SCHOLIUM.

Supponit hæc Propositio, Filum *non Extensile*, sed non & *Inflexile*; adeoque diserte procedit de Gravi Pendulo; quod itaque humilius intelligitur, saltem non altius, quam F punctum fixum. Verum quidem est; si esset in eadem PG peripheria, supra Horizontalem rectam FG continuata; descenderet hoc ad Perpendiculum; at non statim hac de causa, neque statim secundum peripheriam; sed secundum Perpendiculum, ut Grave adhuc absolute liberum, (non tantum libere Pendulum,) per 21 hujus: donec, extenso ad suam longitudinem filo coerceretur ne diutius recta descenderet, sed secundum Peripheriam, Vi Propositionis hujus.

Sin Filum illud etiam Inflexile intelligatur; ubicunque in ea peripheria (extra perpendiculum) ponatur; (sive supra sive infra Horizontalem lineam,) secundum peripheriam descendet, circa Centrum motus rotando. Verum illud hujus loci non est; sed ad Libram spectat, & infra demonstrabitur.

PROP. XXXII.

Grave pendulum, in Perpendiculo constitutum, Vis quantumvis exigua, à Perpendiculo dimovebit.

Idem de Perpendiculi Succedaneo, in Obliquo plano, intelligendum. Deque aliis motibus, mutatis mutandis.

Fig. 49. EX puncto F, in Perpendiculo FP, dependeat ex Filo Pondus P: Quod, ex perpendiculo motum, describat PSG Circuli quadrantem; Cui circumscribatur FH quadratum. Et exponatur, secundum directionis lineam PH Horizontalem, Vis quantumvis exigua: puta, quæ sit ad Vim Ponderis P, ut *n* ad 1 (hoc est, si intelligatur Vis V, Ponderi P in perpendiculo æquipollens, sit exposita Vis *n*V.) Et ponatur (ex præscripto Prop. 28. hujus.) PO recta, ita declivis, ut Ponderi P in PO movendo æquipolleat Vis *n*V. Nempe, sumatur, in HG recta, recta HO quæ sit ad PH in ratione virium exposita *n* ad 1; & jungatur PO. Cum enim sit, ut Vis ad Pondus, sic Altitudo HO in perpendiculo (quæ est Directio Ponderis) ad HP lineam directionis Vis Moventis: Exposito Ponderi per PO movendo, æquipollebit Vis exposita; adeoque aucta vel tantillum Obliquitate, Movebit, per 28 hujus. Est autem (propter SPH angulum contactus, minorem angulo rectilineo OPH, per 16 Elem. 3.) Obliquior Ascensus per PS quam per PO. Movebit igitur datum Pondus, Vis Exposita in PS peripheria. Quod erat probandum.

Alia Demonstratio.

Idem demonstrabitur ex 15 hujus: Propter eandem PS peripheriæ in puncto P declivitatem, atque Contingentis rectæ PH; quæ cum Horizontalis sit, constabit propositum, per 27 hujus.

PROP. XXXIII.

Grave Pendulum datum, quousque extra perpendiculum, data Vi, movebitur; determinare.

Fig. 49. COnstructis ut prius: Dico; Per arcus PA (quem abscindit PO recta) Semissem PS, nec ultra, Exposita Vi motum iri Pondus P.

Nam, quæ PA arcum (adeoque & subtensam, per 30 Elem. 3.) bisecat è Centro recta FS, secat subtensam PA ad angulos rectos; per 3. Elem. 3. Huic igitur subtensæ, hoc est PO rectæ, parallela est quæ Circulum in S tangit ST recta,

ćta, (per 16 Elem 3.) Adeoque & pariter Obliqua, (per 29 Elem. 1.) Cum itaque magis adhuc ſit ad Horizontem Obliqua, arcus PS pars quælibet (ipſo S puncto excepto:) minus autem, pars quælibet arcus SA; (quod ex 15 hujus demonſtrabitur:) ad S, nec ultra, movebitur Pondus P, ab ea Vi quæ illi, per Acclivitatem PO movendo, æquipollet; per 28 hujus. Quod erat determinandum.

PROP. XXXIV.

Grave Pendulum datum, ad datam altitudinem movere, quanta Vis requiritur, determinare.

IN eadem Figura: ſi velim ad S punctum uſque moveri grave Pendulum P; Fig. 49.
ſumatur arcus PA, duplus expoſiti PS; junctaque PA continuetur donec occurrat, in O, perpendiculari rectæ GH. Cumque arcus PS particulæ minus acclives ſint quam TS vel PA, accliviores autem particulæ omnes ultra S; Si ſumatur (per 29 hujus) Vis ea quæ ſufficiat movendo Ponderi P dato in acclivitate PA, ſeu PO, ſufficiet eidem movendo per arcum PS. per demonſtrata ad Prop. præced.

CAP. III.

De Libra.

DEFINITIONES.

I. Libra (*qua & Bilanx dicitur*) *notiſſimum eſt in Officinis Inſtrumentum, quo Pondera explorantur.*

BIlanx, *à binis lancibus,* nomen habet. Græcis σταθμὸς dicitur, ab ἵστημι *pendeo.*

Libræ nomen, an à Græco λίτρα deſcendat, an hoc ab illo à poſterioribus Græcis deformatum ſit; non convenit inter Criticos.

Qui originem Græcam eſſe volunt; à λίτρα, quæ exigua vel Ponderis vel Monetæ ſpecies erat, (ſic enim Siculi *Obolum* dixerunt,) poſteriores Græcos ejus alteram ſignificationem deduxiſſe ſentiunt, (qua vel *Pondo* ſignificet, ſeu duodecim Unciarum Pondus; vel ipſum etiam Ponderationis Inſtrumentum:) atque hinc fluxiſſe Latinorum Libram: ut à τέρετρον, *Terebrum,* (niſi quis hoc à *Tero* malit) T in B mutato.

Qui Latinam malunt originem; *Libram* quaſi *Liberam* dici volunt, (quod ipſum à *Libet* videatur deſcendiſſe, niſi repugnaret primæ ſyllabæ quantitas; fortaſſis igitur, ab ἐλεύθερος, *Liber*; ut, ab ἐρυθρὸς, *ruber*; mutato θ in B; ſic à πλῆθος, *plebs*; &, ab οὖθαρ, *uber*; unde & noſtrum *udder*, mutato θ in *d*; ſicut, à θυγατὴρ, *daughter*:) propter Æquilibrii in utramque partem indifferentiam: Inde autem Græcorum poſteriorum λίβρα, hoc ſenſu, deformatum; ſicut à multis aliis vocabulis Latinis, Græca deſcendiſſe, certum eſt.

Multas habet partes; puta *Jugum, Axem, Trutinam, Examen, Lances, &c.*

II. *Libræ* Jugum, *Vectis eſt ſeu Trabs oblonga, cujus ab extremis dependent* Lances. *Quod & tanta firmitatis eſſe intelligitur, ut appenſis ponderibus ſuſtinendis par ſit, nec eorum pondere vel rumpatur vel incurvetur.*

JUgum, à *Jungo*, dicitur, (ſicut, eodem ſenſu, à ζεύγω, ζυγὸν,) quod Lancium appenſiones interjungat. Niſi quis immediate à ζυγὸν, *Jugum* dici malit; ſicut à ζεύγω, ζεύγνυμι, *Jungo.*

III. Axis,

III. Axis, *est Jugi medio transversim infixus, qui jugum sustinet, & circa quem rotatur: Jugum in duo Brachia dirimens.*

IV. *Jugi* Brachia, *utrinque ab Axe ad Appensionum puncta porriguntur.*

V. Lances *à Brachiorum extremis libere dependent, quibus immitti solent Pondera; alteri quidem, Notum; alteri, Explorandum.*

VI. Trutinam *appellant Manubrium sive Scapum, quo Axis extrema utrinque sustinentur, &, cum Axe, Jugum ipsum.*

TRutinam vero ipsam sustinet vel tenentis Manus, vel Uncus aliquis fixus, aliudve sustentaculum.

Dicitur autem à Græco *τρυτάνη*, quod idem significat; & hoc, à *τρύω, tero, attero*; quod pondere sustinendo Teratur. Usurpatur etiam [illegible] pro Bilance tota.

Solet autem (nec incommode) Axis, Jugo transfixus, utplurimum Jugo firmiter conjungi, tanquam ipsius pars; ejusque extrema, intra duo in infima parte Trutinæ foramina, libere moveri. Quanquam & possit Axis ipsius Trutinæ pars fieri, ita ut, circa ipsum immotum, libere rotetur Jugum.

Examen *dico Lingulam, quæ medio Jugo insistens ad angulos rectos, indicium est vel Æquilibrii, dum intra fissuram perpendicularis Trutinæ continetur; vel Præponderantiæ, prout ad hanc aut illam partem extra vagatur.*

HUc, credo, respicit illud *Persii* Sat. 1.

——— *Examenve improbum in illa*
Castiges Trutina. ———

Fig. 51.

Dici videtur (ab *Exigo, Exegi, Exactum,*) *Examen* quasi *Exagmen*: Atque hinc *Examino*. Alii tamen, ab *ἅμμα vinculum, ligamen* (quod ab *ἅπτω ligo,*) deducunt *Amen* sive *Amentum*, quod *Lorum* significat, (illud speciatim quod mediis Jaculis annectebatur, quo melius in hostes jacerentur:) Atque hinc *Examen*; tum ubi *Examen Libræ* significat, (quod Filum esse volunt seu Funiculum, quo Trutina regitur;) tum ubi significat *Examen Apum*; quæ quasi vinculo societatis connectuntur: Sicut & ipsum *Apum* nomen ab antiquo *Apio*, atque hoc ab *ἅπτω* deducunt, *quod se invicem pedibus alligent*: Quasi huc respiciat *Virgilianum* illud, *Georg.* 4.

Atque illæ pedibus connexæ ad limina pendent.

VIII. Æquilibrium *vero dicimus, quum ad Libram contraponderantia, æquiponderant.*

QUodque in Libra speciatim *Æquilibrium* dicimus, idem est in aliis Machinis, sive contrariarum virium quibuscunque complicationibus, virium *Æquipollentia*: quæ tamen & Æquilibrium, (translatione, à Libra, facta) non raro dicitur; quum æquipollent contrariæ vires in aliis non minus Machinis, quam in ipsa Libra: Pariter atque *Propensus, Propensio*, aliaque cognata Vocabula, quanquam prima significatione Libram spectent; Metaphorice tamen de quibuscunque ad motum Inclinationibus usurpari solent.

Fig. 51. In adjuncto Schemate: A B, est *Jugum Libræ*; per cujus medium C, transit *Axis* X S, dirimens Jugum in duo Brachia C A, C B; unde, ex punctis A, B, dependent duæ *Lances* L, L. Axis autem extrema X, S, sustinet X T S *Trutina*; quæ ipsa, in T, sustinetur; per cujus fissuram mediam, *Examen* C E huc illuc transit (dum A B Jugum circa Axem X S rotatur,) vel *Æquilibrium* indicans, vel in hanc aut illam partem Præponderantiam.

Estque hæc vulgaris Officinarum *Libra*.

PROP.

PROP. I.

Dum Axe fixo sustinetur Libra; duo utrinque Brachia (cum suis Ponderibus) contra-ponderant.

NAm, fixo Axe XS, non potest (propter inflexile Jugum AB, per Def. 2. hujus) Brachium A (Onusque suum) Descendere, quin Ascendat (cum suo) Brachium B; neque hoc Descendere, quin Ascendat illud. Fig. 51.

PROP. II.

Si utrinque porrecta duo Libræ Brachia, (una cum Lancibus, reliquaque siqua est armatura,) invicem æquiponderant: tantundem est, Librationem quod spectat, acsi nullius essent Ponderis: Axis vero reliquæque Libræ firmitatem quod attinet, tantundem valent, quantum est simul utriusque (cum armatura sua) Pondus.

PUta; Si Brachium CA tantundem ponderando valeat, ad sui Depressionem, adeoque (propter inflexile Jugum) Elevationem contrarii CB; quantum in contrarium valet brachium CB, (nempe ad sui Depressionem, cum elevatione contrarii CA:) tantundem simul valent atque si nullius essent Ponderis.

Nam (per Prop. 8. Cap. 1.) contrarii conatus, cum invicem æquentur, se mutuo destruunt, seu nullis æquipollent. Nempe, *Librationem quod spectat*; quatenus scilicet contra-ponderant duo Brachia.

Ad *Axis* vero (ne ruat) *Jugique* (ne rumpatur, aut incurvetur) firmitatem requisitam; ipsiusque *Trutinæ*, *Fulcrive* quo sustinetur, Vim: non modo non nullis æquivalent Brachiorum pondera; sed tantundem valent, quantum est utriusque simul Brachii Pondus, & siquid ultra est oneris.

Quippe, hoc respectu, non sunt conatus contrarii; sed utriusque deorsum: cui quidem communi Conatui, cum obstet tum Axis permanentia, Fulcrique quo sustinetur, tum Jugi vis inflexilis, &c. & quidem sigillatim Singula: illi par esse debet singulorum firmitas. per 18 Cap. 2.

Def. IX. Libram *igitur* Mathematicam *consideramus, ad instar unius inflexilis Lineæ Rectæ, utrinque quantum opus est porrectæ, librandis Ponderibus adhibitæ.*

DUmmodo enim, positis in Æquilibrio Libræ Brachiis, eorum Pondera nullius instar habeantur; poterit similiter tum Libræ Magnitudo, tum Figura ipsa tuto negligi, ut solius Longitudinis habeatur ratio, ob ea quæ inde dependentia post tradentur.

X. Centrum Libræ, *dicimus, Punctum illud quod eam dirimit in Brachia invicem Æquiponderantia.*

Æ*Quiponderantia*, dico, potius quam *Æque-gravia*; quoniam fieri potest, ut, quæ sunt (absolute considerata) æque-Gravia, possint, ratione situs seu Positionis, inæqualiter Gravitare vel Ponderare; quod tum ex sequentibus patebit, tum supra ostensum est, Prop. 10, 11. Cap. 2.

XI. *Adeoque* Brachia *sunt, quæ utrinque a Centro Libræ porriguntur; quæ vel Longitudine, vel saltem Ponderatione, Æqualia intelliguntur.*

XII. Appensionum, *vel* Applicationum Puncta, *dicimus, ea Libræ Puncta, in quibus vel actu sunt, vel inde libere dependent appensa Pondera; vel saltem (in eodem ad Centrum Terræ Perpendiculo) directe vel incumbunt, vel subjiciuntur.*

NOtandum igitur; siquando inæqualiter utrinque à Centro libræ distant Applicationum Puncta; adeoque quæ inter Centrum & illa puncta interjacent Rectæ, sint inæquales: intelligendæ erunt illæ rectæ, (si ullius omnino censeantur ponderis,) vel æqualiter utrinque à Centro porrigi quantumlibet, etiam ultra ipsa Appensionum seu Applicationum puncta; vel ea saltem quæ brevior est recta, in eadem ratione ponderosior censenda erit; ut una tota toti reliquæ æquiponderet: quo possint tum Brachia invicem æquiponderare (secundum Def. 11.) tum tota Libra quasi nullius Ponderis censeri, (vi Prop. 2 hujus:) ut applicatorum solummodo Ponderum comparandorum habeatur ratio. Siquid autem Inæqualitatis revera fuerit in Brachiorum Ponderatione; id appensis Ponderibus accensendum erit.

XIII. Centrum Æquilibrii, *appellamus, illud Libræ punctum, quo si intelligatur suspendi Libra; quæ utrinque ponderant, invicem Æquiponderant.*

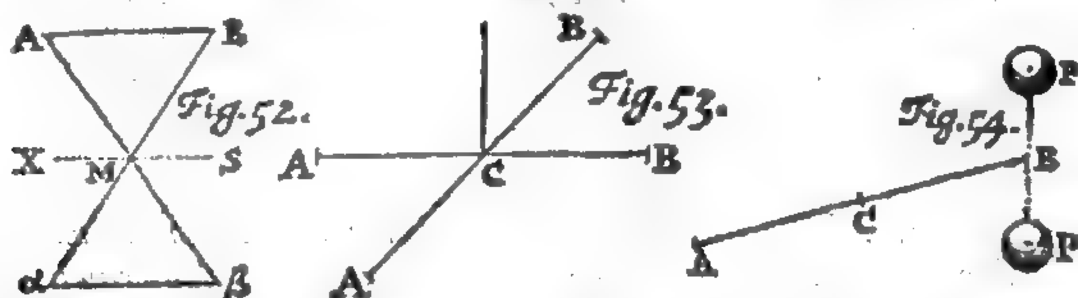
XIV. Perpendiculum Æquilibrii, *appello, quod per Centrum Æquilibrii transit Perpendiculum, seu recta ad Terræ Centrum.*

XV. Centrum Motus, *appello, Punctum circa quod immotum, rotatur Mobile.*

XVI. Axem Motus, *appello, Rectam, circa quam immotam rotatur mobile.*

XVII. Rotari *vero dicimus mobile circa Punctum fixum, vel quiescentem Rectam; quando ita movetur, ut ipsius puncta singula tum inter se, tum ab illo seu puncto fixo, seu Recta quiescente & singulis in ea punctis, eandem perpetuo distantiam conservent.*

Fig. 52. PUta; Circa punctum M rotari dicetur ABM triangulum modo ita utcunque moveatur (retenta magnitudine & specie Trianguli, adeoque eadem inter se punctorum omnium positione,) ut ipsius unumquodque Punctum, ut A, eandem ab M distantiam conservet. Adeoque circa M punctum, vel dextrorsum aut sinistrorsum, vel prorsum aut retrorsum, vel in quamvis plagam rotari potest; puta,



in situm $\alpha\beta M$. At circa Rectam XS, nonnisi prorsum vel retrorsum rotabitur. Si enim ipsius puncta singula, ut A, aliter moveantur quam Peripherias describendo, quorum omnium planis XS Axis, rectus sit; non eandem ab ipsius punctis singulis distantiam conservabit.

Sive autem intra ipsam Figuram (planam solidamve) sive extra, sive in ambitu, intelligantur punctum M aut Axis XS circa quæ Figura rotetur; perinde est.

XVIII. Planum Æquilibrii, *dicimus, quod ita per Grave incedit planum, ut, quæ utrinque sunt segmenta Gravis, æquiponderent.*

QUum *quæ utrinque sunt Segmenta* dico; id etiam comprehensum volo, si utrinque nihil ponderet; puta, Si punctum vel linea tota sit in ipso plano.

XIX. Axem Æquilibrii, *appello, Rectam per quam quodcunque incedit planum, est Planum Æquilibrii.*

XX. Centrum Gravitatis, *appello, Punctum, per quod quæcunque incedit recta, est Axis Æquilibrii: Adeoque & quodcunque incedit Planum, est planum Æquilibrii.*

Hoc

HOc utique posterius, ex priori sequitur. Nam quodcunque Planum per illud transit, ejus aliqua recta per illud transit; quæ quidem si sit Axis Æquilibrii, etiam & Planum illud erit Æquilibrii planum; per Def. præced.

PROP. III.

Manente Libræ Centro; sibi permissa Libra non movebitur.
Intellige; de Libra jam Quiescente, (& similiter in sequentibus:) contra vero, si jam sit in motu.

SIt Libræ A B, Centrum C. Hoc, inquam manente; sibi permissa Libra, (hoc est, nullo Pondere, Vi, aut Impulsu quovis alio quam Gravitate sua, in has aut illas partes adacta,) non movebitur. Fig. 53.

Cum enim C A, C B, Brachia (Æquiponderantia, per Def. 11 hujus,) invicem contra-ponderent (per 1 hujus:) propter contrarios Conatus æquales, non fiet motus: per 12 Cap. 1. Nempe, si Libra jam Quiescat. Et similiter inde ostendetur, quod non Sistetur, si jam sit in motu.

SCHOLIUM.

VAlet hæc demonstratio, in quocunque Libræ ad Horizontem situ, (puta; vel Horizontali, vel utcunque inclinato;) Siquo enim situ G B, C A, non æquiponderant; non erit, in eo situ, punctum C, Libræ Centrum; Sed aliud aliquod; de quo procedet demonstratio.

Et quidem, secundum Mathematicum rigorem, in certa à Terræ Centro distantia finita, non erit ejusdem A B Libræ, idem in omni situ Centrum C. Sed, in situ Declivi, à puncto medio (quod in situ Horizontali est ipsum Libræ Centrum) pro varia Declivitate varie removebitur Centrum, versus declivius extremum. Adeoque, declivior semissis, si ex puncto medio sustineri intelligatur Libra, reliquo præponderabit; totaque Libra, hoc situ, posita, suapte sponte ad situm Horizonti perpendicularem ferri debet: (Contra quam aliquibus visum est, Nempe, ad situm Horizonti parallelum ferri debere; contra quos fuse disputat *Guid-Ubaldus*, in Mechanicis, Capite *De Libra*, Prop. 4.) Quod seorsim, si opus videbitur, demonstratu non est difficile. Et fiet, post Propositionem 14.

Verum si intelligatur Libra tanquam à Terræ Centro infinite distans; adeoque & Perpendicula invicem Parallela: omnino idem censendum est in quocunque situ Centrum; nempe punctum C, libræ A B medium. Quo modo in Mechanicis assumi solet.

PROP. IV.

A puncto quovis libere dependens Grave, aut eidem directe vel subjectum vel incumbens; tantundem gravat illud quo ita sustinetur punctum, atque si in illo ipso puncto intelligeretur. Tantundem scilicet quantum est ipsius Pondus.

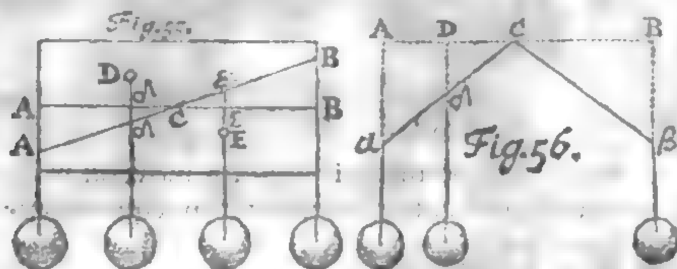
Idem intellige de Vi quavis alia, mutatis mutandis.

NAm, verbi gratia, ex puncto B, libere dependens P pondus, ad perpendiculum feretur gravitate sua, (per 31 Cap 2.) De quo sic posito, sive alias directe vel subjecto vel incumbente pondere P, (sive propius sive remotius absit, modo in eodem perpendiculo,) constabit propositum; per 18 Cap. 2. Fig. 54.

SCHOLIUM.

ESque hæc Propositio non exiguæ utilitatis: ut quæ ad certam æstimationem reducit Pondera, sive non in eadem recta, sive non ad Jugum rectum applicata: Puta, si intelligatur planum aliquod A D B; atque in eo Libra A C B recta: Fig. 55.

cta: Ex variis autem hujus plani punctis (sive in ipsa Libra, sive supra, sive infra Libram) appensa Pondera. Quæ ex A vel B Libræ punctis libere dependent Pondera, tantundem gravant ea puncta atque si in illis essent. Quod, ex D puncto



supra Libram; tantundem gravat huic subjectum libræ punctum δ, atque si in illo esset. Quodque, ex E puncto infra Libram; tantundem gravat punctum ε, cui directe subest, atque si ibidem esset. (Intellige semper, ita conjuncta esse puncta D, δ, vel E, ε; ut non possit D deprimi nisi depresso δ; aut E deprimi, nisi depresso ε.) Suntque ipsa A ε δ B, quæ *Applicationum Puncta* dicimus; Def. 12. hujus.

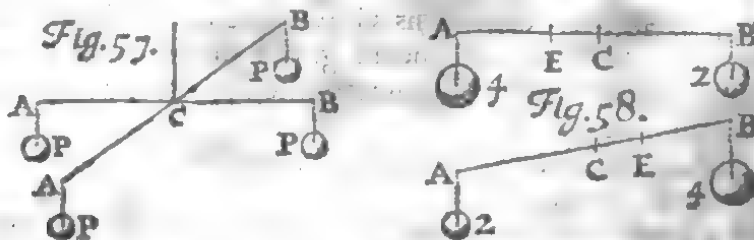
Fig. 56. Similiter; Si libræ Jugum inflexum intelligatur, aut incurvatum, ut α C β. Quum nos *Libram Mathematicam* definivimus *Lineam Rectam*, &c. Def. 9 hujus: Pro Jugo illo inflexo, substituere licet quamlibet in eodem plano rectam; (eam potissimum, quæ, per Centrum motus transiens, est Horizonti parallela;) atque ad hanc, ut Libram, exigere singulorum appensorum Ponderum momenta: Puta, quæ ex α δ β punctis dependent perinde ac si ex A D B punctis dependerent.

PROP. V.

Si Æqualiter Gravetur utrumque Libræ Brachium; Æquiponderabunt sic gravata Brachia: Et sibi permissa Libra sic gravata, manente Centro, non movebitur.

Sin altero alterum magis Gravetur; hoc præponderabit, atque deorsum (nisi alias impeditum) feretur: Et simul utraque Ponderando æquipollebunt excessui præpollentis.

Fig. 57. NAm, si æquiponderantibus utrinque Brachiis, ut C A, C B, (per 11 Def. hujus;) accedant adhuc æqualia gravamina, ut P, P, (sive ex appensis Ponderibus, sive adhibita Vi, vel Impulsu quovis, aliasve;) Æquales etiamnum manebunt Ponderationes; (quippe Æqualia æqualibus addita, Aggregata faciunt Æqualia.) Ideoque contrariæ cum sint, (per 1 hujus;) nullis æquipollent; & Motum propterea non efficiunt, per 8, 12. Cap. 1.



Sin magis gravetur alterutrum; Præponderabit, (per 9 Cap. 1.) Adeoque deorsum feretur, per 12 Cap. 1. Æquipollent autem Ponderando, simul sumpta, excessui præpollentis. per 8 Cap. 1.

SCHOLIUM.

POnderando, inquam; nempe quatenus invicem contra-ponderant, Libram in hanc aut illam partem trahendo. At quantum ad Axem ipsum, & quodcunque quo Libra sustinetur fulcrum; pro contrariis habenda non sunt, sed pro conjunctis

junctis oneribus: sicut ad Prop. 2. ostensum est. Quod in sequentibus item Propositionibus intelligendum erit; nisi siquando contrarium insinuetur.

PROP. VI.

Si Ponderibus utcunque gravata Libra, Centro Æquilibrii sustineatur: Neutrum prægravatur Brachium.

Et contra; Punctum illud Libræ, quo si sustineatur sic gravata libra, neutrum prægravatur Brachium; est Centrum Æquilibrii.

Patet, ex Definitione Centri Æquilibrii.

PROP. VII.

Manente Centro Æquilibrii, utcunque gravatis Brachiis, Libra non movebitur.

SIt A B, Libra. Atque intelligatur Centrum Æquilibrii, vel idem cum C centro libræ, (nempe si æqualiter vel graventur, vel non graventur Brachia;) adeoque constabit propositum, ex 4 & 5 hujus: Vel ab ipso aliud, ut E. Hoc, inquam, manente; Libra non movebitur. Fig. 58.

Cum enim (per Def. Centri Æquilibrii) E A, E B, prout jam gravantur, invicem æquiponderant; Nec possit (propter inflexilem libram) alterutrum descendere, manente E, quin alterum Ascendat: contrarii conatus invicem æquales, motum non efficient. per 12 Cap. 1.

SCHOLIUM.

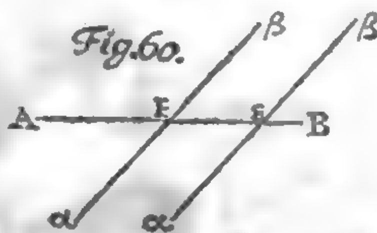
QUod autem de Gravitate dicimus, (sive in hac sive in aliis Propositionibus,) deorsum movente; idem de quavis alia Vi movente secundum Directionem suam, intelligendum erit; juxta Def. 21. Cap. 1.

PROP. VII.

Manente in eadem à Centro Terræ Altitudine, Centro Æquilibrii; neque Descendere censenda est gravata Libra, neque Ascendere, utcunque moveatur. Et contra; dum neque Descendere, neque Ascendere censenda est gravata Libra; Centrum Æquilibrii manet æque-altum.

Et similiter de aliis motibus à Vi motrice quavis, mutatis mutandis, intelligendum erit.

INtelligatur A B Libra, utcunque gravata, in situm α β moveri: Manente (primum) Centro Æquilibrii in eodem E puncto.



Cum igitur (propter E Centrum Æquilibrii,) partes E A, E B, in quocunque situ, adeoque in toto progressu, invicem Æquiponderant: Sitque, propter inflexilem Libram, unius Ascensus cum Descensu alterius perpetuo conjunctus: Erit Ascensus Descensui Æquipollens, (nam sicubi præpollet alter, ea præponderabitur; per 7 Cap. 2.) Nulli igitur vel Descensui vel Ascensui, simul æquipollent. per 8 Cap. 1. Quod erat demonstrandum.

Idem deinde ostendetur; etiamsi non in eodem E puncto maneat Centrum Æquilibrii; sed in aliud quodvis æque-altum transferatur, ut ε.

Libræ siquidem in situ α ε β, intelligatur parallela in α E β; nempe dum intelligatur Terræ Centrum infinite distans: Si vero in distantia finita, intelligatur circa

Centrum Terræ rotari Libra $\alpha\iota\beta$, in situm $\alpha E\beta$; ut sit ιE arcus circuli, terræ concentrici; & similiter $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, &c. Probabitur utcunque (vel ex 33 Elem. 1. Vel ex Def. Rotationis) singula ipsius $\alpha\iota\beta$ puncta, punctis singulis in $\alpha E\beta$ respective sumptis, æque-alta, (& similiter de Ponderibus appensis siqua sint, &c.) Adeoque totam $\alpha\iota\beta$, toti $\alpha E\beta$, hoc est (per jam demonstrata) ipsi AEB, æque altam. Quod porro demonstrandum erat.

Atque hinc conversa facile constabit.

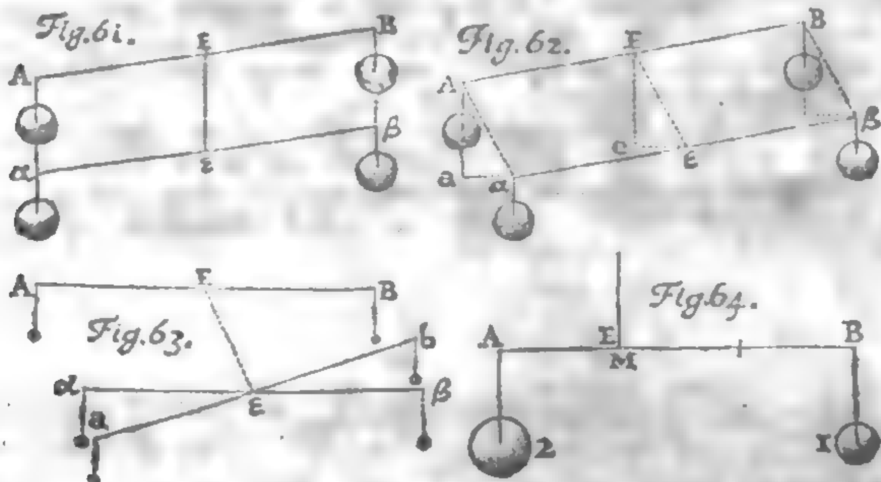
Et similiter de quavis alia Vi motrice, mutatis mutandis, idem ostendetur.

PROP. IX.

Tantundem vel Ascendere vel Descendere censenda erit, utcunque gravata Libra; quantum vel Ascendit, vel Descendit Centrum Æquilibrii.

Quæque de Gravium Ascensu & Descensu dicta sunt; pariter de motis ab alia quavis Vi motrice, mutatis mutandis, intelligenda erunt.

Fig. 61, 62, 63. SIt AB Libra utcunque gravata: E, Centrum Æquilibrii; quod intelligatur ad ι moveri; Descensu sive recto sive utcunque obliquo: Dico, tantundem censendam esse descendisse Libram cum suo quantocunque gravamine; & quidem, sive eodem manente, sive utcunque mutato, ad Horizontem situ.



Primo; Descendat E ad ι descensu recto; retinente Libra eandem ad Horizontem inclinationem, adeoque manente sibi ut prius positæ Parallela; puta in $\alpha\beta$. Manifestum est, tantundem descendisse libram totam. Junctis enim tum $E\iota$, tum aliis quibusvis punctis respectivis, ut $A\alpha$: Propter æquales parallelas rectas EA, $\iota\alpha$; sunt & (per 33 Elem. 1.) æquales item & parallelæ $E\iota$, $A\alpha$; punctorum E, A, descensus mensurantes (per 10. Cap. 2.) qui itaque æquales sunt. Et similiter ostendetur de quovis alio Libræ puncto: adeoque de ipsa Libra.

Secundo; Manente, ut prius, eadem Libræ ad Horizontem inclinatione, descendat E ad ι, descensu utcunque Obliquo. Reliquisque ut prius constructis; demittantur ab E, A, ad Horizontales rectas ιe, αa, perpendiculares Ee, Aa, (descensus punctorum EA mensurantes, per 10 Cap. 2.) Et, demonstrato, ut prius, æquales esse & parallelas, $E\iota$, $A\alpha$; æquales item erunt (propter similia Triangula) Ee, Aa; adeoque punctorum E, A, descensus æquales. Et similiter de quovis alio Libræ puncto ostendetur, adeoque de Libra ipsa.

Tertio; Descendat E ad ι, descensu quovis sive recto sive obliquo; & simul utcunque mutetur Libræ ad Horizontem Inclinatio: Puta non ut in $\alpha\iota\beta$ situ parallelo, sed ut in $a\iota b$ alio utcunque situ. Etiam sic tantundem descendisse Libram, quantum Æquilibrii Centrum, sic ostenditur. Si intelligatur Libra in $\alpha\iota\beta$ situ parallelo; tantundem descendisse, jam ostensum est, (in primo & secundo Membro hujus:) Sed (per præcedentem) æque-alta censenda est Libra in situ

$a\iota b$,

$\alpha\,\iota\,b$, atque in $\alpha\,\iota\,\beta$: Ergo & sic tantundem descendisse Libra, atque ipsum E Centrum Æquilibrii, censenda erit. Quod erat demonstrandum.

Quodque de Descensu ab E ad ι, ostensum est; similiter ostendetur de Ascensu ab ι ad E. Nempe tantundem Ascendere censendam esse Libram, atque Centrum Æquilibrii. Quod porro demonstrandum erat.

Idem alii cuivis Vi Motrici, mutatis mutandis, facile accommodabitur.

PROP. X.

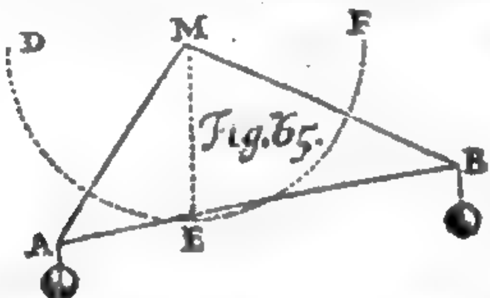
Si Centrum Æquilibrii sit in eodem ad Terræ Centrum perpendiculo cum Centro Motus; in neutram partem præponderabit; sibique sic permissa Libra non movebitur. Sin extra perpendiculum constituatur; ad perpendiculum, infra Centrum Motus, feretur Centrum Æquilibrii, (nisi alias impeditum,) in plano ad Horizontem recto; saltem quam potest omnium maxime Declivi.

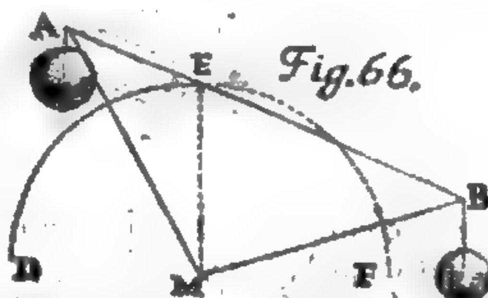
Idem aliis motibus, mutatis mutandis, accommodabitur.

SIt M Centrum Motus; circa quod rotanda sit A B Libra: E, Centrum Æquilibrii, in eodem Perpendiculo cum M; sive infra, sive supra, sive in ipso M puncto: Quiescet, inquam, sic constituta Libra, in neutram partem præponderans.

Primo; sit E Centrum Æquilibrii, idem atque M Centrum Motus. Manifestum est (manente Centro Motus M immoto, per Def.) immotum manere Centrum Æquilibrii E, (quippe idem.) Non igitur in utramvis partem præponderat; neque movebitur in eo situ sibi permissa Libra; per 5 hujus. Fig. 64.

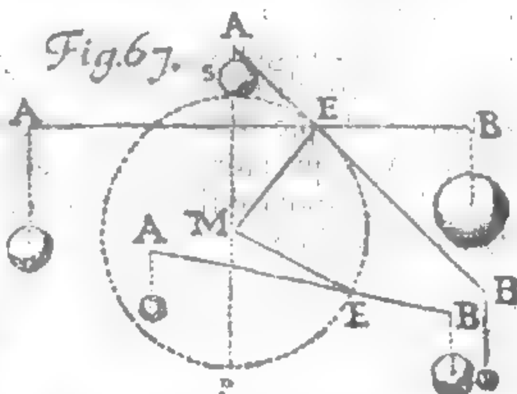
Secundo; Sit E, in M H perpendiculo, infra M. Adeoque (per Def. 15, 16. hujus) mota Libra, feretur E in peripheria (saltem superficie sphærica) ut D E F Centro M descripta. Cujus cum punctum infimum sit ipsum E, (per 20 Cap. 2.) quacunque moveatur, Ascendet E Centrum Æquilibrii; &, cum eo, Libra, (per præced.) non igitur sua sponte movebitur. Fig. 65.





Tertio; Sit E, in M E perpendiculo, supra M. Adeoque (ut prius) mota Libra, feretur E in D E F peripheria (vel superficie sphærica,) cujus punctum E (per 20 Cap. 2.) est omnium altissimum; arcusque E D, E F, pariter declives; (per 15 Cap. 2. & 16 Elem. 3.) In utramvis igitur partem æqualiter propendet E (per 17 Cap. 2.) ipsaque Libra, (per præced.) Neutra igitur feretur, per 8 Cap. 2. Fig. 66.

Denique; Sit E extra perpendiculum SMP. Cum sit M Centrum Motus, circa quod Rotando E describet peripheriam (saltem in Sphærica superficie lineam) puta S E P: Propter arcum E P descendentem, ascendentem vero E S (per 20 Cap. 2.) E centrum Æquilibrii (libra tantundem descendente, per præced.) ad P feretur (nisi alias impeditum) in plano M E P ad Horizontem recto, (utpote quod est omnium maxime declive, per 25, 26, Cap. 2.) Saltem (si illic impediatur) descensu quam potest omnium maxime declivi, per 2 & 8, Cap. 2. Quæ demonstranda erant.



SCHO-

SCHOLIUM.

ADeoque si, in P constitutum centrum Æquilibrii, inde vi amoveatur; se restituet, sibi permissâ Libra, gravitate sua: Si constitutum in S, amoveatur; non eo restituetur, sed deorsum ad P feretur.

Quod autem de Libra, strictè sumpta, ponderibusque libere appensis (adeoque in plano ad horizontem perpendiculari) ostensum est: Pariter ostendetur, mutatis mutandis, in quavis alia vi. Puta; si planum S E P non erectum sit, sed utcunque obliquum, in quo A B libra intelligatur, tum super illud moveri appensa pondera: Similiter enim (ex 20. Cap. 2.) omnia procedent de S P ad horizontalem rectam in eo plano normaliter positam (quod *Perpendiculi succedaneum* diximus) atque S P perpendiculo ad Centrum Terræ. Aut etiam; si in Horizontali, aliove quocunque Plano intelligatur Libra, (sive quod Libræ instar est) eique in A & B applicatæ vires quæcunque secundum Directionem ipsi S P parallelam: Eodem planè modo procedet demonstratio.

PROP. XI.

Si circa Centrum suum rotetur Libra; in ea ratione moventur, vel Ascendendo vel Descendendo, tum ipsius puncta singula, tum quæ ex ipsis libere dependent gravia; qua distant ea puncta à Centro Libræ.

CIrca C Centrum, rotetur Libra A B. Dico ipsius puncta singula, ut A, B, D, in ea ratione, Ascendere vel Descendere (eodem scilicet quæ in eodem Brachio; quæ in contrario, contrario motu;) qua distant à C Centro.

Describunt enim A, B, D, puncta (propter eundem vel æquales angulos ad C) similes arcus (puta A a, B b, D d,) qui itaque tum ipsi, tum & ipsorum altitudines perpendiculo mensuratæ (puta A α, B β, D δ,) sunt (propter figuras similes & similiter sitas, saltem situ contrario positas, quod hic tantundem facit) radiis suis, hoc est, à Centro distantiis C A, C B, C D, proportionales: adeoque & (per 10. Cap. 2.) Punctorum A, B, D, Ascensus, Descensusve. Quod erat demonstrandum.

Quodque de ipsis punctis ostenditur; perinde verum est de Ponderibus inde libere dependentibus; vel per *Prop.* 4. hujus 5: vel etiam, quia, quemcunque arcum describit, verbi gratia, B punctum; huic similem & æqualem & similiter situm, describet ab eo libere dependens P, (utpote quod eidem, per 30. Cap. 2. perpendiculariter ubique subest; &, propter æqualem fili longitudinem, in eadem distantia.) Adeoque tantundem vel ascendit vel descendit; hoc est (per modo demonstrata) in ratione distantiarum punctorum appensionis à Centro. Quod etiam erat Demonstrandum.

PROP.

PROP. XII.

Si idem sit Libræ Centrum, atque Centrum Motus: Quæ ex illa libere dependent Gravia, (aut etiam alias directe vel subsunt vel incumbunt) in ea ratione ponderant (seu gravant sua respective Brachia) cæteris paribus; quæ ex rationibus Ponderum, & Distantiarum punctorum applicationis à communi Libræ & Motus Centro, componitur.

Adeoque: Si Distantiæ sint æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera sint æqualia; in ratione Distantiarum: Si vel utraque sint æqualia; vel sint reciproce proportionalia; Æquiponderant: Quæ vero ex Centro dependent; neutrum gravant Brachium.

Idem intellige de Viribus aliis: Nempe in ea ratione movendo pollent, quæ componitur ex rationibus Virium, & Distantiarum à communi Centro Motus & Libræ, (sive quod hujus instar est) quibus directe applicantur Vires.

$$\begin{array}{ccccccccccc} P. & & nP. & & P. & & nP. & & nP. & & \\ D. & & D. & & mD. & & mD. & & \frac{1}{n}D. & & \\ \hline PD. & G :: & nPD. & nG :: & mPD. & mG :: & mnPD. & mnG :: & PD. & G. \end{array}$$

Nam (per 7. Cap. 2.) in ea ratione ponderant; qua pollent, si moveantur Ascensus, Descensusve: Hoc est (per 5. Cap. 2.) in ratione quæ ex rationibus Ponderum, & Altitudinum ascensus descensusve componitur: Hoc est (per præcedentem) quæ ex rationibus Ponderum, & distantiarum punctorum Applicationis à communi motus & libræ Centro, componitur. Quod erat Propositum.

Quodque, de Incumbentibus & Dependentibus, additur; constat ex 4 hujus. Corollaria constant, ex 4. & 6. Cap. 1.

SCHOLIUM.

Propositio hæc (ut & præcedentes) potissimum respicit Libram tanquam ex unico suo puncto liberrime dependentem (non ad certam axis positionem, aliter quam gravitate sua & ponderum dependentium, determinatam,) adeoque in plano ad Horizontem recto, sive circa axem Horizontalem, librandam; & quidem, præsertim, ut in situ Horizontali constitutam: (quanquam & ad alium tum Libræ tum Axis situm accommodari poterit.) Saltem Pondera supponuntur omnia in eodem plano, atque ad unam eandemque rectam per Centrum motus transeuntem, applicata; secus utique non esset idem Libræ atque Motus Centrum. Eratque hæc propositio neutiquam omittenda, ut quæ tam Celebris sit in re Statica, Æqualia Pondera, in ratione Distantiarum à Centro Libræ, gravitare.

Verum omnino evenit non raro, comparanda venire Pondera, ad Libram exigenda, neque in situ Horizontali, neque in uno aliquo, sed diversis positam: Sed neque in plano ad Horizontem recto, aut circa Horizontalem Axem, libranda; sed circa inclinatum Axem, adeoque in inclinato plano movendam: Vel etiam non ad unam aliquam, sed diversas Libras, easque inæqualiter ad horizontem inclinatas applicata: Ipsaque Pondera neque ex ejusdem rectæ, neque ejusdem plani, punctis suspensa.

Huic itaque casuum varietati ut satisfaciam, visum est sequentem propositionem huic subnectere, quæ rem eandem universalius exponat.

PROP. XIII.

Pondus idem ad idem Libræ punctum applicatum; pro varia Libræ ad Horizontem positione; in plano ad Horizontem recto (sive circa Axem Horizontalem;) ponderat in ratione *Distantiarum à perpendiculo* per Centrum Motus.

In Plano autem ad Horizontem inclinato (sive circa inclinatum axem;) in ratione *distantiarum à perpendiculi succedaneo*; seu recta quæ est, in illo plano, ad Horizontalem rectam ad angulos rectos.

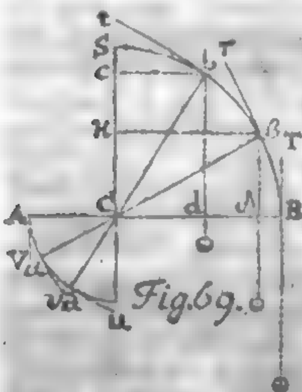
Et quidem, universalius; *Æqualia Pondera*, sive ad ejusdem, sive diversarum librarum, utcunque ad Horizontem inclinatarum (modo *circa Axes æqualiter ad Horizontem inclinatos*, sive in planis æqualiter inclinatis, rotentur) puncta quælibet, appensa; ponderant, (seu gravant sua respective Brachia) in ratione *distantiarum à perpendiculo* per suum cujusque Centrum motus, vel *hujus succedaneo*, (illo quidem, si in planis ad Horizontem rectis rotentur; hoc, si in planis inclinatis:) Hoc est; utrobique à *Perpendiculari per Axem plano*.

Circa Axes vero *inæqualiter inclinatos* (adeoque in planis inæqualiter declivibus;) in ratione quæ ex rationibus *Distantiarum* illarum à Perpendiculo ejusve Succedaneo, vel Perpendiculari per Axem Plano, & *Declivitatum* Planorum, componitur.

Adeoque, *Pondera Inæqualia* circa *æqualiter inclinatos* Axes (adeoque in Planis æqualiter declivibus;) in ratione quæ ex *Ponderum* & *Distantiarum* illarum (à Perpendiculo ejusve Succedaneo) rationibus componitur.

Circa Axes vero *Inæqualiter inclinatos*; in ea quæ ex *Ponderum*, & *Distantiarum* illarum, & *Declivitatum*, rationibus componitur.

INtelligatur Libra, à situ Horizontali ACB, ad situm αCβ, vel aCb, moveri; puncto sui B, describens arcum Peripheriæ Bβb, in plano sive ad Horizontem recto, sive utcunque obliquo. Et compleatur CBβS circuli quadrans. Et ducantur rectæ βκ, bc, ipsi BC parallelæ; Perpendiculo (ejusve succedaneo) SC, occurrentes in κ, c. Dico in ea ratione ponderare expositum pondus in punctis B, β, b; quæ est rectarum BC, βκ, bc, distantias ab SC mensurantium.



Nam, demissis à punctis β, b, ad Libram in situ Horizontali AB, perpendicularibus βδ, bd: Ostendetur, ex 4 hujus (ejusve Scholio) si CBβS planum sit ad Horizontem rectum; tantundem ponderare, respectu assumptæ Libræ AB, pondera ex B, β, b, punctis suspensa, atque si ex B, δ, d, suspenderentur. Adeoque; si sint æqualia pondera; in ratione Distantiarum BC, δC, dC, (per præcedentem:) hoc est (propter parallelas) Distantiarum BC, βκ, bc: Sin pondera sint inæqualia; in ratione quæ ex Ponderum & Distantiarum rationibus componitur (per eandem Prop. præced.) Quæ erant proposita.

Idemque in Plano inclinato, constabit ex 26 Cap. 2. Cum enim inclinatio plani (per 26 Cap. 2.) in eadem ratione omnes in illo plano gravitationes minuit; in eadem inter se ratione ponderabunt in B, β, b, punctis appensa pondera, in plano inclinato, qua in plano ad Horizontem recto ponderarent (per 5 Cap. 1.) Hoc est (ut jam ostensum est) in ratione Distantiarum, si Pondera sunt æqualia; vel, si inæqualia, in ratione ex Ponderum & Distantiarum rationibus composita. Quæ itidem probanda erant.

Quod autem eadem sit punctorum β, b, ab erecto per Axem Plano perpendiculari,

lari, atque ab SC recta (quæ illius est, atque circuli libratione descripti, ad planum illud recti, communis sectio) Distantia: Sive (quod eodem recidit, propter punctorum, sive à recta, sive à plano, distantias, rectis perpendicularibus mensurari solitas) quod rectæ βκ, bc, in circuli plano perpendiculares ad SC rectam, sunt etiam ad illud per axem planum perpendiculares: Constat ex Def. 4. El. 11. Quod etiam affirmatum erat.

Alia Demonstratio.

Eadem alias demonstrabimus, ex Prop. 21. Cap. 2. pro varia motus Obliquitate. Nam (constructis ut prius, ductisque contingentibus BT, βτ, bt, ut in Schemate;) Puncti B, quocunque onere gravati (& quidem sive in recto ad horizontem plano sive utcunque Obliquo) per arcum Bβb moti; eadem est obliquitas motus in ipsis B, β, b, punctis, atque BT, βτ, bt, contingentium; (per 15. Cap. 2.) quarum inclinationum ad horizontem anguli (si planum sit erectum) sunt TBC, τβκ, tbc; & his æquales, anguli SCB, SCβ, SCb; (est utique TBC, SCB, uterque rectus; & tum τβκ, tum SCβ, sumpto communi κβC, complent rectum, per 16 El. 3. & 32 El. 1. & similiter tum tbc, tum SCb, sumpto communi cbC;) quorum Sinus recti sunt, BC, βκ, bc: His igitur proportionalia sunt Æqualium ponderum momenta in punctis B, β, b, in erecto plano, per 21 Cap. 2. (Adeoque; Inæqualium, in ratione quæ ex illa & Ponderum ratione componitur; per 19 Cap. 2.) Eademque plano Obliquo accommodanda, ut prius, per 26. Cap. 2. Quæ erant probanda. Fig. 69.

Quodque de una Libra ostensum est; de pluribus similiter ostendetur. Puta, si ad Libræ CB, punctum δ; &, Libræ Cb, punctum b; appensa sint æqualia pondera: ponderabunt (per jam dicta) in ratione distantiarum δC, bc, cæteris paribus, (Adeoque, si pondera sint inæqualia; in rationibus ex Distantiarum & Ponderum rationibus composita, per 1 Cap. 2.) Quod itidem erat propositum.

Denique; quod de Axibus inæqualiter inclinatis, affirmatur; adeoque, Motuum Planis inæqualiter Declivibus: Constat ex Prop. 24, 25, 26, Cap. 2. Quod ultimo demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

Notandum interim hic erit; non ita hæc intelligenda esse, quasi, si ad Libram AB appensum pondus in B, ponderi in A, æquiponderet; illud in β, huic in α cederet, seu minus ponderaret. Quanquam enim illud in β, minus ponderet quam in B; non tamen destruitur æquilibrium, quoniam & in eadem ratione (propter eandem obliquitatem) minus ponderet hoc in α quam in A. Quodque de Æquilibrio dicitur; pariter & de momentis inæqualibus obtinebit. Puta, qua ratione pondus in B, præponderat ponderi in A; eadem & illud in β præponderabit huic in α. Nam utriusque momentum proportionaliter minuitur, ob eandem motuum obliquitatem ratione Perpendiculorum ad terræ Centrum; quæ Ponderum moventium Directiones sunt, & supponuntur invicem parallela.

At vero: Si loco Ponderis in A, α, a, (cujus Directio supponitur eadem cum directione ponderis in B, β, b; utraque scilicet deorsum ad terræ centrum; adeoque &, propter Tangentes parallelas, Declivitates æquales:) substituatur, verbi gratia, Vis humana; quæ non minus applicari poterit secundum directionem αν, quam AV perpendiculum; (adeoque ejusdem erit momenti in quocunque libræ situ; dum interim illud Ponderis à B ad β moti minuitur:) Minuetur continuo ratio Resistentiæ ponderis (à B ad β, b, moti) ad æquale momentum Virium in A, α, a. Adeoque Vis in α, facilius movebit pondus in β, quam vis eadem in A, pondus idem in B. Quæ ex propositione sequente apertius constabunt.

PROP. XIV.

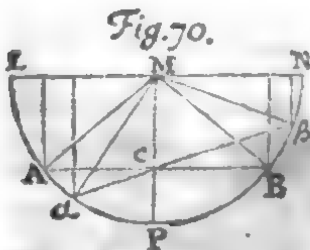
Si duo pondera (aut aliæ quæcunque vires) ad Libram applicata, ita se habeant, ut, in quocunque Libræ situ, eadem utriusque sit obliquitas motus: Quam habent inter se horum momenta rationem in uno Libræ situ; eandem & in quovis alio habitura sunt.

Si vero (vel, propter curvatum libræ Jugum; vel, Centrum Motus extra ipsam Libram; vel, non easdem applicatarum virium Directiones; vel, alias undecunque;) contingat, pro vario Libræ situ, inæquales subinde futuras esse duorum motuum obliquitates: Non eadem erit, in omni Libræ situ, momentorum ratio: Sed variabitur, pro varia ratione Declivitatum, sive Sinuum Angulorum Inclinationis ad Horizontem, sive Complementi obliquitatis.

Quodque de duobus ponderibus dictum est, de pluribus similiter constabit.

I. INtelligantur, ad libram ACB, duo Pondera (seu vires aliæ) in A, B, ita applicata, ut directiones motuum AV, BT, vel nullam habeant vel æqualem obliquitatem (hoc est, ad directionem Moventis, quæ in Gravibus est Perpendiculum, vel nullum faciant, vel æquales angulos:) Eademque si, mota Libra, in alium quemvis situm pervenerint, ut αβ; eadem adhuc sit Directionum Motus αν, βτ, obliquitas: Eadem, inquam, erit inter se momentorum ubique ratio. Puta, si pondus in B ponderi in A æquiponderet; illud in β huic in α æquiponderabit. Si illic præponderet: &, hic, præponderabit; atque in eadem ratione. Cum enim, ex hypothesi, eadem utriusque sit ubique Obliquitatis variatio; adeoque (per 21 Cap. 2.) eadem ratione vel augeatur vel minuatur utriusque momentum: Erunt adhuc in eadem ad invicem ratione, qua prius, constituta; (per 5 Cap. 1.) Quod erat primo demonstrandum.

Fig. 69.



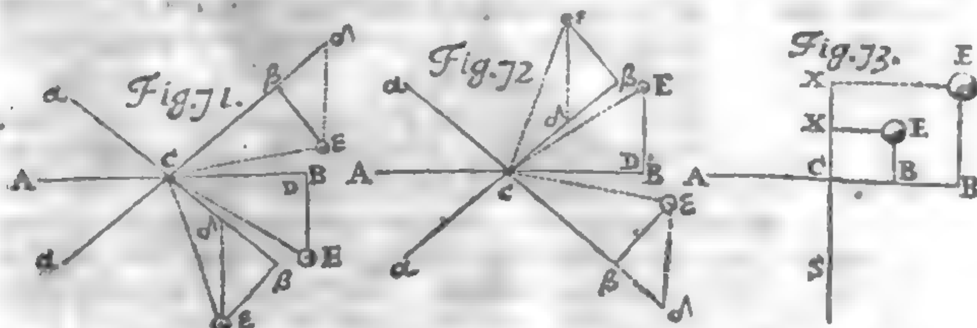
II. Deinde: Sit *Libræ Jugum incurvatum* AMB: Seu (quod eodem recidit) *Centrum motus* M, *extra libram* ACB. Et sunto, verbi gratia, utraque A, B, infra LMN Horizontalem rectam per Centrum Motus transeuntem; sed ad perpendiculi MP partes oppositas. Adeoque, utut fieri possit eandem esse in A & B motus obliquitatem; si tamen moveatur A ad α versus P; adeoque (propter rotationem, quæ angulos AMB, αMβ, æquales postulat) B ad β versus N; (nec tamen vel A ad P, vel B ad N perveniat:) Manifestum est, majorem esse motus obliquitatem in α quam in A; minorem tamen in β quam in B; (majorem utique angulum cum perpendiculo faciet Tangens in α, quam Tangens in A, minorem vero Tangens in β quam Tangens in B.) Adeoque (per 21 Cap. 2. vel Prop. præced.) minuitur momentum ponderis ab A ad α moti; moti vero à B ad β, augetur. Et propterea (per 8 El. 5.) major erit ratio momenti in β ad momentum in α, quam momenti in B ad momentum in A. Et similiter ostendetur (mutatis mutandis) in aliis libræ positionibus alias variari momentorum rationes. Et quidem, pro varia ratione sinuum Angulorum inclinationis, seu complementi obliquitatis; per eandem 21 Cap. 2. Quod erat itidem demonstrandum.

Fig. 71, 72.

III. Idem ostendetur, si ex ACB Libræ puncto aliquo, ut B, dependeant, non quidem libere (ut eidem semper libræ puncto directe subsit) sed in certo angulo, ut CBE, fixum pondus E: Aut etiam, si similiter superne affigatur. Manifestum utique est (rotatione facta circa centrum C) punctum E (vel huic affixum pondus) circulum describere, non quidem radii CB, sed CE: Idemque plane accidere, ac si jugum esset incurvatum ACE; de quo modo ostensum est. quod erat propositum.

Atque hinc ostendetur (per Prop. præced., vel 21 Cap. 2.) quod *Pondus E infra libram*

libram fixum; prout altius elevatur, ita plus ponderat, seu majori in A ponderi æquipollet: At, fixum supra libram; minori. Quod, inspectis figuris, statim patebit. Quippe distantiæ æstimandæ sunt, non secundum longitudines CB, Cβ; sed CD, Cδ: ut ex 4 hujus patebit.



IV. At vero, si nec supra libram, nec infra, sed à latere, affixum sit Pondus E; (intellige, ita ut, rotata libra ACB circa axem XCS, sint ubique CX, BE, in eodem plano:) erit eadem ubique momentorum ratio, ponderum in A & E, non minus quam in A & B, positorum. Cum enim parallelos arcus, æquales similes & similiter positos, describant B, E, puncta; eadem semper utriusque erit obliquitas motus. Adeoque & eadem ratio momentorum; per primam partem hujus. Atque omnino perinde est, atque si libra XE (ipsi CB parallela) circa centrum X ferretur. Fig. 73.

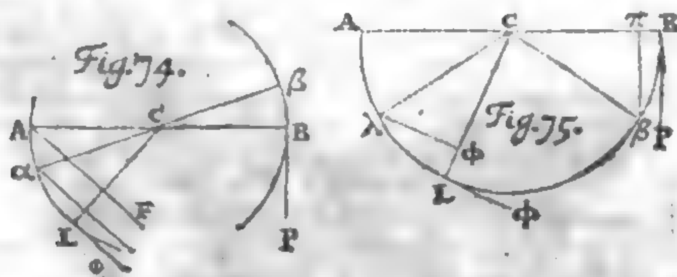
SCHOLIUM.

ATque hujus ope, quæ utcunque ad varias circa eundem Axem libras (connexas tamen) in variis Planis applicantur Pondera (puta in parallelis planis Perpendicularibus per AB, XE, &c.) ad eorum unum reducuntur. Perinde siquidem Ponderat E Pondus, ubicunque in BE recta infinita fuerit, atque si esset in ipso B puncto. Ut jam ostensum est.

Quæ autem ita ad unum Planum reducuntur Pondera; eadem, per 4 hujus, ad unam ejusdem rectam quamlibet (utcunque infra, suprave fuerint) reducuntur. Perinde siquidem ponderant, ubicunque fuerint in eodem Perpendiculo (sive revera, sive huc ut modo dictum est, reducta) atque si in ipsa quam quis velit istius Plani recta essent. Ut ibidem probatum erat.

Quæque ita ad unam libram reducta sunt pondera; eadem & ad unum ipsius Punctum, Æquilibrii Centrum, mox reducentur, per 20 hujus. Quippe ita perinde Ponderant simul omnia, atque si ex illo puncto dependerent. Ut ibidem probabitur.

V. Porro; Manente Jugo recto AB, & centro motus in ipsa Libra, C: Si tamen alia sit directio virium in A & B adhibitarum; variabitur, pro varia Libræ positione, momentorum inter se ratio; atque ita quidem ut in propositione est affirmatum. Esto enim, verbi gratia, AB libræ Jugum, in situ Horizontali po- Fig. 74.



situm; ejusque puncto B applicatum grave; adeoque virium Directio BP ad Horizontem perpendicularis: Puncto autem A, vis alia quævis (puta, humana,) adhibita, secundum directionem AF (ipsi BP minime parallelam;) cui quidem AF parallela Lφ, peripheriam puncto A (circa C rotando) descriptam tangat in L; (infra vel supra punctum A, prout contigerit) Manifestum utique est,

moto A ad α versus L (priusquam ad L pertingat) Minui Obliquitatem motus; (sive angulum quem facit directio motus cum directione virium AF, vel huic parallela:) Adeoque (per prop. praeced. vel 21 Cap. 2.) Augeri Momentum: Dum interim moto B, per similem arcum, ad β, hujus Obliquitas Augetur; adeoque Momentum Minuitur. Et propterea (per 8 El. 5.) alia ratio erit, pro mutato libræ situ, momenti virium in A ad momentum Ponderis in B; atque momenti Virium in α ad Ponderis in β momentum. (Et quidem in ea ratione quam innuit propositio: per 21 Cap. 2.) Quod erat affirmatum.

VI. Contra vero; Si pro ACB jugo recto, substituamus (hoc in casu) LCB jugum inflexum; atque ita quidem inflexum, ut quem angulum facit CB ad BP directionem Gravitatis seu vis moventis in B, eandem faciat CL ad Lφ directionem vis in L moventis: Manebit eadem ubique ratio momenti Virium in L, λ, ad momentum Ponderis in B, β. Quippe idem hic præstabit jugum inflexum LCB, atque in primo hujus demonstrationis casu, rectum ACB. Et ut illic (propter similes arcus Aα, Bβ,) æquales erant obliquitates in α, β, non minus quam in A, B; sic hic, ob easdem causas eadem erit in β, λ, non minus quam in B, L, eadem Obliquitas. Cæteraque, ut illic ostendentur. Dummodo (quod hic intelligendum est) directio virium in L, λ, punctis, sit semper eadem; puta, rectæ Lφ parallela: sicut eadem supponitur directio Ponderum, in B, β; puta Perpendiculum ad Terræ Centrum.

Fig. 75.

VII. At vero; si in punctorum altero, ut B, β, ponderis directio eadem sit (puta, recta ad Centrum Terræ, seu Perpendicularis ad Horizontem;) in altero vero, ut A, α, directio moventis in singulis Aα curvæ punctis alia atque alia; sitque, verbi gratia, secundum ductum ipsius curvæ, vel Rectas in iisdem punctis Tangentes: Propter motus obliquitatem in A, α, sive nullam, sive eandem; mutatam vero in B, β; (adeoque virium momentum illic æquale, hic continuo immutatum;) vel utrobique immutatum quidem, sed non similiter immutatum: Variabitur & momentorum inter se ratio (sive rectum sit jugum, sive Inflexum) pro vario libræ situ; ita quidem ut in Propositione determinatum est. per 21 Cap. 2.

Quodque in expositis casibus ostensum est; similiter ostendetur (ex iisdem Prop. 21. Cap. 2. & præcedente hujus) in aliis quibusvis casibus. Constat igitur, quod erat propositum.

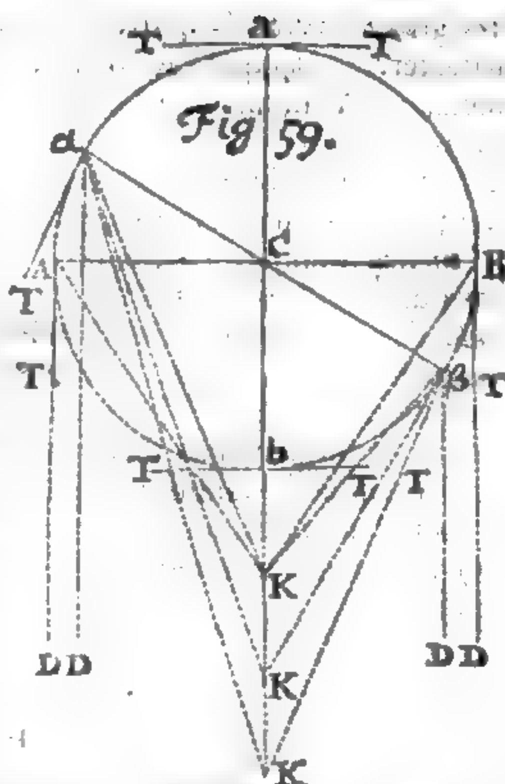
SCHOLIUM.

VIsum est, in hac Propositione generaliter proposita plures casus exhibere, & strictim comprehendere; potius quam totidem Propositionibus singulos exhibere: tum quia eodem principio nituntur omnes, eademque demonstratione confirmantur; tum quia infiniti esset laboris singulos recensere qui huc adduci casus possent. Expositis igitur hisce paucis, facile erit alios hisce similes, prout res tulerit, huc referre; & tanquam generali propositione comprehensos, ejusdem demonstratione confirmatos reputare.

Estque opportunus hic locus demonstrandi illud quod supra insinuavimus in Scholio Prop. 3. Nempe [*Si intelligatur Centrum Terræ tanquam in infinita distantia; Libra* (vel non gravata, vel utrinque æqualiter gravata) *quocunque situ ponatur, quiescet: Si vero intelligatur Centrum Terræ tanquam in distantia finita; quiescet quidem Libra in situ Horizontali posita; vel etiam in situ ad Horizontem Perpendiculari; posita vero in situ ad Horizontem Obliquo, neque sic quiescet* (quod volunt aliqui) *neque* (quod volunt alii) *ad situm Horizontalem feretur; sed ad situm Horizonti Perpendicularem.*

Fig. 59. Intelligantur, in AB Libra, duo quævis puncta, AB, æqualiter utrinque à Centro C remota, invicem æquiponderantia (sive æqualiter gravata) à situ AB Horizontali, per situm Obliquum αβ, ad situm ab Horizonti Perpendicularem lata, arcus similes & æquales rotando describere Aαa, Bβb; quos tangant rectæ AT, αT, aT, BT, βT, bT; quæ itaque *Directionem Motus* in illis respective punctis designabunt, per Prop. 15. Cap. 2.

Atque Intelligatur, primo, Centrum Terræ (quo tendunt Gravia) tanquam in Infinita Distantia; adeoque Perpendicula, seu Rectæ-Deorsum (*Directionem Momentis*, seu Vis Motricis, designantes) AD, αD, aD, BD, βD, bD, invicem parallelæ.



parallelæ. Erunt igitur, in situ Horizontali (propter tum rectas AD, AT, tum BD, BT coincidentes) eadem utrobique Declivitas; (utpote utrobique perpendicularis:) Item, in situ ad Horizontem Perpendiculari (propter angulos D a T, D b T, rectos) eadem etiam Declivitas (quippe utrobique nulla:) Sed & in situ Obliquo (propter tum α T, β T, tum α D, β D, invicem parallelas; adeoque Obliquitatis angulos æquales D α T, D β T, quos cum directione Moventis facit Directio Mobilis;) æqualis utrobique Declivitas (per Declivitatum Definitiones;) adeoque (cum cætera sint paria) æquiponderabunt (per 13 hujus:) Cum itaque contraponderant (per 1 hujus) se mutuo sustinebunt, nec fiet motus (per 12 Cap. 1.) Quiescet igitur Libra, quocunque situ posita. Quod erat propositum.

Intelligatur deinde Terræ Centrum, tanquam in Distantia Finita; adeoque Perpendicula seu Rectæ ad Centrum (*Directionem Moventis* designantes) invicem convergentes puta, A K, B K, α K, β K, a K, b K, in Terræ Centro K coeuntes. Si itaque ponatur Libra in situ ad Horizontem Perpendiculari; erit (propter K a T, K b T, angulos rectos) æqualis utrobique Declivitas (quippe nulla:) Item, in situ Horizontali (propter tum angulos C A T, C B T, rectos, tum C A K, C B K, invicem æquales) æquales item erunt Obliquitatis Anguli K A T, K B T. Adeoque (propter æqualem utrobique Declivitatem) æquiponderabunt, & sese mutuo sustinebunt, A, B; Libraque propterea quiescet, per modo demonstrata. Si vero ponatur Libra in situ Obliquo: Obliquitatis Anguli K α T, K β T, inæquales erunt; & quidem major ille qui est ad Brachium elevatius: puta K α T. Nam duorum æqualium angulorum D α T, D β T, altero semper Major est angulus ille K α T; Altero vero, angulus K β T vel Minor erit (nempe quoties ob magnam Libræ declivitatem, vel magnam Centri distantiam, β K cadit inter β D & β T;) vel erit Nullus (nempe, si β K circulum contingat, adeoque coincidant β T, β K;) vel saltem Minus eum superabit (nempe si quando propter exiguam Libræ Declivitatem, vel exiguam à Centro Terræ Distantiam, β T cadat inter β K & β D) ob angulum K β C, majorem angulo K α C (per 18. El. 1. Euclid.) adeoque (qui ad rectum reliquus est) K β T minorem (reliquo) K α T: (Quæ Schema contemplanti satis obvia sunt.) Erit igitur (quocunque situ Obliquo ponatur Libra; modo Terræ Centrum intelligatur in distantia finita) in motu depressioris puncti β minor Obliquitas, (adeoque Declivitas major) quam elatioris α; adeoque β præponderabit, per 13 hujus. Et consequenter (cum de punctis reliquis utriusque Brachii respective sumptis, idem sit judicium; sintque cætera paria;) deorsum feretur Brachium depressius (per 12 Cap. 1.) donec redigatur Libra, ad situm Horizonti Perpendicularem a b. Quod erat propositum.

Sunt qui contrarium hujus affirmant, inter quos Jordanus & alii, asserentes Libram obliquo situ positam, latum iri in situm Horizontalem: contra quos prolixe disputat Guid-Ubaldus in Mechanicis. Qui tandem concludit, permansuram fore libram quocunque situ positam, etiamsi consideretur Centrum Terræ tanquam in distantia finita. Quorum neutrum dicendum esse, ex supra demonstratis constat.

Hinc sequitur, *Ejusdem Rectæ non unum aliquod statum esse Centrum Æquilibrii*; quod nempe idem sit pro omni situ: sed, in situ obliquo, à puncto medio magis magisque ad partem decliviorem procedere, prout obliquitas major fuerit; dummodo Centrum Terræ intelligatur in distantia finita. Quodque hic de Rectæ Centro Æquilibrii dicitur; similiter infra intelligetur *de Centro Gravitatis* in Solidis, Planis, aliisve.

Sed & ex iisdem principiis probabitur, Ejusdem *Gravis* (*cæteris paribus*) *gravitatem minorem continuo fieri, prout Centro Terræ magis appropinquat.* Si enim; verbi

verbi gratia, rectæ AB, punctum medium C, intelligatur recta CK ad Centrum directe ferri; adeoque eadem semper Declivitate, & eodem impetu: reliqua tamen puncta, ut A, B, majorem continuo Obliquitatem sortientur prout Centro terræ fiunt propiora. Nam, eadem manente AKB trianguli base AB, prout altitudo CK minuitur, obtusior fiet angulus AKB; adeoque reliqui KAC, KBC, minores; & consequenter, majores fient Obliquitatis anguli KAT, KBT: (Idemque in situ obliquo $\alpha\beta$ similiter fere ostendetur.) Et quanquam de rectæ situ Perpendiculari ab, non idem contingat (eo quod tota recta sit in perpendiculo) tamen de rectis extra hunc situm, sed & de curvis omnibus, omnibusque tum superficiebus, tum solidis (ut quæ non possint tota in perpendiculi recta jacere) idem ostenditur.

Verum ubi Centrum Terræ consideratur tanquam in infinita distantia; adeoque Perpendicula tanquam parallela; (quod in Staticis plerumque fit;) hæc omnia locum non obtinent. Quam quidem hypothesin (post Archimedem, aliosque) nos etiam sequimur, nisi cum contrarium insinuatur: quod & aliquoties monuimus.

PROP. XV.

Ex tribus his, Pondere, Ponderatione, & Distantia puncti applicationis (Sive, à communi Motus & Libræ Centro; nempe siquod sit; sintque ad eandem per centrum motus rectam applicata pondera: Sive, à Perpendiculo per Centrum motus; si in eodem recto ad Horizontem plano rotentur: Sive, à perpendiculi Succedaneo; si saltem in eodem plano rotentur: Sive denique à perpendiculari Plano per axem motus:) Datis duobus quibusvis, datur tertium.

Nempe; Datis Pondere & Distantia; datur Ponderatio: Datis Pondere & momento seu Ponderatione; datur Distantia: Datis Ponderatione & Distantia; datur Pondus.

Excipe; Si (quod una cum ponderatione datur) Distantia vel pondus nullum sit.

Intelligitur autem Propositio, præsertim de Libra in plano ad horizontem recto librata; saltem in data declivitate. Et similiter in sequentibus.

$$PD = G. \qquad \frac{G = PD}{P} = D. \qquad \frac{G = PD}{D} = P.$$

Cum enim (per 12 & 13 hujus) Ponderationis sive Momenti ratio, ex rationibus Ponderum & Distantiarum componatur: Datis componentibus; datur composita: Item; Datis composita, & componentium altera; datur reliqua; (per 2 & 3 Cap. 1.) Adeoque constat propositum.

Exceptio item inde patet. Quoniam Pondus nullum, nihil Ponderabit, in quacunque Distantia: Et, Nullius Distantiæ, nulla est Ponderatio, quodcunque sit Pondus.

SCHOLIUM.

Momentum illud hic intelligo, quo Pondus gravat suum respective Libræ Brachium; quod itaque speciatim *Ponderationem* appello: Non quatenus vel Centrum Libræ gravat, vel punctum illud ex quo directe dependet.

Propositionem hanc (& sequentes aliquot) multiplicem facere, pro varia Distantiæ interpretatione secundum varios casus, potius quam propositionum numerum augere, visum est; quoniam eadem toties esset repetenda demonstratio. Quamque hic adhibui variarum interpretationum Distantiæ, variis casibus accommodationem; eadem in sequentibus Propositionibus intelligenda erit.

PROP.

PROP. XVI.

Dato Pondere, in data (à communi motus & Libræ Centro; vel à Perpendiculo per Centrum motus, ejusve succedaneo; vel à Perpendiculari Plano per axem motus;) Distantia: Pondus aliud investigare, quod, in assignata distantia, dato vel æquiponderet, vel in data ratione ponderet.

Item; Distantiam investigare, in qua, Pondus assignatum, dato vel æquiponderet, vel in data ratione ponderet.

P.	$\frac{1}{n}$P.	nP.	$\frac{m}{n}$P	nP.
D.	nD.	$\frac{1}{n}$D.	nD.	$\frac{m}{n}$D.
$\overline{PD}$.	G :: $\overline{PD}$.	G :: $\overline{PD}$.	G :: $m\overline{PD}$.	mG :: $m\overline{PD}$. mG.

Sit P, datum pondus; in distantia CD, quam D dicimus, suspensum. Sitque alia exposita distantia, puta n D, (quæ sit ad D datam ut n ad 1;) idque vel in eodem vel in contrario Libræ Brachio. Dico; Pondus $\frac{1}{n}$ P (quod sit ad datum P, ut 1 ad n) in assignata distantia n D, priori in D, æquiponderare.

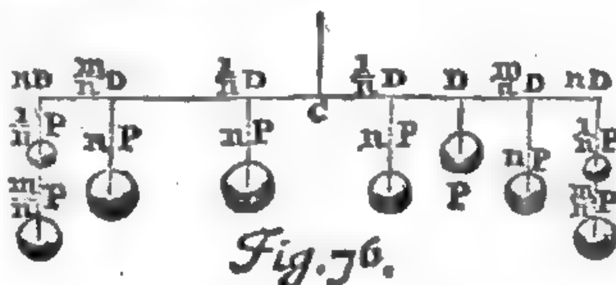


Fig. 76.

Item: Sit assignatum Pondus, ut n P (quod ad datum P, sit ut n ad 1.) Dico; In distantia $\frac{1}{n}$ D (quod sit ad datum D, ut 1 ad n) assignatum n P pondus, priori in D æquiponderare.

Cum enim utrobique posteriora Pondus & Distantia, sint prioribus reciproce proportionalia; (alterum ut n ad 1, alterum ut 1 ad n:) Æquiponderabunt. per 12 & 13 hujus.

Similiter: Si imperetur, non ut æquiponderent; sed, ut in data ratione; puta, ut m ad 1: Pro $\frac{1}{n}$ P, $\frac{1}{n}$ D; positis $\frac{m}{n}$ P, $\frac{m}{n}$ D; habetur quæsitum. Quippe hæc, ad prius posita, ponderant in ratione m ad 1. per easdem 12 & 13 hujus.

PROP. XVII.

Æqualis; ejusdem, vel æqualium Ponderum; (sive, ad commune motus & Libræ Centrum; sive, ad Perpendiculum per centrum motus, ejusve succedaneum; sive, ad Perpendiculare Planum per motus Axem;) Propinquatio; aut inde Elongatio: (sive Pondus Centro illi, aut Perpendiculo Planove, admoveatur; sive Centrum, Perpendiculum, Planumve, Ponderi; vel contra:) Æqualiter Auget, Minuitve Ponderationem. Et; Inæqualis: vel, Inæqualium Ponderum: Proportionaliter.

Sequitur ex 12 & 13 hujus. Cum enim Æqualia Pondera, ponderant in ratione Distantiarum: Qua ratione Augetur Minuiturve Distantia; in eadem similiter vel Augetur vel Minuitur Ponderatio. Tantundem autem Addit, qui ex Duplo Triplum facit, & qui ex Triplo Quadruplum, &c. Quodque de Æqualibus dicitur; de Proportionalibus similiter inde constat.

PROP. XVIII.

Datis Ponderibus quotlibet: Datisque, vel communi motus & Libræ Centro (aut perpendiculo per centrum motus ejusve succedaneo, aut perpendiculari Plano per motus axem,) atque Applicationum punctis; vel horum ab illo Centro (aut perpendiculo, perpendiculive succedaneo, aut Plano) ad datas partes Distantiis: Investigare; Quanta sit tum singulorum, tum simul omnium ponderatio; &, ad quas partes; Tum denique quantum gravant ipsum quo sustinentur Centrum, aut Axem.

$$\frac{+D.\ P.}{+DP.\ +G} :: \frac{+3D.\ 5P.}{+15DP.\ +15G} :: \frac{+4D.\ 3P.}{+12DP.\ +12G} :: \frac{\pm 0D.\ 4P.}{\pm 0DP.\ \pm 0G} :: \frac{-2D.\ 3P.}{-6DP.\ -6G} :: \frac{-3D.\ 4P.}{-12DP.\ -12G.}$$

Fig. 77.

$$\left.\begin{array}{l} +1G \\ +15G \\ +12G \end{array}\right\} = +28G.$$

$$\pm 0G = \pm 0G.$$

$$\left.\begin{array}{l} -6G \\ -12G \end{array}\right\} = -18G.$$

$$+10G.$$

IN Distantiis: verbi gratia, ad Centri (Perpendiculi, hujusve succedanei, Planive) Dextram (quas signo + insignimus) D, 3D, 4D; dependeant Pondera, P, 5P, 3P: quæ (posito P in Distantia D ponderare ut G) ponderabunt ut G, 15 G, 12 G; per 12 & 13 hujus: Adeoque simul gravant brachium Dextrum, ut 28 G; per 8 Cap. 1.

In Distantiis ad sinistram (quas contrario signo — insignimus) 2 D, 3 D; dependeant Pondera 3 P, 4 P: Quæ itaque contraponderabunt, ut —6 G, —12 G; per 12 & 13 hujus: Adeoque simul gravant sinistrum brachium ut 18 G; per 8 Cap. 1.

Atque ex ipso Centro, quod itaque neutrum gravat Brachium, Pondus 4 P: Cujus Ponderatio est, ut ±0 G. per 12 & 13 hujus.

Quæ simul omnia valent, ut +28 G — 18 G ± 0 G = + 10 G; per 8 Cap. 1. Adeoque prægravant Brachium Dextrum, ut 10 G. Hoc est (propter positum DP = G) quantum Decuplum Ponderis P in distantia D, dextrorsum, appensi.

Et similiter faciendum erit, quotcunque & quantacunque in quibuscunque distantiis, ad utramvis partem appendantur Pondera: (habentur enim vel ex 12 & 13 hujus, vel ex 15 hujus, singulorum Ponderationes:) Idque, sive dentur ipsæ Distantiæ; sive Centrum (Perpendiculum, Perpendiculi Succedaneum, Planumve) una cum Appensionum Punctis; (nam, his datis, Distantiæ simul dantur; nempe ductis ab Appensionum Punctis, vel rectis ad Centrum illud, vel perpendicularibus ad Perpendiculum, Perpendiculi Succedaneum, Planumve.) Invenimus ergo, tum singulorum, tum simul omnium, Ponderationem; &, ad quas partes. Quod erat faciendum.

Quod vero C commune motus & Libræ Centrum spectat, vel siquod aliud est motus Centrum, vel Axem etiam; quo sustinetur cum ponderibus Libra, ne tota ruat: tantundem valent atque simul omnia pondera + P + 5 P + 3 P + 4 P + 3 P + 4 P = 20 P, ex centro æquilibrii directe dependentia; (saltem in ea declivitate inde dependentia, qua cum Ponderibus Libra librari intelligitur:) per 2 hujus vel 18 Cap. 2. Utpote quorum Descensus eo impeditur. Quod itidem investigandum erat.

SCHOLIUM.

DIco autem, *Ex centro æquilibrii*: Quoniam, dum, propter Præponderantiam dextri Brachii, Libra (si sibi permittatur) circa Centrum motus rotatur; Eatenus descendens, quatenus descendit Centrum Æquilibrii (per 9 hujus:) Fixum illud Centrum motus (vel motus Axis) non ulterius impedit Descensum Libræ, quam, quatenus Descensus ille ex Rotatione proveniens, minus valet, quam directus

rectus eorundem Ponderum, totiusque Libræ, Descensus. Et quantum valet horum Descensuum Differentia, tantundem gravatur Centrum (vel Axis) sustinens.

At vero; si addito, ad Brachium sinistrum, Pondere quod gravitet ut 10 G; quo ad Æquilibrii statum redigatur Libra; unde propterea impediatur ne ascendat sinistrum Brachium, quo itaque impediatur Rotatio: jam totum descensum impedit Centrum illud (vel Axis) fixum; Adeoque tantundem gravatur, quantum sunt (tum ipsius Libræ Pondus; tum adventitium illud, quod additur, quantumcunque sit, quod, situ quo ponitur, valet ut 10 G, libram reducens ad æquilibrium; tum) illa simul omnia appensa Pondera.

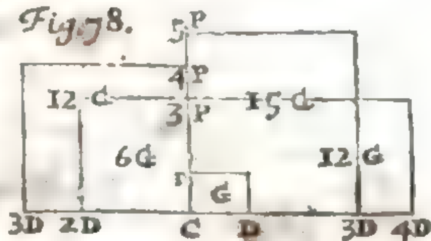
Obex vero, siquis superne objectus Rotationem impedit, tanta vi premitur, quanta est Ponderis, quod eo loci appensum, Libram reduceret ad Æquilibrium: Nec tamen Centrum (Axemve) tantillo onere levat; (quia nihil sustinet; hoc est, nihil impedit quin tota moles simul descendat:) Sed gravat potius.

Sin, loco hujus ad Brachium sinistrum Obicis, intelligatur Fulcrum Brachio dextro subjectum, quo Rotatio impediatur: Sustinet quidem hoc partem oneris, eaque Centrum levat.

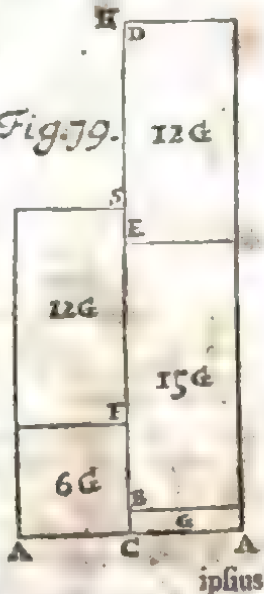
Verum hæc consideratio non est hujus loci; sed ad Vectem spectat duobus Fulcris sustentum.

Si quis interim (præcedentem hanc demonstrationem quod spectat) Calculi methodum aversetur; (utut Demonstrationes Arithmeticas, Linearibus intermistas, non refugiat vel Euclides ipse, vel quantumcunque severus quisquam ex Veteribus Demonstrator;) Lineisque malit illud præstari: Facile erit quicquid est Calculi, sive hic, sive alias, ad Lineas revocare (quod tamen ad Pompam magis faciet, quam ad Demonstrationis Robur vel Perspicuitatem:) Cujus quidem ad hanc propositionem Instantiam libet exhibere. Ad cujus exemplar, quicquid hujusmodi hic alias occurrat, poterit similiter in Lineis, cui id libitum erit, quispiam exhibere.

Alia Demonstratio.



Expositis, ut prius, Distantiis, Ponderibusque: Super rectis, quæ expositis Distantiis D, 2D, 3D, 4D, &c. sint æquales, vel proportionales; totidem construantur Rectangula, vel, similiter inclinata Parallelogramma; quorum altitudines, sint respectivis Ponderibus proportionales. Puta; Ad Dextram, DP seu G; 3D 5P seu 15 G; 4D 3P seu 12 G: Ad sinistram, 2D 3P seu 6 G; 3D 4P seu 12 G; Quæ quidem Parallelogramma, quum Bases habeant expositis Distantiis proportionales; & Altitudines, proportionales Ponderibus; (ex constructione:) sunt ipsa, in ratione ex his composita (per 23 El. 6.) hoc est; in ea qua ponderant appensa Pondera; per 12 & 13 hujus.



His demum Rectangulis seu Parallelogrammis (per 44, 45, El. 1.) totidem respective æqualia (puta, primum primo, secundum secundo, &c.) invicem æque-alta & æquangula utrinque ad eandem rectam, puta CH infinitam, tanquam communem basem, continue ponantur: Puta, ad Dextram, ea quæ ponderibus dextris respondent, ut G, 15 G, 12 G; ad sinistram quæ respondent Ponderibus sinistris, ut 6 G, 12 G.

Quæ quidem Parallelogramma, tum ipsa (quia prioribus sunt respective æqualia) tum ipsorum Bases (per 1 El. 6. cum sint æque-alta) puta CB, BE, ED, CF, FS; sunt (per modo demonstrata) Ponderum quibus respondent Ponderationibus proportionalia. Adeoque: Ut CD, summa basium ad dextram; ad CS summam basium ad sinistram; ita ponderum omnium ad Dextram, Ponderatio; ad Ponderationem omnium ad sinistram. Atq; ut SD differentia, sive ad CD, sive ad CS, sive ad CB, &c. sic est Præponderantia ponderum à dextra, ad Ponderationem vel omnium à dextra, vel omnium à sinistra, vel ipsius

ipsius speciatim Ponderis cui respondet basis CB, &c. Quæ erant investiganda.

Pondus vero, quod ex Centro (vel Axe) dependet, ut nullam habet inde distantiam; sic quæ huic responderent Parallelogramma (puta C4P, CA) nullius sunt Latitudinis; adeoque nullius magnitudinis; ut & ipsum (librationem quod spectat) nihil gravat vel hoc vel illud Brachium.

Denique; ipsum quo omnia sustinentur Centrum (vel Axem) cum simul omnium pariter descensui recto resistat, in ea ratione gravant singula, qua sunt ipsa respective Pondera; & simul omnia, quantum est omnium Aggregatum ex æquilibrii centro suspensum: (per 2 hujus, vel 18 Cap. 2.) Hoc est, ut $P + 5P + 3P + 4P + 3P + 4P = 20P$ illic suspensa. Quod erat ultimo investigandum.

PROP. XIX.

Datis Ponderibus quotlibet (vel summa Ponderum;) dataque eorum ad datum commune motus & Libræ Centrum (vel ad datum per centrum motus Perpendiculum, aut Perpendiculi Succedaneum; vel ad datum Motus Axem, Planumve per illum Axem perpendiculare) Ponderatione ad datas partes: Ponderationem illam Augere vel Minuere, data quantitate; sive manente hoc centro (Perpendiculo, perpendiculi Succedaneo, Axe, Planove;) sive manentibus Ponderibus sic appensis.

$$+\tfrac{1}{2}D \times 20P = +10PD = +10G.$$
$$-5PD$$
$$+\tfrac{1}{4}D \times 20P = +5PD = +5G.$$

SUnto data pondera, vel summa Ponderum, verbi gratia, 20 P. Sitque omnium Ponderatio ad datum Centrum, vel Axem C (vel Perpendiculum, planumve perpendiculare per Axem) $+10G = +10DP$, dextrorsum: Quæ verbi gratia, Minuenda sit (vel Ponderatio sinistrorsum Augenda) quantitate 5 PD; hoc est, expositæ Ponderationi + 10 PD, auferenda sit 5 PD.

Inveniatur (per 15 hujus) distantia dextrorsum, qua datum Pondus 20 P, ponderet ut 5 PD (nempe quantum expositæ Ponderationi auferendum est) puta $\frac{1}{4}D = \frac{5PD}{20P}$. Cui sit æqualis, verbi gratia, CE. Dico; si, manente C, omnia simul Pondera sinistrorsum moveantur; quantum est EC recta; Vel, manentibus Ponderibus, tantundem dextrorsum transferatur C: Utrumvis fiat, tanto minor erit ponderum singulorum Distantia dextrorsum (vel major sinistrorsum) quanta est $EC = \frac{1}{4}D$. Adeoque (per 17 hujus) expositæ ponderationi dextrorsum, tantum aufertur (vel additur ponderationi sinistrorsum) quanta est 5 PD. Quod erat imperatum.

Fig. 77.

Similiter omnino fieret, si Augenda esset Ponderatio dextrorsum (vel ponderatio sinistrorsum minuenda;) nisi quod tunc vel Pondera dextrorsum movenda essent, vel C (Centrum, Axis, Perpendiculum, perpendiculi Succedaneum, vel Perpendiculare per axem Planum) sinistrorsum; quo appensionum distantiæ dextrorsum augeantur, vel minuantur sinistrorsum.

SCHOLIUM.

HInc fieri potest, ut quæ prius fuerat sive Dextrorsum sive Sinistrorsum Ponderatio, in Æquilibrium evanescat; (puta, si Ponderationi + 10 PD, tantundem auferatur; quippe $+10PD - 10PD = \pm 0PD$:) vel, ut Ponderatio prius Dextrorsum, jam fiat Sinistrorsum; vel contra; (puta si Ponderationi + 10 PD, auferatur 15 PD; quippe $+10PD - 15PD = -5PD$:) Quod per 16 hujus (qua docetur, *in data ratione* minuere) non fiet; in quacunque enim ratione (quæ infinita non sit) minuatur, verbi gratia, + PD; manebit adhuc, signo + affectum.

PROP.

PROP. XX.

Datis Ponderibus quotlibet; una cum communi Motus & libræ Centro (vel perpendiculo per Centrum Motus, ejusque Succedaneo, vel motus Axe, aut per hunc plano Perpendiculari;) atque applicationum Punctis, aut horum inde Distantiis:

Vel; Datis saltem summa Ponderum, & simul omnium Ponderatione ad datas partes:

Punctum Libræ datæ (vel Perpendiculum illud, aut Perpendiculi Succedaneum; vel Perpendiculare Planum per Axem; prout ab hoc aut illo Distantia data fuerit;) invenire: quo si suspenderentur omnia, similiter ponderarent; Nempe, tantundem, atque ad datas partes.

Quod ipsum inventum Libræ Punctum; est Centrum Æquilibrii; estque Unicum. Et Perpendiculum inventum, aut Perpendiculi Succedaneum; est Perpendiculum Æquilibrii, aut Succedaneum hujus: estque item Unicum. Et inventum Perpendiculare Planum; est Planum Æquilibrii Perpendiculare; estque hoc (ex planis plano huic per Axem parallelis) Unicum.

$$\frac{+10G = 10PD}{20P} = +\tfrac{1}{2}D. \qquad \frac{+lrDP + msDP - ntDP}{+rP + sP + tP} = \frac{+lr + ms - nt}{r + s + t} D.$$

Esto (ut in Prop. 18.) expositum C centrum motus & libræ (vel Perpendiculum per motus centrum, aut perpendiculi Succedaneum, vel Perpendiculare Planum per motus Axem; juxta conditiones ad Prop. 15. memoratas:) Atque exposita Pondera; quorum summa sit, verbi gratia, 20 P: Et simul omnium Ponderatio, ut 10 G, vel 10 P D, dextrorsum. Fig. 77.

Vel, exponantur singula seorsum Pondera, cum suis Distantiis; unde, per 18 hujus, hæc Summa & Ponderatio colligi possint.

Datur, inquam, Distantia (per 15 hujus) qua si ad datas partes hoc totum Pondus, vel summa Ponderum suspendatur, similiter ponderabit. Nempe $\frac{+10G = +10PD}{20P} = +\tfrac{1}{2}D$. Hoc est; si Dextrorsum (quod innuit signum +) in Distantia $\tfrac{1}{2}$ D (puta in puncto E, distantiæ C D medio; vel ubivis in perpendiculo, aut perpendiculi succedaneo, per E transeunte; vel in perpendiculari per E plano, plano per axem motus parallelo;) suspendantur simul omnia Pondera seu summa ponderum 20 P: Similiter ponderabunt, atque jam in suis singula suspensa locis; nempe ut + 10 G, vel + 10 P D. Quod erat investigandum.

Vel, Universaliter: In distantiis $+lD$, $+mD$, $-nD$, &c. appensa pondera rP, sP, tP, &c. ponderant ut $+lrDP$, $+msDP$, $-ntDP$, &c. (per 18 hujus.) Horum Aggregatum, si per summam Ponderum dividatur; quod prodit $\left(\frac{+lrDP + msDP - ntDP}{rP + sP + tP} = \right) \frac{+lr + ms - nt}{r + s + t} D$, est Distantia (Dextrorsum, aut Sinistrorsum, prout notata signis + aut − præpollent) qua si summa Ponderum suspendatur, similiter Ponderabunt: per 15 hujus. Quod erat investigandum.

Dico porro; Libræ punctum E sic inventum, Æquilibrii Centrum esse; (Quodque per hoc transit Perpendiculum, vel Perpendiculi Succedaneum; est Perpendiculum Æquilibrii; vel Succedaneum hujus: Et, Perpendiculare planum per E, perpendiculari per axem Plano parallelum; est Perpendiculum Æquilibrii Planum.)

Cum enim ita gravant Libram omnia simul Pondera, atque si ex E puncto (vel per illud transeunte Perpendiculo, Planove perpendiculari) dependerent omnia

omnia (per jam demonstrata:) Si ipsum E libræ centrum fiat (vel ubivis in eo Perpendiculo, Planove suspendantur;) nihil ponderabunt, sive neutrum prægravabunt Brachium, per 12 & 13 hujus. Eritque propterea (per 6 hujus, vel def. Centri Æquilibrii) libræ punctum E, Centrum Æquilibrii: Et (per def. Perpendiculi Æquilibrii, hujusve Succedanei, & Plani Æquilibrii) Perpendiculum illud, ejusve Succedaneum; erit Perpendiculum Æquilibrii, aut hujus Succedaneum; & Planum illud, erit Perpendiculare Planum Æquilibrii. Quod erat demonstrandum.

Vel etiam; Quia, posito C Centro libræ, tantundem simul omnia dextrorsum Ponderant, atque si in distantia CE dextrorsum, suspenderentur omnia: Si Centrum transferatur à C in E (vel à Perpendiculo, Succedaneove, vel Perpendiculari per Axem Plano, per C, ad parallelum per E Planum rectamve) tantundem omnium (ubicunque dependeant) vel minuitur distantia dextrorsum, vel (quod eodem recidit) augetur sinistrorsum, quanta est CE recta (vel parallelorum distantia.) Adeoque (per præced.) tantundem Ponderationis, vel dextrorsum demitur, vel additur sinistrorsum, quanta est simul omnium Ponderatio in distantia CE: hoc est, per modo demonstrata, tota Ponderatio dextrorsum tollitur. Eritque propterea (per 6 hujus, vel def. Centri Æquilibrii) E Centrum Æquilibrii. (Et similiter, per suas respective definitiones, ostendetur, de Perpendiculo Æquilibrii, ejusve Succedaneo; & Perpendiculari Plano Æquilibrii.) Quod demonstrandum erat.

Denique: Centrum Æquilibrii unicum esse dico: (& similiter unicum esse Perpendiculum Æquilibrii, aut hujus Succedaneum; Unicum item Perpendiculare planum plano per Axem parallelum.)

Posito enim, verbi gratia, E centro æquilibrii; quo scilicet suspensa libra in neutram partem propendet: Si inde in utramvis partem ad quamcunque distantiam transferatur Centrum Motus, puta ad C; vel ex illa parte minuetur, vel ex altera augebitur omnium distantia; adeoque & Ponderatio (per præced.) Præponderabit itaque brachiorum alterum (per 9 Cap. 1.) Adeoque non erit C centrum Æquilibrii. (Et similiter de Perpendiculo Æquilibrii, ejusve Succedaneo, vel de Perpendiculari Plano, ostendetur. Quod erat ultimo demonstrandum.

PROP. XXI.

Data dati Ponderis (sive unius, sive ex pluribus aggregati) ad datum aliquod libræ punctum ut commune motus & libræ Centrum (vel ad datum Perpendiculum, Succedaneumve, vel Perpendiculare planum per axem) Ponderatione: Datur ejusdem, ad aliud quodvis libræ punctum ut commune Centrum motus & libræ (vel Perpendiculum, Succedaneumve, aut Perpendiculare planum parallelum, ut dictum est) assignatum, Ponderatio.

NAm, propter data duo Centra (vel Perpendicula, Succedaneave, aut parallela Plana) adeoque secundi à priore Distantiam ad datas partes: Datur (per 12, 13, & 17 vel 19 hujus) quantum dati ponderis ponderationi datæ ad datas partes, addendum erit vel auferendum, propter translatum Centrum (vel Perpendiculum, Succedaneumve, aut Perpendiculare planum.) Adeoque quanta erit, & ad quas partes, Ponderatio respectu posterioris. Quod erat propositum.

Puta; si Pondus, vel ponderum Aggregatum, ut 20 P, ponderet ad C Centrum (vel Perpendiculum, Planumve perpendiculare) ut $+10$ PD, dextrorsum; & transferatur centrum (Perpendiculum, planumve) ad E; ut sit, verbi gratia, distantia CE $= \frac{1}{4}$D dextrorsum; auferendum erit $+\frac{1}{4}$D $\times$ 20 P $= +5$ PD. Adeoque ponderabit ad E, ut $+10$ PD -5 PD $= +5$ PD.

Si CE $= \frac{1}{2}$D: auferendum $+\frac{1}{2}$D $\times$ 20 P $= +10$ PD. Adeoque ponderabit, ut $+10$ PD -10 PD $= 00$.

Si CE $=$ D: auferendum $+$D $\times$ 20 P $= +20$ PD. Adeoque ponderabit, ut $+10$ PD -20 PD $= -10$ PD; hoc est, ut 10 PD sinistrorsum.

Similiter

Similiter omnino, si sumeretur E sinistrorsum; nisi quod quæ jam auferenda sunt, tunc essent addenda; & contra.

PROP. XXII.

Data Centrorum Libræ Motusque & Æquilibrii (vel Perpendiculorum per Centrum æquilibrii & per Centrum motus; vel Plani Perpendicularis per motus axem & huic paralleli Plani Æquilibrii) ab invicem Distantia ad datas partes: Ex cognito Pondere (vel summa ponderum) cognoscitur Ponderatio; vel, cognita ponderatione, pondus vel summa ponderum.

$$+D \times P = +DP = +G. \qquad \frac{+G = +DP}{+D} = P.$$

Cum enim appensum Pondus, vel summa Ponderum utcunque appensorum, perinde libram gravant atque si omnia ex Centro Æquilibrii (vel in perpendiculari Plano per Centrum Æquilibrii, plano per Axem motus perpendiculari Parallelo) dependerent; per 20 hujus. Adeoque per 12 & 13 hujus, in ratione quæ ex Distantiæ, & Ponderis (seu summæ Ponderum) rationibus componitur; atque ad eas partes qua est æquilibrii Centrum Planumve. Datis, tum ad datas partes Distantia, tum summa Ponderum; datur Ponderatio (quanta, & ad quas partes:) Vel, Datis Distantia & Ponderatione; Pondus datur, vel summa Ponderum. per 15 hujus. Quod erat probandum.

PROP. XXIII.

Datis Pondere (seu summa Ponderum) & Ponderatione ad datas partes: Datur Centri Æquilibrii (Perpendiculi, Planive, in quo est) à Plano per axem motus transeunte, (vel, in data libra per centrum motus transeunte, à Centro libræ) Distantia ad datas partes. Adeoque; Plani Perpendicularis per axem motus, & huic paralleli Plani Æquilibrii: Vel, in dato Libræ Plano, Perpendiculorum (aut Succedaneorum) per centrum Motus & Centrum Æquilibrii: Vel, in data libra per centrum motus transeunte, Centrorum Motus & Æquilibrii: Uno dato, datur reliquum.

Cum enim Ponderatio ad datas partes, sit in ratione quæ componitur ex rationibus Ponderis (seu summæ ponderum) & Distantiæ Centri Æquilibrii (perpendiculive aut plani in quo illud est) sive à communi Motus & libræ Centro; sive à Perpendiculo per centrum motus ejusve Succedaneo; sive à plano per axem motus perpendiculari; ad datas partes: per 12, 13, & 20 hujus: Data Ponderatione ad datas partes, & ipso pondere seu summa ponderum; datur ad illas partes Distantia, per 15 hujus.

Adeoque (in data libra) distantium punctorum uno insuper dato, datur reliquum (puta, dato centro libræ per centrum motus transeuntis, datur Centrum Æquilibrii; vel, dato centro Æquilibrii, datur istius libræ Centrum:) Similiter, distantium Perpendiculorum (per Centrum Motus, & per Centrum Æquilibrii,) dato uno, datur reliquum: Item, planorum perpendicularium (per Axem motus, & paralleli plani Æquilibrii,) dato uno, datur reliquum. Quod propositum erat.

PROP.

PROP. XXIV.

Libram vulgarem Officinarum Construendi, rationem exponere.

Fig. 51. Libra vulgaris Officinarum, intelligitur Centro suo suspendi; Brachiaque æquali præcise à Centro longitudine utrinque porrigi: Atque ab horum extremis dependere Lances, ad Æquilibrium redactæ: Quarum uni imposito noto Pondere, ignotum prius Pondus in altero æstimatur. Quippe cum æqualibus utrinque à Libræ Centro distantiis, sint appensa: Quod noto Ponderi, sic appensum Æquiponderat, Æquale pondus est: Sin majus; præponderabit, adeoque deorsum feretur: Si minus; elevabitur. Sequitur ex 12 hujus.

SCHOLIUM.

Quo exactiores sint hæ Libræ; requiritur, ut hæc quæ sequuntur, Observentur.

1. Ut Brachia utrinque ab Axe (quo sustinetur Libra) porrecta (una cum Lancibus reliquisque armamentis) sint ejusdem præcise ponderationis; (præsertim dum situ Horizontali ponitur, à quo ponderationis initium sumi solet:) Hoc est, in ipso præcise Æquilibrii perpendiculo sustineatur Libra, cum armamentis. Quippe si alterum Brachiorum (cum armamentis suis) præponderet, ea propendebit Libra; indeque appenso ponderi inique favebit, per 2 hujus.

2. Ut ex sui Jugi Centro æquilibrii præcise dependeat. Sive, ut Axis Libræ sit Axis Æquilibrii. Nam (per 10 hujus) si Axis sit vel tantillum infra Centrum æquilibrii; libra in alteram partem detrusa non revertet, sed plane præcipitabitur, ut usui omnino futura sit incommoda. Si supra Centrum Æquilibrii sit Axis; Revertet quidem detrusa Libra; sed hoc habet cum priori situ commune incommodum, quod Libra ipsa in alteram partem præponderabit, eam scilicet qua erit Æquilibrii Centrum. Unde, ut in priori casu præcipitatio promovetur (propter Libræ præponderantiam ad situm decliviorem) ita in hoc casu (ubi præponderantia Libræ est ad partem contrariam) revocatur quidem Libra ne præcipitetur, sed simul minus sincere suum munus peragit; dum illa Libræ præponderantia, ponderis ex ea parte appensi partibus favet. Quæ constant omnia ex 10 hujus.

3. Ut ejusdem sint præcise longitudinibus ipsa Brachia: Quæ quidem ab ipso Axe seu Centro Motus, ad ipsa Appensionum Puncta, æstimanda est. Quippe si Brachiorum alterum altero longius sit; minus ex illo dependens Pondus, majori ex altero dependenti, æquiponderabit. per 12 hujus.

Atque hinc oriri potest insignis impostura. Puta, si, qui merces vendunt pondere æstimandas, Bilancem ita constitutam habeant, ut vacuæ lances æquiponderent, brachiorum autem alterum altero sit longius: positis enim in lance ex longiori brachio dependente Mercibus; &, in contraria, noto Pondere: Mercium Pondus minus, majori Ponderi in opposita lance æquiponderabit, in fraudem emptoris.

4. Ut liberrime ex Appensionum punctis dependeant (cum suis oneribus) Lances. Eo nempe fine, ut, in quemcunque ad Horizontem situm reciprocetur Jugum, Onus tamen (vi prop. 31. Cap. 2.) eidem semper Jugi puncto subsit; adeoque æquali semper à Centro distantia suspendi intelligatur. Quippe ex eo Libræ puncto suspendi intelligitur, cui directe subest: per 4 hujus.

5. Ut ipsa, in libræ Jugo, Appensionum puncta, sint in eadem præcise Linea Recta cum ipso Motus Centro; sive (quod eodem recidit) in eodem cum Axe Plano cui Examen Perpendiculariter insistit. Quippe si vel infra, vel supra, sint Appensionum puncta; (cum tantundem valeant appensa pondera, atque si in ipsis essent, per 4 hujus) pro vario libræ situ, variabitur momentorum ratio: ut ad 14 hujus ostenditur in casu 2; ubi Centrum Motus est extra Libram; hoc est, extra rectam illam quæ appensionum puncta conjungit; per 9 & 12 def. hujus.

6. Ut duo Brachia, sint, quam commode fieri potest, Longa. Quo enim longius à Centro distant Appensionum puncta, eo plus ponderant, tum sigillatim appensa pondera (per 12 hujus,) tum (quod inde sequitur) comparatorum ponderum

rum Differentia: (cui ponderando æquipollent simul utraque pondera contrariis Lancibus imposita; per 5 hujus.) Unde, quod, in brevi Jugo, sensum fugiat discrimen, idem, pro Jugi longitudine auctum, evadet satis notabile.

7. Ut Jugi firmitas tanta sit (pro ratione Ponderum ad illud exigendorum) ut non vel rumpatur, vel inflectatur. Hoc utique adversaretur def. 2 & 9 hujus; quæ Libram Jugumque inflexile supponunt. Et (ne cæteris immoremur) illis saltem incommodis obnoxium erit, quæ, ex Centro Motus extra libram posito oriunda, modo memoravimus.

8. Ut Axis Acies, qua sustinetur jugum (quæque per ipsius Centrum gravitatis, vel Æquilibrii, transire intelligitur) Tum Acuta sit (ad instar quasi lineæ Mathematicæ, quam referre intelligitur) quo facilius in utramvis partem reciprocetur Libra: Tum situ Horizontali constituta, (quippe Libra circa Horizontalem Axem sincerius libratur, utpote in plano ad Horizontem recto, in quo, cæteris paribus, Pondera magis gravitant, & suapte sponte feruntur, per 25, 26, Cap. 2.) Tum denique ut Declivitatem habeat utrinque æqualem (nam siqua motus est declivior, ea magis propondebit Libra; per 17, Cap. 2.) Adeoque ut Axis Cuneum referat, cujus duo plana in Aciem coeuntia, sint (posito Jugo in situ Horizontali) ad Horizontem æqualiter inclinata; & simul Trutinæ foramina, quibus sustineri solent Axis extrema, ita subtus comparata sint ut ab infimo puncto, cui incumbit Axis acies, æquali utrinque acclivitate assurgant; utrinque enim (nempe tum ob formam Axis indebitam, tum foraminum Trutinæ inæqualem acclivitatem) oriri poterit inæqualitas in declivitate motus.

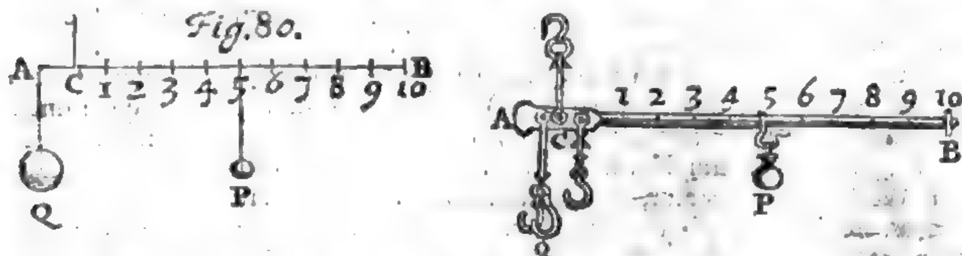
9. Ut, quam fieri possit per alia incommoda, tenue sit & leve Jugum, cum armamentis suis. Nam (per 2 hujus) utut, cæteris ut dictum est comparatis, ipsum Jugi Pondus, cum Lancibus reliquaque armatura, Librationem quod spectat, nullius instar habeatur: Axem tamen, quo sustinetur, premit, ejusque obtundit aciem, quo minus circa illum libere rotetur libra. Adeoque quo minus fuerit Jugi pondus, eo minus hinc incommodi, cæteris paribus, oborietur.

10. Denique; pro varia Gravium ad Examen exigendorum pondere & magnitudine, aliter atque aliter prospiciendum erit in fabrica Libræ. Nempe, in Aurifabrorum & Gemmariorum Bilancibus quibus res minutissimæ ad examen revocantur; maxime prospiciendum erit ut accurate omnia fiant, quo levissimum Ponderis discrimen detegatur. Quas quidem tanta cum accuratione fieri nonnunquam dicitur, ut $\frac{1}{400}$ unius grani huc illuc vertatur; imo (quod in Honoratissimi *Boylii* nostri accuratissima quadam Bilance observatum est) parte unius grani, $\frac{1}{1024}$; (quod coram compluribus testibus fide dignis experimento facto sæpius comprobatum fuit.) Ubi autem res, magnæ Molis & Ponderis, librandæ veniunt (ut in Fabrorum ferrariorum negotiis, aliisque magni moliminis rebus fieri solet) magis prospiciendum erit firmitati totius machinæ: Adeoque ita attemperanda sunt quæ de Longitudine Brachiorum, de tenuitate & levitate Jugi, de Aciei Axis acumine, reliquisque hujusmodi, supra diximus; ut firmitati totius machinæ non officiatur. Et quidem, quæ ad Centipondium pendendum paratur Libra, non minus accurata censebitur, si uno scrupulo vertatur; quam quæ ad Drachmam pendendam comparatur, si vertatur parte $\frac{1}{480}$ unius grani. Nam ut Centipondium in se continet scrupulos 28800; ita Drachma continet $\frac{28800}{480}$ unius grani; computando scilicet in Libra seu Pondo 12 Uncias; in Uncia, 8 Drachmas; in Drachma, 3 Scrupulos; in Scrupulo, 20 Grana:) Adeoque; utrobique eadem appensi Ponderis parte aliquota vertitur.

PROP. XXV.

Stateram Romanam construendi rationem exponere.

STatera, quam (ob usum ejus frequentem Romæ ut putatur) *Romanam* vocant; à vulgari Libra, Brachiorum longitudine potissimum differt: Quæ non, ut Vulgaris



Libra, Æqualia habet; sed pro varia Ponderum comparandorum ratione, varie Inæqualia. Porrecto nempe ab Axe Motus (qui & Axis Æquilibrii esse debet) Brachiorum altero, ut C A, in certam longitudinem, puta unius Pollicis, aut etiam minorem; in altero Brachio, ut C B, quantumvis porrecto, distinguunt partes ipsi C A longitudine æquales, quot opus videbitur, distantiis 1, 2, 3, 4, &c. terminatas; (quas etiam in particulas quotlibet æquales distribuunt.)

Appenso itaque Q Quæsito Pondere seu explorando ex A; Pondus datum seu notum P, ex Brachio contrario dependens, à puncto C removendo & admovendo explorant in qua distantia fiet æquilibrium. Atque invento, verbi gratia, pondus P in distantia 5, ponderi Q in A, æquiponderare: hinc colligunt (propter pondera Distantiis reciproce proportionalia) pondus Q, ponderis P noti, quintuplum esse. Cujus Demonstratio ex 12 hujus dependet.

SCHOLIUM.

HOc habet Statera hæc, præ vulgari Libra commodum: Tum ut uno pondere noto, quodcunque explorandum ponderent: Tum ut minus gravetur Centrum vel Axis Libræ. Quanquam enim rotationem quod spectat tantundem valet P in 5, atque 5 P in 1; non tamen æqualiter gravant Axem; Ut ad 18 hujus ostensum est. Sed Fraudi magis est obnoxia.

Monendum porro hic tandem duxi, quod à *Pocockio* nostro (Linguarum Orientalium apud nos nuper Professore peritissimo) didici; ab ipso, *Constantinopoli* olim commorante, observatum; ubi frequentissimus est hujusmodi *Stateræ* usus: Nimirum, quod Sacoma, seu Contra-pondium, in hac Statera, in forma *Mali Punici* (seu Pom-granati) construere soleant (quam formam & Nostri retinent,) quod Hebræis *Rimmon* dicitur, Arabibus *Romman*; unde illis nomen huic Stateræ factum est *Rommana*: (quod Lexicographi confirmant:) diceretur quasi, *ponderatio ad Malum Punicum*. Nos autem (Stateram ipsam ab Orientalibus, ut videtur, mutuati) Nomen etiam (quod fieri solet) æmulati sumus: ad Sonum magis quam Significationem intenti (quam forte minus intelleximus.) Indeque ex eorum *Rommana* nostrorum deformata est *Romana*: declinante Sono ad Vocem nobis notam: (Quod porro suadet, etiamnum apud nos retenta *Mali Punici* forma in contra-pondio, ut apud illos.) Dum interim *Romanis*, quam aliis *Europæis*, Stateram hanc magis usitatam esse, aut ab illis ad alios fuisse derivatam, mihi nondum constat. Viderint alii.

Hæc autem Ponderandi ratio (ni male conjicio) ea est quam prohibet Lex nostra Parliamentaria *Anno*, 25. *Edw.* 3, *Cap.* 9. sub nomine *Auncel Weight*. Ubi cautum est (inter alia) ne in posterum usurpetur hæc ponderandi ratio *Auncel* dicta, sed vendendæ & emendæ merces, ad *Bilancem* ponderentur. (*Whereas great damage and deceit is done to the people, by so much that divers Merchants use to buy & weigh Wooll and other Merchandises by a weight that is called Auncel: It is accorded and stablished that this weight called Auncel betwixt buyers and sellers shall be wholly put out; And that every sale and buying be by the Ballance; so that the Ballance be even, and the Woolls and other Merchandise evenly weighed by right weight.* Iterumque (iisdem fere verbis) *Anno* 34. *Ed.* 3. *cap.* 5. Item *Anno* 8. *Hen.* 6. *cap.* 5. Verum ante ea tempora ejusdem usum approbatum fuisse liquet ex *Statuto*, *Anno* 14. *Edw.* 3. *cap.* 12.

FINIS.

MECHANICORUM,

SIVE

Tractatus

De MOTU:

PARS SECUNDA:

Quæ est

DE CENTRO GRAVITATIS, Ejusque CALCULO.

Anno 1670 edita.

Ad Lectorem
MONITIO.

NEquis miretur, quod Pars hæc Secunda, præter solitum, ex abrupto inchoari videatur; continuatis tum Capitum, tum Figurarum, tum Paginarum Numeris: Lectorem monendum duxi, id pluribus de causis contigisse. Primo quidem, quod non ab initio statueram particulatim edere; sed simul & semel opus integrum emittere. Et quidem (ut dicam quod res est) Partis hujus Secundæ pars quasi dimidia jam ante impressa fuerat, quam vel Partem Primam (anno præterito) ediderim, vel Opus ipsum in Partes distribuendum putaverim. Sed partim Operarum Moræ, quæ Opus Typothetis difficile, atque inusitatum, in longum protraxerant; partim aliorum impatientia, qui ut saltem Partem illam præmitterem efflagitarunt; fecere, ut loco commodo Sectionem facerem. Verum, si id in causa non fuisset; alia tamen ratio est (quæ etiam ab initio fecit, ne Opus hoc in Libros partirem,) cur sic fecissem. Quippe, cum frequentissima occurrat Citationum occasio; si, quoties Figura vel Propositio citanda foret, toties, præter ipsarum Numeros, tum Libri seu Partis, tum Capitis Numeri recensendi essent: Omnino minus commode id fieret, quam (quod hic fit) ubi Figura quælibet unico Numero, & quælibet Propositio vel unico vel saltem duobus Numeris designatur. Atque, ob eandem causam, etiam sequentis Partis Numeri cum Numeris Secundæ continuandi erunt.

CAP.

CAP. IV.

De Centro Gravitatis.

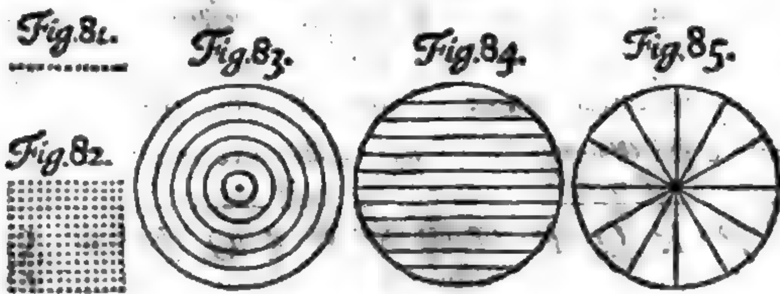
DEFINITIO.

Continuum quodvis (secundum Cavallerii Geometriam Indivisibilium) intelligitur, ex Indivisibilibus numero infinitis constare.

UT, ex infinitis Punctis, Linea; Superficies, ex infinitis Lineis; & ex infinitis numero Superficiebus, Solidum: Item ex infinitis temporis Momentis, Tempus, &c.

Hoc est; (ut nos idem explicamus in nostra Arithmetica Infinitorum, & Tract. de Con. Sect.) ex particulis Homogeneis, infinite exiguis, numero infinitis; Idque (ut plurimum) secundum unam saltem dimensionem æqualibus.

PUta; Linea, ex infinitis punctis, hoc est, Lineolis infinite exiguis, longitudine æqualibus, vel æque-altis; quarum cujusvis longitudo vel altitudo sit $\frac{1}{\infty}$ (pars infinitesima) longitudinis vel altitudinis totius lineæ. Fig. 81.



Item, Superficies ex infinitis lineis sive rectis sive curvis parallelis; hoc est, superficieculis (lineis illis interjectis) æque-altis, quarum cujusvis altitudo sit infinitesima pars totius altitudinis; aut etiam ex punctis (quibus illæ lineæ intelliguntur constare) hoc est ex superficieculis æqualibus & similibus, quarum cujusvis magnitudo sit $\frac{1}{\infty}$ totius areæ. Fig. 82. 83. 84.

Item; Solidum, ex infinitis numero superficiebus, hoc est solidulis æque-altis sive æque crassis, quorum cujusvis altitudo vel crassities sit $\frac{1}{\infty}$ totius; vel, lineis numero infinitis (ex quibus intelliguntur illæ superficies constare) puta ex totidem Prismatis, situ parallelis, quorum bases (communi plano sectorum ad ea recto) similes sint & æquales, quarum magnitudo sit $\frac{1}{\infty}$ istius quo secantur plani; vel etiam, ex punctis (quibus illæ lineæ intelliguntur constare) hoc est solidulis exiguis, æqualibus, quorum singulorum magnitudo intelligatur $\frac{1}{\infty}$ totius.

Quæ quidem Lineolæ, Superficieculæ, Solidula, &c. variis modis disposita intelligi solent, prout constructori videatur expedire. Exempli gratia; Circulus dicetur, hoc sensu, ex infinitis numero rectis parallelis constare, ad eandem unam aliquam diametrum ordinatim-applicatis; hoc est, Parallelogrammis æque-altis: Fig. 84.
Vel ex infinitis numero Circumferentiis concentricis; hoc est, annulis æque crassis: Fig. 83.
Vel ex infinitis numero radiis; hoc est, sectoribus, vel triangulis similibus, &c. Fig. 85.
Et Sphæra similiter, sive ex infinitis numero planis æque crassis; sive ex totidem superficiebus Sphæricis concentricis; sive ex infinitis numero sectoribus sphæricis, aut pyramidulis, &c.

Dico tamen, *ut plurimum*, ita fieri, ut illæ particulæ secundum unam saltem

dimensionem sint æquales: Neque enim illud necessario exigitur; quin, si id aliquando expedire videbitur, pro altitudinibus (verbi gratia) æqualibus, poterit constructor vel Arithmetice proportionalibus, vel secundum aliquam aliam ordinatam seriem crescentibus vel decrescentibus uti.

Hoc est (secundum Mathematicum rigorem) saltem inscribi potest, vel circumscribi, vel alias adaptari, ex hujusmodi particulis conflatum quid, quod ab exposito differat quantitate infinite exigua, sive quæ data quavis minor sit.

PUta; in Circuli peripheria, ex arcubus numero infinitis, conflabitur curva quæ peripheriæ exacte congruat; sed & eidem peripheriæ inscribi potest ex subtensis numero infinitis, vel circumscribi ex infinitis numero tangentibus, conflata linea, quæ à peripheria illa deficiat, vel eam superet, differentia quæ data quavis minor sit. Unde factum est, ut Circulus, pro Polygono regulari laterum numero infinitorum, haberi soleat. Et, in aliis curvilineis, similiter.

Item Circuli Plano, aptari potest, sive ex Annulis, sive ex Sectoribus, figura quæ circulo accurate congruat: Sed & eidem inscribi potest vel circumscribi, sive ex Parallelogrammis, sive ex similibus Triangulis figura, cujus ab exposito circulo differentia, sit data minor. Atque in aliis similiter.

Atque hanc, de Indivisibilibus, doctrinam (nunc passim receptam, atque, post Cavallerium, à celeberrimis Mathematicis approbatam) pro Veterum continua figurarum Adscriptione, substituere visum est; ut breviorem; nec tamen, minus demonstrativam, si debita cautione adhibeatur.

Hanc interim definitionem, utut Capiti V. maxime subservituram, huic IV Capiti præfigo, quoniam & hic alicubi usui erit. Ut siquando Grave, per omnia sui puncta, designem, &c. nec velim tamen perperam intellectum iri.

Sin Demonstrandum hoc, non Definiendum, putet quis; Ego quidem pro eatenus demonstrato habeo quatenus demonstratione opus sit, ex demonstrata ab aliis Methodo Indivisibilium. Hic utique id agitur, ut definiam quo sensu velim hujusmodi quæ occurrunt intelligenda; quod est Definitionis opus.

Definitio *Centri Gravitatis*, habetur in Capite præcedente.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si Puncto unico, ut Centro Motus, sustineatur Grave (vel ex pluribus conjunctis gravibus aggregatum:) poterit nihilominus in quasvis partes, circa illud rotando moveri; non alias.

Si duobus punctis, pluribusve in eadem recta, ut motus Axe sustineatur: poterit, circa illam rectam, in utramvis partem rotando moveri; non alias.

Si tribus (pluribusve) non in eadem recta punctis sustineatur: in nullas partes movebitur.

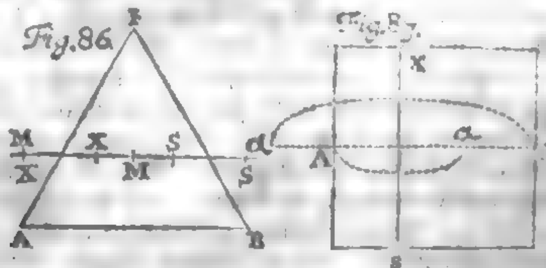


Fig. 86. INtelligatur Grave quodvis A B F, unico puncto M ut Centro motus sustineri. Manifestum est, stante hoc puncto M, in quascunque circa hoc moveatur partes, eandem

eandem posse totius figuram retineri. Quippe in quodcunque Superficiei Sphæricæ, centro M descriptæ, moveatur (verbi gratia) punctum A; (hoc est, in quascunque partes circa M rotetur;) nihil impedit quin & reliqua puncta, ut B, ita simul moveantur, ut eandem quam prius inter se positionem retineant. Puta, ut A, B, sint in eadem qua prius distantia; sitque A B F idem angulus, iisdemque ut prius cruribus comprehensus, &c.

Sin duobus punctis, ut X, S, (vel pluribus in eadem recta) aut etiam ipsa X S recta, ut Axe motus sustineatur: Manifestum est, stante recta XS, adeoque omnibus in illa punctis, posse aliud quodvis punctum, circa hanc ut Axem, vel prorsum vel retrorsum peripheriam describere, reliquaque simul puncta, ita ut necesse erit quo eandem inter se positionem retineant, moveri; similes item peripherias circa eundem Axem describendo.

Suntque hæc duo, vel ita ex Elementis perspicua, vel per se manifesta, ut in 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, deff. 11 Euclidis (quæ Sphæram, Conum, & Cylindrum spectant) quasi pro postulatis supponantur.

Sed dico porro; Stante centro motus M, non posse, nisi circa hoc rotando, moveri grave: propter eandem, quam manere supponimus distantiam, cujuslibet sui puncti, tum ab M puncto, tum à sui quovis alio. Per def. Centri motus.

Item; Stantibus X, S, punctis; non posse alias quam circa hanc rectam rotando (ut circa Axem) moveri. Quippe omnia ejusdem X S rectæ puncta, eodem situ manere certum est; (secus enim non possent eandem quam prius ab utroque distantiam retinere:) Quæque extra hanc rectam puncta, si aliter moveantur quam circulos circa X S axem describendo, non retinebunt eandem ubique tum ab X tum ab S distantiam; (quod ex Elementis Sphæricis facile constabit.) Et, nisi simul ita moveantur omnia (hoc est, nisi totum grave circa X S axem rotetur) non eundem inter se situm conservabunt; (quod supponitur.) Non igitur alias quam sic rotando movebitur.

Denique: Si tribus punctis, ut X S A (nedum pluribus) non in eadem recta, sustineatur: Non movebitur. Cum enim, stantibus X S, non posse aliter, quam rotando circa X S ut Axem, moveri grave, jam ostensum sit: non posse autem sic moveri, stante etiam (extra hanc rectam) puncto A; (utpote quod, cum extra Axem sit, non à reliquis moti punctis omnibus, nisi & ipsum simul moveatur, eandem distantiam retinebit, quod Rotationis definitio postulat:) non omnino movebitur.

SCHOLIUM.

INtelligitur Propositio, de Gravi (seu gravium Aggregato) duro & constante; eousque saltem constante, ut, ea, quæ adhibetur Vi, nec frangatur, nec luxetur aut incurvetur; quin eandem (saltem æquipollentem) retineat figuram, omniumve ipsius partium inter se positionem respectu totius, utcunque situm seu positionem respectu loci mutent: Non de Gravi fluido seu molli, quod promiscue incurvetur, vel figuram suam mutet partiumque inter se positionem. Quod & in aliis subinde propositionibus intelligendum erit.

Puncta vero, ut M, X, S, &c. quibus sustineri intelligitur grave; adeoque immotis illis, moveri; sive sint in ipso Gravi, sive extra, perinde est. Sed utcunque ita cum Gravi quod movetur quasi connecti intelligenda sunt, tanquam ipsius puncta essent; & eandem cum reliquis Gravis punctis positionem retineant, utcunque moveatur Grave.

Puncto autem (uno vel pluribus) sustineri dicetur illud Grave; quando (retenta sua ad Gravis partes singulas positione) loco suo minime dimoveri intelligatur punctum illud, seu plura puncta.

Denique; Quod, de Gravium Aggregato (dum ita, ut dictum est, connecti intelligantur) tanquam pro uno Gravi habendo, hic insinuamus: idem in sequentibus intelligendum erit. (Quippe & Gravium Aggregatum, Grave est.) Quod semel moneo; ne singulis identidem propositionibus repetere opus sit.

PROP.

PROP. II.

Si recta quavis, ut Axe Motus, ad Horizontem perpendiculari sustineatur grave; in nullam partem gravitate sua præponderabit; Adeoque, sibi sic permissum non movebitur.

Fig. 87. NAm, stante recta, ut X S, ad Horizontem perpendiculari (adeoque ipsius punctis omnibus eodem situ manentibus;) quodcunque, extra hanc, punctum moveatur, ut A, peripheriam describet, ut A α, circa X S ut Axem (per præced.) adeoque in Horizontali plano: (Cum enim X S perpendicularis sit, tum ad planum circuli, utpote cujus Axis est; tum ad Horizontem, ex hypothesi; erit circuli planum illud Horizontale; per 14 El. 11.) In quo quidem plano cum nullus sit Descensus, aut Præponderatio; nec fiet, ob gravitatem, motus. (per 4, 9, 23, cap. 2.) Cumque de omnibus gravis punctis perinde constet, constat de Gravi toto; Quod erat propositum.

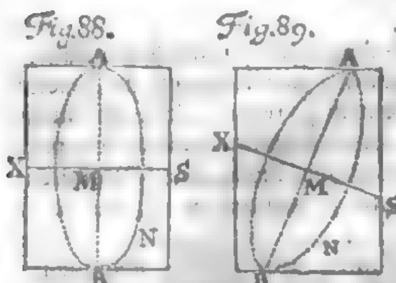
SCHOLIUM.

REcta vero sustineri dicetur Grave, si duobus saltem ipsius punctis sustineatur; quippe sic tota recta eodem situ retinebitur; ut ad prop. præced. ostensum est.

PROP. III.

Si Grave recta quavis, ut motus Axe, non ad Horizontem perpendiculari, sustineatur; sitque in Plano per Axem Motus incedente constitutum, ad Horizontem recto; (quod *Perpendiculare planum per Axem*, dicimus;) in neutram partem præponderabit; Adeoque sibi sic permissum, non movebitur.

Sin extra illud Planum constitutum sit; ad Planum illud, infra motus Axem feretur.



PEr X S motus Axem (vel Horizonti parallelum, vel utcunque obliquum) incedat Planum Horizonti rectum X S A, in quo intelligatur constitutum Grave. Erit quodcunque Gravis punctum vel in ipso Axe, ut M; vel infra, ut B; vel supra Axem, ut A.

De puncto M, manifestum est, stante X S, ipsum M item stare; utpote quod est in ipsa X S recta.

De B, constat; Cum enim (per 1 hujus) non possit B moveri, stante X S, quin peripheriam rotando describat, ut B N A; ad cujus planum rectus est X S Axis; Cujus quidem Peripheriæ punctum infimum est ipsum B (per 20 Cap. 2.) Inde non movebitur sponte sua: Quippe Grave (per def. Gravitatis) non nisi Descensus ergo, gravitate sua movebitur.

Idem denique, de A constat: Quippe cum non possit A moveri (per 1 hujus) nisi peripheriam, ut A N B, circa X S ut axem describendo; cujus (per 20 Cap. 2.) tum supremum punctum est ipsum A, tum Descensus utrinque pariter Declivis; in neutram partem feretur. per 8, 17 Cap. 2.

Cumque hoc constet de singulis Gravis punctis, sive infra, sive supra, sive in ipso Axe; constat de Gravi toto, sic constituto, in neutram partem præponderare; adeoque nec motum iri. Quod erat propositum.

Sin extra hoc planum constitutum sit Grave: ipsius puncta singula, quæ extra planum sunt, ut N; intermedia erunt, in suis respective peripheriis, inter punctum supremum, ut A, & infimum ut B (per 20 Cap. 2.) Adeoque deorsum ad B feretur, per 2, 8, Cap. 2. Quod erat ultimo demonstrandum.

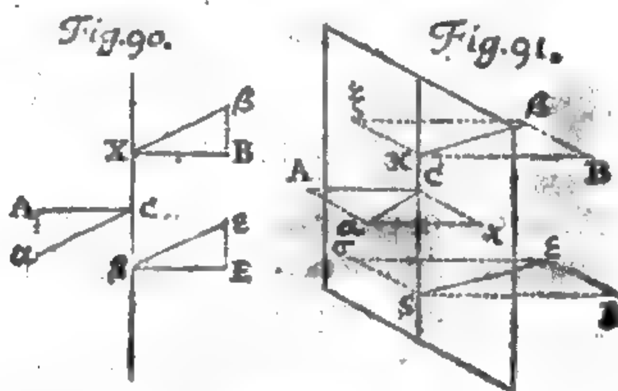
PROP.

PROP. IV.

Si circa rectam quamvis, ut Axem, (sive Horizontalem, sive utcunque obliquum,) rotetur Grave; ea ratione ponderant ipsius puncta singula æqualiter gravata (aut illis applicata pondera æqualia) qua distant à Perpendiculari per Axem Plano.

Adeoque: Si inæqualiter gravata; in ratione ex Ponderum (sive Gravaminum) & Distantiarum rationibus composita.

Sit primum Axis XS, in plano Horizontali; atque in eodem Horizontali plano puncta quotlibet A, B, E. Unde ducantur ad Axem normales AC, BX, ES: Fig. 90.



(quæ itaque, per def. 4 El. 3. plano per Axem perpendiculari normales sunt, punctorum ab eo Plano distantiam mensurantes.) Cumque, per 1 hujus; non possint alias A, B, E, puncta, quam rotando ferri; (circulorum peripherias Centris C, X, S, describendo; & quidem, propter situm Axis Horizontalem, ad Horizontem rectorum;) Erunt AC, BX, ES, totidem Libræ, circa sua respective Centra C, X, S, rotatæ: Adeoque, per 12, 13, Cap. 3. A, B, E, puncta, in eodem plano horizontali posita, æqualiter gravata, ponderant in ratione distantiarum, AC, BX, ES: Inæqualiter vero gravata; in ea quæ ex harum, & Ponderum rationibus componitur. Quod erat propositum.

Deinde; Manente Axe XS, in situ Horizontali; (quo plana circulorum rotatione factorum, sint adhuc ad Horizontem recta:) Sint, extra planum Horizontale, puncta Gravis quotlibet, α, β, ι: (sive in eodem, sive diversis Planis, perinde est:) Unde, ad Planum Horizontale ducantur perpendiculares; puta αA, βB, ιE. Intelligatur autem, per ipsum Axem XS, erigi Planum ad Horizontem perpendiculare; atque ad hoc perpendiculares rectæ, ακ, βξ, ισ; vel his æquales (utpote parallelæ parallelis terminatæ) AC, BX, ES. Ostendetur (ex prop. 18. cap. 2. vel 4, 13 cap. 3.) tantundem ponderare eadem pondera in α, β, ι, atque in A, B, E. Hoc est; (per jam demonstrata) in ratione distantiarum AC, BX, ES, vel ακ, βξ, ισ, si Puncta sint æqualiter gravata; vel, si inæqualiter, in ratione quæ ex harum & Ponderum rationibus componitur. Quod erat propositum. Fig. 91.

Denique: Sit situs Axis ad Horizontem utcunque obliquus: Reliquaque, ut prius, constructa. Nempe, in eodem XSABE plano Inclinationis, rectæ AC, BX, ES, Axi ad angulos rectos; in quas scilicet cadunt, à punctis α, β, ι, demissæ Perpendiculares ad idem Planum, αA, βB, ιE. Similiter omnino procedet demonstratio, nisi quod Circuli rotatione descripti, qui prius erant ad Horizontem recti, nunc fiant obliqui; adeoque, propter planorum Obliquitatem, minuuntur Ponderum Momenta. Est autem, propter eundem omnium axem, eadem circulorum omnium Obliquitas; Adeoque in eadem ratione minuuntur Ponderum Momenta, per 26 Cap. 2. Quam itaque rationem inter se haberent Momenta Ponderum in A, B, E, α, β, ι, in erectis circulis; eandem & hic habebunt in circulis æqualiter inclinatis (per 5 cap. 1.) Hoc est (per jam demonstrata) in ratione distantiarum à Perpendiculari per Axem Plano, ponderabunt, si sint æqualiter gravata; vel, si inæqualiter, in ratione quæ ex harum & Ponderum, rationibus componitur. Quod erat ultimo demonstrandum.

Brevi. Summa Demonstrationis huc redit. Cum quæ ad prop. 12 & 13 cap. præced. Ponderationum Rationes traduntur, in hanc universalem propositionem conspirent, *Æqualia Pondera, circa axes æqualiter inclinatos, ponderare in ratione distantiarum à plano per Axem Perpendiculari*; *Et*, *Inæqualia, proportionaliter*: (Quæcunque sit vel Axis, vel Libræ ad Horizontem positio; &, sive per Centrum Motus transeat Libra, sive secus; item, sive sint ad eandem vel diversas Libras, sive in eodem vel diversis Planis librentur:) Constat propositum, de quocunque Axis situ, non ad Horizontem recto; & de quocunque Punctorum ad Axem situ. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

De Situ vero Axis ad Horizontem recto, non agit hæc Propositio; (ut neque sequentium aliquot:) Quoniam, hoc casu (propter rotationum circulos Horizonti parallelos) nulla erit cujusvis puncti, utcunque gravati, ad motum circa axem propensio, seu Ponderatio: ut dictum est, Prop. 2. hujus.

PROP. V.

Si Perpendiculare Planum, per motus Axem, incedens; secet Grave in partes invicem æquiponderantes: (Hoc est; Si Perpendiculare Planum per Axem sit Planum Æquilibrii:) Non movebitur, sibi sic permissum, Grave.

Sin Segmentorum alterum, reliquo præponderet; (dummodo non sit Axis motus, ad Horizontem perpendicularis:) Ea feretur; eatenus donec fiat Æquilibrium. Et simul utraque æquipollent excessui præpollentis.

Adeoque; Non erunt, ejusdem gravis (aut Aggregati gravium) duo Æquilibrii Plana invicem parallela.

De Axe motus ad Horizontem recto; constat propositum; ex 2 hujus. Nempe, non moveri grave.

De Axe motus non ad horizontem recto; sic demonstratur.

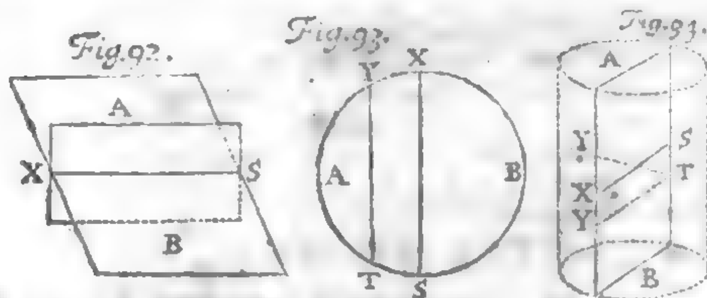


Fig. 92. Si perpendiculare planum per XS motus axem, dividat Grave in segmenta A, B: horum utraque (gravia cum sint, & extra perpendiculare planum posita) hac illac Descensum molientur (per 3 hujus;) Et quidem utrumque (propter rotationem circa XS axem, per 1 hujus) cum Ascensu contrarii; adeoque contraponderabunt: Si itaque æquiponderant: contrarii conatus æquales, se mutuo sustinebunt; nec fiet motus. Si alterum præponderet: hoc reliquum superabit; adeoque motus horsum fiet, donec Æquilibrio impediatur (per 12 cap. 1.) Duoque simul conatus contrarii: æquipollebunt excessui præpollentis. (per 8 cap. 1.) Quæ demonstranda erant.

Fig. 93. Atque hinc sequitur: (Quod etiam ante demonstratum est, ad prop. 20. cap. præced.) Non dari, ejusdem gravis (aut aggregati gravium) duo parallela Plana Æquilibrii. Nam si Planum per XS sit Planum Æquilibrii; huic Parallelum, puta per YT, non erit. Nam (positis utrisque ad horizontem perpendicularibus) si segmenta XSA, XSB, æquiponderant; segmenta YTA, YTB, non

æquipon-

æquiponderabunt. Nam XSTY interſegmentum, æquiponderantium uni ablatum, alteri additum, momenta faciet inæqualia; per 9 cap. 1. Saltem, ſi interſegmentum illud nullum ſit (ſed quaſi vacuum, inter duo connexa Gravia interjectum;) fiet utcunque ſegmentorum alterum, ut XSB, longius ab YT quam ab XS; propius autem alterum YTA: Adeoque illius momentum augebitur, hujus minuetur (per 13 cap. 3.) & deſtruetur Æquilibrium, per 9 cap. 1.

SCHOLIUM.

PLana Perpendicularia, *Parallela*, hic appello (& ſubinde alias, ubi eadem ratio) quando Horizontales Rectæ unius, ſunt alterius Rectis Horizontalibus, parallelæ. Quanquam enim, perpendicularia cum ſint Plana, in Terræ centro coeant; eadem tamen ratione (ne longa periphraſi opus ſit) Parallela Plana dicentur, qua Perpendicula (propter immenſam Centri terræ diſtantiam) pro Parallelis Rectis haberi ſolent.

PROP. VI.

Si recta quapiam, ut Axe, non ad Horizontem perpendiculari, ſuſtentum Grave, quieſcet: Idem Grave, eodem ſitu conſtitutum, alia quavis ejuſdem ad Horizontem perpendicularis Plani recta ſuſtentum, pariter quieſcet.

Recta vero extra hoc Planum, plano Parallela (non ad Horizontem recta) ſi ut Axe ſuſtineatur: non, eo ſitu conſtitutum, quieſcet.

PUta: Si AB Grave, Axe XS (non ad Horizontem recto) ſuſtentum, quieſcet: Perpendiculare Planum per hunc incedens, ut YXST, grave dirimet in A, B, ſegmenta, invicem æquiponderantia: (Nam ſi alterutrum præponderaret, non quieſceret Grave; per præced.) Sumpta igitur alia quavis in eodem Plano recta, ut YT: quum per hanc incedens Planum YXST (ut jam oſtenſum eſt) ſecet Grave in partes invicem æquiponderantes: Axe YT ſuſtentum, ſic conſtitutum Grave, quieſcet. per præced. Fig. 94.

Sin alia quavis, extra hoc Planum, recta (quæ Plano parallela ſit, & non ad Horizontem recta) ut Axe, ſuſtineatur: non, eo ſitu, quieſcet. Quippe, ſi quieſceret hac alia recta ſuſtentum; eſſet, per hanc incedens perpendiculare Planum, Planum Æquilibrii; (nam, niſi æquiponderarent ſegmenta, non quieſceret; per præced.) Eſtque plano priori parallelum; (quod, propter parallelam plano per quam incedit rectam, non ad Horizontem perpendicularem; &, quem ſupponimus, Perpendiculorum paralleliſmum; probabitur ex 15 El. 11.) Adeoque, duo eſſent parallela Plana Æquilibrii. Quod (per præced.) fieri non poteſt.

PROP. VII.

Si Æquilibrii Axe ſuſtineatur Grave: quocunque ſitu ponatur, ſibi ſic permiſſum, quieſcet.

Et contra; Si Axe motus ſuſtentum Grave, quocunque ſitu ponatur quieſcet: Axis ille motus, eſt Axis Æquilibrii.

NAm; Si Æquilibrii Axe ſuſtineatur Grave; quocunque ſitu ponatur Grave; (nempe; quocunque ad Horizontem ſitu ponatur Axis ille; & quodcunque Planum per hunc motus Axem, conſtituatur ad Horizontem rectum:) Perpendiculare Planum per Axem, Planum erit æquilibrii: (per def. Axis Æquilibrii.) Adeoque non movebitur, ſibi ſic permiſſum Grave; per 5 hujus.

Converſa ſimiliter patet. Nam, niſi motus Axis ille, ſit Axis Æquilibrii; erit ſaltem aliquod Planum per hunc incedens, quod Planum Æquilibrii non erit (per def. Axis Æquilibrii.) Adeoque, poſito hoc Axe non in ſitu ad Horizontem recto; poſitoque illo non Æquilibrii Plano, in ſitu perpendiculari; Movebitur Grave: per 5 hujus. Quod eſt contra hypotheſin.

PROP. VIII.

Si unico sui puncto sustineatur Grave: quocunque situ ponatur; saltem unum per punctum illud incedens Perpendiculare planum, est planum Æquilibrii.

Adeoque; Per omne Gravis Punctum incedit aliquod Æquilibrii Planum.

Fig. 88. Sit XASB Grave; puncto sui M sustentum; per quod transeat Perpendiculum AMB; perque hoc incedat AMBN perpendiculare Planum. Erit hoc AMBN, vel Planum Æquilibrii (adeoque habetur quod erat probandum;) vel segmentum alterum, puta ABNS, præponderabit. Quo casu; Planum AMBN (cujus faciem alteram, puta quæ S respicit, Anteriorem dicemus; alteram, Posteriorem;) intelligatur, immoto Gravi, imaginatione converti circa AMB axem; donec eo perveniatur ut quæ utrinque sunt segmenta Gravis Æquiponderent. Hoc enim omnino fore certum est: Quippe, facta semi-conversione, quod erat ab anteriore conversi Plani facie, à posteriore relinquetur, segmentum Gravis præponderans; & contra: Cumque à præponderantia antica ad posticam sic continuo motu perventum sit; eo momento quo ab hac ad illam transibatur, neutra erat; sed, æquiponderantia. Quodque cum converso Plano, hoc situ posito, coincidit immotum, per Grave, Planum; est Perpendiculare Planum Æquilibrii.

Unde & constat Corollarium. Quippe quovis sui puncto sustentum intelligi possit Grave.

PROP. IX.

Si unico sui puncto sustineatur Grave: Per illud incedens Perpendiculare Planum Æquilibrii, manebit Horizonti rectum.

Ideoque; vel quiescet grave; (nempe si perpendiculum per centrum motus, seu punctum illud quo sustinetur grave, sit Perpendiculum Æquilibrii istius Plani sic gravati.)

Vel (si perpendiculum illud non sit Perpendiculum Æquilibrii istius plani) rotabitur circa Horizontalem Axem, Plano illi rectum, per centrum motus seu punctum illud quo sustinetur Grave transeuntem; donec ad Æquilibrium redigatur.

Sin Planum aliquod Perpendiculare, non sit Planum Æquilibrii: Segmentum præponderans descendet (adeoque obliquabitur Planum;) donec ad Æquilibrium redigatur.

Unde; Si duo quævis per idem punctum plana perpendicularia sint Plana Æquilibrii: etiam reliqua sic erunt; eritque Perpendiculum per illud Punctum, Axis Æquilibrii.

Fig. 88. Per punctum M, quo sustineri intelligatur Grave, transeat tum XS recta Horizontalis, quæ pro onusta Libra habeatur; tum huic ad angulos rectos AMBN Perpendiculare planum per Axem, Grave dirimens in duo segmenta AMBX, AMBS; quibus respective onerantur MX, MS, libræ brachia, per 13 cap. 3.

Cumque (per præced.) ex Perpendicularibus per M planis, saltem unum aliquod sit Planum Æquilibrii: Intelligatur, primo, illud AMBN planum Æquilibrii; adeoque (per def. Plani Æquilibrii) AMBX, AMBS, segmenta invicem Æquiponderantia. Erit igitur M (per def. 13. cap. 3.) centrum Æquilibrii. Quo cum (ex hypothesi) sustineatur Libra, in neutram partem movebitur, per 7 vel 10. cap. 3. Adeoque nec obliquabitur AMBN, sed manebit (ut prius) Horizonti rectum. Quod erat primo demonstrandum.

Adeoque; vel non movebitur Grave, vel circa manentem XMS axem rotabitur,

per

per 1 hujus. Illud quidem; si AMB sit Perpendiculum Æquilibrii istius plani AMBN sic gravati, (sive AMSBX perpendiculare planum Æquilibrii per axem XS;) Hoc, si secus (puta si segmentum alterum, ut AMBN præponderet;) per 5 hujus. Quæ itidem erant demonstranda. Fig. 88.

Sit AMBN perpendiculare planum aliquod per M, non sit planum Æquilibrii; hoc est, si segmentum alterum præponderet, puta AMBS, quo gravatur MS Brachium: Descendet hoc (adeoque obliquabitur AMBN planum) donec ad Æquilibrium redigatur (per 5 hujus, vel 5 cap. 3.) Quod erat item demonstrandum.

Si itaque duo Plana per idem M punctum Perpendicularia, ut AMBN, AMSBX, sint utraque Æquilibrii Plana, etiam reliqua per illud punctum perpendicularia plana erunt item plana Æquilibrii (adeoque AMB, axis Æquilibrii.) Cum enim propter Æquilibrii Planum AMBN, non moveatur grave nisi rotando circa illius plani axem; & simili de causa, non nisi circa axem plani AMSBX; (qui quidem Axes, cum suis respective planis perpendiculares esse debeant, non erunt eadem recta;) non omnino movebitur grave (propter tria saltem, non in eadem recta, puncta permanentia) per 1 hujus. Sed (per præcedens membrum hujus) si quod sit ex perpendicularibus planum, quod non sit planum Æquilibrii, movendum esset Grave: Nullum igitur est. Quod ultimo erat demonstrandum.

PROP. X.

Si Perpendiculum per Centrum motus, sit Axis Æquilibrii; sibi permissum Grave, non movebitur.

Rectaque illa, quæ si sit Perpendiculum per Centrum motus, Grave non movebitur; est Axis Æquilibrii.

CUm enim (per def. Axis Æquilibrii) quodvis per illum transiens Planum, sit Planum Æquilibrii: Si Axis Æquilibrii sit in Perpendiculo per Centrum motus; quodvis per centrum motus incedens Perpendiculare Planum, est Planum Æquilibrii. Adeoque sponte sua non movebitur sic sustentum Grave; per præced.

Et Conversa similiter patet. Nam nisi Perpendiculum per Centrum motus, sit Axis Æquilibrii; aliquod saltem per illud incedens Planum, non erit Planum Æquilibrii (per def. Axis Æquilibrii:) Adeoque Grave movebitur; (per præced.) Quod est contra Hypothesin.

PROP. XI.

In quovis Æquilibrii Plano, per quodvis ipsius Punctum, incedit Axis aliquis Æquilibrii.

Adeoque, per omne Gravis punctum incedit aliquis Axis Æquilibrii.

EXpositum Æquilibrii Planum, ut AMBN, intelligatur in situ ad Horizontem recto constitutum. Ejusque puncto quovis, ut M, sustineatur Grave. Quod itaque (per 9 hujus) non nisi rotando circa Axem plano illi rectum, ut XMS, movebitur. Et Perpendiculum per Centrum motus, ut AB, erit vel perpendiculum Æquilibrii istius Plani sic gravati: Vel, eatenus circa XMS rotabitur grave, donec hoc contingat; & sic positum, sibi permissum Grave quiescet per eandem 9 hujus. Eaque Gravis recta, quæ, sic quiescente Gravi, in AMB perpendiculo per M transeunte jacebit, est Axis Æquilibrii, per præced. Fig. 88.

Corollarium constat: Cum (per 8 hujus) per quodvis Punctum transeat Planum Æquilibrii.

PROP. XII.

Si à puncto fixo libere dependens Grave, unico sui puncto, ut Centro motus sustineatur: Non prius quiescet quam illud sui punctum sit in eodem perpendiculo cum puncto fixo; Planumque quodvis per illud perpendiculum incedens, grave dirimat in partes invicem æquiponderantes.

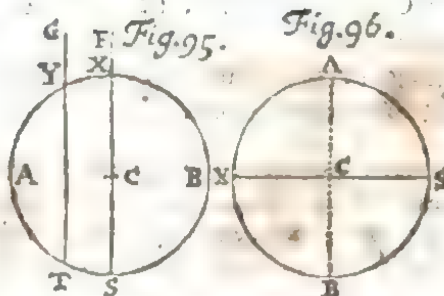
In eo vero situ constitutum (nempe, cum Perpendiculum appensionis, est Axis Æquilibrii;) sibi sic permissum, quiescet.

Si vero, posito Gravi in hoc situ quietis; solvi intelligatur in gravi vinculum, illudque alio jam sui puncto sustineri; Sitque hoc aliud punctum in eodem quo prius Axe Æquilibrii; quiescet adhuc sic situm Grave.

Sin extra illum Æquilibrii Axem sit hoc aliud Punctum; non, eo situ, quiescet.

Adeoque; Non erunt, ejusdem Gravis, duo Æquilibrii Axes invicem paralleli.

Fig. 95. A Puncto F libere dependens, puncto sui X sustineatur AXB grave. Non prius inquam, quiescet, quam ipsum X punctum sit in FX perpendiculo:



quod &, ibi positum, consistet. Cum enim unico X puncto sustineatur Grave (quod itaque punctum totius onere gravatur, per 18 Cap. 2.) si extra perpendiculum sit, eo feretur: ibique constitutum, consistet X punctum sic gravatum. per 31 Cap. 2.

Sin, posito X puncto in perpendiculo FX, per quod incedat Planum aliquod Perpendiculare, dirimens expositum Grave in A, B, duo segmenta inæqualiter ponderantia: nondum quiescet Grave. per 9 hujus.

Si vero ita constitutum sit, ut, Planorum perpendicularium per FX incedentium, nullum non dividat grave in partes invicem Æquiponderantes; Hoc est, si Perpendiculum illud sit Axis Æquilibrii: non movebitur sic appensum Grave. per 9 hujus.

Dico porro; Si (posito Gravi in hoc statu quietis) soluto vinculo in X, alio ejusdem perpendiculi puncto ut C, sustineatur Grave: Quiescet adhuc in eodem situ positum. Cum enim, ex constructione, idem sit perpendiculum FX & & FC; sitque FX Axis Æquilibrii; erit & FC Axis Æquilibrii. Adeoque (per 10 hujus) quiescet Grave.

Sin alio, extra hanc rectam puncto ut Y, sustineatur; puta perpendiculo GY (priori parallelo; saltem nonnisi in Centro Terræ occurrente, quod pro parallelo jam habemus;) non eo situ quiescet. Intelligatur enim planum quodvis Perpendiculare (aliud quam GYXF) per GY incedens, Grave dirimens in segmenta YTA, YTB; & huic plano parallelum, per FX incedens, Grave dirimens in segmenta XSA, XSB. Cumque sit ex hypothesi, illud per FX (Æquilibrii Axem) Planum Æquilibrii; non erit huic parallelum per GY, Planum Æquilibrii (per 5 hujus:) Adeoque nec GY, Axis Æquilibrii; (per def. Axis Æquilibrii:) Nec hujus, in perpendiculo manentis, uno puncto sustentum, Grave quiescet,

quiescet, per 10 hujus. Non igitur alio, extra hunc F X S Æquilibrii Axem, puncto sustentum; eodem situ constitutum quiescet. Nec erit alius Axis Æquilibrii, exposito F S parallelus. Quæ demonstranda erant.

PROP. XIII.

Si Centro Gravitatis sustineatur Grave: quocunque situ ponatur, sibi sic permissum, non movebitur.

Punctumque illud, quo si sustineatur, Grave non movebitur quocunque situ positum; est Centrum Gravitatis.

CUm enim (per def. Centri Gravitatis) quævis per illud transiens recta, sit Axis Æquilibrii: Si sui Centro Gravitatis sustineatur Grave, quocunque situ ponatur, perpendiculum per Centrum illud motus, erit Axis Æquilibrii. Adeoque non movebitur sic sustentum Grave. per 10 hujus.

Et conversa similiter patet. Nam, nisi Punctum illud, quo, ut Centro Motus, sustinetur, sit Centrum Gravitatis; aliqua saltem per illud incedens recta, non erit Axis Æquilibrii (per def. Centri Gravitatis.) Adeoque, posita hac recta ad Horizontem perpendiculari, non quiescet, unico illo puncto sustentum Grave. per 10 hujus. Quod est contra hypothesin.

PROP. XIV.

In Æquilibrii Axe quovis; est Centrum Gravitatis. Nempe, illius Axis, ut Libræ considerati, Centrum Æquilibrii.

CUm Æquilibrii Axe, ut X S, sustentum Grave, quocunque situ positum, quiescet (per 7 hujus;) Adeoque totum Gravis onus sustineat Axis ille (per 18 Cap. 2. vel 2, 4, 18, Cap. 3.) Intelligatur X S recta, sic onusta, secundum Libræ longitudinem applicari; vel ipsa etiam, pro Libra censeatur. Hujusque sic onustæ Libræ, quæratur (per 20 Cap. 3.) Centrum Æquilibrii. Quod sit C. Dico C, Centrum Gravitatis esse, totius Gravis. Fig. 96.

Cum enim idem C punctum, in quocunque Gravis situ, sit illius (sive Axis sive Libræ) X S, Centrum Æquilibrii; (quod statim demonstrabitur:) Manente puncto C, non movebitur X S recta. per 7 Cap. 3. Si itaque C puncto, ut Centro Motus, sustineatur Grave: Neque circa manentem rectam X S (utpote quæ est Axis Æquilibrii) rotabitur; Neque (propter C, centrum Æquilibrii) movebitur Axis ille: (quæ jam ostensa sunt:) Neque potest alias moveri Grave; (per 1 hujus.) Adeoque, puncto C sustentum, sponte sua non movebitur, quocunque situ constitutum Grave. Estque propterea, Punctum C, Centrum Gravitatis; (per præced.) Quod erat demonstrandum.

Quod autem idem C punctum, sit, ejusdem axis Æquilibrii X S, Centrum Æquilibrii, quocunque situ constituatur Grave: Sic ostenditur.

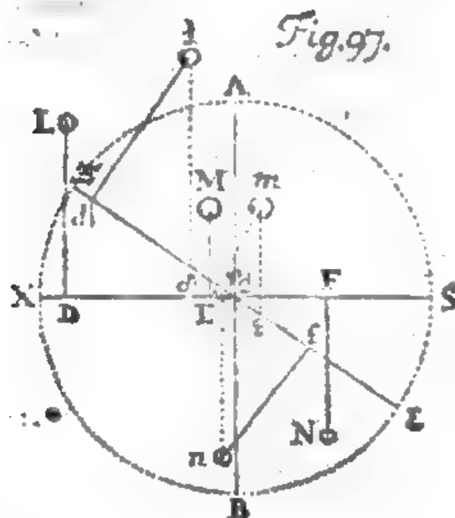
Sit primum, ita utcunque constitutum Grave, ut expositus æquilibrii Axis X S, sit in situ Horizontali constitutus. Per ipsius, ut onustæ libræ, Centrum Æquilibrii C, transeat Axis libræ; qui itaque ad libram X S normalis erit; & quidem in situ Horizontali; (cum enim intelligatur X S libra unico sui puncto C, ut centro motus, sustineri, adeoque ad nullam axis positionem aliter quam gravitate sua determinari, librabitur in plano ad Horizontem recto, utpote omnium maxime declivi; adeoque circa axem Horizontalem; ut in Scholio Prop. 12. Cap. 3. dictum est:) atque per hunc axem perpendiculare Planum A C B; quod itaque (propter C centrum æquilibrii, ex constructione) est æquilibrii Planum perpendiculare per axem motus, grave dirimens in duo segmenta A B X, A B S, invicem æquiponderantia. Atque hoc eo usque saltem permanebit, utcunque moveatur grave, dum idem gravis planum X A S Horizontale maneat (puta, vel rotato utcunque circa Perpendiculum per C Gravi, vel etiam altius humiliusve elevato aut depresso:)

per

per 13 Cap. 3. Quippe eadem adhuc manebit omnium tum ad Horizontem inclinatio, tum ab A C B perpendiculari per axem plano distantia.

Fig. 96. Deinde; Manente ut prius, X S axe utcunque in situ Horizontali: intelligatur utcunque circa illum rotari Grave, in quemcunque situm ad axem (nempe ut quodlibet planorum, per X C S transeuntium, perpendiculare fiat:) Dico, etiamnum idem A C B planum, planum esse æquilibrii; adeoque C, ut prius, æquilibrii Centrum. Cum enim omnia utriusque segmenti puncta, in planis ipsi A C B parallelis rotentur; Manebunt adhuc in eadem qua prius ab A C B, perpendiculari per axem motus, distantia: Adeoque in eadem qua prius ratione ponderabunt; per 4 hujus, vel 13 Cap. 3. Cum itaque prius, respectu A C B plani, æquiponderabant segmenta A B X, A B S; etiamnum æquiponderabunt. Eritque propterea, C, ut prius Centrum æquilibrii.

Fig. 97. Denique; Quocunque Planorum per X S transeuntium, manente ad Horizontem recto; Intelligatur X S libra utcunque ad Horizontem inclinari: Dico, etiamnum idem C punctum, esse libræ X S centrum Æquilibrii.



Ne autem, propter Solidi in Plano repræsentationem, linearum multitudo ducendarum, turbet phantasiam; ea projectione in figura utor, quæ oculum supponit in ipso motus axe per C transeunte, atque in distantia infinita. Et propterea, tum axis ille in unicum C punctum projicitur; tum Rectæ quævis huic parallelæ, in totidem respective puncta: Planaque per axem omnia, in totidem rectas; in ipso X A C B S per libram Plano perpendiculari. Quæ quidem Projectio, ut Phantasiam juvat, ita nec Rationes perturbat: Quoniam (per cas. 4. prop. 14. cap. 3.) perinde omnino ponderat (respectu C axis) quocunque ejusdem rectæ (puta per D transeuntis) axi parallelæ, puncto intelligatur grave. Eadem utique est singulorum ejusdem punctorum ab A C B perpendiculari per axem Plano distantia, atque ipsius D ab A C B perpendiculo.

Intelligatur itaque, utcunque circa C rotato Gravi, X C S Libra (& simul Planum libræ per axem) ex situ Horizontali in situm ξ C Σ, utcunque ad Horizontem inclinatum delata: Cui respondeat, in eodem Perpendiculari plano, in situ Horizontali, X C S; hujusque punctis D, E, F, &c. puncta illius *d, e, f*, &c. Intelligatur autem Grave totum, ex partibus (æqualibus an inæqualibus, pluribus an paucioribus, adeoque numero finitis an infinitis, perinde est) puta tribus L, M, N, constare; (& quidem, vel in ipsis perpendicularis plani punctis L, M, N; vel in L, M, N, rectis, axi parallelis; utcunque positis, dummodo sit X C S axis æquilibrii;) ad libræ puncta, in situ horizontali positæ, D, E, F, applicatis; ut quæ (per 4 cap. 3. & cas. 4. prop. 14. ejusdem) similiter ponderent ac si in ipsis D, E F, punctis intelligantur. Delata vero libra X C S, in ξ C Σ; delata simul erunt (propter rotationem totius gravis) D, E, F, L, M, N, puncta ponderaque, in *d, e, f, l, m, n*. Erit, inquam, adhuc A C B perpendiculare planum æquilibrii per axem; adeoque C centrum æquilibrii.

Nam, translatis D, E, F, punctis, in *d, e, f*, minuentur quidem horum (propter obliquationem libræ) ponderationes (per 13. cap. 3.) Sed in eadem ratione minuentur; adeoque, quod prius erat æquilibrium etiamnum manebit (per cas. 1. prop. 14. cap. 3.) si ad eadem quæ prius libræ puncta D, E, F, hoc est *d, e, f*, applicata maneant pondera L, M, N, hoc est *l, m, n*.

Cum autem; pro ponderum *l, m, n*, infra suprave libram fixa positione; mota libra mutentur applicationum puncta, puta, ex *d, e, f*, in δ, ϵ, ϕ; adeoque mutetur ponderationum ratio; (per cas. 3. prop. 14. cap. 3.) Ponderum *l, m*, quæ supra libram fixa intelliguntur, ponderationibus sinistrorsum auferendum aliquid; addendum vero ponderationi sinistrorsum ponderis *n* infra libram fixi; (nempe, prout in præsenti schemate ponuntur; & similiter, mutatis mutandis, in quacunque sive obliquationis libræ, sive ponderum ad obliquatam libram positione.) Sunt autem

autem Addenda illa vel Auferenda (per 17 cap. 3.) in ea ratione quæ componitur ex ratione Ponderum *l, m, n*; & ratione rectarum *dδ, eε, fφ*, hoc est (propter similia triangula *ldδ, meε, nfφ*) rectarum *dl, em, fn*: Adeoque in ea ratione qua ponderarent eadem Pondera circa axem ΞCΣ libranda; per 13 cap. 3. Adeoque (per 12 El. 5.) in eadem ratione est summa Auferendorum ponderationibus *l, m*; ad Addendum Ponderationi *n* (vel summam addendorum, si plura essent;) qua esset ponderum *l, m*, circa axem ΞCΣ ponderatio; ad ponderationes ponderis *n*, circa eundem axem. Adeoque cum sint Ponderationes hæ (propter XCS vel ΞCΣ axem Æquilibrii, ex hypothesi) invicem æquales; etiam Addenda Auferendis sunt æqualia: adeoque perinde simul valent, atque si nihil vel adderetur vel auferretur, per 8 cap. 1. (Quodque de Auferendis Addendisve ponderationi sinistrorsum dictum est, perinde est atque si de Addendis Auferendisve ponderationi dextrorsum diceretur: quippe idem valet, plus ad dextram, atque minus ad sinistram.) Cum itaque; applicatis ponderibus *l, m, n*, ad puncta *d, e, f*, esset ACB planum Æquilibrii per axem, ut supra ostensum est, (adeoque simul omnium ponderatio, nulli in utramvis partem æquipolleret;) & C centrum Æquilibrii: Erit similiter, idem C, centrum æquilibrii; ponderibus ut nunc applicatis ad puncta *δ, ε, φ*. Fig. 97.

Est igitur idem C punctum, æquilibrii Centrum, axis æquilibrii XCS, quocunque situ constituatur Grave. Quod demonstrandum suscepimus.

SCHOLIUM.

Exempli gratia. Si intelligantur pondera L = 1 P. M = 3 P. N = 3 P. Distantia vero CD = + 6 D. CE = + 1 D. CF = − 3 D. Erit Ponderum ad libræ XCS puncta D, E, F, applicatorum ponderatio respectu axis C; ut P × + 6 D = + 6 DP. 3 P × + D = + 3 DP. 3 P × − 3 D = − 9 DP. Adeoque simul omnium, ut + 6 DP + 3 DP − 9 DP = ± 0 DP. (Atque hoc, ex constructione; ponitur enim C, centrum Æquilibrii.)

$$\begin{array}{ccc} P & 3P & 3P \\ +6D & +D & -3D \\ \hline +6DP & +3DP & -9DP = \pm 0DP. \\ +6dP & +3dP & -9dP = \pm 0dP. \end{array}$$

Et similiter (diminutis in eadem ratione omnium ponderationibus, propter obliquationem libræ, puta in ratione *d* ad D) eorundem ponderum ad libræ ΞCΣ puncta *d, e, f*, applicandorum ponderationes, erunt ut + 6 *d*P + 3 *d*P − 9 *d*P = ± 0 *d*P.

Eorundem vero Ponderum à Plano per Axem XCS vel ΞCΣ distantiæ; puta rectæ DL, EM, FN; vel *dl, em, fn*; sint ut + 6 D, + 3 D, − 5 D; Et his proportionales (puta in ratione δ ad D) *dδ, eε, fφ*; ut + 6 δ, + 3 δ, − 5 δ.

$$\begin{array}{ccc} P & 3P & 3P \\ +6D & +3D & -5D \\ \hline +6DP & +9DP & -15DP = \pm 0DP. \\ +6\delta P & +9\delta P & -15\delta P = \pm 0\delta P. \end{array}$$

Adeoque eorundem Ponderationes ad axem XCS, vel ΞCΣ; ut + 6 DP + 9 DP − 15 DP = ± 0 DP: (Idque, ex hypothesi; supponitur enim XCS, axis æquilibrii.)

Atque (his proportionales) ponderationes auferendæ + 6 δ P + 9 δ P − 15 δ P = ± 0 δ P.

His itaque rite subductis (additisve respective) à ponderationibus prius positis, tanquam in *d, e, f*, punctis; prodibit Æquilibrium, sive ± 0 *d*P ∓ 0 δ P = ± 0 0.

Verbi gratia; Si ponamus *d* ad δ, ut 3 ad 1; vel, ut 1 ad $\frac{1}{3}$; Ex + 6 *d*P + 3 *d*P − 9 *d*P, subductis + 6 δ P + 9 δ P − 15 δ P, hoc est, + 2 *d*P + 3 *d*P − 5 *d*P; manebunt + 4 *d*P ± 0 *d*P − 4 *d*P = ± 0 *d*P.

Si ponamus *d* ad δ, ut 3 ad 2, vel, ut 1 ad $\frac{2}{3}$: Ex + 6 *d*P + 3 *d*P − 9 *d*P, subductis + 6 δ P + 9 δ P − 15 δ P, hoc est, + 4 *d*P + 6 *d*P − 10 *d*P; manebunt + 2 *d*P − 3 *d*P + 1 *d*P = ± 0 *d*P.

$$\begin{array}{ccc} +6dP & +3dP & -9dP = \pm 0dP \\ -2dP & -3dP & +5dP = \mp 0dP \\ \hline +4dP & \pm 0dP & -4dP = \pm 0dP \end{array}$$

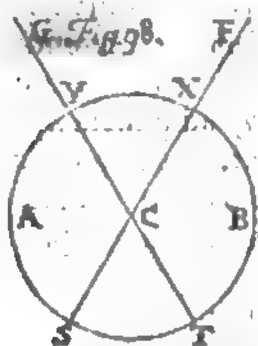
$$\begin{array}{ccc} +6dP & +3dP & -9dP \\ -4dP & -6dP & +10dP \\ \hline +2dP & -3dP & +1dP = \pm 0dP. \end{array}$$

Adeoque; Utut ea Portio quæ dextrorsum ponderabat prius vel sinistrorsum; mota libra, vel in neutram partem, vel in oppositam ponderet: non tamen destruitur, simul-omnium æquilibrium.

PROP. XV.

Cujusque Gravis, Centrum Gravitatis unicum est: Idque tum in omnium Axium Æquilibrii, tum in Planorum Æquilibrii omnium concursu.

Estque omne per illud transiens Planum, Planum Æquilibrii; omnisque recta transiens, Æquilibrii Axis.



INtelligatur AB Grave, puncto sui X sustentum, ex F puncto fixo libere dependens, in situ quietis positum; Hoc est, ita dependens ut FXS perpendiculum, sit Axis Æquilibrii; (per 12 hujus.) In quo itaque perpendiculo (per præced.) est Centrum Gravitatis; Alio autem, extra hoc perpendiculum, puncto sustentum Grave, non, in eo situ, quiesceret; (per eandem 12 hujus;) Adeoque, extra hoc perpendiculum, non est Centrum Gravitatis; Nam siquod esset, eo sustentum Grave, etiamnum in illo situ quiesceret, per 13 hujus.

Intelligatur deinde, soluto vinculo in X, alio sui extra rectam FXS continuatam puncto ut Y sustentum, ex puncto fixo ut G libere dependens, quiescere; Adeoque (per 12 hujus) in eum situm redigi gravitate sua, ut Axis Æquilibrii per Y transiens, (est utique aliquis, per 11 hujus,) sit in GY perpendiculo, puta GYT. Ostendetur, ut prius, tum in GYT (infinita recta) centrum Gravitatis esse; tum, extra hanc non esse.

Cum itaque ostensum sit, tum in rectarum (infinitarum) XS, YT, utraque, tum, non extra utramvis, esse Centrum Gravitatis; cumque illæ non nisi in uno intersectionis puncto, ut C, communicent: unicum erit Centrum Gravitatis, C.

Est autem in Æquilibrii omni sive Axe sive Plano (per 11 & 14 hujus) centrum aliquod Gravitatis: Cum itaque unicum esse, jam ostensum sit; erit hoc unum in omnium concursu.

Quodque omnis per illud transiens recta sit Axis Æquilibrii, omneque Planum per illud transiens, Æquilibrii Planum: ex definitionibus constat.

SCHOLIUM.

DEmonstravimus itaque (&, credo, omnium primi) quod Postulare solent alii; tum Dari, in quovis Gravi, centrum aliquod Gravitatis, tum illud, Unicum esse.

PROP. XVI.

Manente, in eadem à Terræ Centro altitudine, Centro Gravitatis: neque Descendere censendum est Grave, neque Ascendere.

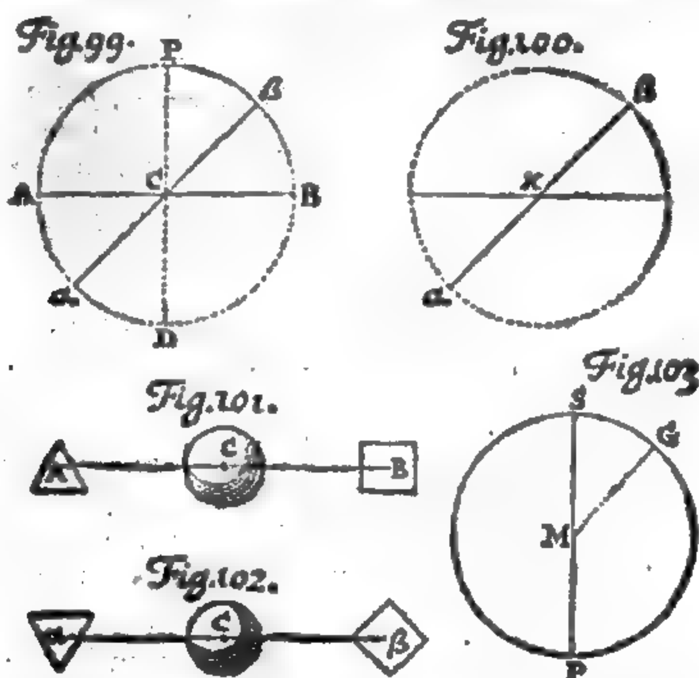
Tantundem vero vel Ascendere vel Descendere censendum est Grave, quantum Ascendit, vel Descendit Centrum Gravitatis.

Adeoque (quoniam hoc in aliis Gravis motibus perinde obtinet) perinde Ponderando valet Grave utcunque situm, atque si in illo puncto totum esse intelligeretur, ubi est ipsius Centrum Gravitatis.

Fig. 99, 100. DEmonstratur eodem modo, mutatis mutandis, atque 8 & 9 Cap. 3.

Nam, immoto C centro Gravitatis; utcunque rotetur Grave, (neque enim aliter, quam rotando moveri potest, per 1 hujus) puta ut ipsius recta ACB in situm αCβ deveniat: Quoniam in quocunque situ, adeoque in toto progressu, opposita segmenta, plano quovis ad Horizontem recto ut PD divisa, invicem æquiponderant; (per def. Centri Gravitatis;) Estque (propter rotationem) unius Descensus cum oppositi Ascensu necessario conjunctus; Erit Ascensus Descensui æqui-

æquipollens (nam sicubi alter præpollet, ea præponderabitur, per 7 Cap. 2:) Adeoque nulli vel Ascensui, vel Descensui simul Æquipollent. Per 8. Cap. 1.



Item; moto Centro C in κ, nec ascendendo tamen vel descendendo, sed in eadem à Terræ Centro altitudine; sitque ibidem A C B recta, in situm α κ β translata: Atque hujus similis ad horizontem situs intelligatur, in α C β. Manifestum est, (propter æque alta puncta C, κ; rectasque C β, κ β, æquales & similiter positas;) puncta β, β, utrobique æque alta esse. Idemque de reliquis respective punctis similiter ostendetur. Adeoque totum Grave in situ α κ β, æque altum est à terræ centro, atque in situ α C β; hoc est (per jam demonstrata) æque altum atque in situ A C B. Adeoque nec Ascendisse nec Descendisse censendum erit. Fig. 99, 100.

Sin altius humiliusve sit punctum κ quam C; atque similiter ad horizontem sita intelligatur eadem recta in α C β, atque in α κ β: Ostendetur (propter æquales rectas similiter positas) tanto altiora esse vel humiliora singula rectæ α κ β puncta, quam puncta rectæ α C β; quanto est ipsum κ, quam C: Adeoque (cum de reliquis punctis eadem sit ratio) tanto altius humiliusve Grave in α κ β, quam in α C β; hoc est, (per ante demonstrata,) quam in A C B. Adeoque tantundem vel Ascendisse vel Descendisse censendum erit Grave, quantum Ascenderit, vel Descenderit centrum Gravitatis; per 3 Cap. 2. Quæ demonstranda erant.

Cum igitur, per 4 Cap. 2. in ea ratione ponderat idem Grave qua, si moveatur, plus vel Ascensurum sit vel Descensurum: tantundem ponderando valere censendum erit; atque si ibidem totum esset Grave, ubi ipsius est Centrum Gravitatis.

SCHOLIUM.

Quæ igitur, in præcedentibus, ostensa sunt, de Punctis Applicationum, eorumve à Centro vel aliunde distantiis; de Gravium item loco, & motibus varie declivibus; cæteraque istiusmodi: Eorum Centris Gravitatis accommodanda erunt. Quippe totum Grave, hujus ope, in unico illo puncto virtualiter situm intelligatur, in quo est ipsius Centrum Gravitatis. Quodque de integris gravibus jam dictum est; de illorum Particulis quibusvis, & harum centris gravitatis; perinde intelligendum est; Quippe & hæ Particulæ sunt totidem Gravia: Sicut & Gravium Aggregatum, pro uno Gravi habendum; cujus est & unicum commune Centrum Gravitatis.

Quæ igitur (per totum Caput 2 aut alibi) de Gravi, tanquam in uno Puncto existente; aut, ad Punctum unum Applicato, sive vel subjecto, vel supereminente, &c. dicta sunt: De Centro Gravitatis commode exponuntur omnia. (Quod & obiter insinuatum est, in Scholio Prop. 3. Cap. 2.) Quippe tantundem ponderando valet Grave, utcunquè positum, atque si in eo puncto totum intelligeretur, ubi est Centrum Gravitatis: aut etiam, Gravium quotlibet Aggregatum, utcunque positorum, atque si in communi simul omnium Centro Gravitatis essent.

Atque hinc etiam ampliandum jam erit, & aliquatenus relaxandum, quod in Scholio Prop. 1. hujus definivimus: Nempe, quod singula totius Gravis, vel Aggregati gravium, Fig. 101, 102.

gravitatis, puncta, intelligenda sint in eodem ad invicem situ permanere. Quippe, mota utcunque Gravis parte aliqua, vel aliquot partibus, ita tamen ut earum vel singularum vel simul omnium Centrum Gravitatis maneat ut prius situm; perinde est, ponderationem quod spectat, atque si omnino permansissent in eodem situ puncta singula. Adeoque, quod hactenus demonstratum est, supponendo singula totius puncta situm suum ad invicem (atque ad motus centrum vel axem) retinere: posthac pro demonstrato habebitur, si saltem partium Centra gravitatis, maneant ut prius sita; aut etiam commune omnium Centrum Gravitatis similiter ad motus Centrum vel Axem situm. Puta, si A C B Grave, (motis utcunque partibus, manentibus partium centris gravitatis, in situm α C β perveniat; perinde omnino ponderabit. Similiter; Automati rotis quotlibet utcunque circa sua centra motis, manente communi totius centro gravitatis in eodem (vel æquipollente) situ, manet eadem totius Ponderatio.

PROP. XVII.

Si Centrum Gravitatis sit in eodem ad terræ Centrum Perpendiculo cum Centro motus: sibi permissum Grave non movebitur.

Sin extra Perpendiculum constituatur; ad Perpendiculum, infra Centrum motus, feretur: Idque (nisi alias impeditum) in Plano per centrum Motus, centrum Gravitatis, & Centrum Terræ transeunte.

Quodque de Perpendiculo dictum est, Perpendiculi Succedaneo accommodabitur in oblique declivi Plano.

Fig. 103 Sequitur ex 10 Cap. 3. Nam Centrum Gravitatis, saltem Æquilibrii Centrum est; (per eorum definitiones:) Nempe, si recta quævis per Centrum Gravitatis, pro Libra censeatur.

Vel (ut ea) sic ostenditur,

Puta; Si Centrum Gravitatis sit in M centro motus; hoc manente, non descendet Grave; per præced. Adeoque à Gravitate non movebitur.

Si sit in perpendiculo infra centrum motus, ut in P; Centrum Gravitatis, (adeoque & Grave, per præced.) jam est in situ rotationis infimo; (per 20 Cap. 2.) Adeoque non, ob Gravitatem, movebitur.

Si sit in Perpendiculo supra centrum motus, ut S; adeoque in puncto supremo; (per 20 Cap. 2.) In qualemque partes rotetur, æqualiter descensurum est, (propter æqualem quaquaversum declivitatem,) tum Centrum Gravitatis, tum (per præced.) ipsum Grave. Adeoque (per 8 Cap. 2.) non movebitur.

Sin extra perpendiculum sit, ut in G: deorsum ad P feretur, per arcum G P, in M G P plano perpendiculari situm, (ut qui omnium, in superficie sphærica rotationem determinante, descensus est maxime declivis,) per 24 Cap. 2. Quæ demonstranda erant.

Eademque, in oblique declivi plano, de perpendiculi Succedaneo, similiter ostendentur. Puta; si super declive planum impenetrabile, volvendum esset G grave, circa C centrum motus; suo centro Gravitatis peripheriam in illo plano describens S P G. Quippe, cum propter duritiem subjecti plani, aut forsan Axis circa quem rotetur determinatam positionem, similemve causam aliam, in plano perpendiculari descendere non possit; quam tamen potest maxime declivi feretur.

PROP. XVIII.

Ad datum motus Axem, (vel similiter inclinatum,) ea ratione ponderant comparata Gravia; (vel idem, Grave pro vario situ:) quæ ex rationibus Ponderum, & Distantiarum Centrorum Gravitatis à perpendiculari per Axem Plano, componitur.

Adeoque: Si Distantiæ sint æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera sint æqualia; in ratione Distantiarum: Si vel utraque sint æqualia; vel sint reciproce proportionalia; Æquiponderant: Quorum vero

vero centra Gravitatis sunt in ipso per Axem Perpendiculari Plano; nihil in utramvis partem ponderant.

Circa Axes vero inæqualiter inclinatos, adeoque in Planis inæqualiter Declivibus, Libranda: in ea ratione ponderant, quæ ex Ponderum, & Distantiarum centrorum Gravitatis à perpendiculari per axem plano, & Declivitatem planorum in quibus librantur pondera, componitur.

P.	nP.	P.	nP.	nP.	P.	nP.
D.	D.	mD.	mD.	$\frac{1}{n}$D.	D.	mD.
					Δ.	rΔ.

$\overline{PD}$. G::$n\overline{PD}$. nG::$m\overline{PD}$. mG::$mn\overline{PD}$. mnG::$\overline{PD}$. G. | $\overline{PD\Delta}$. G::$mnr\overline{PD\Delta}$. mnrG.

SEquitur ex 12 & 13 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XIX.

Ex tribus his; Pondere, Ponderatione, & Distantia Centri Gravitatis à perpendiculari per Axem Plano; datis duobus quibusvis, datur tertium.

Nempe: Datis Pondere, & Distantia; datur Ponderatio: Datis Pondere, & Ponderatione; datur Distantia: Datis Ponderatione, & Distantia; datur Pondus.

Excipe; Si (quod una cum Ponderatione datur) Distantia vel Pondus nullum sit.

Intellige; *in data Axis inclinatione*, (& similiter in sequentibus:) Secus enim & hujus habenda erit consideratio.

$$PD = G. \qquad \frac{G = PD}{P} = D. \qquad \frac{G = PD}{D} = P.$$

SEquitur ex 15 Cap. 3. propter 16 hujus.

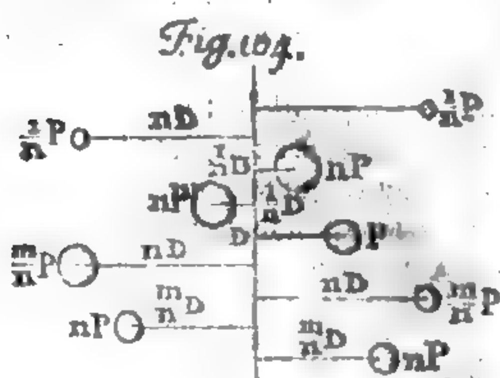
PROP. XX.

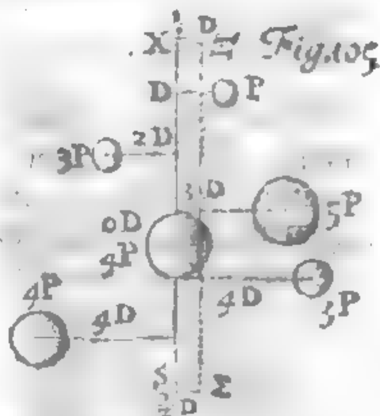
Dato Pondere, dataque Distantia Centri Gravitatis à perpendiculari per Axem Plano: Pondus investigare, quod in assignata Centri Gravitatis à perpendiculari Plano per axem Distantia, Dato illi vel æquiponderet, vel in data ratione ponderet.

Item: Distantiam investigare, in qua, Pondus Assignatum, Dato illi vel æquiponderet, vel in data ratione ponderet.

P.	$\frac{1}{n}$P.	nP.	$\frac{m}{n}$P.	nD.
D.	nD.	$\frac{1}{n}$D.	nD.	$\frac{m}{n}$D.

$\overline{PD}$. G::$\overline{PD}$. G::$\overline{PD}$. G::$m\overline{PD}$. mG::$m\overline{PD}$. mG. Fig. 104.





SEquitur ex 16 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP.

PROP. XXI.

Ejuſdem vel æqualium Ponderum, Centri Gravitatis ad perpendicularis Plani per Axem motus Appropinquatio, aut inde Elongatio, Æqualis, (ſive Centrum Plano admoveri intelligatur, ſive Planum Centro, vel contra;) æqualiter auget, minuitve Ponderationem. Et Inæqualis, vel, Inæqualium Ponderum; proportionaliter.

SEquitur ex 17 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XXII.

Datis Ponderibus quotlibet; datiſque vel Axe motus (aut Perpendiculari per hunc Plano) & Ponderum Centris gravitatis; vel horum à Perpendiculari per Axem Plano diſtantiis ad datas partes: Inveſtigare, quanta ſit tum ſingulorum tum ſimul omnium Ponderatio; &, ad quas partes: tum denique quantum gravant ipſum quo ſuſtinentur Axem.

Fig. 105.

$+D.$	$+3D.$	$+4D.$	$\pm 0D.$	$-2D.$	$-3D.$
$P.$	$5P.$	$3P.$	$4P.$	$3P.$	$4P.$
$+DP. + G ::$	$+15DP. + 15G ::$	$+12DP. + 12G ::$	$\pm 0DP. \pm 0G ::$	$-6DP. - 6G ::$	$-12DP. - 12G.$

$$\left.\begin{matrix} +1G \\ +15G \\ +12G \end{matrix}\right\} = +28G$$
$$\pm 0G = \pm 0G$$
$$\left.\begin{matrix} -6G \\ -12G \end{matrix}\right\} = -18G$$
$$\overline{\qquad +10G}$$

OStenditur ex 18 Cap. 3. propter 16 hujus.

Signum $+$, innuit diſtantiam à Perpendiculari per Axem Plano, Dextrorſum: Signum $-$, Siniſtrorſum. Pondera vero eodem ſigno $+$ notantur omnia, quia intelliguntur omnia, Deprimentia. Si vero eſſet Ponderum aliud Deprimens, aliud Elevans: illud ſigno $+$, hoc ſigno $-$, notari par eſſet: Et multiplicationum leges inſuper eſſent obſervandæ.

PROP. XXIII.

Datis Ponderibus quotlibet (vel ſumma Ponderum) dataque eorum ſimul omnium Ponderatione ad datas partes, reſpectu Axis expoſiti (vel expoſiti per axem Perpendicularis Plani:) Ponderationem Augere vel Minuere data quantitate; ſive manente eodem per Axem plano perpendiculari; ſive manentibus (in iiſdem parallelis Planis) Ponderum centris gravitatis.

OStenditur ex 19 Cap. 3. propter 16 hujus.

Nempe: Manente Axe, (ſaltem ſimiliter ad horizontem inclinato; in eodem perpendiculari plano,) Amovendo vel Admovendo ponderum Centra Gravitatis.

Vel, manentibus ut prius (ſaltem in iiſdem parallelis Planis) Centris Gravitatis; (vel communi ſimul omnium Centro;) Amovendo vel Admovendo Axem, ſimiliter inclinatum, in parallelo Plano. Tanto quidem intervallo, quanto expoſita Pondera (vel ſumma ponderum) tantundem ponderarent, quantum eſt vel Addendum vel Auferendum ponderationi expoſitum.

PROP.

PROP. XXIV.

Datis Ponderibus quotlibet; una cum Axe motus, (aut per illum Perpendiculari Plano,) & Centris gravitatis, (aut horum à Perpendiculari per Axem Plano distantiis, ad datas partes:)

Vel, Datis saltem summa Ponderum, & simul omnium Ponderatione ad datas partes:

Distantiam Centri gravitatis simul omnium, à Perpendiculari per Axem plano, invenire.

Adeoque; Ponderationem Augere vel Minuere in data ratione. Nempe; in ea ratione, aucta vel minuta Distantia.

$$\frac{+10G = +10PD}{20P} = +\tfrac{1}{2}D.$$

Ostenditur ex 20 Cap. 3. propter 16 hujus.

Puta; Si $+10G = +10PD$ summa Ponderationum dextrorsum, data; (vel, ex datis, inventa, per 22 hujus;) per $20P$ summam ponderum dividatur: Habetur $+\frac{1}{2}D$, distantia Centri gravitatis à Plano per Axem Perpendiculari, dextrorsum: Puta, in $\Sigma\Sigma$ Recta, Planove. Fig. 105.

Corollarium, constabit ex 20 hujus. Quippe jam datur totius Aggregati (tanquam unius Gravis) tum Pondus tum Centri Gravitatis distantia.

PROP. XXV.

Data, à Perpendiculari per Axem Plano communis Ponderum quotlibet, utcunque positorum, Centri Gravitatis Distantia; Ex cognitis Ponderibus, vel summa Ponderum; cognoscitur Ponderatio: Vel, ex cognita Ponderatione; Summa Ponderum.

$$+D \times P = +DP = +G. \quad \frac{+G = +DP}{D} = P.$$

Sequitur ex 22 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XXVI.

Datis, in Gravi quovis, tribus Æquilibrii Planis, quæ non in una recta concurrant omnia; Vel, Datis duobus quibusvis Axibus Æquilibrii: Datur ejusdem Centrum Gravitatis. Nempe in communi secantium concursu.

Et quidem; Figuræ Planæ, vel Lineæ utcunque curvæ in Plano descriptæ: Datis duobus (præter ipsum Planum) Planis Æquilibrii, (non in hujus recta aliqua concurrentibus:) Vel, Uno Axe Æquilibrii non in illo Plano jacente: Datur Centrum Gravitatis. Nempe in communi datorum concursu.

Lineæ vero rectæ; Dato uno vel Æquilibrii Axe, vel Plano Æquilibrii, rectam illam secante: Datur Centrum Gravitatis. Nempe, sectionis Punctum.

Puncti vero, Centrum Gravitatis, est punctum ipsum.

Cum enim duo Plana se mutuo non nisi in una recta secent: Rectaque sive rectam, sive planum, non nisi in unico puncto; (ut ex elementis notum est:)

est:) Manifestum est, non posse nisi in unico puncto; vel Duos Axes Æquilibrii, vel Tria Æquilibrii Plana, non in eadem recta concurrentia; se mutuo secare. (Tertium utique Planum, duorum communem sectionem, non nisi in uno puncto secat.) Cumque Centrum Gravitatis, per 15 hujus, sit in communi omnium sive Axium sive Planorum Æquilibrii concursu; Datis illis, datur (quod in eorum concursu est) Centrum Gravitatis. Quod erat primo demonstrandum.

Sin illud Grave sit vel Figura Plana, vel Linea utcunque curva in Plano descripta; erit hoc ipsum planum, unum ex tribus illis Æquilibrii Planis requisitis; (per def. Plani Æquilibrii: quippe posito hoc ad horizontem recto, in neutram partem præponderabitur, per 3 hujus.) Adeoque (cum Centrum Gravitatis in illo plano esse constet) si vel duobus aliis Æquilibrii Planis (non in eadem aliqua hujus Plani recta se mutuo secantibus;) vel, Axe uno; secetur Planum hoc unico secabitur puncto; (quod itaque Gravitatis Centrum erit;) per jam dicta. Quod secundo demonstrandum erat.

Linea recta vero (cujus Centrum gravitatis in ipsa esse, similiter ostendetur;) ex tribus Æquilibrii planis duo supplet; sive communem duorum sectionem: Adeoque, si vel uno aliquo Æquilibrii vel Axe, vel Plano, secetur; secatur puncto unico, quod itaque Centrum erit Gravitatis.

Denique: Quod Puncti Centrum Gravitatis extra ipsum non sit, similiter ostendetur atque de Plano, & Linea recta; (quippe si Planum aliquod extra ipsum ponatur ad Horizontem perpendiculare; totum grave ad unas partes ponderabit:) Cum itaque Punctum sit indivisibile; erit ipsum sui Centrum. Quod erat ultimo demonstrandum.

SCHOLIUM.

Fig. 98. Exempli gratia. Centrum Gravitatis Puncti C, est ipsum C Punctum. Centrum gravitatis rectæ X S, est in ipsa recta; ejusque Puncto C quo ab Æquilibrii Plano vel Axe Y C T, secatur.

Figuræ Planæ, vel Lineæ Curvæ in Plano, Y X T S, centrum gravitatis est in duorum Planorum Æquilibrii, puta X S & Y T, communi sectione, (quæ ipsa est Axis Æquilibrii;) hujusque puncto C, quod est in exposito plano.

Figuræ vero solidæ, vel lineæ curvæ non in plano descriptæ, (quales sunt Spirales circa Conum, vel Cylindrum, &c.) Centrum gravitatis erit in trium Planorum Æquilibrii; puta per Y X T, duorumve hoc secantium ut in X C S, & Y C T; communi concursu C: sive duorum Axium Æquilibrii X S & Y T communi sectione C.

Ejusmodi autem duo Axes habentur; ope 12 hujus. Puta suspenso primum Gravi ex sui puncto X, ut habeatur X S; deinde, ex sui puncto Y, ut habeatur Y C T.

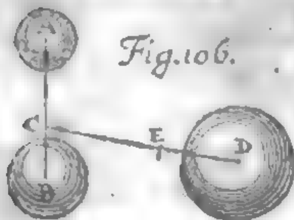
PROP. XXVII.

Duorum conjunctorum Gravium (Homogeneorum) commune Centrum Gravitatis, est in ea recta quæ sua respective Centra Gravitatis conjungit, sic divisa, ut Distantiæ sint Ponderibus reciproce proportionales.

Adeoque; datis duobus, eorumque Centris Gravitatis; datur commune simul utriusque Centrum Gravitatis.

Quodque de duobus dicitur; de pluribus similiter obtinebitur.

Item; Datis Totius & Ablati, Ponderibus & Centris Gravitatis; datur Centrum Gravitatis reliqui.



Sunto, verbi gratia, duo Pondera, vel (quod eodem recidit, per 16 hujus) eorum Centra Gravitatis, in punctis A, B: Adeoque (per præced.) A B Axis Æquilibrii; & (per 15 hujus) in illo, Centrum Gravitatis: puta C. Est, inquam, ut Pondus A ad pondus B, sic (reciproce) distantia C B ad distantiam C A, (per 18 hujus) ut Æquiponderent.

Invento

Invento autem duorum A B ponderum communi Centro Gravitatis C; dato adhuc tertio Pondere, ejusque Centro Gravitatis D: eodem modo invenietur trium commune Centrum Gravitatis. Nempe, ita divisa recta C D in E, ut distantiæ E D, E C; sint Ponderibus D, & A + B, reciproce proportionales.

Item; datis Totius A + B, & Ablati B, Ponderibus & Centris Gravitatis; datur residui Centrum Gravitatis A. Nam datis Ponderibus A + B & B, habetur (subductione) Pondus A. Sumptis igitur (in B C recta continuata) ut inventum Pondus A, ad Pondus B datum, sic data C B distantia, ad distantiam C A quæsitam.

Dico *Homogeneorum*; quia quæ sunt invicem Heterogenea, (ut linea & superficies; superficies, & solidum; aut similia;) nullam habent ad invicem rationem; (quod docent deff. 3 & 5. Quinti Euclidis:) suntque hujusmodi comparationis incapacia. Quodque hic monitum est; alibi, ubi opus erit, est intelligendum.

CAP. V.

De Calculo Centri Gravitatis.

MONITUM.

Hoc Caput Integrum, quanquam à Præcedentibus dependeat, & (per Methodi leges) hunc sibi locum vendicare videatur: Non tamen ita cum Sequentibus connexum est, quin ut possit ab illis separari. Cum itaque ubi ad interiora Geometriæ penetrandum erit, Calculus necessario futurus sit perplexior, quam forte Tirones, vel minus exercitati, commode ferre possint: illud jam statim sub initium monendum duxi; ut sicubi perplexi Calculi molestiam subire nolint, possint inoffenso pede ad Capita sequentia transire; quæ ex præcedentibus, hoc omisso, tum satis intelligi, tum & legitime demonstrari possunt.

DEFINITIONES.

Def. I. *Quanta quælibet, Arithmetice proportionalia, (sive secundum naturalem Numerorum consecutionem constituta,) appello* Primana.

Quæque sunt in horum ratione Duplicata, Triplicata, Quadruplicata, &c. (sive ut Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. arithmetice-proportionalium,) appello Secundana, Tertiana, Quartana, *&c.*

Quæ autem in eorum ratione Subduplicata, Subtriplicata, Subquadruplicata, &c. (sive ut illorum Radices Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c.) appello Subsecundana, Subtertiana, Subquartana, *&c.*

Quæ in ratione, Duplicata Triplicatæ, Subtriplicatæ, &c. Triplicata Duplicatæ, Subduplicatæ, &c. (sive ut Quadrata Cuborum, aut Radicum cubicarum, &c. ut Cubi Quadratorum, aut Radicum quadraticarum, &c.) appello Quadrata Tertianorum, Subtertianorum, *&c.* Cubos Secundanorum, Subsecundanorum, *&c. Et similiter, in quavis alia rationum compositione, mutatis mutandis, appellanda erunt.*

Atque hujusmodi Serierum Indices *sive* Exponentes, *appello, numeros (integros an fractos, surdosve, ut contigerit) unde denominantur illæ series aut Rationes.*

Et, consonanter, Æqualia dico Nullana: *Quoniam Æqualia secundum nullam (ne simplam quidem) rationem arithmetice proportionalium crescunt aut decrescunt.* Subprimana *vero (sive, ut dicam, Radices Laterales Primanorum,) eadem erunt atque Primana. propter* $\frac{1}{1} = 1$.

Exempli gratia:

Exponentes.	Series.								
0.	Æqualium,	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	&c.
1.	Primanorum,	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	&c.
2.	Secundanorum,	0.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	&c.
3.	Tertianorum,	0.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	&c.
$\frac{1}{1}$.	Subprimanorum,	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	&c.
$\frac{1}{2}$.	Subſecundanorum,	$\sqrt{0}$.	$\sqrt{1}$.	$\sqrt{2}$.	$\sqrt{3}$.	$\sqrt{4}$.	$\sqrt{5}$.	$\sqrt{6}$.	&c.
$\frac{1}{3}$.	Subtertianorum,	$\sqrt{c0}$.	$\sqrt{c1}$.	$\sqrt{c2}$.	$\sqrt{c3}$.	$\sqrt{c4}$.	$\sqrt{c5}$.	$\sqrt{c6}$.	&c.
$2\times3=6$.	Quadratorum tertianorum,	00.	1×1.	8×8.	27×27.	64×64.	125×125.	216×216.	&c.
	vel	0.	1.	64.	729.	4096.	15625.	46656.	&c.
$2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.	Q.Subtertianorum,	$\sqrt{c0}$.	$\sqrt{c1}$.	$\sqrt{c4}$.	$\sqrt{c9}$.	$\sqrt{c16}$.	$\sqrt{c25}$.	$\sqrt{c36}$.	&c.
$3\times2=6$.	Cuborum ſecundanorum,	000.	$1\times1\times1$.	$4\times4\times4$.	$9\times9\times9$.	$16\times16\times16$.	$25\times25\times25$.	$36\times36\times36$.	&c.
	vel	0.	1.	64.	729.	4096.	15625.	46656.	&c.
$3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.	C.Subſecundanorum,	$\sqrt{0}$.	$\sqrt{1}$.	$\sqrt{8}$.	$\sqrt{27}$.	$\sqrt{64}$.	$\sqrt{125}$.	$\sqrt{216}$.	&c.
&c.	&c.								

Def. II. *Series, jam definitis,* Reciprocas, *appello; quando Series æqualium, per earum aliquam Dividi intelligitur. Quæ itaque Indices habebunt Negativos; ut* $-1, -2, -3,$ *&c.*

Exempli gratia.

Index.	Series Reciproca.					
-0	Æqualium,	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{1}$. &c.
-1.	Primanorum,	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{4}$. &c.
-2.	Secundanorum,	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{9}$.	$\frac{1}{16}$. &c.
-3.	Tertianorum,	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{8}$.	$\frac{1}{27}$.	$\frac{1}{64}$. &c.
$-\frac{1}{2}$.	Subſecundanorum,	$\frac{1}{\sqrt{0}}$.	$\frac{1}{\sqrt{1}}$.	$\frac{1}{\sqrt{2}}$.	$\frac{1}{\sqrt{3}}$.	$\frac{1}{\sqrt{4}}$. &c.
$-\frac{1}{3}$.	Subtertianorum,	$\frac{1}{\sqrt{c0}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c1}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c2}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c3}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c4}}$. &c.
$-6=-2\times3$.	Q.Tertian.	$\frac{1}{Q.0}$.	$\frac{1}{Q.1}$.	$\frac{1}{Q.8}$.	$\frac{1}{Q.27}$.	$\frac{1}{Q.64}$. &c.
	Vel	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{64}$.	$\frac{1}{729}$.	$\frac{1}{4096}$. &c.
$-\frac{2}{3}=-2\times\frac{1}{3}$.	Q.Subtertianorum,	$\frac{1}{Q.0}$.	$\frac{1}{Q.\sqrt{c1}}$.	$\frac{1}{Q.\sqrt{c2}}$.	$\frac{1}{Q.\sqrt{c3}}$.	$\frac{1}{Q.\sqrt{c4}}$. &c.
	Vel	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{\sqrt{c4}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c9}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c16}}$. &c.
$-6=-3\times2$.	C. Secundanorum,	$\frac{1}{C.0}$.	$\frac{1}{C.1}$.	$\frac{1}{C.4}$.	$\frac{1}{C.9}$.	$\frac{1}{C.16}$. &c.
	Vel	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{64}$.	$\frac{1}{729}$.	$\frac{1}{4096}$. &c.
$-\frac{3}{2}=-3\times\frac{1}{2}$.	C.Subſecundan.	$\frac{1}{C.0}$.	$\frac{1}{C.\sqrt{1}}$.	$\frac{1}{C.\sqrt{2}}$.	$\frac{1}{C.\sqrt{3}}$.	$\frac{1}{C.\sqrt{4}}$. &c.
	Vel	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{\sqrt{8}}$.	$\frac{1}{\sqrt{27}}$.	$\frac{1}{\sqrt{64}}$. &c.

SCHO-

SCHOLIUM.

NOtandum hic, (quo rectius hæc intelligantur:) quod si Poteſtas quælibet ſecundum quam ſeries inſtituitur, (unde & Indicem ſive Exponentem deſumit,) per aliam cujuſvis ſeriei poteſtatem multiplicetur; Poteſtatem facit cujus Index ſit Aggregato indicum utriuſque æqualis: Vel Index Multiplicatæ, tanto augetur, quantus eſt Index multiplicantis. Ut

$1 \times a = a$.	$1 \times a^2 = a^2$.	$1 \times a^3 = a^3$.	$1 \times a^4 = a^4$.	Quantitates.
$0+1=1$.	$0+2=2$.	$0+3=3$.	$0+4=4$.	Indices.
$a \times a = a^2$.	$a \times a^2 = a^3$.	$a \times a^3 = a^4$.	$a \times a^4 = a^5$.	Quantitates.
$1+1=2$.	$1+2=3$.	$1+3=4$.	$1+4=5$.	Indices.
$a^2 \times a = a^3$.	$a^2 \times a^2 = a^4$.	$a^2 \times a^3 = a^5$.	$a^2 \times a^4 = a^6$.	Quantitates.
$2+1=3$.	$2+2=4$.	$2+3=5$.	$2+4=6$.	Indices.

Sin per alteram Poteſtatem Dividatur Poteſtas aliqua; oritur poteſtas cujus Index ſit æqualis exceſſui Indicis poteſtatis diviſæ ſupra indicem poteſtatis dividentis: Vel Index Diviſæ tanto minuitur, quantus eſt Dividentis Index. (Adeoque ſi hic illo major ſit, prodibit index Negativus.) Ut

$a)\ 1\ (\frac{1}{a}$.	$a^2)\ 1\ (\frac{1}{a^2}$.	$a^3)\ 1\ (\frac{1}{a^3}$.	$a^4)\ 1\ (\frac{1}{a^4}$.	Quantitates.
$0-1=-1$.	$0-2=-2$.	$0-3=-3$.	$0-4=-4$.	Indices.
$a)\ a\ (1$.	$a^2)\ a\ (\frac{1}{a}$.	$a^3)\ a\ (\frac{1}{a^2}$.	$a^4)\ a\ (\frac{1}{a^3}$.	Quantitates.
$1-1=0$.	$1-2=-1$.	$1-3=-2$.	$1-4=-3$.	Indices.
$a)\ a^2\ (a$.	$a^2)\ a^2\ (1$.	$a^3)\ a^2\ (\frac{1}{a}$.	$a^4)\ a^2\ (\frac{1}{a^2}$.	Quantitates.
$2-1=1$.	$2-2=0$.	$2-3=-1$.	$2-4=-2$.	Indices.

Si itaque intelligatur ſeries poteſtatis inferioris, per ſeriem poteſtatis ſuperioris, reſpective dividi; (hoc eſt, terminus primus illius, per primum hujus; ſecundus, per ſecundum, &c.) orietur ſeries ex Reciprocis aliqua, quarum Indices ſunt Negativi.

Si cui interim hæc minus adhuc explicata videantur: Conſulat, ſi libet, noſtram *Arithmeticam Infinitorum*: ubi fuſius traduntur.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si intelligatur infinita ſeries Quantorum, ab ipſo capite ſeriei (puta o vel $\frac{1}{0}$) inchoatorum, & continue procedentium ſecundum ſeriem Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. Subſecundanorum, Subtertianorum, &c. aliorumve modo definitorum; eorumve Reciprocam: quorum ultimum datum ſit: erit totius ratio, ad ſeriem totidem ultimo æqualium, ea quæ eſt Unius, ad Indicem ſeriei Uno auctum.

Idem continget, ſi, omiſſo termino primo, ſeu o, Series à ſecundo termino incipiat; ſeu à quovis termino qui ſit primo & ſecundo in-

 termedius;

termedius; Puta si in serie Primanorum (cui reliquæ accommodandæ intelliguntur) terminus primus sit saltem non major quam communis Excessus seriei.

PUta: Infinita series ejusmodi Primanorum (qualia sunt, parallela Plana in Conoeide Parabolico; & Rectæ in Triangulo, Basi parallelæ, &c.) cujus Index est 1: Est ad seriem totidem Maximo Æqualium, (puta, ad circumscriptum Conoeidi illi Cylindrum, aut Triangulo Parallelogrammum, æque altum;) ut 1 ad $2 = 1 + 1$.

Ejusmodi series infinita Secundanorum, cujus Index est 2; (qualia sunt parallela basi Plana in Cono aut Pyramide; vel Ordinatim-applicatæ in complemento Parabolæ;) ad totidem maximo Æqualia, (puta, circumscriptum super eadem basi Cylindrum vel Prisma, æque altum; aut circumscriptum complemento Parabolæ Parallelogrammum;) ut 1 ad $3 = 2 + 1$.

Ejusmodi series infinita Subsecundanorum cujus Index est $\frac{1}{2}$; (puta, rectarum in Parabola basi parallelarum,) ad totidem maximo æqualium, (puta, ad Parallelogrammum super eadem base æque altum;) ut 1, ad $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1$; sive ut 2 ad 3:

Ejusmodi series infinita Subtertianorum, cujus Index est $\frac{1}{3}$, (puta, rectarum in Paraboloeide-cubicali,) ad totidem maximo æqualium, (puta, ad circumscriptum Parallelogrammum;) ut 1 ad $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + 1$: sive, ut 3 ad 4.

Et similiter in istiusmodi aliis innumeris.

Item in Reciprocis seriebus: Puta, ejusmodi series cujus Index sit $-\frac{1}{2}$; erit ad totidem ultimo Æqualium, ut 1 ad $-\frac{1}{2} + 1$; sive ut 1 ad $\frac{1}{2}$; vel 2 ad 1. Et in reliquis similiter.

Per nostræ *Arithmeticæ Infinitorum* Prop. 64. 102, &c.

Idem continget, si, pro serie Primanorum

	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	&c.
vel	0.	2.	4.	6.	8.	10.	12.	&c.

quæ repræsentet Figuram Inscriptam: Intelligatur Series,

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	&c.
vel	2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	&c.

quæ repræsentet Figuram Circumscriptam:

vel	$\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	$4\frac{1}{2}$.	$5\frac{1}{2}$.	$6\frac{1}{2}$.	&c.
hoc est, ut	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	&c.
aut etiam	$\frac{1}{3}$.	$1\frac{1}{3}$.	$2\frac{1}{3}$.	$3\frac{1}{3}$.	$4\frac{1}{3}$.	$5\frac{1}{3}$.	$6\frac{1}{3}$.	&c.
hoc est, ut	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	&c.

quæ repræsentent Figuram intermediam; puta quæ sit partim Inscripta, partim Circumscripta; adeoque major quam Inscripta & minor quam Circumscripta. Quippe hæ omnes (atque horum similes) dummodo Series Infinita intelligatur, tantundem valent, (utut in Serie terminorum numero Finitorum secus sit:) Per Schol. Prop. 182. *Arithmet. Infinit.*

Quodque de serie Primanorum dictum est, reliquis Seriebus quæ sunt in Primanorum ratione Duplicata, Triplicata, &c. Subduplicata, Subtriplicata, &c. aut alias composita, accommodandum erit.

SCHOLIUM.

QUoties, in sequentibus, serierum hujusmodi mentio fiet: quarum æstimatio ex hac Propositione dependet; intelligendæ sunt series illæ, ab ipso capite ordiri, puta o vel $\frac{1}{6}$; & dato terminari. Quod cum in propositione una aut altera expresse dictum sit; idem in sequentibus intelligendum erit; (nisi contrarium insinuetur:) utut, quo longa periphrasis evitetur, (quæ propositionem, alias fortasse satis implicatam, perplexiorem redderet,) illud disertis verbis non dicatur.

PROP.

PROP. II.

Lineæ Rectæ, Parallelogrammi, Parallelepipedi, Prismatis, Cylindri, Superficiei Cylindricæ vel Prismaticæ, aut quæ horum instar sunt; Centrum Gravitatis, est *in media longitudine.* A.

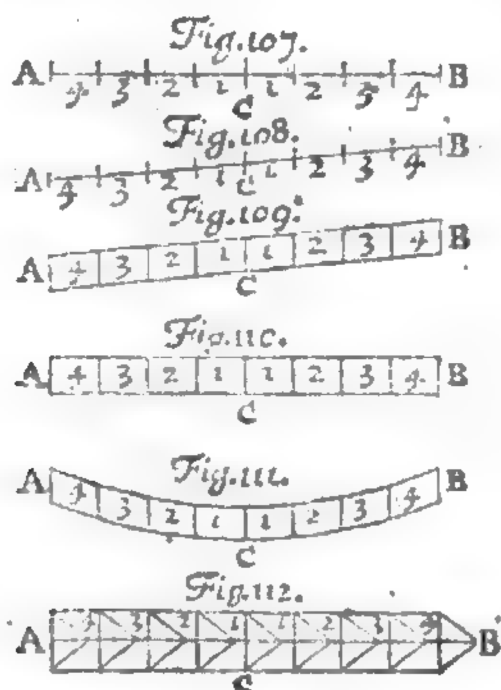
Nempe; Lineæ Rectæ, in Puncto medio: Parallelogrammi, in media Recta oppositis basibus parallela: Parallelepipedi, Prismatis, aut Cylindri, vel Superficiei Cylindricæ vel Prismaticæ; in medio Plano, oppositis basibus Parallelo. B.

Adeoque: Parallelogrammi, in ejusmodi binarum Rectarum concursu: Parallelepipedi, in ejusmodi trium Planorum concursu. C.

Datur igitur Puncti, Lineæ rectæ, Quadrati aut cujusvis Parallelogrammi, Cubi aut Parallelepipedi cujusvis, horumve Solidorum cujusvis Superficiei, Centrum Gravitatis. D

Adeoque &, Punctorum quotlibet, positione datorum, commune Centrum gravitatis datur. Item, Rectarum quotlibet, magnitudine & positione datarum. Imo, & linearum quarumlibet, magnitudine & positione datarum, quarum singularum Centra gravitatis dantur, datur commune Centrum Gravitatis. Ope Prop. ult. Cap. 4. E

Et similiter, quotlibet Quadratorum vel Parallelogrammorum quorumlibet; item, quotlibet Cuborum, vel quorumvis Parallelepipedorum; aut superficierum horum; (magnitudine & positione datorum;) datur commune centrum Gravitatis. Ope ejusdem Prop. ult. Cap. 4. Fig. 107, 108, 109, 110, 111, 112.

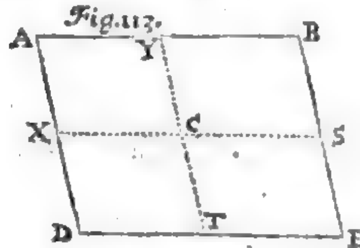


SI enim intelligatur Linea Recta, Parallelogrammum, Prisma, Cylindrus, aut quod horum instar est aliud; utrinque à medio C; Rectis Planisve parallelis, æquali intervallo ab invicem dissitis, positisque in situ ad horizontem rectis; in segmenta invicem æqualia (plura an pauciora, numero finita an infinita,) dividi: Manifestum est, (ex 13 Cap. 3. vel 4 Cap. 4.) propter segmenta quotlibet ex una parte, totidem ex altera; Æqualia magnitudine, (adeoque & Pondere; supponimus utique æquabiliter gravia:) & in Distantiis respective æqualibus posita; Æquiponderare singula singulis respective sumptis; adeoque omnibus omnia simul sumpta. Adeoque, quod per C transit, est Æquilibrii Perpendiculum, vel Perpendiculare Planum; (per definitiones;) & in illis Centrum Gravitatis; per 15 Cap. 4. A.

Adeoque; (per 26 Cap. 4.) in Linea Recta, hinc determinatur ipsum Punctum; in B.

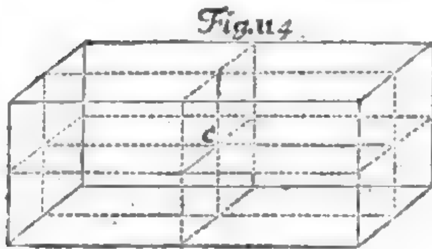
in Parallelogrammo, aut quod hujus instar est, saltem Recta; in Prismate, aut Cylindro, Planum; in quo est ipsum Gravitatis Centrum.

C. Fig. 113



Porro; Cum sint in Parallelogrammo (sive sit Quadratum, Oblongum, Rhombus, aut Rhomboeides,) bis bina latera opposita: Habentur hinc duæ rectæ, ut XCS (media inter AB, & DE,) & YCT, (media inter AD, & BE,) in quarum utraque (per jam demonstrata) est Centrum Gravitatis: Adeoque; in horum communi sectione, C puncto. per 26 Cap. 4.

Fig. 114



Denique; Cum sint in Cubo, & quovis Parallelepipedo, ter bina Plana opposita: Habentur hujusmodi (per jam demonstrata) tria Plana, in quorum singulis, (adeoque in communi omnium concursu C,) est Centrum Gravitatis. per 15 & 26 Cap. 4.

D. Adeoque, tum Puncti (sive per 26 Cap. 4. sive hinc, quia nihil est quod utrinque ponderet, nedum præponderet,) tum Lineæ rectæ, tum Quadrati aut cujusvis Parallelogrammi, item Cubi aut Parallelepipedi cujusvis, datur ipsum Gravitatis Centrum; per jam demonstrata. Quodque de Cubis & Parallelepipedis, dictum est; perinde valet de horum superficiebus.

E. Et propterea, Punctorum quotlibet, vel quotlibet rectarum; item Quadratorum aut Parallelogrammorum quotlibet; quotlibet item Cuborum vel Parallelepipedorum; quotlibet denique Superficierum Cuborum aut Parallelepipedorum; datur commune Centrum Gravitatis, modo ipsa sint magnitudine & positione data. Per Prop. ult. Cap. præced.

Alia Demonstratio.

$$\frac{\begin{matrix} P. & P. & P. & P. & & \\ 0d. & 1d. & 2d. & 3d. & \&c. & \text{usque ad } D. \end{matrix}}{0dP + 1dP + 2dP + 3dP + \&c. \text{ usque ad } DP. = \tfrac{1}{2}NDP.}$$

Idem demonstratur ex 1 hujus. Intelligatur utique, per C mediam longitudinem incedens, Perpendiculare per Axem Planum; (cui intelligantur parallelæ, Parallelogrammi vel Prismatis Bases oppositæ:) Quæque sunt utrinque CA, CB, rectæ, ex infinitis numero Punctis (eo sensu quo def. 1. Cap. 4. definitum est) constare: (& similiter ex infinitis numero Rectis, Parallelogrammum; &, Planis, Prisma, &c.) Quæ intelligantur omnia, æque crassa; (& similiter alibi intelligendum, ubi hujusmodi constructio adhibetur, nisi aliud innuatur:) Adeoque tum ipsa (ut Rectarum, Parallelogrammorum, & Parallelepipedorum, natura postulat, utpote in omnibus sui partibus æque altorum;) tum & propterea eorum Pondera, inter se æqualia: puta, ut P, P, P, P, &c. quorum omnium numerus intelligatur, N: Sed &, in Distantiis à Perpendiculari Plano per Axem, ut $0d$, $1d$, $2d$, $3d$, &c. usque ad D, maximam. Adeoque momenta seu Ponderationes (per 13 Cap. 3. vel 4 Cap. 4.) ut $0dP$, $1dP$, $2dP$, $3dP$, &c. usque ad DP. Quæ quidem infinitæ series Primanorum, simul valent ut $\frac{1}{2}NDP$; (nempe, ad NDP, summam totidem Maximo Æqualium, ut 1 ad 2:) per 1 hujus. Cumque hoc, utrinque perinde contingat: Æquiponderabitur utrinque. Adeoque (per 15 Cap. 4.) Centrum Gravitatis est in illo Plano. Quod erat demonstrandum. (Fig. præced.)

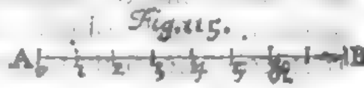
Reliquaque hinc deducuntur ut prius.

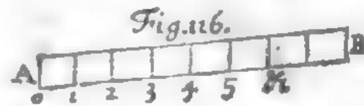
Alia Demonstratio.

$$\frac{\begin{matrix} P & P & P. & P. & \&c. & & P. \\ 0d. & 1d. & 2d. & 3d. & \text{usque ad} & & D. \end{matrix}}{0dP + 1dP + 2dP + 3dP + \&c. \text{ usque ad } DP. = \tfrac{1}{2}NDP = NP \times \tfrac{1}{2}D.}$$

Idem

Idem Analytice, tanquam si nondum notum esset, sic investigabitur. Intelligatur A B tanquam ex infinitis numero Punctis constans; (& similiter ex Rectis, Parallelogrammum; &, ex Planis, Prisma, &c.) æque crassis; quorum itaque Pondera sint, ut P, P, P, P, &c. quorum Numerus sit N. Positoque Centro, vel Axe motus in ipso extremo A; erunt eorum inde Distantiæ respectivæ, ut o *d*, 1 *d*, 2 *d*, 3 *d*, &c. usque ad D. Et momenta seu Ponderationes, ut o *d* P, 1 *d* P, 2 *d* P, 3 *d* P, &c. usque ad D P. Quorum omnium summa (per 1 hujus) est ut $\frac{1}{2}$ N D P = N P × $\frac{1}{2}$ D. Nempe quantum simul ponderaret N P totum Pondus vel summa Ponderum in distantia $\frac{1}{2}$ D. Tantundem itaque distat Centrum Gravitatis à perpendiculari per A Plano, (per 24 Cap. 4.) Eritque propterea in parallelo plano per mediam longitudinem. Quod erat ostendendum. Cæteraque hinc deducuntur, ut prius.





SCHOLIUM.

PLacuit hanc demonstrandi methodum, in re facili, cæteris subjungere, ut eo melius intelligatur, ubi illa post in difficilioribus adhibebitur.

Intelligimus (quod semel monendum erit) ubi de figurarum centris gravitatis agitur, æquabiliter gravia esse, sive puncta, sive plana, sive solida; hoc est, æquali magnitudini æquale pondus inesse; & proportionalibus, proportionalia.

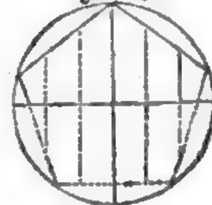
Item; Puncta, Lineas, aut Plana, ex quibus idem Grave, ut Linea, Planum, aut Solidum, conflari intelligitur; æque crassa esse: ut nempe, pro interjectorum numero, distantiarum ratio censeatur. Utut enim non negaverim, ad def. 1. Cap. 4. posse quidem secus aliquando assumi: ubi tamen nihil tale insinuatur, pro æque crassis sunt habenda.

Quæque hic monemus; in sequentibus erunt intelligenda.

Notandum interim, ad hanc Propositionem, & alias sequentes longiores, Literas in margine positas, indicare, in quo Demonstrationis membro quærenda sit istius partis probatio.

PROP. III.

Si quævis Linea (recta aut curva) vel Figura quævis (plana, curva, solidave,) plano per medium ita divisa sit; ut singulæ unius segmenti particulæ, singulis alterius respective sumptis, sint æquales & æqualiter à dividente Plano remotæ: Centrum Gravitatis est *in Plano dividente*.



Puta, Linea recta, utcunque bisecta. Arcus Circuli, producto *Radio* bisectus. Curva Parabolica, Hyperbolica, aut Elliptica, *Axe* producto bisecta. Portio perimetri Polygoni regularis (aut etiam tota Perimeter) recta per centrum figuræ transeunte bisecta, si bisecans illa recta vel Laterum unum, vel unum Angulorum bisecet.

Item; Circulus, Ellipsis, Polygonum regulare, (ejusve portio; ita ut dictum est, recta bisecta:) Item Sphæra, Sphæroeides, Conus, Conoeides, Cylindrus; & horum Superficies: Item Pyramis & Prisma, basium regularium; Segmentum Circuli, Ellipseos, Parabolæ, Hyperbolæ, Sphæræ, Sphæroeideos; multæque aliæ figuræ; plano per axem bisectæ.

Harumque aliquarum, (quæ pluribus hujusmodi Planis secari possunt in

in Puncto unico concurrentibus,) ut Circuli, Ellipseos, Parallelogrammi, Plani Solidive regularis, Parallelepipedi, Sphæræ, Sphæroeideos; Centrum Gravitatis hinc determinabitur.

$$\frac{\begin{matrix} lP, & mP, & nP, \&c. \\ rD, & sD, & tD, \&c. \end{matrix}}{lrDP + msDP + ntDP, \&c.}$$

Nam, si Pondera Ponderibus respectivis sint Æqualia, (puta, utrinque lP, mP, nP, &c.) & in Distantiis respective æqualibus, (puta rD, sD, tD, &c. utrinque,) erunt utrinque æqualia Momenta $lrDP + msDP + ntDP$, &c. Adeoque, Centrum Gravitatis in dividente Plano. per 15 Cap. 4.

Et quidem, ubi sunt hujusmodi plura Plana, quorum communis sectio sit Punctum unicum; ipsum Centrum Gravitatis determinatur. Per 26 Cap. 4.

Quod autem hæc enumeratis Lineis & Figuris (& harum similibus) conveniant: Ex earum Definitionibus manifestum est, aut inde facile demonstrabitur.

SCHOLIUM.

Notandum tamen; de Curvis Parabolicis, Hyperbolicis, Ellipticis, (quod & de harum similibus intelligendum,) diserte dictum esse, *Axe* producto bisecandas; (non, *quævis* diametro:) Nam, nisi Punctum bisectionis, sit in Axis vertice; bisecta linea non erit utrinque similiter curva. At in Parabolæ, Hyperbolæ, aut Ellipseos, Portionibus Planis, (recta abscissis; quippe de his intelligendum:) quævis Diameter basin totamque aream bisecans, rem præstat.

Dum autem has Linearum aut Figurarum species enumeravimus; alias tamen innumeras reperiri certum est; De quibus Demonstratio non minus procedit; suntque sub propositione generali comprehensæ. Nobis interim famotiores aliquot enumerasse sufficit.

Ponderum, quæ ex eadem parte sunt, quantacunque inæqualitas, aut quantacunque varietas distantiarum, demonstrationi non officit: dummodo in comparandis quæ utrinque sunt, sit æqualitas. Sed &, in prop. sequente, major adhuc erit variandi licentia.

PROP. IV.

Item; Si Linea vel Figura quævis (plana, curva, solida,) ita Plano dividatur; ut singulæ unius segmenti particulæ, singulis alterius respective sumptis, æquiponderent: Centrum Gravitatis est in Plano dividente.

$$\frac{\begin{matrix} lP. & mP. & nP. & rP. & sP. & tP. \\ rD. & sD. & tD. & lD. & mD. & nD. \end{matrix}}{lrDP + msDP + ntDP = = lrDP + msDP + ntDP.}$$

Puta; Si ex una parte Pondera lP, mP, nP, sint in distantiis rD, sD, tD: ex altera vero, Pondera rP, sP, tP, in distantiis lD, mD, nD: Utcunque (propter Pondera distantiis reciproce proportionalia) comparata comparandis respective æquiponderabunt. Adeoque, cum singula singulis respective sumptis æquiponderent; etiam omnia omnibus æquiponderabunt: (per 12 El. 5.) Eritque propterea Centrum Gravitatis in Dividente Plano. Per 15 Cap. 4.

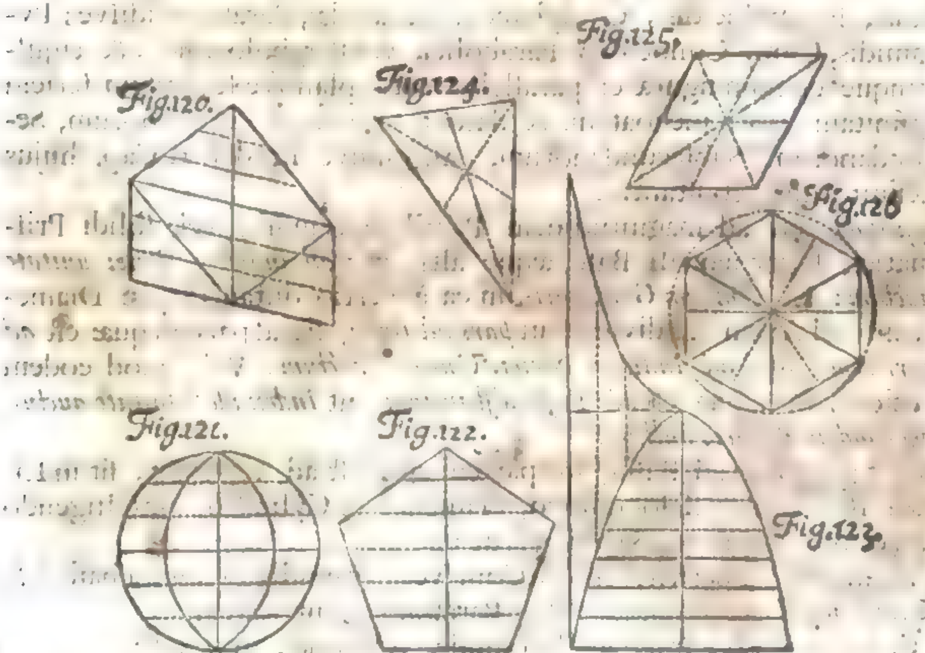
PROP.

PROP. V.

Trianguli, Parallelogrammi, Regularis Plani, Circuli, Ellipseos; vel Portionis Circuli, Ellipseos, Parabolæ, Hyperbolæ, recta (vel parallelis rectis) abscissæ; Coni, Pyramidis, Cylindri, Prismatis, Sphæræ, Sphæroeideos, Conoeideos; vel Portionis cujusvis horum, plano vel parallelis planis abscissæ; vel cujuscunque demum Figuræ planæ solidæve, quæ Diametrum aut Axem habet, quæ sibi ordinatim-applicatas rectas omnes parallelas bisecat, perque omnium sibi ordinatim-applicatorum Planorum parallelorum centra gravitatis transit: Centrum Gravitatis est *in ejusmodi Diametro vel Axe quovis.* A. C.

Atque hinc datur Circuli, Ellipseos, Trianguli, Parallelogrammi, Regularis Plani, Sphæræ, Sphæroeideos, Cubi, Parallelepipedi cujusvis, (& figuræ cujuscunque quæ hujusmodi plures Axes vel Diametros habet in unico puncto concurrentes,) Centrum Gravitatis. Nempe, in duorum pluriumve concursu. B. D.

Hinc item (cum prima hujus) datur Centrum Gravitatis Cylindri, Prismatisve vel Solidi Prismatici cujusvis, cujus basium centra gravitatis dantur; (eorumque Superficierum, dummodo Perimetri Basis centrum gravitatis datum sit:) Nempe, in Axis medio. E.



CUm enim (verbi gratia) in Triangulo, Recta à quovis angulo ad oppositi Lateris medium, rectas omnes huic lateri parallelas (Triangulum complentes, per def. 1. Cap. 4.) bisecet, per 2 & 6 El. 6. (quam itaque figuræ Diametrum dico; ea significatione qua Conicarum Sectionum Diametri, ab Apollonio definitæ, sic dicuntur:) Adeoque per singularum Centra Gravitatis transeat; (per 2 hujus.) Erit in plano per illam rectam (per 3 hujus,) adeoque in illa recta (quippe in trianguli plano, per 26 Cap. 4.) Centrum Gravitatis. A.

Similiter ostendetur; de Figuræ cujusvis Planæ Diametro; (ut Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipseos, Circuli, Parallelogrammi, Plani Regularis, &c.) ea nempe, quæ omnes parallelas rectas, planum complentes, bisecat.

Cumque sint hujusmodi Diametri, in Triangulo tres, (nempe, à singulis angulis ad opposita latera;) in Parallelogrammo, quatuor, (nempe diagonales duæ, & duæ quæ oppositorum laterum media jungunt;) in Polygono regulari, tot B.

quot sunt Anguli, vel Latera: nempe, si laterum numerus par sit: tum à singulis angulis ad angulum oppositum, tum à medio lateris cujusvis ad medium lateris oppositi, ducentur hujusmodi diametri; sin laterum numerus sit impar, à quovis angulo ad oppositum Latus: in Circulo, & Ellipsi, diametri numero infinitæ; In singulis his figuris (aliisque quibuscunque quæ plures habent diametros ut sunt irregulares multæ,) in duarum quarumvis concursu, est Centrum Gravitatis. Per 26 Cap. 4.

C. In figuris solidis, quæ Axem habent, per Planorum Parallelorum omnium Centra Gravitatis transeuntem; (quales sunt Prisma, Cylindrus, Pyramis, Conus, Pyramidoeides, Conoeides, Sphæra, Sphæroeides, aliæque multæ;) idem similiter ostenditur. Quippe Plana omnia per hos Axes (sive erectos sive inclinatos ad ordinatim-applicata Plana) sunt Plana Æquilibrii; (ut quæ, tum singula Parallela Plana per quorum centra gravitatis transeunt, tum propterea quod ex his conflatur solidum, in partes æquiponderantes dividunt;) Adeoque ipsi Axes, Axes Æquilibrii: Et propterea, in illis Centrum Gravitatis. per 15 Cap. 4.

D. Cumque sint in Parallelepipedo, Sphæra, Sphæroeide, (aliisque multis figuris solidis,) hujusmodi plures Axes: in duarum quarumvis concursu, est Centrum Gravitatis per 26 Cap. 4.

E. Corollarium ultimum; satis per se patet, ex hac & Prop. 1.

PROP. VI.

A. H. Lineæ rectæ, Parallelogrammi, Prismatis, Cylindri, Trianguli, Parabolæ, Paraboloeidis; Complementi Parabolæ, Paraboloeidisve; Pyramidis, Coni, Conoeideos Parabolici, vel Paraboloeidici; & cujuscunque demum figuræ ex parallelis rectis planisve secundum seriem infinitam (ab 0 inchoatam, & dato terminatam) Primanorum, Secundanorum, Subsecundanorum, (aliorumve in def. 1. Cap. hujus definitorum,) constantis:

Magnitudo, est ad magnitudinem Parallelogrammi, vel solidi Prismatici, super æquali Base, æque alti; *ut 1 ad indicem Seriei unitate auctum*: Et *Centrum Gravitatis* in ea à vertice distantia quæ Diametrum vel Axem ita dividit, ut *pars ad Basin*, sit ad partem quæ est *ad verticem*; ut 1 *ad Indicem Seriei Unitate auctum*: Vel (quod eodem recidit) in ea quæ est ad *Basis distantiam*; ut *Index ille Unitate auctus*, ad *eundem Binario auctum*.

B. Hoc est; ut pars ad Basin, ad partem quæ est ad verticem; sit in Linea Recta, Parallelogrammo, Prismate, & Cylindro, (intelligendo verticem in utrovis extremo,) ut 1 ad 1.

C. In Triangulo, superficie erecti Coni vel Pyramidis (dempta base,) & Conoeide (vel Pyramidoeide) Parabolico; ut 1 ad 2.

D. In Complemento Parabolæ, Pyramide, vel Cono; ut 1 ad 3.

E. In Complemento Paraboloeidis Cubici, ut 1 ad 4; Biquadratici; ut 1 ad 5: &c.

F. In Parabola; ut 1 ad $1\frac{1}{2}$; sive, ut 2 ad 3.

G. In Paraboloeide Cubicali; ut 1 ad $1\frac{1}{3}$; sive ut 3 ad 4: in Biquadratico; ut 1 ad $1\frac{1}{4}$, vel ut 4 ad 5. &c.

B. Sive, (quod eodem recidit;) Distantia Centri Gravitatis à Plano per Verticem basi parallelo, ad distantiam Basis ab eodem Plano: (Quod & in Semicono, Semicylindro, Semi-Parabola, &c. aut quæ horum instar sunt; non minus valet, atque in figuris integris:) est,

In Linea Recta, Parallelogrammo, Prismate, vel Cylindro; (facto vertice ut prius;) ut 1 ad 2.

C. In Triangulo, & Conoeide (vel Pyramidoeide) Parabolico; ut 2 ad 3.

In

In Pyramide, Cono, & Complemento Parabolæ; ut 3 ad 4. D.

In Complemento Paraboloeidis Cubici; ut 4 ad 5: Biquadratici; ut 5 ad 6, &c. E.

In Parabola; ut $1\frac{1}{2}$ ad $2\frac{1}{2}$; vel 3 ad 5. F.

In Paraboloeide Cubicali; ut $1\frac{1}{3}$ ad $2\frac{1}{3}$; vel 4 ad 7: Biquadratico; ut $1\frac{1}{4}$ ad $2\frac{1}{4}$; vel 5 ad 9. G.

Et similiter in aliis hujusmodi figuris quibusvis. H.

Et quidem in Figuris Integris, utrinque ad Diametrum vel Axem positis; datur ipsum Axis vel Diametri punctum in quo est Centrum Gravitatis: In Dimidiatis, excavatis, &c. saltem Centri illius à vertice distantia. A. I.

Unde & Frusti figuræ ejusmodi, (parallelis basi rectis planisve truncatæ) Centrum Gravitatis habetur; ejusve à Base Verticisve plano distantia. K.

Aut etiam hujusmodi Figuræ utcunque multatæ figura cujus tum Magnitudo nota sit, tum Centrum Gravitatis. per 27 Cap. præced.

Item, quæ ex hujusmodi totis, vel harum frustis componitur. L.

Et, speciatim, figuræ cujusvis planæ Rectilineæ, & solidæ Planis terminatæ; Centrum gravitatis habebitur, ex eadem 27 Cap. præced.

Fig. 127.

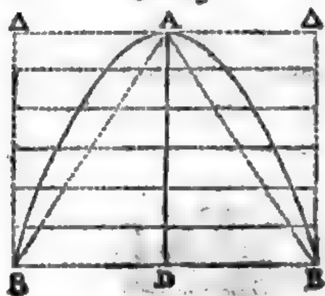


Fig. 128.

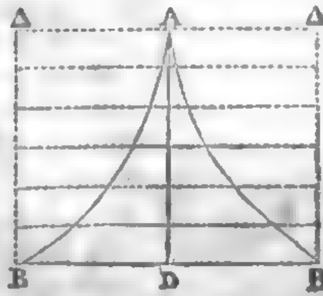
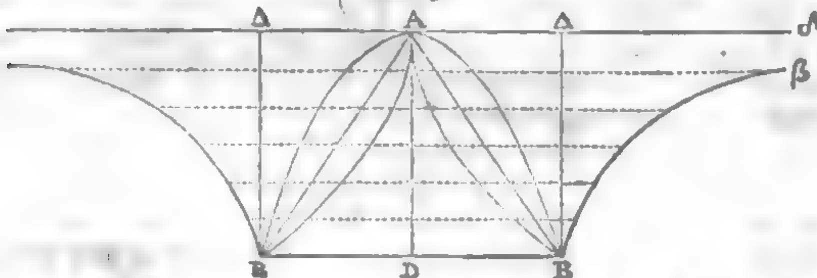


Fig. 129.



NAm, si intelligatur Axis motus, per A verticem transiens, Basi BB parallelus: Quæcunque sit series particularum (puta, Punctorum, Rectarum, Planorum,) ex quibus conflatur linea, figurave, (puta series Æqualium seu Nullanorum, Arithmetice-proportionalium seu Primanorum, vel ut horum Quadrata, Cubi, &c. Radices quadraticæ, Cubicæ &c. hoc est Secundanorum, Tertianorum, &c. Subsecundanorum, Subtertianorum, &c. aliave quæcunque ex definitis in def. 1. hujus;) Cum sint in distantiis ab axe motus, ut 0, 1, 2, 3, &c. Arithmetice proportionalibus, (propter æqualem singularum crassitiem:) Erit series Momentorum (quippe quæ sunt in ratione ex Ponderum & Distantiarum rationibus composita) uno gradu altior quam est series Particularum; sive, series illa cujus Index sit unitate major quam Index seriei Particularum: Unde habetur tum Magnitudo figuræ, tum summa Momentorum; per 1 hujus; adeoque Distantia A. Fig. 127, 128, 129.

Fig. 127, 128, 129. Centri Gravitatis à plano per Verticem; per 24 Cap. 4. Ea quam habet propositio. Et quidem, ubi per præced. Centrum Gravitatis est in Diametro vel Axe, datur propterea ipsum Diametri vel Axis Punctum.

B. Puta; Cum Linea recta, ut AD, (propter æqualia Puncta;) Parallelogrammum: ut BB△ (propter rectas æquales;) vel circa hoc constructum Prisma, vel Cylindrus, (propter æqualia plana;) sit Series Æqualium seu Nullanorum; (puta ut P, P, P, &c.) cujus Index o; (estque igitur ad seriem totidem maximo æqualium, hoc est, illam ipsam, ut 1 ad o + 1;) sintque Distantiæ, ut o *d*, 1 *d*, 2 *d*, &c. quarum maxima, D: erit series momentorum infinita, ut o *d*P, 1 *d*P, 2 *d*P, 3 *d*P, &c. usque ad DP; Series Primanorum, cujus Index 1: Adeoque simul omnium momenta, (per 1 hujus;) ut $\frac{1}{2}$NDP = NP × $\frac{1}{2}$D. Adeoque distantia Centri Gravitatis, $\frac{1}{2}$D. per 24 Cap. 4.

P.	P.	P.	P.	—— P.
o *d*.	1 *d*.	2 *d*.	3 *d*.	—— D.
o *d*P,	1 *d*P,	2 *d*P,	3 *d*P,	—— DP.

$\frac{1}{2}$NDP = NP × $\frac{1}{2}$D.

C. Item: Cum Triangulum ABB (propter rectas, Basi BB parallelas, distantiis à vertice proportionales,) Et superficies Coni Pyramidisve (propter perimetros planorum similium basi parallelorum, distantiis a vertice proportionales;) Et Conoeides (vel Pyramidoeides) Parabolicum, super Parabola BAB constructum, (cujus parallela plana, propter ordinatim-applicatas in Parabola in subduplicata ratione diametrorum interceptarum, sunt in diametrorum ratione, sive distantiarum à vertice; quippe in duplicata ratione ordinatim-applicatarum in parabola circa quas fiunt illa similia plana;) sit series Primanorum; puta, ut o *p*, 1 *p*, 2 *p*, 3 *p*, &c. usque ad P; cujus Index 1: adeoque omnium summa, ut $\frac{1}{2}$NP; (nempe, in ratione ad totidem maximo æqualium; hoc est, ad Parallelogrammum, Cylindrum, aut Prisma, super eadem base, æque altum; ut 1 ad 2, per 1. hujus:) Sintque in distantiis, ut o *d*, 1 *d*, 2 *d*, 3 *d*, &c. quarum maxima D: Erunt Momenta, ut o *dp*, 1 *dp*, 4 *dp*, 9 *dp*, &c. usque ad DP; series Secundanorum; cujus Index 2. Adeoque (per 1 hujus) simul omnia, ut $\frac{1}{3}$NDP = $\frac{1}{2}$NP × $\frac{2}{3}$D. Adeoque, Distantia Centri Gravitatis à vertice est $\frac{2}{3}$D. per 24 Cap. 4.

o *p*,	1 *p*,	2 *p*,	3 *p*,	—— P.
o *d*,	1 *d*,	2 *d*,	3 *d*,	—— D.
o *dp*,	1 *dp*,	4 *dp*,	9 *dp*,	—— DP.

$\frac{1}{3}$NDP = $\frac{1}{2}$NP × $\frac{2}{3}$D.

D. Item; Cum Pyramis vel Conus, circa Triangulum ABB, (propter diametros Circulorum, vel latera similium Planorum, in ratione distantiarum à vertice; adeoque eorum plana, in distantiarum ratione duplicata,) sit infinita series Secundanorum; (puta ut o *p*, 1 *p*, 4 *p*, 9 *p*, &c. usque ad P;) cujus Index 2; & omnium summa, ut $\frac{1}{3}$NP; (hoc est, Pyramis seu Conus, ad circumscriptum Prisma vel Cylindrum, ut 1 ad 3;) per 1 hujus: Sintque, distantiæ ut o *d*, 1 *d*, 2 *d*, 3 *d*, &c. usque ad D: Erunt momenta, ut o *dp*, 1 *dp*, 8 *dp*, 27 *dp*, &c. usque ad DP; series Tertianorum: cujus Index 3. Adeoque (per 1 hujus) simul omnia, ut $\frac{1}{4}$NDP = $\frac{1}{3}$NP × $\frac{3}{4}$D. Adeoque, Distantia Centri Gravitatis à vertice, $\frac{3}{4}$D. per 24 Cap. 4.

o *p*,	1 *p*,	4 *p*,	9 *p*,	—— P.
o *d*,	1 *d*,	2 *d*,	3 *d*.	—— D.
o *dp*,	1 *dp*,	8 *dp*,	27 *dp*,	—— DP.

$\frac{1}{4}$NDP = $\frac{1}{3}$NP × $\frac{3}{4}$D.

Similiter omnino, de Complemento Parabolæ dicendum: quæ series est Secundanorum. *Complementum* autem *Semi-parabolæ*, appello, id quod cum semi-parabola complet parallelogrammum circumscriptum; (cujus diameter, est parabolæ Tangens in vertice; & ordinatim-applicatæ, parallelæ diametro parabolæ;) quod, utrinque circa eandem sui diametrum duplicatum, appello, *Complementum Parabolæ*: (Puta, quod continetur inter duas lineas Parabolicas convexas AB, AB, fig. 128. quas in communi vertice A, tangat AD, complementi diameter; basinque huic ordinatim-applicatam BB; cui parallelæ intelliguntur rectæ figuram complentes.) Hujusque ordinatim-applicatæ ad diametros suas; sunt ut diametri interceptæ in Parabola, ad suas ordinatim-applicatas. Adeoque, in duplicata ratione Diametrorum, sive Distantiarum à vertice. Cum itaque sit (ut Pyramis) Series Secundanorum: Momenta, sunt Series Tertianorum: Adeoque simul omnia, ut $\frac{1}{4}$NDP = $\frac{1}{3}$NP × $\frac{3}{4}$D: Et Centri gravitatis à vertice distantia; $\frac{3}{4}$D. Ut, de Cono & Pyramide, ostensum est.

Com-

Complementum Paraboloeidis Cubici, (propter hujus Paraboloeidis ordinatim-applicatas, in subtriplicata ratione diametrorum interceptarum; adeoque ordinatim-applicatas Complementi, in Triplicata ratione diametrorum, sive distantiarum à Vertice Complementi;) est Series Tertianorum: puta, ut $0p$, $1p$, $8p$, $27p$, &c. usque ad P; adeoque summa omnium ut $\frac{1}{4}$NP; per 1 hujus; (hoc est, ad Parallelogrammum circumscriptum, ut 1 ad 4:) Cum itaque Distantiæ sint ut $0d$, $1d$, $2d$, $3d$, &c. ad D: Momenta erunt, ut $0dp$, $1dp$, $16dp$, $81dp$, usque ad DP. Et simul omnia (per 1 hujus) ut $\frac{1}{5}NDP = \frac{1}{4}NP \times \frac{4}{5}D$. Et Distantia Centri gravitatis; $\frac{4}{5}$D. per 24 Cap. 4. E.

$0p,$	$1p,$	$8p,$	$27p,$	—— P.
$0d,$	$1d,$	$2d,$	$3d,$	—— D.
$0dp,$	$1dp,$	$16dp,$	$81dp,$	—— DP.

$$\tfrac{1}{5}NDP = \tfrac{1}{4}NP \times \tfrac{4}{5}D.$$

Atque, ad eandem formam, mutatis mutandis, in aliis Paraboloeidium Complementis, aut etiam solidis eorum conversione circa Axem suum factis: aliisve secundum ejusmodi alias series.

Parabola, BAB, fig. 127. (propter ordinatim-applicatas in subduplicata ratione diametrorum:) est series Subsecundanorum; cujus Index $\frac{1}{2}$: puta, $\sqrt{0p}$, $\sqrt{1p}$, $\sqrt{2p}$, $\sqrt{3p}$, &c. usque ad P: Adeoque simul omnia, ut $\frac{2}{3}$NP; (nempe ad Parallelogrammum circumscriptum, ut 2 ad 3,) per 1 hujus. Et propter distantias, ut $0d$, $1d$, $2d$, $3d$, &c. usque ad D; Momenta erunt, ut $0d\sqrt{p}$, $1d\sqrt{1p}$, $2d\sqrt{2p}$, $3d\sqrt{3p}$, &c. vel, ut $d\sqrt{0p}$, $d\sqrt{1p}$, $d\sqrt{8p}$, $d\sqrt{27p}$, &c. usque ad DP: quæ est, series Cuborum Subsecundanorum; cujus Index $1\frac{1}{2}$ vel $\frac{3}{2}$. Adeoque (per 1 hujus) omnia, ut $\frac{2}{5}NDP = \frac{2}{3}NP \times \frac{3}{5}D$. Et distantia Centri gravitatis, $\frac{3}{5}$D. F.

$\sqrt{0p},$	$\sqrt{1p},$	$\sqrt{2p},$	$\sqrt{3p},$	—— P.
$0d,$	$1d,$	$2d,$	$3d,$	—— D.
$0d\sqrt{p},$	$1d\sqrt{p},$	$2d\sqrt{2p},$	$3d\sqrt{3p},$	—— DP.
$d\sqrt{0p},$	$d\sqrt{p},$	$d\sqrt{8p},$	$d\sqrt{27p},$	—— DP.

$$\tfrac{2}{5}NDP = \tfrac{2}{3}NP \times \tfrac{3}{5}D.$$

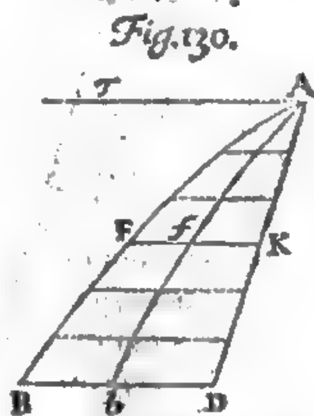
Paraboloeides Cubicale, (propter ordinatim-applicatas in ratione diametrorum subtriplicata,) est series Subtertianorum; cujus Index $\frac{1}{3}$. puta ut $\sqrt{c\,0p}$, $\sqrt{c\,p}$, $\sqrt{c\,2p}$, $\sqrt{c\,3p}$, &c. ad P. Et omnium summa, ut $\frac{3}{4}$NP; per 1 hujus. (hoc est, ad Parallelogrammum circumscriptum, ut 3 ad 4.) Et, propter distantias, ut $0d$, $1d$, $2d$, $3d$, &c. ad D: Momenta erunt, ut, $0d\sqrt{c\,0p}$, $1d\sqrt{c\,1p}$, $2d\sqrt{c\,2p}$, $3d\sqrt{c\,3p}$, &c. ad DP; sive, ut $d\sqrt{c\,0p}$, $d\sqrt{c\,p}$, $d\sqrt{c\,16p}$, $d\sqrt{c\,81p}$, &c. ad DP; series Biquadratorum subtertianorum; cujus Index $1\frac{1}{3}$ vel $\frac{4}{3}$. Et summa omnium (per 1 hujus) ut $\frac{3}{7}NDP = \frac{3}{4}NP \times \frac{4}{7}D$. Et distantia Centri gravitatis, $\frac{4}{7}$D. G.

$\sqrt{c\,0p},$	$\sqrt{c\,1p},$	$\sqrt{c\,2p},$	$\sqrt{c\,3p},$	—— P.
$0d,$	$1d,$	$2d,$	$3d,$	—— D.
$0d\sqrt{c\,0p},$	$1d\sqrt{c\,p},$	$2d\sqrt{c\,2p},$	$3d\sqrt{c\,3p},$	—— DP.
$d\sqrt{c\,0p},$	$d\sqrt{c\,p},$	$d\sqrt{c\,16p},$	$d\sqrt{c\,81p},$	—— DP.

$$\tfrac{3}{7}NDP = \tfrac{3}{4}NP \times \tfrac{4}{7}D.$$

Et similiter de aliis seriebus judicandum.

Nempe, universaliter; Si Index seriei Ponderum sit S; adeoque (per 1 hujus) summa totius, ut $\frac{1}{S+1}$NP: Index seriei Momentorum, erit $S+1$; adeoque horum summa, ut $\frac{1}{S+2}$NDP. Quæ per summam Ponderum $\frac{1}{S+1}$NP divisa; exhibet $\frac{S+1}{S+2}$D, distantiam Centri gravitatis à vertice; nempe, ad distantiam maximam, ut $S+1$ ad $S+2$: Adeoque reliquum distantiæ (quæ est distantia Centri gravitatis à Basi) ut $\frac{1}{S+2}$D. Et propterea, Axis portio ad Verticem, ad portionem ad Basem, ut $S+1$ ad 1. Quod erat demonstrandum. H.



I. Quodque de Figuris integris ostensum est; idèm de Dimidiis, similiter ostendetur; (Puta, de Semi-parabolis, Semi-paraboloeidibus, & Complementis; vel horum Solidis; &c.) quoad distantiam Centri gravitatis à Plano per verticem basi parallelo. Quanquam enim ipsum Centri punctum non hinc innotescat, (quia hujusmodi Dimidiatæ Figuræ, Diametrum non habent, quæ & linea recta sit & singulas ordinatim-applicatas bisecet, quo propositio præcedens hic in subsidium advocetur ut ipsum Centrum determinetur;) tamen, quantum illud à verticis Plano distet, (quod est hujus Propositionis opus,) non minus in dimidiatis, quam in integris figuris, hinc innotescit; & demonstratio similiter quadrat; eadem utique est ordinatim-applicatarum series sive in integris, sive in dimidiis figuris. Ut ex earum definitionibus patet: Dimidiorum enim atque Duplorum, eadem est inter se ratio; per 15 El. 5.

Similiter; Idem obtinet; si non quidem sit Dimidiata figura (puta, A D B Semi-parabola,) sed utcunque hujusmodi series una ex altera demattur; residui Centrum gravitatis (figuræ Diametrum vel Axem habentis,) vel saltem Centri Distantia à plano per verticem basi parallelo. Puta; Si Semi-parabolæ A D B, eximatur A D b semi-parabola; residui A b B Centrum Gravitatis innotescit; saltem, quantum à Plano per A distat. Nam ejusdem generis series est, tum A D B tum A b B.

Imo vero; si non ejusdem generis sit A D b, atque A D B; sed verbi gratia, ex A B D Paraboloeide Cubico, auferatur A b D Parabola, aut Triangulum, aut alia figura quævis quæ ex aliqua definitarum serie conflatur: Cognitis enim Totius & Ablati tum magnitudine, tum Centro Gravitatis; etiam Residui cognoscitur; per 27 Cap. 4. Saltem cognita utriusque Magnitudine, & Ponderatione respectu expositi plani; cognoscitur Residui Ponderatio & Magnitudo; adeoque & Centri gravitatis distantia; per prop. 24. Cap. 4.

K. De Frustis item similiter fiet judicium. Nempe, propter datum vel ipsum Centrum Gravitatis, vel distantiam Centri Gravitatis, una cum magnitudine; totius A D B vel A b B, & ablati A K F, vel A f F; dabitur & Frusti reliqui, F K D B, vel F f b B, ut ante. Per 27, vel 24, Cap. 4.

L. Similiter; de figuris ex hujusmodi pluribus conflatis, fiet judicium: Et speciatim de Planis omnibus Rectilineis, (quippe in Triangula posse dividi, notum est;) & Solidis quæ planis terminantur; (quippe, hæ saltem in Pyramides dividi poterunt:) Datis utique partium Magnitudinibus, & Centris Gravitatis; dabitur Totius; per 27 Cap. 4. Vel datis saltem magnitudinibus, & distantiis centrorum (ab exposito plano) adeoque Ponderationibus; dabitur etiam Totius Ponderatio & Magnitudo; adeoque & Centri gravitatis distantia à plano exposito.

Neque hæc de figuris Planis tantum obtinent; sed in Solidis non minus. Puta, si Conoeides Parabolicum, vel Paraboloeidicum, vel Conus etiam, aut Pyramis, vel Cylindrus, aut Prisma, &c. Conice excavetur; vel horum Frusta, Cylindrice; aut aliis mille modis: uti ex jam dictis satis demonstratur.

SCHOLIUM.

Hactenus itaque Centrum Gravitatis invenimus, in figuris omnibus Planis Rectilineis; & Solidis, quæ planis terminantur: Sed & in Planis Curvilineis, & Solidis curvis superficiebus terminatis, non paucis; tum Magnitudinem tum & Centrum Gravitatis determinavimus. Et quidem longe pluribus quam quo pertigerat doctrina Veterum. Atque, in sequentibus, ad plura adhuc procedendum, ultra quam (quantum scio) quisquam pertigit Recentiorum; saltem ultra quam à quoquam editum est, ante editam nostram (unde hæc directa methodo deducuntur) Arithmeticam Infinitorum.

Quod autem, de Figurarum Frustis, figurisque Excavatis, aut alias multatis, & figurarum Aggregatis, &c. ad hanc propositionem ostensum est: Etiam in sequentibus intelligendum erit. Utpote ex prop. 27. Cap. præced. deducendum.

Plura vero quæ huc spectant, videat (cui id lubitum erit) in nostra *Arithmetica Infinitorum*; (ubi hæc Methodus fusius traditur:) Et in nostro *Commercio Epistolico*, (cum D. Fermatio, aliisque,) Epist. 16, ejusque Appendice.

PROP.

PROP. VII.

Si intelligatur ex Rectis Planisve, secundum aliquam ex Reciprocis (in def. 2. hujus definitis, Indicem habentibus Negativum) seriem infinitam, (ab $\frac{1}{0}$ ipsa seriei origine inchoatam, & dato terminatam,) Figura conflari : A.

Habebit hæc, ad Verticem, latitudinem Infinitam : B.

Finitam tamen, si, ex parte Verticis, intelligatur vel tantillum Plano parallelo abscindi ; (adeoque figura saltem truncata magnitudinis erit finitæ :) C.

Aream vero ; quæ sit ad Parallelogrammum, vel Solidum Prismaticum, super æquali Base æque altum ; ut 1, ad *Indicem Unitate auctum* : D.

Adeoque vel magnitudine Finitam ; si Index sit major quam -1 ; (puta $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$, &c.) G.

Vel Infinitam ; si Index sit -1 : E.

Vel Plusquam Infinitam ; si sit Index minor quam -1 ; (puta, -2, -3, &c.) F.

Quæque sunt magnitudinis Infinitæ, (aut plusquam Infinitæ,) Centrum Gravitatis non habent. H.

Quæ sunt finitæ magnitudinis, siquod habent Centrum Gravitatis, in ea habent à vertice distantia, qua ita dividitur Diameter vel Axis, ut *pars ad Basin*, sit ad *partem quæ est ad Verticem* ; ut 1, ad *Indicem seriei Unitate auctum.* I. L.

Habent autem Centrum Gravitatis hujusmodi Figuræ (magnitudinis finitæ) si sint Integræ, (hoc est, utrinque Circa Diametrum vel Axem similiter positæ ;) Nempe, in Axis illo puncto, quod, ita ut dictum est, distat. K.

Ex dimidiatis vero (vel quæ harum instar sunt) quæ habent, quæque non habent, in Propositione sequente dicetur. L.

Quæ, exemplis facile explicantur. M.

Deque his Figuris Truncatis, aut alias Mulctatis, vel Aggregatis ; idem judicandum est atque de illis propositionis Præcedentis. N.

Atque hæ *Figuræ interminabiles* (planæ, solidæve ;) ad *Paraboloeidium* genera spectant, vel ad harum solida. O.

Ipsæ autem *Lineæ Curvæ*, ad quarum convexas adjacent Interminabiles hujusmodi Figuræ Planæ ; ad *Hyperbolarum* seu *Hyperboloeidium* genus referendæ sunt. P.

Sed & quæ ad *Hyperboloeidium* harum (ea sola excepta quæ est vera Hyperbola Apolloniana) *Concavas* adjacent *Figuræ planæ*, (concava & rectis terminatæ) tum quam magnitudinem habent hinc determinabitur ; tum & Centrum gravitatis datum erit. Q.

Intelligatur, ad Diametrum vel Axem A D, hujusmodi figura plana solidave construi, A ∞ B D ; cujus Basis D B ; & huic parallelæ rectæ aut superficies planæ (figuram complentes) ordinatim-applicatæ, secundum seriem ex Reciprocis illis quamlibet. A. Fig. 129, 131.

Erit, propter seriei Directæ terminum primum o, seriei reciprocæ primus terminus ∞ infinitus : puta $\frac{1}{0} = \infty$. (Nam, ubi quantitas quælibet dividitur ; si dividens sit o, quotiens erit ∞ : quippe nulla quantitas finita, pro quotiente posita, dividentem o multiplicans, restituet dividendam.) Adeoque Recta Verticis A ∞ erit interminabilis : Sive, figuræ latitudo, in Vertice, infinita. B.

Cum vero Seriei directæ terminus post primum quilibet quantitatem habeat finitam ; seriei reciprocæ reliqui omnes termini sunt finiti ; adeoque figuræ infra verticem C.

verticem finita latitudo. (Nam, quantuluscunque sit ille post primum terminus seriei directæ; hic quantitatem finitam dividens, quotientem dabit finitum.)

Adeoque, utut tota à vertice ad basin figura, magnitudinis esset infinitæ (propter infinitam verticis latitudinem;) si tamen intelligatur, ex parte verticis, vel tantillum truncari plano basi parallelo; reliquum figuræ, magnitudinis erit finitæ. (Erit utique magnitudinis datæ, altitudo finita; sed & truncatæ latitudo vel amplitudo per jam ostensa; adeoque tota figura, sive plana sit sive solida; sic truncata, magnitudinis erit finitæ.)

D. Est autem, à vertice ad basin tota, ad Parallelogrammum, vel solidum Prismaticum (sive sit Parallelepipedum, sive aliud Prisma, sive Cylindrus, vel illiusmodi quodvis Solidum, super quacunque base, eandem ubique, per totam altitudinem, amplitudinem habens,) super æquali base, æque altum; hoc est, ad seriem totidem ultimo æqualium, (per def. 1. Cap. 4.) ut 1, ad indicem seriei Unitate auctum; per 1 hujus.

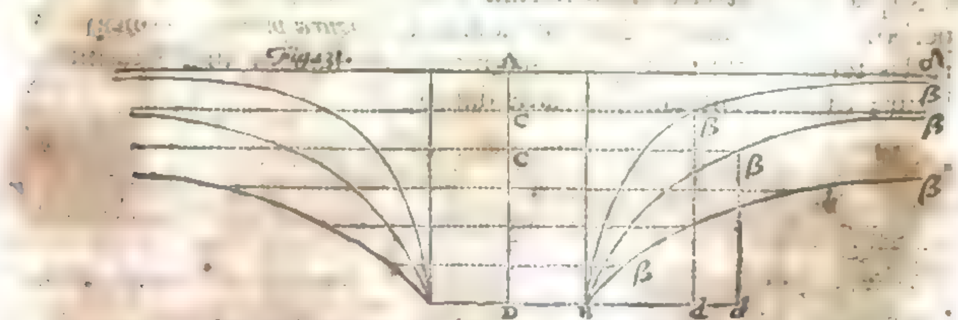
E. Adeoque, (propter Reciprocarum Serierum Indicem negativum,) si Index, sit -1; erit $-1+1=0$; adeoque ratio 1 ad 0, Infinita. Et propterea si series illa sit Reciproca primanorum, (quale est, complementum Hyperbolæ Apollonianæ, per prop. 95. Arithm. Infin.) figura erit magnitudinis infinitæ. (Quippe ad finitam datam, ut 1 ad 0.)

F. Si vero Index sit minor quam -1, (hoc est, magis negativus,) puta, $-1\frac{1}{2}$, -2, -3, &c. etiam addito 1, manebit adhuc negativus; puta $-1\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{2}$. $-2+1=-1$. $-3+1=-2$, &c. (per 8 Cap. 1.) adeoque, ratio 1 ad $-\frac{1}{2}$, 1 ad -1, 1 ad -2, &c. Nempe; ut Positivi ad Negativum; quæ est plusquam infinita; (nam, 1 ad 0, est infinita; ergo, 1 ad minus quam 0, est major quam infinita; per 8 El. 5.) Ergo, & Figura, (quæ, ad datam, illam habeat rationem,) plusquam Infinita.

G. Sin Index major sit quam -1, (hoc est, minus negativus,) puta, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, &c. addito 1, fiet Positivus; puta $-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$. $-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$ $-\frac{3}{4}+1=\frac{1}{4}$. &c. (per 8 Cap. 1.) Adeoque, ratio 1 ad $\frac{3}{4}$, 1 ad $\frac{2}{3}$, 1 ad $\frac{1}{2}$, 1 ad $\frac{1}{3}$, 1 ad $\frac{1}{4}$, &c. finita. Ergo, & Figura (ut quæ, ad datam finitam, finitam habet rationem,) magnitudinis finitæ; utut, latitudinis in vertice, infinitæ.

H. Quæ autem Magnitudinis sunt Infinitæ, (aut plusquam infinitæ,) Centrum gravitatis non habent. Quippe, si in ipsa verticis recta, (Aδ,) intelligeretur, (aut supra verticem; aut etiam per Basin, aut infra Basin:) Figura tota (respectu Plani basi paralleli per Centrum illud transeuntis,) ad unas partes ponderaret; adeoque non esset Æquilibrium. Sin intra Verticem & Basin intelligatur; quantulacunque sit à vertice distantia; planum basi parallelum per hoc transiens, Figuram dividet in segmenta duo; quorum illud ad basin, Finitum erit, atque in distantia finita, (per jam ostensa;) illud autem ad verticem, Infinitum erit; (quippe, si à toto Infinito, Finitum auferatur: reliquum erit Infinitum: secus enim, Finitum Finito additum, faceret Infinitum:) Adeoque, Infinitum hoc ad verticem (in quantulacunque distantia) Finito illi ad basin, (in distantia quantacunque finita,) præponderabit: Adeoque non erit in illo plano Centrum Gravitatis. Nusquam igitur.

I. Si vero sint magnitudinis Finitæ; puta, secundum seriem cujus Index sit $-S$,



major quam -1, (ut jam ostensum est;) Ostendetur (ut in prop. præced.) totam figuram, sive seriei summam, esse $\frac{1}{-S+1}$ NP, (quæ, nempe sit ad parallelogrammum, vel solidum Prismaticum, NP, ut 1 ad $-S+1$;) & summam momentorum,

mentorum, five momentum totius, (respectu plani per verticem A δ, basi paral- Fig. 129, 131.
leli,) ut $\frac{1}{-S+2}$ N D P, (nempe, ad momentum ipsius N P in distantia D suspensi, ut 1 ad $-S+2$; propter seriem Momentorum, uno gradu altiorem, quam est series Ponderum :) per 1 hujus. Adeoque, propter $\frac{1}{-S+2}$ $NDP = \frac{1}{-S+1} NP \times \frac{-S+1}{-S+2} D$, erit distantia Plani Æquilibrii (per 20 Cap. 3.) adeoque & Centri Gravitatis siquod est, (per 24 Cap. 4.) $\frac{-S+1}{-S+2}$ D; adeoque reliquum distantiæ maximæ, (quæ baseos est,) $\frac{1}{-S+2}$ D. Hæc igitur ad illam, est ut 1 ad $-S+1$, (in ratione finita; propter $-S+1$ quantitatem positivam :) Si itaque tota distantia D (basis à vertice,) ita dividatur puta in C; ut pars ad basin, C D, sit ad partem quæ est ad verticem, C A, ut 1 ad $-S+1$; planum per C transiens, basi parallelum, est Planum Æquilibrii. per 20 Cap. 3. Et quidem (si utrinque ad Diametrum vel Axem similiter construatur figura) in ipso Diametri vel Axis puncto C, (per 5 hujus.) Sin minus; saltem siquod est Centrum Gravitatis, in eo plano est. per 24 Cap. 4. K.

Dico autem, *siquod est*; quoniam, in figura dimidiata (vel quæ istiusmodi est,) fieri potest, ut Centrum gravitatis, utut in C β infinita intelligatur, intelligenda tamen sit ab ipso C puncto in infinita distantia, (ut in prop. seq. ostendetur,) adeoque nusquam erit. L.

Exempli gratia. Si sit A D B β δ figura, ex serie reciproca subsecundanorum, conflata; (puta, cujus rectæ vel plana sint in reciproca ratione ordinatim-applicatarum in parabola :) cujus Index, $-\frac{1}{2}$. Adeoque, ad inscriptum Parallelogrammum vel Prisma A D B Δ, (quod sit N P,) ut 1 ad $-\frac{1}{2}+1$; hoc est, ut 1 ad $\frac{1}{2}$, vel 2 ad 1 : nempe ut 2 N P. Momentorum series, indicem habebit $-\frac{1}{2}+1$ vel $\frac{1}{2}$; (quippe uno gradu altior quam Ponderum, propter distantias arithmetice proportionales :) Adeoque totius momentum, ad momentum Parallelogrammi vel Prismatis in distantia maxima appensi, (quod sit N P D,) ut 1 ad $\frac{1}{2}+1$; hoc est, ut 1 ad $1\frac{1}{2}$, vel 2 ad 3 : Nempe, $\frac{2}{3} NPD = 2 NP \times \frac{1}{3} D$. Distantia itaque Plani Æquilibrii (&, siquod est, Centri Gravitatis,) à vertice, est $\frac{1}{3}$ D. ejusdemque propterea à Basi distantia, $\frac{2}{3}$ D. Adeoque hæc ad illam, (hoc est C D ad C A,) ut 2 ad 1 : vel 1 ad $\frac{1}{2}$; hoc est, 1 ad $-\frac{1}{2}+1$. M.

$$\frac{1}{\sqrt{0}}p.\ \frac{1}{\sqrt{1}}p.\ \frac{1}{\sqrt{2}}p.\ \frac{1}{\sqrt{3}}p \text{———} P$$
$$0d.\quad 1d.\quad 2d.\quad 3d \text{———} D$$
$$\frac{0}{\sqrt{0}}dp.\ \frac{1}{\sqrt{1}}dp.\ \frac{2}{\sqrt{2}}dp.\ \frac{3}{\sqrt{3}}dp \text{———} DP.$$
$$\sqrt{0}\,dp.\ \sqrt{1}\,dp.\ \sqrt{2}\,dp.\ \sqrt{3}\,dp \text{———} DP.$$
$$\tfrac{2}{3} NPD = 2 NP \times \tfrac{1}{3} D.$$

Si sit ex serie reciproca Tertianorum; cujus Index $-\frac{1}{3}$. Erit summa Ponderum, (propter $-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$; & ut 1 ad $\frac{2}{3}$, sic 3 ad 2;) $\frac{3}{2}$ N P. Index seriei momentorum $-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$. Adeoque (propter $\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$; & 1 ad $\frac{5}{3}$, ut 3 ad 5) summa Momentorum, $\frac{9}{10} NPD = \frac{3}{2} NP \times \frac{3}{5} D$. Adeoque plani æquilibrii (&, si quod est, Centri Gravitatis) distantia à vertice, $\frac{2}{5}$ D; à base, $\frac{3}{5}$ D: Adeoque hæc ad illam, (nempe C D ad C A,) ut 3 ad 2; vel 1 ad $\frac{2}{3}$; hoc est, 1 ad $-\frac{1}{3}+1$. Atque in aliis similiter.

$$\frac{1}{\sqrt{c\,0}}p.\ \frac{1}{\sqrt{c\,1}}p.\ \frac{1}{\sqrt{c\,2}}p.\ \frac{2}{\sqrt{c\,3}}p. \text{———} P$$
$$0d.\quad 1d.\quad 2d.\quad 3d. \text{———} D$$
$$\frac{0}{\sqrt{c\,0}}dp.\ \frac{1}{\sqrt{c\,1}}dp.\ \frac{2}{\sqrt{c\,2}}dp.\ \frac{3}{\sqrt{c\,3}}dp. \text{———} DP.$$
$$\sqrt{c\,0}\,dp,\ \sqrt{c\,1}\,dp.\ \sqrt{c\,4}\,dp.\ \sqrt{c\,9}\,dp. \text{———} DP.$$
$$\tfrac{9}{10} NPD = \tfrac{3}{2} NP \times \tfrac{3}{5} D.$$

Si itaque in ea ratione dividatur A D in C; sitque figura utrinque similiter applicata, ad A D Diametrum vel Axem : erit C Centrum Gravitatis; per 5 hujus. Sin minus; saltem planum per C est planum Æquilibrii; atque in hoc, siquod sit, Centrum Gravitatis.

Porro; Habitis hoc pacto, tum figuræ totius A D B δ, tum abscissæ ut A C β δ, magni- N.

Fig. 129. 131. magnitudine, & Centro gravitatis; saltem magnitudine, & plano æquilibrii, plano per axem motus A ♂ parallelo; seu magnitudine & ponderatione: Habentur residui, sive figuræ truncatæ C β B D, magnitudo & Centrum Gravitatis; saltem magnitudo & ponderatio; adeoque distantia Centri Gravitatis, Planumve in quo est, plano Basis seu Plano huic parallelo per axem motus, parallelum. Ut in prop. præced.

Et similiter ostendetur de figuris hujusmodi alias mulctatis, vel aggregatis; atque in prop. præced.

O. Figuras autem has interminabiles, ego ad Paraboloeidium genera refero; aut horum Solidas propter continuatam seriem simplicem, utut reciprocam, qua disponuntur ordinatim-applicatæ rectæ, vel figuræ planæ, ipsas complentes; ut in Paraboloeidibus eorumque solidis, observare est. Qua de causa, & communem sortem subeunt, cum iis in propositione præcedente memoratis, (nisi quod ex his aliquæ sint magnitudinis infinitæ, & Centrum gravitatis non habeant.) Et quidem has in eadem cum illis propositione comprehendissem, nisi quod in his (propter infinitatem) speciatim aliqua determinanda essent, quæ in illis absque aliqua determinatione proponuntur. Quippe nulla est ex figuris illis quæ vel infinitæ sit magnitudinis, vel Centrum Gravitatis non habeat.

P. Ipsæ tamen Curvæ, ad quarum Convexas adjacent hujusmodi figuræ Planæ, ad Hyperbolarum, vel Hyperboloeidium, familiam spectant.

Et quidem, quæ terminat figuram planam, ex serie reciproca Primanorum conflatam, (qualis est media Curvarum trium in figura 131 adscripta,) est vera *Hyperbola*, Apolloniana; cujus Asymptotæ sunt A D, A ♂. (ut prop. 91, 95, Arithm. Infin. ostensum est.) Atque perinde omnino est, sive, ex parte D terminata, sit interminata versus ♂; sive, ex parte ♂ terminata, interminata sit versus D. Utrovis enim modo evadet figura simpliciter infinita.

Reliquæ vero, quæ *Hyperboloeides* dici poterunt; duabus item Asymptotis A D, A ♂, interjacent: ita quidem ut quæ, versus D terminatæ & interminatæ versus ♂, figuras terminant magnitudine finitas; eædem terminatæ versus ♂, & interminatæ versus D, figuras terminabunt plusquam infinitas: Et contra. Quippe, si ad A D ordinatim-applicatæ, & ipsi A ♂ parallelæ sint, verbi gratia, in serie reciproca Subsecundanorum; ordinatim-applicatæ ad A ♂, ipsi A D parallelæ, erunt reciproca series Secundanorum; Et figura ex illis constans non infinita; ex his vero, plusquam infinita. Et in reliquis similiter. Ut ad prop. 105. *Arithm. Infin.* ostendimus.

Q. Atque hinc etiam constat, hujusmodi Hyperboloeidium figuras, Curva Concava terminatas, quadrandi methodus; & Centrum Gravitatis investigandi. Cum enim Frusti C β B D, (ut hic & prop. seq. ostensum est,) & Parallelogrammi D C β d, (ut notum est) tum Magnitudo, tum Centrum Gravitatis habetur: Habebitur & Hyperboloeideos β B d, magnitudo & gravitatis Centrum. Atque hoc quidem sive figura adjacens convexæ, finita sit, sive plusquam infinita; quippe eadem est curva (utut secundum aliam diametrum considerata) quæ utramque terminat; ut modo ostensum est. At in vera Hyperbola (eaque, ex jam traditis sola,) non idem fiet; quippe ad cujus convexam adjacens figura interminabilis est & magnitudine infinita; sive A D, sive A ♂, pro diametro habeatur.

SCHOLIUM.

Atque hactenus (ut de Rectilineis Planis, & figuris Solidis quæ planis terminantur, nihil addam,) ostendimus in Planis Curvilineis omnibus, quæ ad genus Parabolicum vel Paraboloeidicum spectant, & horum Solidis; atque ex Reciprocis, & Solidis horum, quotquot Centrum Gravitatis habent; distantiam Centri Gravitatis à Vertice: Adeoque, si pro Diametro vel Axe Rectam habeant per omnium sive rectarum sive planorum, ex quibus (secundum def. 1. Cap. 4.) conflari intelligatur figura, centra gravitatis transeuntem; ipsum Gravitatis Centrum totius; utpote quod in ipsa Diametro Axeve constitutum est; per 5 hujus.

In hujusmodi tamen figuris Dimidiatis (ut Semiparabola, Semiparaboloeide, &c.) aliisque ejusmodi; utut de distantia Centri Gravitatis à vertice constet; de ipso Centri puncto, propter ipsius ab illa Diametro Axeve distantiam nondum traditam, nondum constat.

Hujus

Hujus igitur à Diametro Axeve distantia, propositione sequente tradetur, (atque, in solidis, tertium adhuc æquilibrii planum,) ut ipsum centri punctum determinetur.

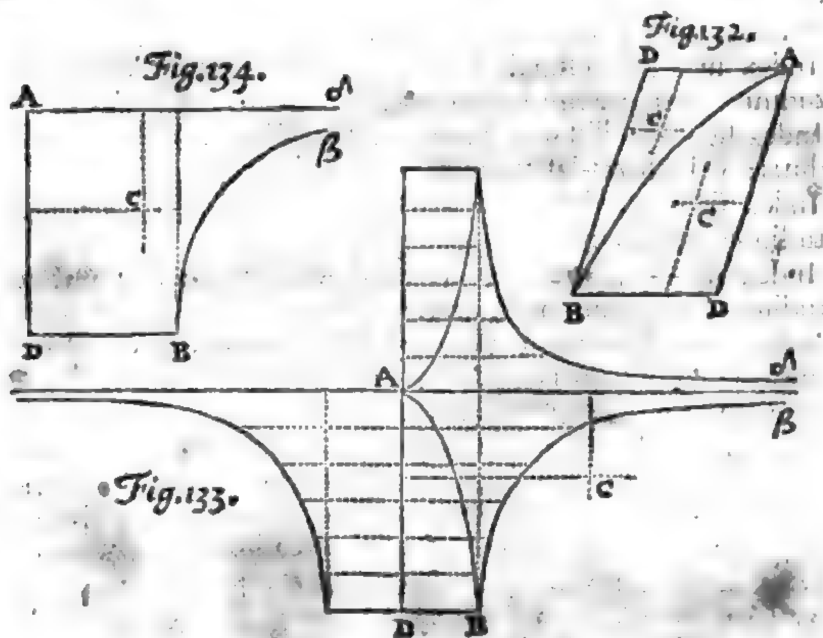
PROP. VIII.

Semiparabolæ, Semiparaboloeidis, aut Complementi utriusvis; Planive Reciproci (centrum gravitatis habentis;) ad diametrum axemve adjacentis; *Distantia Centri Gravitatis ab illa Diametro Axeve*, est, *ad distantiam inde puncti medii* (*vel centri gravitatis Basis*,) ut *Index seriei Unitate auctus*, ad *Duplum ejusdem Indicis unitate auctum*. A. Fig. 129, 131.

In Solidis autem; pro *Basis puncto medio* (quod in planis est basis centrum gravitatis) sumendum est *Centrum Gravitatis Basis*; Eritque totius Centrum Gravitatis, in eo per Diametrum Axemve plano quod per illud Basis Centrum Gravitatis transit; adeoque & per omnium Basi parallelorum Planorum, (quæ similiter posita supponimus,) centra gravitatis. E.

(Quod quidem planum, in solidis ex Planorum semiconversione (aliave conversione quavis imperfecta) circa axem illum descriptis; (qualia sunt, Semiconus; Semi-pyramis; Semi-conoeides vel Semi-Pyramidoeides Parabolicum, vel Paraboloeidicum; Semi-solidum ex conversione figuræ Reciprocæ circa axem suum; & horum omnium segmenta quælibet, duobus per axem planis, interjecta:) illud est, quod Basis arcum bisecat.)

Atque, pro Indicis seriei *Duplo*, ponendum erit *Sesquialterum ejusdem Indicis*.



Adeoque; hujusmodi Dimidiatarum figurarum Planarum (quotquot habent) omnium; & Solidarum circa illas constructarum, quarum Basis Centrum Gravitatis notum est; Centrum gravitatis determinatur. C. Fig. 132, 134.

Nempe; In Semiparabola; distat à Tangente Verticis, $\frac{3}{5}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{3}{8}$ Latitudinis (seu Baseos) Parallelogrammi Circumscripti, vel $\frac{3}{4}$ Semi-latitudinis. D.

In Semi-paraboloeide Cubico; diſtat à Tangente Verticis, $\frac{4}{7}$ altitudinis; à Diametro $\frac{4}{10}$ Latitudinis; vel $\frac{4}{5}$ Semi-latitudinis.

In Semi-paraboloeide Biquadratico; diſtat à Tangente Verticis, $\frac{5}{9}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{5}{12}$ Latitudinis; vel, $\frac{5}{6}$ Semi-latitudinis.

In Semi-paraboloeide Superſolidali; diſtat à Tangente Verticis, $\frac{6}{11}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{6}{14}$ Latitudinis; vel, $\frac{6}{7}$ Semilatitudinis. Et ſimiliter in Semiparaboloeidibus ſequentibus, mutatis mutandis.

In Semiparabolæ Complemento; Diſtat à recta per Complementi verticem (quæ eſt parabolæ Diameter,) $\frac{3}{4}$ Altitudinis; à Diametro Complementi, (quæ eſt Parabolæ Tangens in vertice,) $\frac{3}{10}$ Latitudinis; vel $\frac{3}{5}$ Semi-latitudinis.

In Complemento Semiparaboloeidis Cubicalis; Diſtat à vertice Parallelogrammi circumſcripti (vel Paraboloeidis Diametro) $\frac{4}{5}$ Altitudinis; à Diametro (vel Paraboloeidis Tangente in vertice,) $\frac{4}{14}$ Latitudinis; vel, $\frac{4}{7}$ Semi-latitudinis.

In Complemento Semiparaboloeidis Biquadraticalis; diſtat à verticis recta, (baſi parallela,) $\frac{5}{6}$ Altitudinis; à Diametro ejus, $\frac{5}{18}$ Latitudinis, vel $\frac{5}{9}$ Semi-latitudinis.

In Complemento Semiparaboloeidis Superſolidalis; diſtat à verticis recta, $\frac{6}{7}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{6}{22}$ Latitudinis; vel $\frac{6}{11}$ Semilatitudinis. Et in ſequentibus ſimiliter, mutatis mutandis.

B. Figuræ Reciprocæ dimidiatæ, ſecundum ſeriem cujus Index non eſt
Fig. major, (hoc eſt, non minus negativus,) quam $-\frac{1}{2}$, conſtitutæ; Cen-
131, trum Gravitatis non habent. Sin major ſit index quam $-\frac{1}{2}$; ſe-
133, quuntur ſerierum directarum leges. Nempe,
134. Si Index ſit $-\frac{1}{3}$, Centrum gravitatis diſtat à vertice figuræ, $\frac{2}{5}$ Altitudinis; ab ejus Diametro, $\frac{2}{2}$ Latitudinis (ſeu Baſeos) Inſcripti Parallelogrammi; vel $\frac{2}{1}$ Semi-latitudinis.

Si Index ſit $-\frac{1}{4}$; diſtat à Vertice, $\frac{3}{7}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{3}{4}$ Latitudinis; vel, $\frac{3}{2}$ Semi-latitudinis.

Si Index ſit $-\frac{1}{5}$; diſtat à Vertice, $\frac{4}{9}$ Altitudinis; à Diametro $\frac{4}{6}$ Latitudinis; vel $\frac{4}{3}$ Semi-latitudinis. Et ſic deinceps.

Si Index ſit $-\frac{2}{5}$; diſtat à Vertice, $\frac{3}{8}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{3}{2}$ Latitudinis; vel $\frac{3}{1}$ Semi-latitudinis.

Si Index ſit $-\frac{3}{7}$; diſtat à Vertice, $\frac{4}{11}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{4}{2}$ Latitudinis; vel $\frac{4}{1}$ Semi-latitudinis.

Si Index ſit $-\frac{4}{9}$; diſtat à Vertice, $\frac{5}{14}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{5}{2}$ Latitudinis; vel $\frac{5}{1}$ Semi-latitudinis. Et in reliquis ſimiliter, mutatis mutandis, fiet ex calculo judicium.

E. In Figuris Solidis, idem plane obtinet atque in Planis, ſecundum eaſdem ſeries conſtructis; niſi quod, pro *Semi-Latitudine* in planis, ponenda erit in Solidis (in illo plano quod per diametrum axemve, & Centrum-gravitatis Baſis, incedit,) *Diſtantia Centri-gravitatis* Baſis, à Diametro vel Axe; vel, pro *Latitudine* in illis, *Dupla illa Diſtantia* in his. Atque, pro *Duplo Indicis*, Indicis *Seſquialterum*.

Puta; Si ſeriei Index ſit, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, &c. 2, 3, 4, 5, &c. $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$, &c. $-\frac{2}{5}, -\frac{3}{7}, -\frac{4}{9}$, &c. qui, in Planis (ut dictum eſt) exhibet $\frac{3}{8}, \frac{4}{10}, \frac{5}{12}, \frac{6}{14}$, &c. $\frac{3}{10}, \frac{4}{14}, \frac{5}{18}, \frac{6}{22}$, &c. $\frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}$, &c. $\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}$, &c. *Latitudinis*; vel $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$, &c. $\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}$, &c. $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$, &c. $\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}$, &c. *Semilatitudinis*: Subſtituendum erit, in Figuris Solidis, $\frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \frac{12}{13}$, &c. $\frac{6}{8}, \frac{8}{11}, \frac{10}{14}, \frac{12}{17}$, &c. $\frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}$, &c. $\frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}$, &c. *Diſtantiæ* Centri gravitatis Baſis, à Diametro vel Axe.

F. Habet autem Centrum Gravitatis Figura Solida, ſi ſeriei Index ſaltem major ſit, quam $-\frac{2}{3}$.

Si

Si quando igitur ad communem Rectam per Verticem, (aut aliam unam aliquam rectis per verticem parallelam,) contrario situ ponantur hujusmodi figuræ (planæ, solidæve,) similes & æquales: Erit Centrum Gravitatis in illa communi recta, atque in ea à communi Diametro Axeve distantia, quam in singulis casibus jam determinavimus. Sin vel dissimiles vel inæquales vel dissimili situ positæ sint ejusmodi figuræ dimidiatæ; cognita tamen erit commune simul utriusque Centrum Gravitatis; per 27 Cap. 4. G.

Quodque de figuris Truncatis aut alias Mulctatis, vel Aggregatis, in duabus propositionibus præcedentibus dictum est: Et hic similiter intelligendum est.

Esto enim ad A D diametrum vel axem, adjacens istiusmodi Figura Plana dimidiata, cujus parallelæ rectæ figuram complentes, sint secundum seriem directam cujus Index sit S; vel reciprocam, cujus Index $-S$. Cumque singularum rectarum centra gravitatis sint ipsarum puncta media, (per 2 hujus,) atque perinde ponderant singulæ acsi ex illis punctis mediis suspenderentur totæ, (per 16 Cap. 4.) sintque dimidiæ totis proportionales (per 5 Cap. 1. vel 15 El. 5.) similis erit series Distantiarum centrorum gravitatis (à diametro vel axe) atque ipsorum Magnitudinum seu Ponderum; nempe cujus Index sit item S, vel $-S$. Cumque Momentorum seu Ponderationum ratio, composita sit ex rationibus Ponderum & Distantiarum, (per 18 Cap. 4.) Erit Momentorum series, ea quæ Indicem habet $S+S$, vel $-S-S$; hoc est $2S$, vel $-2S$. Est ergo (per 1 hujus,) summa Ponderum seu Magnitudinum, hoc est Figura exposita; ad seriem totidem ultimo æqualium, hoc est ad Parallelogrammum super eadem Base æque altum; (puta N P;) ut 1 ad $S+1$; vel (in reciprocis) ut 1 ad $-S+1$, (adeoque, si $-S$ major quam -1, erit $-S+1$ affirmativus; & propterea figuræ magnitudo finita: secus; infinita, vel plusquam infinita:) nempe $\frac{1}{S+1}$ NP, vel $\frac{1}{-S+1}$ N P. Et summa Momentorum, ad totidem ultimo æqualium, (hoc est, Momentum figuræ expositæ ad momentum Parallelogrammi in distantia D suspensi,) ut 1 ad $2S+1$, vel ad $-2S+1$, (quod itaque finitum erit, si $-2S$ major sit quam -1, vel $-S$ major quam $-\frac{1}{2}$; secus, infinitum:) Nempe $\frac{1}{2S+1}$ N P D, vel $\frac{1}{-2S+1}$ N P D. Hæc itaque summa, per illam divisa, distantiam exhibet Centri gravitatis ab A D, (per 24 Cap. 4.) Nempe; in seriebus directis, $\frac{S+1}{2S+1}$ D: In reciprocis, $\frac{-S+1}{-2S+1}$ D. Quod erat propositum. A. Fig. 127, 128, 129, 131, 133.

$$\frac{1}{S+1}\text{NP}) \frac{1}{2S+1}\text{NPD}(\frac{S+1}{2S+1}\text{D}.$$

$$\frac{1}{-S+1}\text{NP}) \frac{1}{-2S+1}\text{NPD}(\frac{-S+1}{-2S+1}\text{D}.$$

Requiritur autem, in Reciprocis, quo Centrum gravitatis habeant, ut $-2S$ major sit quam -1; vel $-S$, major quam $-\frac{1}{2}$. Nam, nisi $-S+1$ sit terminus affirmativus; nullum erit Centrum gravitatis, per prop. præced. Atque, nisi & $-2S+1$ sit item affirmativus, (hoc est, $-2S$ major quam -1, per 8 Cap. 1.) nec-dum erit centrum gravitatis: quippe Affirmativi $-S+1$, ad $-2S+1$ qui vel 0 sit, vel Negativus; ratio erit vel infinita, vel etiam plusquam infinita; adeoque $\frac{-S+1}{-2S+1}$ D, distantia infinita, vel plusquam infinita; ipsumque propterea Centrum gravitatis Nusquam. Unde patet determinatio. B.

Cumque termini ultimi, (hoc est, Basis,) centrum gravitatis sit in ipsius puncto medio (ut ostensum est, ex 2 hujus,) ipsius Distantia D; erit semi-Latitudo figuræ, sive Parallelogrammi super eadem basi æque alti. Unde constat particularium casuum Calculus, quod ad distantiam à diametro spectat. C.

Sed & Centri Gravitatis à Plano per verticem, distantia constat, ex 6 & 7 hujus. Ergo & ipsum Centri Gravitatis punctum; (per 26 Cap. 4.) Quod item D.

 erat

erat Propositum. Idem nempe quod in singulis casibus designavimus: Ut ex Calculo patet; ne opus sit ut singulis casibus immoremur.

E. In figuris Solidis: De Centri gravitatis Distantia à Vertice, similiter constat atque in Planis; ex 6 & 7 hujus.

Quodque fit in Plano per Diametrum & Centrum Gravitatis Basis (adeoque & reliquorum basi parallelorum Planorum Centra Gravitatis; propter omnia, quod supponimus, plana similia, & similiter ad diametrum posita;) constabit ex 4 hujus.

Quod fit in ea quam dicimus à Diametro vel Axe distantia; sic item constabit. In similibus Planis (ex quibus conflari Solidum intelligatur) Centra Gravitatis sunt similiter sita; (quod ex 4 Cap. 4. & 5 Cap. 1. demonstrabitur:) adeoque ab homologis punctis distant in ratione laterum homologorum; vel, rectarum utcunque in suis respective planis similiter positarum; (quod ex def. 1. & prop. 4. El. 6. demonstrabitur:) Cumque, ob similem, quem supponimus, planorum ad Diametrum Axemve situm; homologa similium Planorum puncta sint in Diametro vel Axe constituta: Distantiæ Centrorum gravitatis à Diametro vel Axe, sunt in ratione laterum Homologorum, sive rectarum similiter positarum, in suis respective planis: Hoc est; (quod ex prop. 20. El. 6. demonstrabitur,) in subduplicata ratione Planorum. Adeoque; Si series Planorum, Indicem habeat S, vel $-S$; series Distantiarum, Indicem habebit $\frac{1}{2}S$, vel $-\frac{1}{2}S$: Et series Momentorum (ut quæ sunt in ratione ex rationibus Ponderum & Distantiarum Centrorum Gravitatis composita, per 18 Cap. 4.) Indicem habebit $S+\frac{1}{2}S$, vel $-S-\frac{1}{2}S$; hoc est $\frac{3}{2}S$, vel $-\frac{3}{2}S$. Est igitur (positis P, pro Pondere seu Plano ultimo; N, pro numero Planorum, ex quibus conflari intelligatur Solidum; D, pro distantia Centri gravitatis Basis, à Diametro vel Axe;) $\frac{1}{S+1}$ NP, vel $\frac{1}{-S+1}$ NP, Solidum, sive Planorum Ponderumve Aggregatum: $\frac{1}{\frac{3}{2}S+1}$ NPD, vel $\frac{1}{-\frac{3}{2}S+1}$ NPD; sive $\frac{2}{3S+2}$ NPD, vel $\frac{2}{-3S+2}$ NPD; summa Momentorum, sive Solidi Momentum vel Ponderatio.

$$\frac{1}{S+1}\text{NP})\frac{2}{3S+2}\text{NPD}(\frac{2S+2}{3S+2}\text{D}$$

$$\frac{1}{-S+1}\text{NP})\frac{2}{-3S+2}\text{NPD}(\frac{-2S+2}{-3S+1}\text{D}$$

Adeoque divisa summa Momentorum, per summam Ponderum; prodibit $\frac{2S+2}{3S+2}$D, vel $\frac{-2S+2}{-3S+2}$D, distantia Centri gravitatis Solidi, à diametro vel axe: Nempe, ea quæ sit ad D distantiam Centri Gravitatis Basis, ut $2S+2$ ad $3S+2$, aut $-2S+2$ ad $-3S+2$; hoc est, ut $S+1$ ad $\frac{3}{2}S+1$, aut $-S+1$ ad $-\frac{3}{2}S+1$. Quod erat demonstrandum.

F. Cumque, in Figuris Reciprocis, quo Centrum gravitatis habeant, non solum requiratur, ut $-S+1$ sit terminus positivus, (per prop. præced.) Sed & $-\frac{3}{2}S+1$, (ne ratio illius ad hanc sit vel Infinita, vel plusquam Infinita; adeoque, propter Infinitam, vel plusquam infinitam distantiam, Centrum gravitatis nusquam sit:) major esse debeat (seu minus negativus) $-\frac{3}{2}S$, quam -1; sive $-S$, quam $-\frac{2}{3}$: inde constat determinatio.

G. Porro; quum, in Figuris Solidis, secundum seriem sive Directam, sive Reciprocam constitutis, ostensum sit; tum, quantum distet Centrum gravitatis (adeoque & planum Æquilibrii) à plano per Verticem basi parallelo; tum, in quo per axem plano reperiatur; tum denique, quantum in illo plano à diametro vel axe distat: Datur ipsum Gravitatis Centrum; dummodo Centrum Gravitatis basis non ignoretur, (per 26 Cap. 4.) Quod erat propositum. Nempe illud ipsum quod in singulis casibus designat propositio: Ut ex Calculo patebit.

Denique: Quod, de duabus hujusmodi Figuris Dimidiatis, (similibus & æqualibus,) utrinque ad eandem rectam contrario situ positis; dictum est: constabit ex 5 hujus. Quodque de iisdem (planis solidisve) figuris dimidiatis (aut quæ harum instar sunt) truncatis, aliasve mulctatis, vel aggregatis, additur, Constat ex 27 Cap. 4.

SCHO-

SCHOLIUM.

IN præcedentium aliquot propositionibus; in figuris Parabolicis omnibus, & Paraboloeidicis, eorumque Solidis, Centra gravitatis determinavimus. Neque hoc tantum in Figuris integris: Sed & (quod nescio an alii nobis priores fecerint) in Figuris Dimidiatis; ut Semi-parabolis, Semi-paraboloeidibus, &c. etiam in figuris Reciprocis (quotquot habent) Dimidiatis: Atque in horum omnium Semi-solidis; aut etiam, Solidorum portionibus quibusvis, duobus per axem planis, interjectis.

De Figuris autem Reciprocis (ut A D B $\beta\delta$,) speciatim monendum est; Utut hæ natura sua sint utrinque in infinitum continuabiles, (sunt utique A D, A δ, ad curvam B β, Asymptotæ;) nos tamen hic eas consideramus ut Base B D terminatas, ad Diametrum ordinatim-posita (sicut & Parabolas aliasque figuras indefinite continuabiles, Base pro arbitrio claudimus;) sed ad partes $\beta\delta$ indefinite continuatas,

Cumque harum aliquas magnitudine simpliciter Infinitas ostendimus (nempe, cum Index seriei est -1; quo casu B β curva, est vera Hyperbola, cujus Asymptotæ sunt A D, A δ;) Alias vero vel Finitas, vel plusquam Infinitas: sunt quidem hæ figuræ ad easdem curvas utræque terminatæ. Quippe, si A D B $\beta\delta$, terminata basi B D, interminata vero ad partes $\beta\delta$, sit Finita; eadem ex parte $\beta\delta$ terminata, & interminata ex parte B D, erit Plusquam-infinita: & contra. Quæ vero ad veram Hyperbolam ponitur (seriei indicem -1 habens) utravis parte terminetur, (modo ne utraque,) est pariter Infinita: Atque hæc sola. Quod prop. 105. Arithm. Infin. ostendimus.

Constat autem, ex his Figuris Reciprocis; (quæ inter Geometriæ miranda censentur;) Figuras longitudine Infinitas (Planas Solidasve) Magnitudine Finitas esse posse. Nempe, si A D B $\beta\delta$ ex parte $\beta\delta$ interminata, seriei Indicem habeat negativum quidem, sed majorem quam -1.

Eademque figura, (longitudine infinita, sed finita magnitudine,) si utrinque ad A D diametrum similiter ponatur; habebit (in ipsa A D) Centrum gravitatis.

Eadem vero figura dimidiata A D B $\beta\delta$, indicem habens negativum sed majorem quam -1; utut magnitudine finita sit, centrum tamen Gravitatis non habebit; nisi & major sit Index quam $-\frac{1}{2}$. Ne quidem quæ ex duabus hujusmodi dimidiatis utrinque ad infinitam A δ similiter positis conflatur. Distabit utique ab A versus δ, distantia saltem infinita, vel data quavis majore.

Sin major sit Index quam $-\frac{1}{2}$, Centrum Gravitatis habebit, tum dimidiata illa figura, tum & ex duabus utrinque ad A δ positis conflata.

Item; Figura istiusmodi plana, magnitudine Finita esse potest; (nempe cum Index major est quam -1;) & Solida tamen, quæ hujus conversione fit, magnitudine Infinita: (Nempe, si non & major sit Index quam $-\frac{1}{2}$.) Quippe, si series Rectarum, planum complentium, indicem habeat $-\frac{1}{2}$; series Planorum, quæ harum conversione circa A D fiunt, Solidum complentium, (propter Plana in ratione duplicata rectarum in illis similiter positarum,) Indicem habebit -1 $(=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.)$ eritque propterea magnitudinis infinitæ. Sin series Rectarum Indicem habeat minorem quam $-\frac{1}{2}$; series Planorum habebit indicem minorem quam -1; adeoque Solidum erit magnitudinis plusquam infinitæ. Quæ omnia, ex supra demonstratis constant.

Contra vero; Istiusmodi Figura Plana, non modo magnitudine finita quævis; sed & infinita, modo Index major sit quam -2; circa A δ conversa: Solidum exhibet magnitudine finitum: Et quidem, modo Index major sit quam -1; quod Centrum habeat Gravitatis. Quod ex prop. seq. patebit.

PROP. IX.

A. Si Figura Plana (integra an dimidiata;) cujus ad diametrum vel axem ordinatim-applicatæ rectæ Planum complentes ſint ſecundum ſeriem aliquam vel ex Directis (def. 1. hujus, definitis;) vel ex Reciprocis (def. 2. hujus, definitis;) cujus Index major ſit quam -2; in-
Fig. telligatur, circa rectam per verticem ordinatim-poſitam, converti:
129, Solidum converſione factum, erit magnitudinis finitæ. Nempe
131, quod ſit, ad Parallelepipedum, cujus baſis ſit parallelogrammum
133. ſuper eadem cum plano baſe æque altum, altitudo vero æqualis Peripheriæ (integræ vel partiali, prout converſio fuerit vel perfecta vel imperfecta) Diametri vel Axis puncto quod in baſe eſt, deſcriptæ: ut 1, ad *indicem ſeriei in plano expoſitæ binario auctum.*

B. Ejuſque figuræ, ſi Integra ſit (hoc eſt, utrinque ad Diametrum Axemve ſimiliter poſita; ſitque converſio integra;) Centrum gravitatis erit ipſum Punctum verticis Diametri Axiſve.

Si vero (figura plana) Dimidiata ſit; ejuſque ordinatim-applicatæ ſint, ad diametrum vel axem, ad angulos rectos; ſitque Index vel affirmativus, vel ſaltem major quam -1: Solidum illud, Centrum habebit Gravitatis. Nempe, in illa, à plano ad expoſitum planum recto, perque ejus Axem incedente, diſtantia; quæ eſt, ad diſtantiam puncti medii in baſe plani expoſiti; ut *Index ſeriei, plani expoſiti, binario auctus,* ad *duplum ejuſdem Indicis binario auctum.*

C. Sin major ſit Index ille quam -2, ſed non item major quam -1: Habebit ſolidum illud magnitudinem finitam, ſed non & centrum gravitatis.

D. Adeoque; ſi dimidiata illa figura Plana, ſit reciproca ſecundum ſeriem cujus Index -1; (quo caſu curva, eſt vera Hyperbola;) & convertatur circa verticem infinitum (quæ eſt Aſymptotarum una interminata) ſolidum converſione factum, erit magnitudinis finitæ, (eſtque Torricellii, *Solidum Hyperbolicum Acutum*:) Centrum autem gravitatis non habebit. Eſt utique ſolidum illud, æquale parallelepipedo, cujus Baſis ſit Parallelogrammum plano inſcriptum, altitudo æqualis cuivis ex peripheriis extimis Solidi: Vel; (quod eodem recidit) duplo Cylindri, parallelogrammo illo circa rectam verticis converſo deſcripti. Diſtantia vero Centri Gravitatis, à Plano per axem expoſiti plani, ſimpliciter Infinita.

E. Si Plani ſeries Indicem habeat $-\frac{3}{2}$: Solidum converſione factum, erit ad tale Parallelepipedum (vel duplum Cylindri,) ut 1 ad $\frac{1}{2}$ ($= -\frac{3}{2} + 2$;) vel, ut 2 ad 1. Diſtantia Centri Gravitatis, eſſet ad ſemi-latitudinem Parallelogrammi plano inſcripti; ut $\frac{1}{2}$, ad -1: pluſquam infinita. Quod itaque nuſquam erit.

F. Si Plani ſeries Indicem habeat $-\frac{1}{2}$; (quæ eſt Reciproca ſemi-parabolæ:) Solidum erit ad tale Parallelepipedum (vel Cylindri duplum,) ut 1 ad $\frac{3}{2}$ ($= -\frac{1}{2} + 2$;) vel, ut 2 ad 3. Diſtantia Centri Gravitatis, ad ſemi-latitudinem Parallelogrammi; ut $\frac{3}{2}$ ad 1, ſeu ut 3 ad 2.

G. Si Plani ſeries Indicem habeat $\frac{1}{2}$; (quæ eſt ſemi-parabolæ:) Solidum eſt, ad Parallelepipedum (ſeu Duplum Cylindri, circumſcripto ſemiparabolæ Parallelogrammo deſcripti,) ut 1 ad $2\frac{1}{2}$ ($= \frac{1}{2} + 2$:) vel, ut

ut 2 ad 5. Distantia Centri Gravitatis; ad semi-latitudinem Parallelogrammi; ut $\frac{5}{2}$ ad 3; seu, ut 5 ad 6.

Atque in reliquis similiter. H.

Eritque Solidorum ejusmodi, integra conversione descriptorum, Centrum Gravitatis (siquod est) in ipso conversionis Axe; ejusque illo puncto quod distantia jam tradita designat. I.

Semi-solidorum vero, (aut alias imperfecta conversione descriptorum,) Centrum gravitatis (siquod habent) est quidem in distantia jam assignata à plano quod ab axe plani expositi conversione describitur, & in illo per Axem conversionis plano, quod per Centrum Gravitatis figuræ planæ, expositi plani Axe descriptæ, transit: K. Atque in illa ab axe conversionis distantia, quæ est, ad modo dicti Centri gravitatis inde distantiam; ut *Index* seriei expositi Plani *Binario auctus*, ad eundem *Indicem Ternario auctum*; vel (quod codem recidit) ut Index seriei Solidi conversione facti Unitate auctus, ad eundem auctum Binario. L.

Quodque de Solidis conversione factis dictum est: idem similiter intelligendum erit, de figuris aliis; si, pro Circulis (eorumve portionibus) conversione descriptis, intelligatur ex similibus figuris planis quibuslibet (circulis illis proportionalibus) similiter ad conversionis axem positis, Solidum conflari. M.

Quodque jam traditum est; supponendo ordinatim-applicatas in exposito Plano ad hujus diametrum vel axem ad angulos rectos constitutas; adeoque conversionis axem ad plana circa illum posita rectum esse: perinde verum erit, si ad axem utcunque inclinatum intelligantur similia illa plana parallela ordinatim-poni.

Item; Si ejusmodi exposita figura plana dimidiata, cujus ordinatim-applicatæ non sint ad angulos rectos, sed ad diametrum suam utcunque inclinatæ; conversione sua solidum describere intelligatur: describet expositi Plani Diameter, (quæque huic sunt parallelæ rectæ,) non quidem circulum, (ut hactenus;) sed superficiem conicam (convexam concavamve, prout angulus, quem cum conversionis axe facit Diameter illa, acutus obtususve fuerit:) ad quam tamen superficiem Conicam accommodabuntur omnia (mutatis mutandis,) quæ de Circulo illo, ejusve Plano tradita sunt. N.

Denique: Quæ de figura, circa rectam in vertice ordinatim-applicatis parallelam conversa, hic tradita sunt; ad conversionem circa rectas alias, alio situ positas, facile accommodantur; Puta, circa Basin, aliasve huic parallelas, sive infra sive supra figuram positas; circa Axem, aut huic parallelas, ultra citrave figuram positas, sive adjacentes, sive utcunque remotas; aliasque situ multis modis variato. Quibus casibus omnibus, pro re nata, principia jam tradita facile accommodabit prudens Geometra. O.

Esto enim expositum Planum, cujus ordinatim-applicatæ ad AD diametrum vel Axem, sint secundum seriem directam ADB, cujus Index sit f; vel secundum seriem reciprocam, ut ADBβδ, cujus Index sit $-f$. Atque intelligatur circa rectam, ad eandem AD, in A, ordinatim-applicatam, puta Aδ; converti. Describent rectæ sic conversæ, superficies curvas Cylindricas circa Aδ ut Axem; quæ quidem superficies curvæ æquantur totidem Parallelogrammis quorum Bases æquentur rectis conversis, altitudines vero peripheriis uno aliquo eorum puncto descriptis: (Quippe, curva Cylindrica, expansa, cum hujusmodi parallelogrammo coincidet.) Sunt igitur illæ superficies Curvæ Cylindricæ, in ratione, ex rectarum conversarum, & peripheriarum sic descriptarum, rationibus composita: (per A. Fig. 129, 131, 133.

23 El. 6.) hoc est, (propter peripherias radiis proportionales,) ex rectarum conversarum, & earum à recta per verticem A δ distantiarum, composita. Est autem (propter æqualem quam supponimus rectarum crassitiem) series hæc distantiarum, series Primanorum, cujus index 1; adeoque (propter $\int$, vel $-\int$, indicem seriei Rectarum,) series superficierum Cylindricarum rectis descriptarum, (vel, his æqualium Parallelogrammorum,) Indicem habebit $\int+1$, vel $-\int+1$. Quæ itaque simul omnia, (hoc est, Solidum conversione factum) ad totidem ultimo æqualium, (hoc est, ad Parallelepipedum super A B parallelogrammum, altitudinem habens æqualem peripheriæ puncto D descriptæ; vel, quod Parallelepipedo illi æquale est, ad Duplum Cylindri, parallelogrammo illo circa Verticis rectam conversione descripti:) ut 1 ad $\int+2$, vel ut 1 ad $-\int+2$. (per 1 hujus.) Hoc est, (posito P pro uno ex æqualibus parallelogrammis, & N, pro omnium numero, adeoque N P pro Parallelepipedo,) $\frac{1}{\int+2}$ N P, vel $\frac{1}{-\int+2}$ N.P. Quod quidem magnitudine finitum erit, si vel $\int$ sit Index Affirmativus, vel si Negativus $-\int$ major sit quam -2. (Quippe tum ratio 1 ad $\int+2$, vel ad $-\int+2$, erit ratio finita: nempe ut terminus positivus ad positivum; non ut Positivus ad o, vel minus quam o.) Quæ erant demonstranda. Atque hinc particularium casuum calculus deducetur.

B. Porro; Si Figura plana sic conversa, dimidiata sit, (nam de Integra, dubium non est, quin Centrum gravitatis, absoluta conversione, erit in A puncto:) sintque ad axem A D ordinatim-applicatæ, ad angulos rectos: Erunt superficierum

Fig. 132, 134. illarum curvarum Cylindricarum centra gravitatis in media illarum longitudine; (per 2 hujus.) adeoque (propter dimidiata integris proportionalia) in ratione rectarum in plano, quarum conversione hæ superficies Cylindricæ describuntur: Hoc est; in serie cujus Index est $\int$, vel $-\int$. Cumque superficierum illarum, seu Ponderum, series Indicem habeat $\int+1$, vel $-\int+1$, (ut supra ostensum est;) & series distantiarum Centrorum Gravitatis à Plano per A D, indicem habeat $\int$, vel $-\int$, (ut ostensum est modo:) Quæ ex utrisque oritur (per 18 Cap. 4.) Momentorum series, (respectu perpendicularis Plani per A D,) indicem habebit $2\int+1$, vel $-2\int+1$. Adeoque (posito D pro distantia Centri gravitatis superficiei Cylindricæ recta D B descriptæ; quæ est semi-latitudo Parallelogrammi A B;) erit (per 1 hujus) $\frac{1}{2\int+2}$ N P D, vel $\frac{1}{-2\int+2}$ N P D, simul omnium, hoc est, Solidi, Momentum. Quod quidem si per $\frac{1}{\pm\int+2}$ N P summam Ponderum, dividatur; prodibit $\frac{\int+2}{2\int+2}$ D, vel $\frac{-\int+2}{-2\int+2}$ D, distantia Centri Gravitatis à Plano per A D. Quæ quidem distantia; si sit vel $\int$ Index Affirmativus, vel Negativus $-\int$ major quam -1, adeoque $-2\int+2$ terminus affirmativus, (propter affirmativi ad affirmativum rationem finitam,) finita erit: atque, in illa, Centrum Gravitatis. Quæ itidem erant demonstranda.

$$\frac{1}{\int+2}\text{NP})\ \frac{1}{2\int+2}\text{NPD}\ (\ \frac{\int+2}{2\int+2}\text{D}$$

$$\frac{1}{-\int+2}\text{NP})\ \frac{1}{-2\int+2}\text{NPD}\ (\ \frac{-\int+2}{-2\int+2}\text{D}.$$

C. Sin major quidem $-\int$ quam -2; non autem major quam -1: Habebit quidem solidum illud magnitudinem finitam; (ut ostensum est:) Sed non & Centrum Gravitatis. Erit enim $-\int+2$ ad $-2\int+2$, ratio positivi, vel ad o, vel ad negativum; adeoque distantia Centro Gravitatis debita, vel infinita erit, vel plusquam infinita; quod igitur nusquam erit. Quod item Affirmatum erat.

D. Quæque hinc, ad particulares casus enumeratos (aliosve quotlibet) deducuntur: Ex calculo patent.

Puta: Si A D B β δ Plani series indicem habeat -1, quæ est Trianguli reciproca;

proca; (quo casu, curva B β, est Hyperbola; cujus Asymptotæ sunt A D, A δ: ut prop. 92, 95, Arithm. Infin. demonstravimus: Adeoque, solidum istius conversione circa A δ descriptum, est Torricellii, *Solidum Hyperbolicum Acutum*; ut ex hujus apud Torricellium definitione constat:) Erit Planum illud Magnitudine Infinitum, (per 7 hujus.) Si tamen, circa A δ conversum, intelligatur Solidum describere; erit hoc magnitudinis finitæ; tantæ scilicet quanta in Propositione designatur. Cum enim, superficies Cylindrica, recta D B descripta; vel, huic æquale, Parallelogrammum cujus Basis D B, altitudo æqualis peripheriæ puncto D descriptæ, sit P: atque huic æque-altum Parallelepipedum, super parallelogrammum A B erectum, sit N P: (cui quidem Parallelepipedo, æquatur Duplum Cylindri eodem Parallelogrammo circa A δ converso descripti: Nam, qua ratione circulus radio A D descriptus, æquatur semissi Parallelogrammi cujus Basis est A D, altitudo æqualis Peripheriæ puncto D descriptæ; quod notum est: eadem & Cylindrus parallelogrammo A B descriptus, eandem habens altitudinem, æquabitur semissi Parallelepipedi: propter singula hujus Parallelogramma singulorum in illo Circulorum, respective sumptorum, dupla: & communem altitudinem D B:) Sintque superficies Cylindricæ rectis ipsi D B parallelis descriptæ; (vel, his æqualia Parallelogramma quorum bases, eædem rectæ; altitudines respectivis peripheriis æquales;) Series æqualium; propter $-\sigma+1=-1+1=0$: (vel etiam; quia tum peripheriæ sunt in ratione distantiarum ab A δ directa, & rectarum conversarum in earundem distantiarum ratione reciproca, adeoque tum Parallelogramma invicem æqualia, tum & Superficies Cylindricæ; per 6 Cap. 1. vel 14 El. 6. Nempe, quod ob minorem basis peripheriam oritur decrementum, aucta in eadem ratione altitudine compensatur; ut superficies Cylindricæ, rectis in A D B β δ plano ipsi D B parallelis descriptæ, sint invicem æquales:) Erunt simul omnes illæ superficies Cylindricæ, sive quod ex his intelligitur conflari Solidum; $\frac{1}{-\sigma+2}$ NP, hoc est $\frac{1}{-1+2}$ N P $=$ N P; æquale scilicet ipsi Parallelepipedo, vel Duplo Cylindri, quod per N P designavimus. At vero; propter Distantias (à plano recta A D descripto) Centrorum gravitatis harum superficierum Cylindricarum, rectis conversis proportionales; adeoque secundum seriem cujus index -1 ex constructione: erit Momentorum seu ponderationum series, indicem habens $-1=0-1$. (nempe qui ex Indice seriei superficierum cylindricarum, 0; & Indice seriei distantiarum, -1; aggregatur) Adeoque summa momentorum, $\frac{1}{-1+1}$ N P D; (nempe, quæ sit ad N P D, ut 1 ad $-1+1=0$; quæ ratio est infinita;) vel $\frac{1}{0}$ N P D; quod per N P (quod est omnium Pondus, ut modo ostensum est) divisum: distantiam exhibet, centro gravitatis debitam, $\frac{1}{0}$ D, infinitam. Quod igitur nusquam erit.

Similiter: Si Plani series Indicem habeat $-\sigma=-\frac{3}{2}$: (quod est magnitudine plusquam infinitum; per prop. 7 hujus.) Erit Solidum hujus Plani conversione factum, $\frac{1}{-\sigma+2}$ N P $=$ 2 N P; magnitudine finitum. Sed summa momentorum $\frac{1}{-2\sigma+2}$ N P D $=\frac{1}{-1}$ N P D, plusquam infinita. Et distantia Centro gravitatis debita; $\frac{1}{-2}$ D, plusquam infinita. Quod itaque nusquam erit. E.

Item: Si Plani Series Indicem habeat $-\sigma=-\frac{1}{2}$; (cujus itaque ordinatim-applicatæ, sunt ordinatim applicatis in Parabola, reciproce proportionales:) Planum hoc est magnitudine Finitum, (per 7 hujus.) Et Solidum conversione factum, item finitum; nempe $\frac{1}{-\sigma+2}$ N P $=\frac{2}{3}$ N P. Eritque hujus Momentum, F.

$\frac{1}{-2ſ+2}$ NPD = NPD, finitum. Et distantia Centri gravitatis, $\frac{-ſ+2}{-2ſ+2}$ D = $\frac{3}{4}$ D; finita.

G. Item: Si Plani Series Indicem habeat $ſ=\frac{1}{2}$, (quæ est Semi-parabolæ:) Solidum conversione factum, erit $\frac{1}{ſ+2}$ NP $=\frac{2}{5}$ NP. Hujus momentum $\frac{1}{2ſ+2}$ NPD $=\frac{1}{3}$ NPD. Distantia Centri Gravitatis, $\frac{5}{6}$ D.

H. Atque ad eandem formam fiet judicium, quæcunque sit expositi Plani series istiusmodi ex definitis in def. 1, 2, hujus.

I. Erit autem, in Solidis hisce, integra conversione factis; Centrum gravitatis, in
Fig. 123, ipso conversionis axe; per 5 hujus. Adeoque in ipsius illo puncto, quod distan-
133. tia ab A, jam demonstrata, designat.

K. Semi-solidorum vero, (quæ semi-conversione describuntur,) aliarumve portio-
Fig. 132, num duobus per conversionis axem planis interjectarum, (puta, quæ conversionis
134. integræ Triente, Quadrante, &c. describuntur;) Centrum gravitatis erit in illo per conversionis axem plano quod per Centrum gravitatis figuræ planæ recta AD descriptæ (adeoque per reliquarum huic parallelarum, utpote similium & similiter ad axem positarum, Centra Gravitatis,) transit: quod probabitur ex 4 hujus.

L. Quodque sit in ea quam dicimus à conversionis axe distantia; sic constat. Cum Superficies Cylindricæ ex quibus conflari intelligatur solidum, (ut supra ostensum est;) adeoque & harum portiones similes quantacunque integræ conversionis parte descriptæ, (propter arcus similes, peripheriis suis integris proportionales;) sint series indicem habens $ſ+1$, vel $-ſ+1$, (adeoque si extima dicatur P, erunt simul omnes ut $\frac{1}{ſ+2}$ NP, vel $\frac{1}{-ſ+2}$ NP;) sintque earum ab axe conversionis distantiæ, adeoque (propter similium figurarum Centra Gravitatis similiter sita) distantiæ suorum Centrorum gravitatis, rectarum in exposito plano quibus describuntur distantiis ab Aϑ proportionales; adeoque ut series indicem habens 1, (ut supra ostensum est:) Erit momentorum series (respectu axis conversionis Aϑ) indicem habens $ſ+2$ vel $-ſ+2$, (nempe $ſ+1+1$, vel $-ſ+1+1$;) Et simul omnium Momenta (posito D pro distantia Centri gravitatis extimæ superficiei, recta DB descriptæ à conversionis axe Aϑ,) ut $\frac{1}{ſ+3}$ NPD, vel $\frac{1}{-ſ+3}$ NPD: (per 1 hujus.) Quod, per $\frac{1}{ſ+2}$ NP, vel $\frac{1}{-ſ+2}$ NP, summam Ponderum, divisum, exhibet $\frac{ſ+2}{ſ+3}$ D, vel $\frac{-ſ+2}{-ſ+3}$ D, distantiam Centri gravitatis (siquod est) ab axe conversionis Aϑ. Quod erat propositum.

M. Porro: Si pro circulis circa Aϑ axem conversione rectarum AD & huic parallelarum descriptis, dum sit DAϑ angulus rectus; adeoque, axis Aϑ ad illos rectus: Intelligantur totidem circuli, his respective æquales, circa eandem Aϑ ut axem inclinatum, quocunque applicationis angulo circumpositi; figuram solidam complere: Vel etiam; si, pro circulis, intelligantur aliæ figuræ planæ similes & similiter positæ, circulis illis proportionales: Eadem utcunque, quæ prius, manebit demonstrationum vis.

N. Vel denique; Si, propter DAϑ angulum Acutum Obtusumve, conversa circa Aϑ ut axem figura plana ADBβϑ; loco circulorum recta DA & huic parallelis describendorum, describantur conicæ superficies Convexæ Concavæve: Similiter ad superficiem hanc Conicam, recta DA descriptam; atque ad circulum eadem, ut prius descriptum; (& de reliquis similiter huic parallelis;) eadem accommodabitur Demonstrationum vis.

O. Denique, quemadmodum in Propositione hac egimus, de Solidis, conversione Planorum circa rectam per verticem Ordinatim applicatis parallelam, descriptis; eorumque Centris gravitatis: Pronus eram idem præstare in aliis Planorum conversionibus;

versionibus; puta, si Parabola, aliave ex jam tractatis figuris, circa Basem vel Axem, vel rectam Axi parallelam conversa, intelligatur figuram Solidam describere; aliaque hujusmodi. Abstinui tamen; partim, quia ad jam traditorum modum poterit his similia Lector ipse pro libitu plura subjungere suo Marte: partim etiam, quia eadem, sequentium aliquot propositionum ope luculentius & simul universalius traduntur: maxime vero ne tædium crearem Lectoribus si nimius essem in hisce congerendis; præsertim cum tanta seges hic se offerat, ut vel spicilegium carpenti, nimis intumescat Caput hoc De Calculo Centri Gravitatis.

SCHOLIUM.

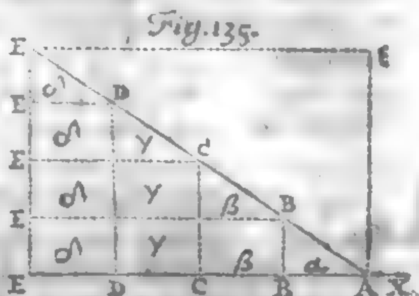
Tradidimus hactenus, ea præsertim quæ figuras spectant, (planas solidasve,) ad quarum Diametros vel Axes, quæ ordinatim-applicantur (rectæ aut plana) sunt secundum ordinatam aliquam (ex iis quas def. 1 & 2 hujus capitis definivimus) seriem constituta. Quæ quidem ad centrum gravitatis in figuris innumeris determinandum viam aperiunt: Ex nostra *Infinitorum Arithmetica* plurimum petita: Quæ tamen adhuc facile ampliabit peritus Geometra, & pluribus adhuc casibus innumeris accommodabit.

Quoniam vero non omnes figuræ ordinatam hanc constitutionem sortiuntur: quo aliis utut inordinatis consulatur; sequente propositione methodum adhuc magis generalem exhibemus; ordinatis juxta atque inordinatis pariter applicabilem.

PROP. X.

Si dividi intelligatur Libra quævis, in partes quotlibet æquales, (numero vel finitas vel infinitas,) in distantiis à motus sui Centro vel Axe (aut perpendiculari per axem plano) ut 1, 2, 3, &c. Arithmetice proportionalibus positas; ponderibus, aut ponderum particulis, (æqualibus aut inæqualibus, ordinatis vel inordinatis,) utcunque gravatas: Eaque quibus gravantur pondera, seu ponderum particulæ, in suam quæque ab axe motus (seu plano per axem) distantiam ducantur; hoc est toties sumatur quæque particula quoto est ipsa loco ab axe motus; (Quod variis methodis, prout cuique casui videbitur maxime expedire, consequi licebit:) Habetur (respectu ejusdem axis) Momentum omnium; & hujus ope (cognita magnitudine) distantia Centri Gravitatis, ab illo per axem plano.

Intelligantur, in A E libra, partes invicem æquales, A B, B C, C D, &c. quarum distantiæ (aut mediorum in illis punctorum) à motus axe X, (aut, si partes intelligantur infinite exiguæ, ab ipso A puncto) sint ut 1, 2, 3, &c. arithmetice proportionales; suis quæque ponderibus (æqualibus aut inæqualibus) α, β, γ, δ, &c. onustæ. Quorum quodque toties sumatur, quoto est ab axe motus loco.



Puta: 1α, 2β, 3γ, 4δ, seu α, β+β, γ+γ+γ, δ+δ+δ+δ, &c. Hoc est (in partibus infinite exiguis) omnes onustæ BB, CC, DD, &c. Triangulum vel Ungulam AEε complentes.

Aut etiam, α+β+γ+δ, β+γ+δ, γ+δ, &c. Hoc est, (in partibus infinite exiguis) omnes onustæ rectæ AE, BE, CE, &c. idem AEε triangulum vel ungulam complentes.

Aut etiam, AE, AE − AB, AE − AC, AE − AD, &c. Hoc est, totidem AE demptis omnibus AB, AC, AD, &c. Hoc est, (in partibus infinite exiguis,) Parallelogrammum seu Prisma (onustum) AEEε, minus (onusto) Triangulo vel Ungula contraria AEε.

Aut etiam alio quocunque modo obtineatur aggregatum omnium toties respective sumptorum quoto est quodque loco ab axe motus remotum.

(Perinde autem est, sive ipsa α, β, γ, &c. quibus onerari censetur libra, sint lineæ rectæ, aut curvæ; sive superficies planæ, aut curvæ, aut mistæ; sive solida cujuscunque figuræ; aut etiam vires, impetus, &c. aut qualiacunque demum invicem homogenea, quæ aut gravia sint aut tanquam gravia habeantur.)

Dico; his positis, haberi momentum simul omnium respectu ipsius axis motus X: Adeoque (cognita etiam magnitudine simul omnium) distantiam Centri gravitatis ab X, seu perpendiculari plano super X motus axem erecto.

Cum enim (per prop. 12. Cap. 3. vel prop. 18. Cap. 4.) cujusque momentum sit in ratione ex ponderum & distantiarum rationibus composita; hoc est, in ratione factorum ex ponderibus in suas singulis distantias ductis; Habito horum aggregato, habetur momentum, (per 18 Cap. 3. vel 22 Cap. 4.) Adeoque; si porro habeatur magnitudo simul omnium, habebitur (momento per magnitudinem diviso) distantia Centri gravitatis à perpendiculari per axem plano: per prop. 24. Cap. 4.

SCHOLIUM.

His traditis: Monendum porro est, Hoc, quod *Centrum Gravitatis* dicimus punctum; etiam alias utile esse, quo, quæ ex se sunt Inæqualia, Æqualium instar, propter Æquipollentiam censeantur. Cujus specimen, in sequentibus aliquot Propositionibus exhibebimus.

Quod dici non incommode posset (generaliori nomine) *Medium Arithmeticum*, nisi quod nollem recepta Nomina mutare. Malim *Novos Usus* hujus Centri indicare.

PROP. XI.

A. Si, super Base quavis Plana, erigatur Cylindrus, Prisma, Solidumve quodvis Prismaticum; Planoque utcunque ad Basin inclinato, oblique secetur: Frustum, plano basis, planoque secanti, interjectum, (quæ *Ungula* dici solet, aut etiam *Cuneus* non male,) æquatur Solido, super eadem vel æquali Base, tantæ altitudinis, quanta est altitudo rectæ in Frusto, quæ basis Centro gravitatis insistit similiter inclinata atque ipsum Solidum.

D. Frustique Superficies, (exclusis Basibus oppositis, quibus interjacet) æquatur superficiei (exclusis item basibus oppositis) Solidi prismatici, similiter inclinati, super eadem vel Isoperimetra Base, cujus latus tantæ sit longitudinis quanta est rectæ in frusto quæ perimetri basis Centro gravitatis insistit, similiter inclinata atque ipsum Solidum.

C. Atque hinc etiam, de Frusto, Frustive superficie, duobus utcunque Planis Obliquis, interjecto; fiet judicium.

B. Intelligitur autem de Secante Plano, quod expositæ basis Plano occurrat vel extra figuram vel in ipsius saltem extremo; non, intra figuram. Quippe hoc casu Solidum Prismaticum expositæ basi insistens æque-altum rectæ Centro Gravitatis insistenti; æquabitur duarum frusti portionum Differentiæ, sub & supra basem expositam factarum, continuato Plano secante donec expositum Solidum Prismaticum item continuatum totum transversim secat. Et de frusti Superficie similiter.

E. Hinc autem *Ungularum*, quas vocant, omne genus, mensura colligitur.

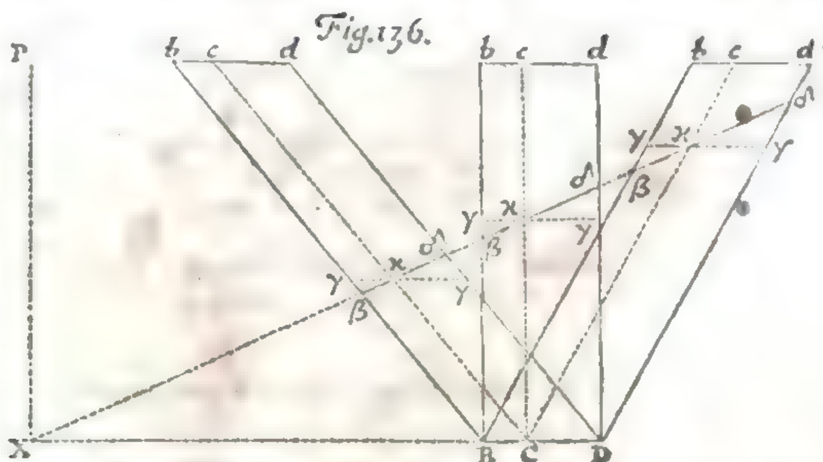
Item Ungularum super eodem Plano, Rectave, aut Curva in Plano descripta,

descripta, (cujus saltem magnitudo nota sit) differentia, prout acies (seu planorum intersectio) propius aut remotius absit.

Aut etiam differentia momentorum ejusdem gravis; prout Axis Motus propius absit aut remotius.

Hinc speciatim habetur etiam Trilinei vel Polygoni cujusvis, in Superficie Cylindrica descripti (planis utcunque positis terminati) magnitudo. Quod & de aliis corporum Prismaticorum Superficiebus figurisque iisdem sic inscriptis, intelligendum. G.

INtelligatur basis plana B D, (rectilinea, curvilinea, an mixta qualibet;) quæ (posito oculo in eodem plano ad infinitam distantiam) projiciatur in B D rectam: (adeoque & huic parallela plana qualibet, in parallelas rectas projecta:) A. Fig. 136.



Super qua erigatur corpus Prismaticum quodvis, (puta, Cylindrus, si basis illa sit circulus; si rectilinea, Prisma Euclideum; saltem Solidum aliquod Prismaticum seu Columnare, quod ex infinitis numero rectis parallelis æqualibus constari intelligatur, quo sensu def. 1. Cap. 4. definivimus;) B D d b; sitque super basis Centro gravitatis C, (quod propius remotiusve à B vel D intelligendum erit, prout Basis figura & situs postulaverit,) erecta C c, ipsis B b, D d, lateribus parallela. Intelligatur vero solidum hoc Prismaticum, alio adhuc plano ad planum basis oblique inclinato sectum; quod sectionem faciat β κ δ; rectæ C c occurrens in κ. Dico; frustum B D δ β, æquale esse Solido Prismatico super eadem basi, (vel huic æquali; propter æqualia Prismata & Cylindros quæ sunt super æqualibus basibus æque-alta:) altitudinem habenti eam quæ est rectæ C κ; (nempe, huic rectæ æqualem, si C κ sit ad basin perpendicularis; vel saltem, æqualem perpendiculari à puncto κ demissæ ad planum basis B D.)

Intelligatur utique Planorum B D, β δ, communis sectio X recta; quæ in unicum X punctum projiciatur; adeoque & huic parallelæ rectæ, in totidem puncta. Perque rectam X incedat Planum X P, plano X B D rectum: quod in X P rectam projiciatur. (Quam projectionis formam eo fine adhibemus, quem ad prop. 14. Cap. 4. insinuavimus; quo & phantasia plurium linearum confusione levetur, neque turbentur interim rationes: Quippe tantundem à plano X P distabunt singula Solidi puncta; atque, ab X P recta, eadem in plano projecta distant.)

Ponatur porro; Planum X B D, planum Horizontale; recta X, axis motus; adeoque Planum X P, perpendiculare Planum per motus axem. Adeoque in ea ratione Ponderant singula Basis puncta B, C, D, &c. qua distant ab axe motus X, vel à perpendiculari per hunc Plano X P; per 4 Cap. 4. Hoc est, in ratione rectarum X B, X C, X D, &c. Sed & (propter C centrum gravitatis) tantundem simul omnia ponderant, atque si in C puncto intelligerentur omnia: per 16 Cap. 4. Adeoque (per 4 Cap. 4.) tantundem sunt simul omnes X B, X C, X D, &c. atque totidem ipsi X C æquales.

Sed &, (propter similia Triangula;) rectis X B, X C, X D, &c. proportionales sunt B β, C κ, D δ, &c. Adeoque (per 12 El. 5.) tantundem sunt simul omnes B β, C κ, D δ, &c. (frustum B D δ β complentes,) atque totidem C κ (complentes

plentes Solidum Prismaticum BDγγ, ipsi Cκ rectæ æque altum:) Adeoque BDδβ Frustum, est solido Prismatico BDγκγ, æquale. Quod erat demonstrandum.

Atque perinde omnino valet hæc demonstratio, sive basi BD insistens solidum Prismaticum, ejusve frustum, Rectum sit, sive Inclinatum: Dummodo eodem modo censeatur rectæ Cκ altitudo, atque prismatis; nempe recta perpendiculari à puncto κ ad basis planum demissa.

B. Supponit autem demonstratio, communem planorum sectionem X, extra figuram, (saltem non intra, sed in ipso forsan solidi extremo;) secus enim, non erit eadem Integri & Frusti Basis, quod supponit Propositio.

Sin planum secans, plano Basis intra figuram occurrat; intelligendum erit eousque deorsum continuandum solidum, ut Frusti segmenta duo sint; alterum supra & alterum infra BD basim; duæque rectæ, Cκ, duorum basis segmentorum Centris erectæ. De quibus intelligenda erit tum propositio, tum Demonstratio.

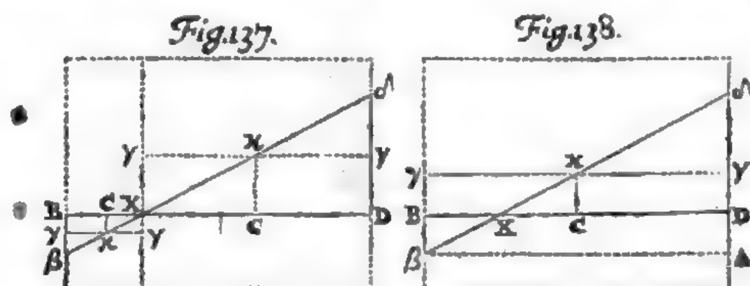


Fig. 137. Puta: Si Planum BD plano βδ secetur in X; sumptis utriusque segmenti BX, XD, centris gravitatis C, C; reliquisque ut prius constructis: Ostendetur Frustum DXδ, æquale solido Prismatico DXγκγ (super eadem base XD;) & frustum BXβ, ipsi BXγκγ.

Fig. 138. Vel etiam, conjunctim: Retento communi totius Centro gravitatis C; Propter XDδ superne (quod notetur signo +) & BXβ inferne (quod signo — notetur) plano basis BD & secanti βδ interjecta; & solidum prismaticum BDγκγ superne (signo + notandum:) Erit $+XD\delta - BX\beta = +BD\gamma\kappa\gamma$. Quod ex præcedente Demonstratione, mutatis ut res postulaverit signis + —, elicietur.

Vel, siquis ejusmodi aversetur demonstrationem; idem alias sic ostendetur: Ducto Plano βΔ ipsi BD parallelo; ostendetur, ut supra, frustum δβΔ æquale solido βΔγκγ: Et, ablato utrinque βXDΔ, manebit δXD æquale toti residuo βXDγκγ hoc est, duobus $\beta XB + BD\gamma\kappa\gamma$; Adeoque (subductis utrinque βXB) erit $\delta XD - \beta XB = BD\gamma\kappa\gamma$. Quod erat ostendendum.

C. Porro: Si duobus utcunque planis idem solidum Prismaticum secetur, (sive eadem sit utriusque cum expositæ basis plano communis intersectio, sive secus;) simile erit præcedentibus judicium: Frustum scilicet utrisque planis interjectum, istiusmodi Prismatum seu solidorum Prismaticorum Aggregato vel Differentiæ (ut res postulaverit) æquabitur.

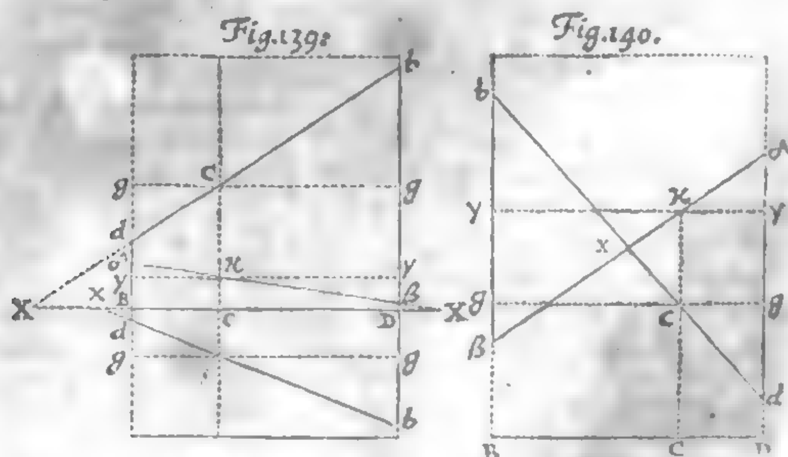


Fig. 139. Puta: Si solidum quodvis Prismaticum, cujus exposita basis aliqua plana sit BD, ejusque Centrum gravitatis C, per quod transeat cκCc: Quod duobus utcunque planis

planis oblique secetur; puta in $\beta\kappa\delta$, & bcd. Ductis Planis $\gamma\kappa\gamma$, gcg, ipsi BCD parallelis: Ostendetur, ut supra, Frusto BD$\delta\beta$ æquale solidum BD$\gamma\gamma$; item Frusto BDdb, æquale solidum BDgg: Frustum igitur $\beta\delta$db (duorum BD$\delta\beta$, BDdb, summa vel differentia, prout ex oppositis, vel iisdem partibus ejusdem BD sumantur,) Solido Prismatico $\gamma\gamma$gg (duorum similiter BD$\gamma\gamma$, BDgg, summæ vel differentiæ,) æquabitur. Quod ostendendum erat.

Sin hæc duo Plana secantia, sibi invicem intra Solidum occurrant: idem hic monendum (atque similiter ostendetur) ut prius. Puta; Si $\beta\delta$, bd, plana se mutuo secent in X; erit $\gamma\gamma$gg solidum prismaticum, æquale duorum δXd, βXb, differentiæ. Adeoque de Frusto duobus utcunque Planis interjecto, constat. Quod erat propositum. Fig. 140.

D. Denique: De Superficie Frusti, quod affirmatur; similiter omnino demonstrabitur atque de Frusto ipso: Hoc prius animadverso: Quod, Prismatis Solidive Prismatici cujuscunque magnitudo æstimatur, ex ductu altitudinis in Basin; Superficies vero Prismatis, Cylindri, Solidive cujusvis Prismatici recti (exceptis basibus) Aream habet æqualem facto ex Lateris longitudine in Perimetrum Basis ducta. Unde, ut ex Solidi Prismatici Altitudine & Base cognitis, cognoscitur solidi magnitudo; quæque æquales habent tum Bases (utcunque dissimiles,) tum Altitudines (utcunque inæqualiter inclinata sint,) sunt inter se Æqualia: Sic, hujusmodi Solidorum Rectorum Superficies (exceptis basibus) Aream habent cognitam, si tum Lateris Longitudo, tum Basis Perimeter, notæ sunt; quæque tum Bases habent Isoperimetras, (utcunque dissimiles vel inæquales,) tum Latera longitudine æqualia, æquales habent areas. Quæ quidem ex Elementis nota supponimus, vel inde demonstrabilia.

Constructis igitur, ut prius; nisi quod C sit jam Centrum Gravitatis (non quidem Basis, sed) Perimetri Baseos: Quoniam singula perimetri puncta B, D, &c. in ea ratione ponderant qua distant ab X motus axe; hoc est, in rectarum XB, XD, &c. ratione: quæ simul omnes (propter C Centrum gravitatis) tantundem sunt atque totidem XC æquales: Suntque (propter similia Triangula) rectis XB, XD, XC, &c. proportionales Bβ, Dδ, Cκ, &c. Tantundem itaque sunt (per 12. El. 5.) simul omnes Bβ, Dδ, &c. (superficiem Frusti recti BD$\delta\beta$ complentes,) atque totidem Cκ, complentes superficiem Solidi Prismatici (demptis basibus) BD$\gamma\gamma$. Quod erat demonstrandum. Fig. 136.

Si vero exponatur superficialis Ungula Scalena, cum ejusdem basis Prismatica, similiter inclinata (hoc utique supponimus in superficialibus, utut in solidis id non erat necesse,) comparanda: Similiter operabitur similis utrobique inclinatio, adeoque non destruet æqualitatem.

Vel etiam, (ut in Fig. 139.) præter duo plana Ungulam Scalenam terminantia, ut $\beta\kappa\delta$, bcd; intelligatur tertium aliquod BCD, quod solidum secet ad angulos rectos; adeoque duas exhibeat Ungulas rectas (de quibus procedet præcedens demonstratio) quarum summæ vel differentiæ æquabitur exposita Scalena.

Reliquaque, eodem modo demonstrantur de Frusti superficie, atque de ipso Frusto demonstrata sunt. Adeoque constat Propositum.

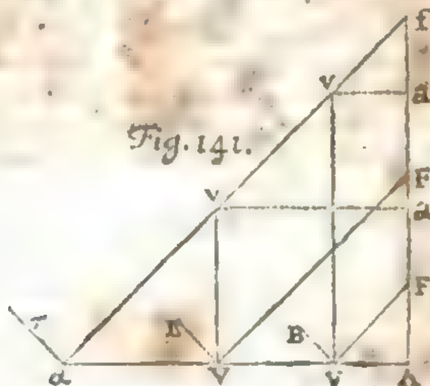
E. Atque hinc *Ungularum*, quas vocant, omne genus (Cylindricarum, Parabolicarum, &c.) Mensuram, (cognito vel supposito Basis Centro gravitatis, vel hujus saltem à communi sectione plani basis, planique secantis, distantia;) quam magno molimine plures sunt aggressi; expeditius, simplicius, atque universalius, una vice absolvimus.

Hinc etiam patet; expositi Cylindri, Prismatis, Solidive cujusvis Prismatici, (ut BDdb,) segmentum BD$\delta\beta$, quocunque plano, & quocunque situ posito, (dummodo totam figuram transversim secet, non basi intra figuram occurrat,) si per idem (in Cc recta) punctum κ transeat; ejusdem magnitudinis esse.

Quod & de Frusti Superficie (ita ut dictum est) pariter intelligendum est.

F. Hinc etiam innotescit differentia duarum Ungularum super eodem plano, rectave (aut curva in plano descripta) cujus magnitudo nota sit; prout Ungulæ Acies (seu planorum intersectio) propius remotiusve abfuerit.

Fig. 141. Nempe, Si super VA (plano, rectave, aut curva in plano descripta) Magnitudinis notæ; erigi intelligantur Ungulæ duæ, quarum altera aciem habeat V seu VB, altera α seu ατ (ipsi VB parallelam;) sitque eadem utriusque inclinatio (puta angulus FVA, angulo fαA æqualis:) Manifestum est (propter parallelas



sive lineas sive superficies VF, vf,) Ungularum VFA, VvfA, differentiam esse, superficiem solidumve VFfv, vel VvaA; hoc est, factum ex base VA in altitudinem Vv: Quæ quidem altitudo Vv est vel ipsi αV (distantiarum differentiæ) æqualis; nempe, si inclinationis angulus FVA, seu fαA, seu vαV, sit semiquadrantalis: vel illa major minorve, in ea ratione quam postulat datus inclinationis angulus.

Adeoque, si Ungula FVA nota sit; addito VFfv, vel VvaA, (facto ex base VA in altitudinem Vv,) habetur Ungula VvfA: Si nota sit VvfA, dempto eodem VFfv vel VvaA, habetur Ungula VFA.

Si vero ipsæ VB, ατ, acies, non sint parallelæ; si tamen sint in eodem plano, eademque utriusque Ungulæ inclinatio nota, atque innotescat saltem quanta sit distantiarum à basis Centro gravitatis differentia; idem similiter obtinetur: ut ex ante demonstratis patet.

Quodque de Ungulis dictum est; Momentis gravium quorumvis accommodabitur. Cum enim gravis VA momentum æstimetur ex facto à magnitudine in distantiam Centri gravitatis ab VB, seu ατ, (intellige, à perpendiculari plano per axem, VB, seu ατ,) differentia harum distantiarum (hoc est distantia planorum parallelorum BV, ατ,) in eandem VA magnitudinem ducta, exhibebit Momentorum ejusdem VA differentiam respectu Axium BV, & ατ.

C. Atque hinc speciatim, Trilinei aut Polygoni cujusvis, in superficie Cylindrica descripti, planis utcunque positis abscissi, (seu quod eodem recidit, rectis, circulis, ellipsibusve, quibuscunque terminati,) magnitudo colligitur. Quippe manifestum est, hujusmodi quamlibet figuram in superficie Cylindrica descriptam, esse vel hujusmodi Ungulam, vel saltem in hujusmodi aliquot Ungulas divisibilem. Adeoque (si dari intelligatur arcus circularis Centrum gravitatis, quod prop. 14 exhibetur:) istius sive Ungulæ, sive Ungularum aggregati, magnitudo hinc habebitur. Quod de aliis item Corporum Prismaticorum superficiebus, figurisque inibi descriptis, pariter intelligendum erit.

SCHOLIUM.

Notandum interim, Quanquam universaliter procedat propositio, de quocunque plano XBCD, cui intelligatur ut basi insistere Solidum Prismaticum; adeoque & quamcunque habeat ad basin suam inclinationem: Expedire tamen nonnunquam posse, illud ex omnibus Planum seligere, quod solidum recte secet; cui itaque ad angulos rectos insistat solidum. Utut enim vel Frustum secet, vel ne attingat quidem, illud XBCD planum, idem interim de altitudine cκ (fig. 139.) intelligendum erit, quod de Cκ (fig. 136.) dictum est.

PROP.

PROP. XII.

Si Figura plana circa rectam quamvis in eodem plano expositam (quæ expositam figuram non secet) conversa, Figuram solidam describat: Æquatur solidum hoc, solido Prismatico super eadem vel æquali Base; altitudinem habenti æqualem Peripheriæ (perfectæ vel imperfectæ prout conversio perfecta fuerit vel imperfecta,) quæ expositæ figuræ convertendæ Centro Gravitatis describitur. A. Fig. 142.

Idem intellige, de Linea recta (vel curva) in plano illo descripta, quæ conversa intelligatur superficiem describere. Æquabitur utique hæc superficies, superficiei super expositam lineam erectæ, altitudinem habenti æqualem peripheriæ quæ Centro gravitatis conversæ lineæ describitur. B.

Sin recta, circa quam convertitur, expositam figuram lineamve convertendam secuerit: intelligendum erit de Differentia descriptorum, ab illis conversi partibus, quæ utrinque ad rectæ secantis contrarias partes constituuntur. C.

Hinc itaque; Data figuræ planæ, lineæve in plano, tum Magnitudine, tum Centro gravitatis, (hujusve ab Axe conversionis distantia;) datur figuræ, exposita conversione factæ, magnitudo. D.

Dataque tum conversæ, tum conversione exposita factæ, magnitudine; datur distantia centri gravitatis conversæ, ab axe conversionis. E.

Data denique, tum magnitudine exposita conversione factæ, tum Centri gravitatis conversæ distantia ab axe conversionis; datur conversæ magnitudo. F.

Conversionem autem *expositam* hic dicimus, quæ quota vel quanta pars sit integræ conversionis, aut ipsa integra conversio, exponitur. Supponimus item, peripheriæ datæ longitudinem datam esse.

Estque Centrum Gravitatis Ungulæ (sive solidæ sive superficialis) in illo per aciem plano quod altitudinem bisecat; Solidi vero aut superficiei conversione facti, in illo plano quod conversionis angulum vel arcum bisecat. G.

Atque hinc constat generalis methodus exhibendi solidum figuræ planæ circa rectam quamvis in eodem plano descriptam (saltem quæ ipsam non secet) conversione factum; Superficiemve conversione lineæ cujusvis (rectæ aut curvæ) in eodem cum conversionis axe plano descriptæ. H.

Hinc utique colligitur; Solidum conversione semiparabolæ circa rectam in vertice Tangentem descriptum; ad Cylindrum qui simili conversione Parallelogrammi circumscripti circa eandem rectam Tangentem describitur; esse, ut 4 ad 5. I.

Similiter, si circa semiparabolæ basin convertatur, tum Semiparabola, tum Circumscriptum Parallelogrammum: Solidum illius, ad solidum hujus conversione factum, invenietur, ut 8 ad 15. K.

Si, circa semiparabolæ Axem, utrumque planum convertatur; solidum Semiparabolæ ad solidum parallelogrammi conversione factum; invenietur ut 1 ad 2. L.

Si, circa rectam basi adjacentem, Axi parallelam, utrumque planum convertatur; invenietur solidorum ratio, ut 5 ad 6. M.

Et similiter, Quæ eorundem conversione circa aliam quamvis in eodem plano expositam rectam (quæ figuram non secet) in quacunque di- N.

 stantia

ſtantia remotam, & quocunque ſitu poſitam, fiunt Solida; rationem inter ſe habebunt, hac methodo inveſtigabilem. Idemque in aliis figuris mille modis efficietur.

O. Hinc etiam ſequitur: Si converſarum tum Magnitudines, tum Centrorum-gravitatis Diſtantiæ, ſint vel utræque æquales, vel reciproce-proportionales; Figuras, ſimili converſione factas, æquales eſſe: Sin minus; ſaltem in ratione ex illarum Magnitudinum & Diſtantiarum rationibus compoſita. per prop. 6, 7, Cap. 1.

Item; Annulum quemvis, æqualem eſſe, Plano converſo, in Peripheriam Plani Centro gravitatis deſcriptam, ducto. Quod tum de Annulo integro, tum de ipſius partibus, perinde obtinet; prout Converſio integra fuerit, vel partialis.

Item; Circulum, æqualem eſſe, facto ex Radio ducto in ſemiſſem Peripheriæ; (nempe, in Peripheriam, Radii Centro gravitatis ſeu puncto medio deſcriptam; quæ Peripheriæ Radio deſcriptæ ſemiſſis eſt.) Quod tum in Circulo integro, tum ipſius Sectoribus, perinde verum eſt.

Item; Curvam Cylindri recti Superficiem, æqualem facto ex Latere (hoc eſt, recta circumducta,) in Peripheriam ipſius puncto medio deſcriptam, (quæ Baſis peripheriæ æqualis eſt.) Idemque de Converſionibus Dimidiis, aut Partialibus aliis, perinde obtinet atque de Integris. Et ſic in reliquis.

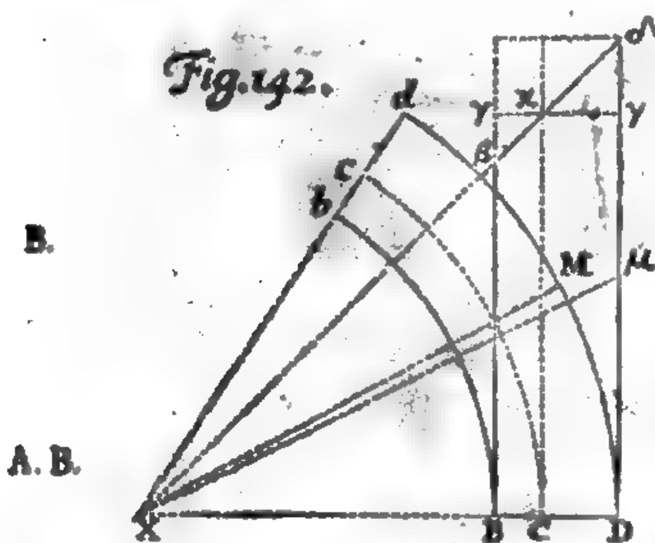
Item; Cylindri recti Solidum, æquale, Parallelogrammo circumducto, ducto in peripheriam ſuo Centro gravitatis deſcriptam; (quæ eſt Peripheriæ Baſis dimidia, propter Parallelogrammi Centrum gravitatis in media ſive longitudine ſive latitudine.)

Item; Curvam Coni recti Superficiem, æqualem Lateri (hoc eſt, rectæ circumductæ) ducto in Peripheriam ipſius puncto medio deſcriptam; (quæ eſt dimidia peripheriæ Baſis.) Quod & Trunci ſuperficiei (plano Baſi parallelo abſciſſi) etiam accommodabitur.

Item; Conum Rectum, æqualem Triangulo circumducto, ducto in Peripheriam ipſius Centro gravitatis deſcriptam; (quæ Peripheriæ Baſis Triens eſt.) Quod & Trunco (plano Baſi parallelo abſciſſo) accommodabitur.

Et in reliquis ſimiliter.

A. Eſto expoſita figura plana BCD (in BCD lineam rectam projecta, ea projectione qua in prop. præced. uſi ſumus) quæ circa rectam in eodem plano X (in unicum X punctum projectam) extra (ſaltem non intra) figuram expoſitam converſa, deſcribat BDdb figuram ſolidam; (ſimiliter in planum projectam;) Adeoque baſis Centrum gravitatis C deſcribat Cc peripheriam.



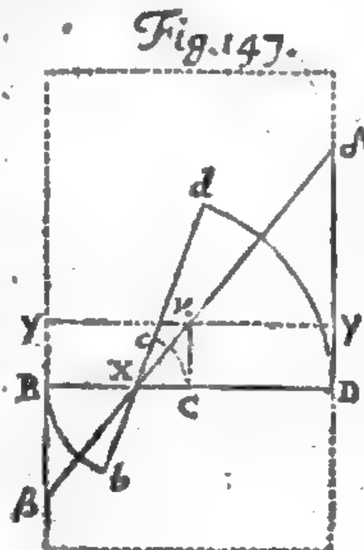
B. Vel etiam BCD recta vel curva linea quælibet in eodem plano, (ſimiliter in BCD rectam projecta;) quæ circa X converſa deſcribat BDbd ſuperficiem eodem modo in Planum projectam: ſuoque Centro Gravitatis C, deſcribat Cc peripheriam.

A. B. Et ſuper eandem baſem erigatur Solidum Priſmaticum, vel Priſmatica Superficies; cujus recta, Centro gravitatis C inſiſtens, Cx, æqualis ponatur ipſi Cc peripheriæ. Planoque Xx, abſcindatur Fruſtum BDδC.

Cumque

Cumque tum Bb, Cc, Dd, &c. (similes arcus) sint radiis suis XB, XC, XD, &c. proportionales; tum (propter similia triangula) iisdem XB, XC, XD, &c. proportionales rectæ Bβ, Cκ, Dδ: erunt hæ rectæ arcubus illis proportionales: Adeoque, propter Cκ ipsi Cc æqualem, per constructionem; erunt & reliquæ reliquis æquales; & omnes omnibus: Hoc est, BDdb figura (sive solida sive superficiaria conversione facta) ipsi BDδβ Frusto; adeoque & (per præcedentem) ipsi BDγκγ figuræ Prismaticæ super eandem vel æqualem basin Altitudinem habenti Cκ, ipsi Cc æqualem. Quod erat demonstrandum.

Sin conversionis axis X, secet figuram lineamve convertendam: similiter ostendetur, segmentum Frusti XDδ, segmento facti ex conversione XDd; & reliquum XBβ, reliquo XBb: Ergo & differentia differentiæ æqualis; Et utravis (per demonstrata ad prop. præced.) ipsi Prismatico (Solido, vel Superficiei,) BDγκγ. Quod itidem erat demonstrandum. C.



Itaque; Data figuræ planæ lineæve expositæ (BCD) magnitudine quæ sit *BB*, vel *B*; atque Centri gravitatis C, ab X conversionis axe, distantia; adeoque & peripheriæ Cc longitudine, quæ sit *P*: datur exposita conversione factæ magnitudo *PBB*, vel *BP*. Nempe, quod fit ex *BB*, vel *B*, in *P* ducto. D. Fig. 142.

BB	B
P	P
PBB	PB

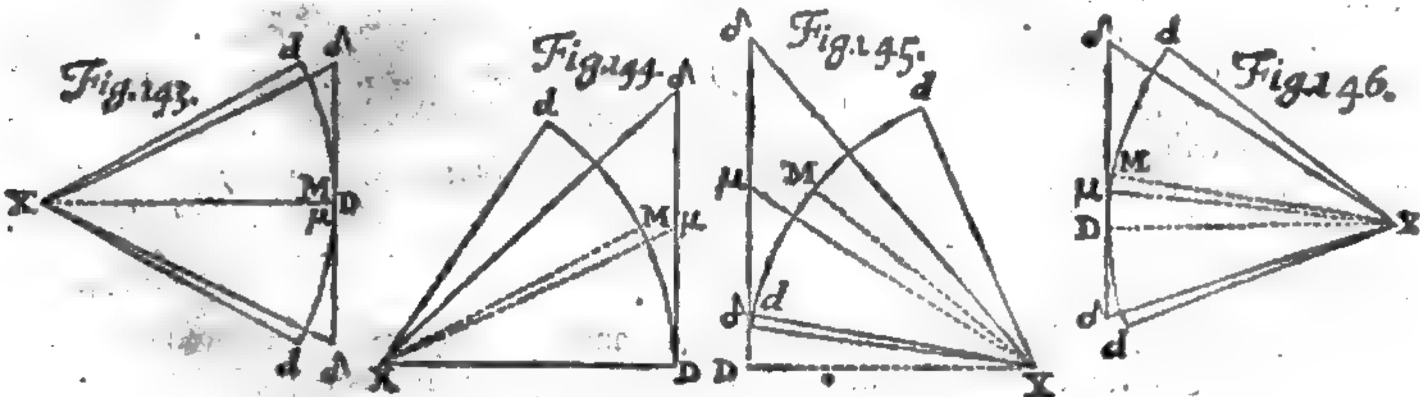
Item; data magnitudine factæ exposita conversione; puta *PBB*, vel *PB*; ipsaque conversæ magnitudine *BB*, vel *B*: datur arcus (specie expositi) longitudo *P*; (nempe quod ex *PBB* vel *PB*, per *BB* vel *B* diviso emergit) adeoque & radii, quo describitur: quæ est distantia Centri gravitatis C ab axe conversionis. E.

BB)PBB(P
B)PB(P

Item; datâ *PBB* vel *PB* magnitudine figuræ conversione factæ; & distantia centri gravitatis conversæ à conversionis axe; adeoque & quæ ab hoc describitur Peripheria *P*: Datur conversæ magnitudo, *BB* vel *B*. Nempe, quod ex *PBB*, vel *PB*, per *P* diviso, emergit. F.

P)PBB(BB
P)PB (B

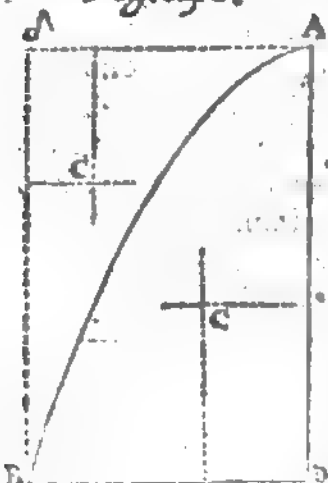
Denique; Bisectis Dd in M, & Dδ in μ; ductisque per conversionis axem vel G.



Ungulæ aciem X, planis XM, Xμ: Erunt, in illo, Centra gravitatis singulorum arcuum ut Bb, Dd, conversione factorum: in hoc, rectarum singularum ut Bβ, Dδ ungulam constituentium, (per 2 & 3 hujus:) Adeoque in illo arcuum commune omnium, (hoc est, superficiei vel solidi conversione facti;) in hoc, commune omnium rectarum, (hoc est, Ungulæ superficialis solidæve,) centrum gravitatis: per 27 Cap. præced. Quæ erant ultimo demonstranda. Fig. 142, 143, 144, 145, 146.

Atque hinc constat generalis Methodus exhibendi Solidum conversione figuræ planæ (lineæve in plano) circa rectam in eodem plano descriptam: Saltem quæ ipsam non secet. H. Fig. 148.

Exempli gratia. Sit ADB semiparabola; cujus magnitudo ad magnitudinem parallelo- I.



parallelogrammi circumscripti ADBδ est ut 2 ad 3; Centrum vero gravitatis à Vertice Aδ distat $\frac{3}{5}$ Altitudinis, per 6 hujus; Parallelogrammi centrum à vertice distat, $\frac{1}{2}$ Altitudinis: Ergo illius ad hujus distantiam, ut $\frac{3}{5}$ ad $\frac{1}{2}$; vel, ut 6 ad 5. Adeoque propter plani magnitudinem ad magnitudinem, ut 2 ad 3; & Centri distantiam ad distantiam, ut 6 ad 5; Erit solidum ex conversione semiparabolæ ABD ad Cylindrum ex conversione ADBδ, circa eandem Aδ; in ratione ex illis composita, ut 12 ad 15, vel 4 ad 5.

$$\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

K. Eadem si conversa intelligatur circa BD; (unde Centrum Gravitatis distat $\frac{2}{5}$ altitudinis; adeoque ad distantiam Centri Gravitatis parallelogrammi circumscripti, ut $\frac{2}{5}$ ad $\frac{1}{2}$; sive ut 4 ad 5; & magnitudo ad magnitudinem ut 2 ad 3;) Solidum conversione factum, ad circumscriptum Cylindrum, erit ut 8 ad 15.

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

L. Eadem circa AD conversa; propter magnitudinem, ut prius, sicut 2 ad 3; & distantiam Centri gravitatis ad AD, $\frac{3}{8}$ Latitudinis, adeoque ad distantiam inde Centri gravitatis parallelogrammi circumscripti, ut 3 ad 4: per 8 hujus:) solidum faciet, ad Cylindrum circumscriptum; ut 6 ad 12, vel 1 ad 2.

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

M. Eadem denique circa Bδ, (unde Centrum gravitatis distat $\frac{5}{8}$ latitudinis; adeoque ad distantiam Centri gravitatis parallelogrammi ut 5 ad 4; & magnitudo ut prius;) solidum faciet, ad circumscriptum Cylindrum, ut 10 ad 12; vel 5 ad 6.

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

N. Atque eodem plane modo faciendum esset, etiamsi rectæ Aδ, δB, AD, DB, non adjacerent, sed in remota distantia, vel etiam obliquo quovis situ, utcunque in eodem plano; dummodo figuram convertendam non secet expositus conversionis Axis.

Et similiter quæcunque exponatur figura plana, circa rectam quamvis in eodem plano (quæ illam non secet) utcunque positam convertenda. Quodque de figura plana dictum, de linea quavis in plano descripta, similiter convertenda intelligatur.

O. Reliqua consectaria, in ipso propositionis curriculo satis demonstrantur.

SCHOLIUM.

Hanc methodum cum ante plures annos inveneram (nescius id prius innotuisse) inveni tandem Torricellio, aliisque post illum, prius fuisse notam.

Si vero Figura conversa, non sit Plana, vel non in eodem Plano cum conversionis Axe, (quod & de Lineis similiter intellige:) pro conversa, substituenda est alia (in eodem plano cum Axe) in quam, Conversa, sic projecta intelligatur, ut utriusque respectiva Puncta singula tantundem distent à conversionis Axe.

PROP.

PROP. XIII.

Si circa rectam quamvis, ut conversionis Axem feratur (conversione integra vel partiali) Linea recta terminata, in eodem (cum Axe) Plano utcunque posita, (modo ne axem secet, aut illi sit ad angulos rectos:) Quæ à conversa recta describitur Superficies Curva, æquatur Superficiei Cylindri recti, quæ simili conversione describitur à recta quæ æqualis sit Axis Portioni duabus rectis à conversæ rectæ extremis punctis ad axem perpendicularibus interjectæ, in illa ab axe distantia quæ æqualis sit perpendiculari, medio conversæ rectæ puncto insistenti, ad axem terminatæ, circumlata. A. B. C.

Quodque de una conversa recta dicitur, pluribus similiter accommodabitur. D.

Adeoque; Si Semi-circumferentiæ Circuli, vel arcui minori, circumponatur ex continuis rectis (quæ mediis suis punctis peripheriam contingant) conflata linea: Quæ ab hac linea composita, circa istius circuli diametrum quamvis (quæ illam non secet) conversa, describitur Superficies curva; æquatur Superficiei curvæ Cylindri recti, æque-alti, basin habentis exposito circulo æqualem. E.

Adeoque &; Superficies curva quæ à Semi-perimetro (vel hujus portione, ex integris Lateribus quotlibet constante) *Polygoni regularis*, circa Polygoni illius diametrum (quæ illam non secet) conversa describitur; æquabitur superficiei curvæ Cylindri recti æque-alti, basem habentis æqualem circulo qui Polygono illi inscribitur. Et Partes partibus respective sumptis. F.

Et, speciatim; *Superficies Sphærica*, æquatur superficiei curvæ Cylindri recti circumscripti: Ejusque Portiones, respectivis hujus portionibus; sive Planis per Axem, sive planis ad Axem rectis, abscissis. G.

Atque hinc sequitur; Superficiem Sphæræ, æqualem esse quatuor circulis in Sphæra maximis. H.

Item; Superficiei Sphæricæ Segmenta, parallelis planis interjecta, Altitudinibus (vel abscissis Axis Portionibus) esse proportionalia. I.

Et; Segmenti Superficiei Sphæricæ, duobus parallelis planis interjecti, Centrum gravitatis esse in Axis segmenti medio. K.

Quæ quidem Consectaria, etiam *Sinibus Rectis*, & *Subtensis* arcuum (mutatis mutandis) accommodanda sunt; (utpote illorum in Superficie Sphærica Circulorum Radiis & Diametris.) Nempe, L.

Summa Sinuum Rectorum totius sive Quadrantis sive Semicirculi; adeoque & summa Chordarum vel Subtensarum arcuum totius sive Semicirculi sive Circuli integri; æquatur Parallelogrammo circumscripto. Et partes partibus respective sumptis, quæ parallelis planis abscinduntur. Nempe,

Summa Sinuum Rectorum integri Quadrantis, æquatur Quadrato Radii: Summa Sinuum rectorum totius Semicirculi; vel Subtensarum arcuum in Semicirculo; duobus Quadratis Radii: Et Summa Subtensarum in Circulo integro, Quadrato Diametri, seu quatuor Quadratis Radii. M.

Item

N Item (in partibus horum) Summa Sinuum rectorum cujusvis Arcus particulis (in suo situ) convenientium, æquatur Parallelogrammo æque-alto, basem habenti Radium Circuli. (Summaque Subtensarum correspondentium, hujus dupla.)

O. Adeoque; Summæ partiales, sunt Altitudinibus (seu Axis particulis interceptis) proportionales.

P. Et; Summæ (sive Partialis, sive Totalis,) Centrum-gravitatis, in media Altitudine; Subtensarum quidem, in ipso Axis medio; Sinuum, saltem æque-altum.

Q. Hinc eadem etiam transferuntur ad *Superficiem curvam Ungulæ*, super Semicirculum, ejusve Portionem erectæ, cujus Acies sit Diameter Semicirculum terminans. Nempe,

Si plani secantis ad circuli planum Inclinatio, sit graduum 45, seu Semi-quadrantalis, (adeoque altitudo maxima, æqualis maximo Sinuum;) Curva Superficies æquatur Summæ Sinuum rectorum; (& partes partibus respective sumptis.)

R. Si vero Altitudo maxima, sit ad maximum Sinuum, ut Peripheria vel Semiperipheria ad Radium; erit Ungulæ Curva Superficies, æqualis curvæ superficiei Sphæræ vel Hemisphærii eisdem planis (Axi rectis) interjectæ. Atque in aliis Altitudinibus proportionaliter.

S. Et Centrum Gravitatis (quæcunque sit Ungulæ altitudo) in perpendiculari Plano medio inter extremos Sinus.

M,N,T. Atque hæc eadem, ad *Figuram Sinuum Rectorum*, sive Quadrantis unius sive totius Semicirculi, (quæ quidem nihil aliud est, quam illa Semiquadrantalis Ungulæ Semicylindri Curva Superficies in planum expansa,) similiter accommodantur. Nempe; Figuram illam Sinuum rectorum unius Quadrantis, æqualem esse Quadrato Radii; totius autem Semicirculi, æqualem duobus Radii Quadratis; & Segmentum quodvis duobus sinibus interjectum, æquale facto ex Radio in Diametri Circularis Segmentum duobus correspondentibus in Semicirculo Sinibus interjectum ducto. (Unde & alia ejusdem portio quælibet, curvæ hujus particula & recta rectisve terminata, similiter data erit.)

V. Eademque porro ampliantur, ad *Summas Quadratorum*, *Cuborum*, *Biquadratorum*, aliarumve potestatum, eorundem *Sinuum Rectorum*. Nempe; Ut *omnes Sinus Recti*, Segmento cuivis Semicirculi (parallelis Sinibus interjecto) respondentes, æquantur facto ex Radio in Diametri Segmentum interjectum ducto: Sic & eorundem *Sinuum Quadrata omnia*, æquantur Radio in omnes ordinatim-applicatas (eadem ad invicem distantia sumptas, qua distant in arcu circulari Sinus ipsi) segmentum illud complentes ducto: Et Sinuum illorum *Cubi omnes*, æquantur Radio in harum Ordinatim-applicatarum Quadrata: Sinuumque *Biquadrata*, Radio in harum Cubos ducto: & sic deinceps.

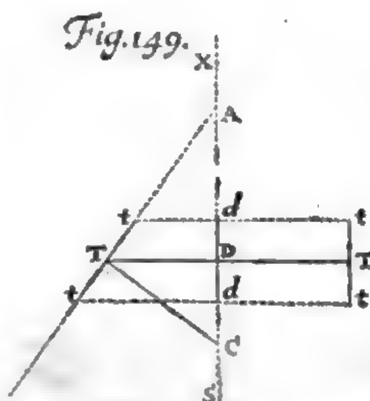
W. Atque hinc porro habetur, Momentum Superficiei Ungulæ istius Semicylindri, ejusve segmenti, respectu (aciei suæ) Diametri circularis. (Nempe, in Semiquadrantali Ungula, Sinuum illorum Quadratorum Summæ æquale: in aliis, pro altitudinum ratione.) Ipsumque gravitatis Centrum.

Item;

Item; Figuræ Sinuum Rectorum, ejusve Segmenti, Momentum respectu rectæ cui adjacent Sinus illi: Vel, Semiquadrantalis Ungula (unde & de aliis Ungulis fiet judicium pro altitudinum ratione,) Figuræ Sinuum Rectorum, ejusve Segmenti, aciem habens rectam illam cui adjacent. (Nempe, Semissis Summæ Quadratorum eorundem Sinuum.) Adeoque, Centri gravitatis Plani distantia ab ipsa cui adjacet recta. X.

Item; Hujus Ungulæ Momentum, respectu ejusdem adjacentis rectæ, aciei suæ. (Nempe, Triens summæ Cuborum eorundem Sinuum.) Adeoque, Centri gravitatis inde distantia. (Intellige: Si prius cognoscatur, tum ordinatim-applicatarum illarum Summa, hoc est, ipsum Semicirculi Segmentum; tum summa quadratorum earundem ordinatim-applicatarum: Quorum utrumque methodis jam notis cognoscuntur: atque hic infra docentur.) Y.

Circa Axem XS, recta tt (in eodem plano constituta) convertatur; cujus medio Puncto T insistens perpendicularis TC, axi occurrat in C: Ab extremis autem punctis t, t, perpendiculares ad axem ducantur td, td; atque, à T medio, TD. A.



Si sit tTt axi parallela: Manifestum est, tum TC, TD, eandem esse rectam, tum dDd, tTt, (parallelas parallelis terminatas,) rectas æquales; adeoque constare propositum.

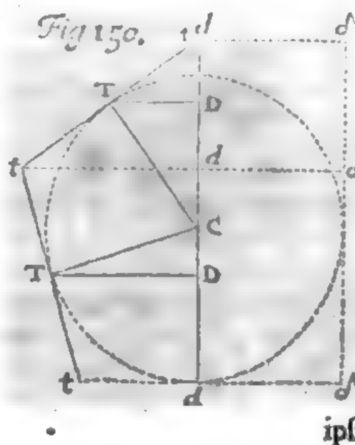
Sin parallela non sit; occurrat Axi in A: Eritque (propter parallelas, & similia triangula,) tTt, ad dDd; ut AT ad AD; hoc est, (propter similia triangula,) ut CT, ad TD. Adeoque, factum ab extremis, tt in TD; æquabitur facto à mediis, dd in CT. Et (propter, similes Peripherias, radiis suis proportionales,) Factum ex tt in peripheriam radio DT descriptam, ad factum ex dd in similem peripheriam descriptam radio CT, vel qui huic æqualis sit. Adeoque (per prop. præced.) Superficies curva quæ à conversa tt (cujus centrum gravitatis est T, ejusque ab axe distantia TD) describitur; æqualis erit curvæ superficiei Cylindri, quæ recta dd vel huic æquali describatur, in distantia ab axe quæ sit ipsi CT æqualis. Quod erat demonstrandum.

Nempe; qua ratione CT longior est quam DT, eadem brevior est dd quam tt.

Dico autem; *modo ne Axem secet*; quoniam (ut ad prop. præced. dictum est,) hoc casu, duarum curvarum differentiæ, æqualis esset illa Superficies Cylindrica. B.

Item; *ne sit ad axem ad angulos rectos*: quoniam, hoc casu, non Curvam sed Planam superficiem describeret conversa recta; cui in Curva superficie Cylindrica nihil responderet. Nec, de illa procederet demonstratio. C.

Quodque de una conversa recta dictum est; pluribus similiter accommodabitur; ductis, à singularum punctis mediis, ad axem, respectivis rectis. Quippe si in omnibus eadem sit, vel æqualis, recta TC; ejusdem Superficiei Cylindricæ segmentis æquales erunt quæ à tt rectis describentur: Sin minus; diversarum. D.



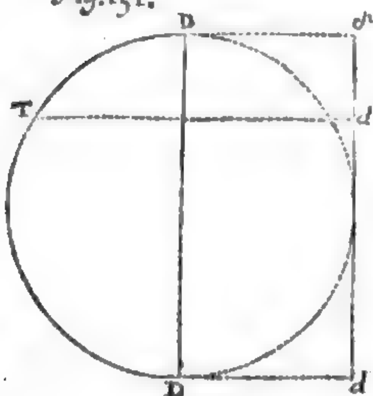
Puta; Si circa Semiperipheriam (arcumve adhuc minorem) circumponatur, ex rectis conflata ttt linea; quarum singularum puncta media T, T, sint in TT peripheria; adeoque TC, TC, invicem æquales: rectis autem tt, tt, æquealtæ dd, dd, axis portiones; atque his æquales δδ, δδ; quarum ab axe distantia dδ sit æqualis ipsi E.

ipsi T C, (quæ cum sit inscripti circuli radius; eundem tanget δ δ δ.) Ostendetur, ex jam demonstratis, Superficies rectis t t, t t, descriptas, sigillatim æquales eis esse quæ rectis δ δ, δ δ, describuntur. Ergo; quæ tota t t t describitur, toti descriptæ à δ δ δ. Quod itidem probandum erat.

F. Adeoque; Si t t t sit tota Semi-Perimeter Regularis Polygoni: De hac item constat. Sin ipsius saltem aliqua latera; De superficie saltem his lateribus descripta constat. Sin forte, ad complendam Semiperimetrum, desit Semi-latus, ut t d; quod perpendiculare sit ipsi d d Axi; (vel etiam utrinque inter lineæ compositæ t t t extrema, & axem, simile sit interstitium:) saltem tota superficies Curva quæ a Semiperimetro describitur, æqualis jam ostensa est descriptæ Cylindri Curvæ à δ δ δ. Quippe quæ à t d describitur, plana erit: nec magis hic in considerationem venit, quam Cylindri Bases. De Curvis utique Superficiebus procedit Propositio.

(Atque hinc facile deducerentur, non modo ea prope omnia quæ ab *Archimede*, de *Sphæra & Cylindro*; sed & eorum plurima quæ à *Torricellio*, de *Solidis Sphæralibus*, demonstrantur.)

G. *Fig. 151.*



Denique; Cum Circulus aliud non sit quam Polygonum regulare laterum numero infinitorum; sitque Semiperipheria, illius Polygoni Semiperimeter; (juxta def. 1. Cap. 4.) etiam hic speciatim verum erit quod de omnibus demonstratum est. Hoc est; Quæ Semiperipheriæ D T D circa axem D D conversione describitur Superficies Sphærica, æquatur superficiei Curvæ Cylindri æque-alti à recta δ δ descriptæ; Et portiones illius portionibus hujus respective sumptis; puta, quæ à curva D T describitur, illi quæ à recta δ d æque-alta; item, quæ semiconversione unius, illi quæ à semiconversione alterius; (& in aliis similiter conversionibus imperfectis.) Quæ itidem erant demonstranda.

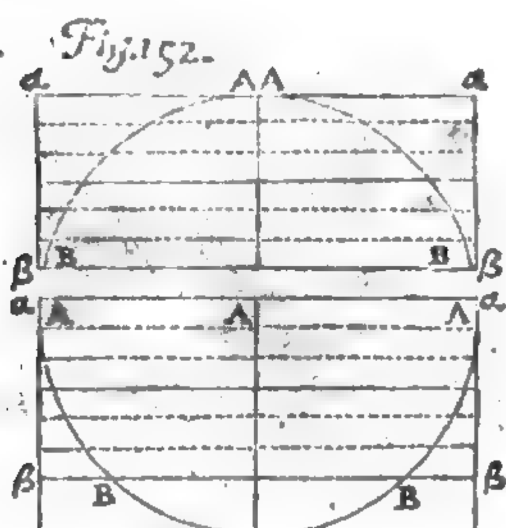
H. Atque hinc sequitur; Superficiem Sphæræ, quatuor circulis maximis æqualem esse. Est utique Circuli in Sphæra maximi peripheria, æqualis peripheriæ basis expositi Cylindri (propter æquales utriusque radios:) eaque ducta in latus Cylindri, (quod æquatur Diametro Sphæræ,) exhibet Cylindri superficiem curvam, ut notum est; (vel, quod eodem recidit, recta δ δ in peripheriam ipsius puncto medio descriptam, quæ eadem est cum peripheria circuli in Sphæra maximi, eandem exhibet superficiem curvam Cylindri, per prop. præced.) Cum itaque quod fit ex Semidiametro in Semicircumferentiam æquetur Circulo, (sive, quod fit ex Semidiametro in peripheriam ipsius puncto medio descriptam, quæ dimidia est peripheriæ tota descriptæ:) quod fit ex tota Diametro in totam Peripheriam, (hoc est, Curva superficies Cylindri, adeoque & Sphæræ;) æquatur Quadruplo ejusdem circuli maximi. Quod erat propositum.

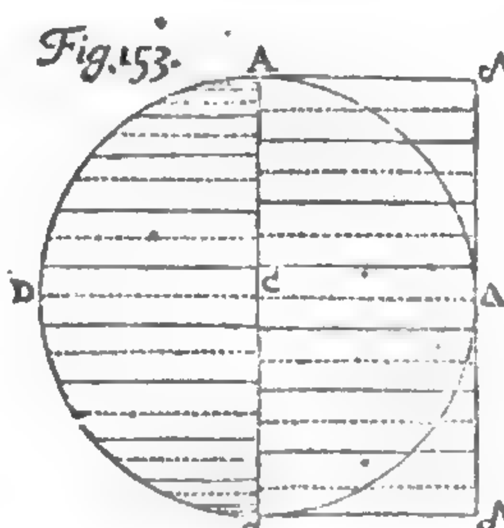
I. Item Superficiei Sphæricæ Segmenta, parallelis planis abscissa, altitudinibus (sive portionibus Axis abscissis) sunt proportionalia. Æqualia scilicet respectivis segmentis Superficiei Curvæ Cylindricæ; quæ sunt altitudinibus proportionalia. Quod itidem demonstrandum erat.

K. Adeoque; ut Superficiei Curvæ Cylindricæ, (per prop. 4 & 5 hujus,) sic &
Fig. 152. Segmenti Sphærici, parallelis planis abscissi, Centrum gravitatis est in Axis Medio. Nam, quotcunque planis parallelis, utraque secetur superficies curva; æqualia erunt respectiva hujus atque illius Segmenta; & (si intelligantur numero infinita, juxta def. 1. Cap. 4.) æqualiter à medio plano remota, adeoque & æqualiter respectu ejusdem ponderantia. Est igitur in plano medio (basibus parallelo) per 4 hujus; estque in Axe, per 5 hujus; ergo in Axis puncto medio, per 26 Cap. 4. Quod erat etiam demonstrandum.

Quæ quidem Sinibus rectis, & Arcuum Subtensis sive Chordis, facile accommodantur.

Intel-





Intelligantur enim, tum à singulis punctis sive particulis infinite-exiguis Diametri circularis sive Axis A α, Ordinatim-applicatæ, ad δ δ Tangentem circuli parallelam pertingentes, (parallelogrammum circumscriptum complentes:) tum à Semicircularis arcus A D α singulis punctis, sive particulis infinite-exiguis (particulis illis Diametri æqualibus) Sinus recti ad Diametrum vel Axem A α demissi: (Quorum itaque numerus seu multitudo, reputanda erit ad numerum seu multitudinem ordinatim-applicatarum, ut est Longitudo Semiperipheriæ ad Diametrum Circuli.) Fig. 153.

Cum itaque singulæ arcus Particulæ; seu earum Tangentes, cum particulis illis exiguis quasi coincidentes; sint (ut jamjam ostensum est) in ea ratione magis Obliquæ, seu minus Altæ, qua Breviores sunt Sinus recti inde demissi: adeoque, Arcus æque alti, in eadem ratione Longiores, indeque Sinus demissi eo plures in eadem altitudine quo breviores sunt; (& quidem eo plures quam sint in eadem altitudine ordinatim-applicatæ expositæ, quo breviores sunt quam illæ ordinatim-applicatæ Radio æquales:) Erunt ubique, in eadem altitudine, omnes simul Sinus recti, omnibus simul ordinatim applicatis, æquales: (supplente scilicet Multitudine quod in Longitudine deest.)

Adeoque; Omnes Sinus recti Quadrantis A C D, omnibus Ordinatim-applicatis Quadrati A C Δ δ. M.

Hoc est; (Si intelligatur Arcus A D in rectam extendi; eique ad angulos rectos insistere Sinus recti in suis respective punctis; & per eorum omnia extrema puncta duci curva, Figuram terminans, quæ *Figura Sinuum Rectorum* dicatur;) Figura Sinuum rectorum totius Quadrantis, A C D, Quadrato Radii æqualis erit. Fig. 155.

Item; Omnes Sinus recti, in A α D Semicirculo, omnibus Ordinatim-applicatis in Parallelogrammo A α δ δ. Fig. 153.

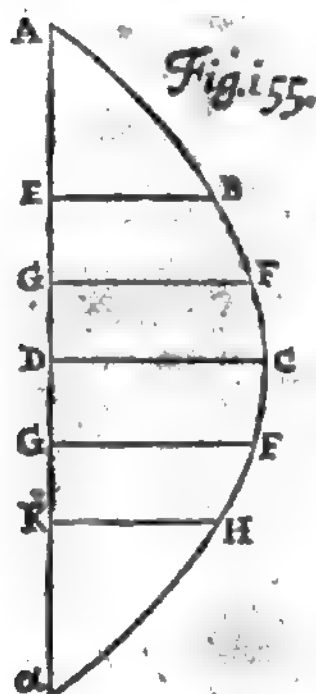
Hoc est, Figura Sinuum rectorum totius Semicirculi, A C α; duobus Quadratis Radii. Fig. 155.

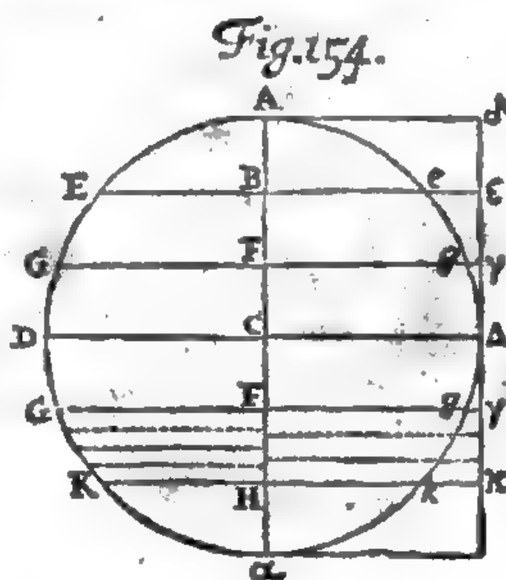
Adeoque; Si, continuatis Sinibus, compleantur Subtensæ duplorum Arcuum; manifestum est (propter Subtensas Sinuum duplas) Omnes Subtensas Semicirculi, æquari duobus Quadratis Radii; & Omnes Subtensas totius Circuli, quatuor Quadratis Radii, sive Quadrato Diametri. Quod erat etiam probandum.

Cumque hoc ubique obtineat; Idem in partibus non minus valet. Puta, omnes Sinus Recti in portionibus Circularibus A B E, E B C D, E B F G, G F H K, &c. æquales omnibus Ordinatim-applicatis, in Parallelogrammis A B ε δ, ε B C Δ, ε B F γ, γ F H κ, &c. N. Fig. 154.

Hoc est, (expansis Arcubus in Rectas, erectisque Sinibus, & completa ut prius figura) Figura figuræ æqualis. Puta E B F G in figura Sinuum, æqualis Parallelogrammo ε B F γ: Et sic in cæteris. Quod etiam erat probandum. Fig. 154, 155.

Sed &, Si Axis A α in Circulo, jam consideretur ut Libra, (in situ Horizontali posita;) similiter ostendetur ipsius particulas æquales singulas, insistentibus (in suo situ) Sinibus rectis, æqualiter gravatas esse; non minus quam, ex opposita parte, Ordinatim-applicatis. O. Fig. 153.





P. Adeoque; (sive tota A α, sive pars ut B F consideretur,) Centrum Æquilibrii
Fig. erit in assumptæ Libræ medio; (per prop. 2 & 4 hujus.) Puta, Summæ Sinuum
154. portionis E B F G, in altitudine media inter E B & F G, (sive ad easdem, sive ad oppositas centri partes ponantur ipsæ E B, F G.) Quod erat ibidem demonstrandum.

Dico autem, *In suo situ*: Quoniam si intelligatur (ut in figura Sinuum, fig. 155.) Arcus in rectam extendi: rem secus esse, (ob variatas sinuum distantias,) manifestum est. Nisi cum E B, G F, utrinque à Centro æqualiter distant.

Totumque hoc quod de Sinibus Rectis (Arcuumve Subtensis) hic traditur, eodem plane principio nititur, atque illud de Superficie Sphærica, ejusque partibus. Quippe Sinus Recti, Arcuumque Subtensæ, in suo situ existentes, non sunt nisi Radii Diametrique Peripheriarum, æqualibus ab invicem distantiis remotarum, superficiem illam Sphæricam complentium. Atque ut illæ omnes Peripheriæ, omnibus Cylindricam superficiem complentibus Peripheriis æquantur: Sic & Illarum omnes Radii, & Diametri, omnibus item Radiis, & Diametris, Harum. Quod & in partibus obtinet respective sumptis pariter utrobique.

Q. Eadem Curvæ Superficiei Ungulæ sic accommodantur.
Fig. Si super A α D Semicirculo, vel ipsius Segmento quovis, ut E B F G, (rectis
154. E B, G F, quibusvis, quæ sint ad angulos rectos Axi A α, interjecto,) erigatur Ungulà, cujus Acies (seu communis intersectio Basis Planique secantis) sit in A α; sitque Planorum (Basis scilicet, Planique secantis, seu Ungulam abscindentis,) Inclinatio, Semi-quadrantalis: (quam *Semi-quadrantalem Ungulam* appellamus:) Rectis E B, G F, (reliquisque hisce parallelis,) insistet Triangulum Rectangulum, & quidem (propter Inclinationem Semi-quadrantalem) Isosceles. Adeoque (cum hoc ubique obtineat) singulis Peripheriæ A D α, vel E G, punctis, insistent rectæ (curvam Ungulæ Superficiem complentes) suarum distantiis ab A α, seu Sinibus
Fig. rectis, æquales. Eritque, propterea, Curva Superficies Ungulæ, æqualis summæ
155. Sinuum rectorum; sive (extenso in rectam arcu A D α, vel E G, erectisque Sinibus, & completa ut prius figura,) correspondenti Figuræ Sinuum rectorum, ejusve portioni correspondenti. (Est utique Figura illa Sinuum rectorum A α C, nihil aliud quam istius Ungulæ Superficies curva, in planum expansa.)

Fig. Hoc est, per modo demonstrata, Parallelogrammo α A δ (fig. 154.) si Basis Un-
154. gulæ sit A α D: vel, Parallelogrammo B F γ ε, si Basis sit E G. Et partes partibus respective sumptis æquales.

Fig. Nempe, Quæ insistet arcui E G curva superficies Ungulæ Semi-quadrantalis
154, (aciem habentis B F) æqualis erit superficiei planæ E B F G in figura Sinuum;
155. hoc est B F γ ε Parallelogrammo. Et sic ubique.

R. Si vero (pro alia Plani secantis ad Basin Inclinatione) alia sit altitudo: puta,
Fig. altitudo in E, ad distantiam E B, (& sic ubique,) ut Peripheria vel Semiperiphe-
154. ria ad Radium: Pro Sinubus, Sumendæ erunt Peripheriæ vel Semiperipheriæ his Radiis

Radiis descriptæ, (saltem Rectæ his Peripheriis vel Semiperipheriis æquales;) adeoque Ungulæ curva Superficies, æqualis erit Superficiei Sphæricæ, vel Hemisphæricæ, (hujusve Portioni respectivæ,) ejusdem Arcus A D α, vel E G, conversione vel semiconversione (circa A α) descriptæ. Atque in aliis altitudinibus proportionaliter. (per prop. 11 & 12 hujus.)

Adeoque, pro Parallelogrammis α A δ, B F γ ε, sumenda erunt alia æque-alta; sed quorum Bases, ad Basin A δ vel C Δ, (Radio Circuli æqualem,) sint in ea ratione quæ est Altitudo in E (vel alio Peripheriæ puncto,) ad hujus ab A α distantiam.

Eritque, propter eandem rectæ E B, rectæque ipsi in E insistentis, (& de reliquis similiter,) distantiam à Plano Sphæram tangente in α, (vel huic parallelo quovis;) Centrum Gravitatis in eadem ab illo Tangente Plano (Planove illi parallelo) distantia, qua est Centrum gravitatis Summæ Sinuum, vel Superficiei Sphæricæ, (ejusve portionis,) correspondentis. Hoc est, in Plano inter extremos Sinus, (puta inter E B, G F,) medio. Quæ itidem erant demonstranda. S.

Hujus autem Figuræ Sinuum rectorum A α C (quam totam duobus Radii quadratis æqualem ostendimus,) si portionem aliquam, duabus utcunque rectis Basi perpendicularibus interjectam, libeat mensurare; puta E B F G: Sumptis in Semicirculo (huic respondente) A D α (fig. 154.) Sinibus rectis E B, G F, quæ æquales sint, & similiter siti ipsis E B, G F, in figura Sinuum (fig. 155.) Interjecta Diametri Circularis portio B F, in ejusdem Circuli Radium ducta; exhibebit Rectangulum, expositæ portioni E B F G in figura Sinuum, æquale: ut in supra demonstratis ostensum est. T. Fig. 155.

Si vero aliam quamvis ejusdem portionem, rectis utcunque abscissam, (utut non sint basi perpendiculares,) mensurare libeat: id fiet additis vel ablatis (hujusmodi Portioni perpendicularibus interjectæ) spatiis rectilineis; prout casus expositus postulaverit.

Sciendum porro est; Summam Sinuum rectorum, portioni Circulari ut E B F G respondentium, dici posse alio atque alio modo complere tum E B F G in figura Sinuum, tum E B F G in Semicirculo; sicut eandem portionem Circularem complere dicantur, tum illa Sinuum summa, tum summa Ordinatim-applicatarum, ipsis E B, G F, interjectarum. V. Fig. 154, 155.

Intelliguntur utique tum Sinus omnes ipsis E B, G F, interjecti in figura Sinuum, tum omnes Ordinatim-applicatæ ipsis E B, G F, interjectæ in portione Circulari; æqualibus ab invicem distantiis remotæ & quasi æqualiter crassæ seu latæ: sive (quod eodem recidit) exiguis quidem sed æqualibus basis vel axis particulis insistentes; quarum itaque æqualium particularum non alia ratio haberi solet (in methodo Indivisibilium) quam quod simul-omnes toti æquentur. Fig. 153, 154, 155.

Sed in E B F G portione Circulari, Sinus recti (propter Arcum, non Axem, in æquales partes divisum) inæqualibus ab invicem intervallis removentur; adeoque inæqualibus axis particulis insistunt; (minoribus prope polos, quam longius inde:) quarum itaque habenda ratio.

Æqualibus utique Tangentibus t t, t t, (quas *T* dicemus,) sive Peripheriæ Particulis (quæ, cum infinite-exiguæ supponantur, cum ipsis Tangentibus reputandæ sunt coincidere;) inæquales respondent Axis Particulæ d d, d d, (quas *d* dicemus,) quibus insistere intelligantur Sinus recti respective sumpti. Fig. 150.

Hac autem consideratione interposita, non minus dicetur Summa Sinuum, quam summa Ordinatim-applicatarum, complere expositam portionem Circularem. Tam enim omnes sinus *s*, in suas respective *d* inæquales ducti, quam omnes Ordinatim-applicatæ (quas *o* dicemus) in suas singulæ *T* particulas æquales ductæ, eandem portionem Circularem complent. (Supponimus autem, quod & prius dictum est, particulas Peripheriæ quibus respondent Sinus recti, particulis Diametri seu Axis quibus respondent Ordinatim-applicatæ, æquales esse.) Hoc est, Omnes *s d* simul, æquales simul omnibus *o T*, (iisdem E B, G F, interjectis,) portionem E B F G in Semicirculo, pariter complentes. Omnes autem iidem Sinus *s*, in Arcus sui, Rectæve, E G, Particulas *T*; hoc est, Omnes *s T*; æquales spatio E B F G in figura Sinuum: adeoque Parallelogrammo (ut supra probatum) ε B F γ, portioni Circulari E B F G (vel huic simili & æquali e B F g) æque-alto, basin habenti Radio æqualem. Fig. 153, 154, 155.

 (Diffe-

(Differentia quæ extenso Arcu in Rectam oritur, est $e g \gamma \varepsilon$.) Sic, in portione Circulari G F H K, Omnes Sinus recti *s*, in suas respective *d*, portionem complentes; æquantur Omnibus Ordinatim-applicatis *o* in *T* ductis, quæ complent (illi similem & æqualem) portionem g F H k: Omnes autem iidem *s* in *T* ducti, (complentes spatium G F H K in figura Sinuum,) æquantur Parallelogrammo γ F H $\varkappa$; excedenti spatium Circulare g F H k, spatio γ g k $\varkappa$. Et sic ubique.

Similiter; Sumptis tum Sinuum omnium, tum omnium Ordinatim-applicatarum, Quadratis, Cubis, &c. erunt *Omnes* $s^2 d$, æquales *Omnibus* $o^2 T$: Item, *Omnes* $s^3 d =$ *Omnibus* $o^3 T$: & *Omnes* $s^4 d =$ *Omnibus* $o^4 T$. &c.

Fig. 149. Quanta autem sit *d* in singulis, sic colligitur. Cum sit (ut in hac prop. § A. demonstratum est) t t ad d d, ut C T ad T D; Hoc est, *T* ad *d*, ut *R* ad *s*; Adeoque $sT = dR$: Erit $d = \frac{sT}{R}$.

Adeoque; $sd = \frac{s^2 T}{R}$: Et *Omnes* sd, hoc est, *Omnes* oT, æquales *Omnibus* $\frac{s^2 T}{R}$: Et *Omnes* $s^2 T$, æquales *Omnibus* $o T R$: Sive, *Omnes* s^2, æquales *Omnibus* $o R$. Hoc est; Summa Quadratorum Sinuum Rectorum in spatio Circulari

Fig. 154. E B F G; æqualis, *Omnibus* $o R$; hoc est, ipsi spatio E B F G in radium *R* ducto. Et sic ubique.

Item, *Omnes* $o^2 T =$ *Omnibus* $s^2 d =$ *Omnibus* $\frac{s^3 T}{R}$. Adeoque *Omnes* $o^2 R$ $=$ *Omnibus* s^3.

Item; *Omnes* $o^3 T =$ *Omnibus* $s^3 d =$ *Omnibus* $\frac{s^4 T}{R}$. Adeoque *Omnes* $o^3 R$ $=$ *Omnibus* s^4. Et sic deinceps. Quæ ostendenda erant.

W. Fig. 154. Atque hinc porro habetur Momentum Curvæ Superficiei Ungulæ Semi-cylindri, Semicirculo A D α, ejusve Segmento cuivis B E G F, insistentis, (Aciem habentis A α,) respectu aciei suæ. Cum enim omnes Rectæ superficiem illam complentes, sint Sinibus rectis qui eisdem arcus punctis respondent Æquales, (nempe, si Planorum Inclinatio sit Semi-quadrantalis,) vel saltem Proportionales, (quæcunque sit Plani secantis ad Basin inclinatio;) sintque earundem ab A α distantiæ, iidem Sinus Recti: Erunt earundem Momenta, ut Sinuum horum Quadrata; & Summa Momentorum, hoc est, Momentum Superficiei Curvæ, ut Summa Quadratorum illorum: Nempe huic summæ æqualis si Inclinatio Ungulæ sit Semiquadrantalis; vel ad illam saltem summam eam habebit rationem quam habet rectarum quævis superficiem illam curvam complentium ad suam respective ab A α distantiam.

Quod quidem Momentum, per Magnitudinem (jam traditam) divisum, exhibet distantiam centri gravitatis à Plano per Aciem A α, rectis superficiem curvam complentibus parallelo. Sed & in eo per aciem Plano esse constat, quod Rectas superficiem curvam complentes bisecat; per prop. 11. hujus. Atque in Plano inter rectarum illarum extremas medio, ad axem recto, jam ostensum est. § S. Ergo, ipsum Centrum datur. per prop. 26. Cap. 4.

X. Fig. 155. Item; Momentum Figuræ Sinuum Rectorum A C α, ejusve Segmenti ut B E G F, respectu rectæ cui adjacent A D α: Seu (quod eodem recidit) Semi-quadrantalis Ungula ejusdem Figuræ Sinuum, ejusve Segmenti, aciem habens eandem A D α rectam. Cum enim (propter cujusque Rectæ Centrum gravitatis in medio sui) cujusque Sinuum Momentum, seu Triangulum eidem insistens, sit ejusdem Semiquadratum, (ducto scilicet unoquoque Sinuum in semissem sui:) erit semi-summa Quadratorum, ipsum Plani Momentum, seu Semi-quadrantalis Ungula. (Unde & de aliis Ungulis, servata Altitudinum ratione, fiet judicium.)

Atque hoc Momentum, per Magnitudinem (jam inventam) divisum, exhibet Centri gravitatis distantiam, ab ipsa A α recta.

Y. Denique; Hujus Ungulæ Momentum, hinc etiam habetur. Cum enim cujusque Triangulorum horum Centrum gravitatis, à recta A α, communi omnium Acie, aut huic potius insistente perpendiculari Plano distat, duobus Trientibus istius

istius cui insistit Sinus; sitque ipsum Triangulum (uti jam ostensum est) Semissis Quadrati; Erit (propter $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$) Cujusque Trianguli Momentum, Cubi Triens: Adeoque Triens Cuborum Sinuum illorum omnium, est ipsum Ungulæ (Semi-quadrantalis) Momentum.

Atque hoc Momentum, per Magnitudinem (modo inventam) divisum, exhibet Centri-gravitatis Ungulæ, ab ipso, in A α, erecto Plano.

Cum vero, pro invenienda Summa Quadratorum, *Omn.* s^2; & Summa Cuborum, *Omn.* s^3; habenda erunt *Omn.* *o R*, & *Omn.* o^2 *R*, (per § V. hujus:) hoc est, Summa Ordinatim-applicatarum, & Summa Quadratorum ex illis, (in *R* ducenda:) Hæc quo habeantur nihil impedit; cum & jam notis methodis, haberi possint; & methodis à nobis infra tradendis.

SCHOLIUM.

Posset quidem hæc Propositio, prout Superficiem curvam ex circumducto Arcu Circuli ortam spectat, ab illa quæ sequitur (aliunde demonstrata) inferri. Nam data Arcus Magnitudine, ejusque Centro gravitatis; habetur tum Ungulæ superficies curva, (sive, quod eodem recidit, Summa Sinuum Rectorum;) tum Superficies curva illius conversione facta: per prop. 11 & 12 hujus. Sed perinde est sive hæc ab illa, sive ab hac illa, inferatur; dummodo harum saltem altera aliunde probetur. Ego hanc potius præmisi, propter sequentis ex hac demonstrationem perspicuam, & quidem simpliciorem quam apud alios hactenus viderim. Illa enim (mea methodo) directe sequitur & immediate, à demonstratis olim ab Archimede, & post illum aliis.

Quæ autem hic tradita sunt de Curva superficie Ungulæ Semi-cylindri, aciem habentis Diametrum basis circularis; seu, quod eodem recidit, Arcus Momento respectu istius Rectæ: facile (per ea quæ ad prop. 11. tradidimus) transferri poterunt ad Ungularum aliarum Cylindricarum Superficies curvas, alios habentes Axes; seu Arcuum Momenta respectu rectarum aliarum. Cumque omnes in superficie Cylindrica Figuræ, planorum sectionibus terminatæ, resolvi possint vel in curvas figuras Cylindraceas, vel saltem Ungulares hujusmodi: poterunt propterea ejusmodi Figuræ omnes in Superficie Cylindracea, hac methodo, ad certas mensuras revocari. Quod cum solius calculi opus sit; atque etiam in sequentibus aliquanto fusius tradendum: non erit necesse ut hic pluribus exponam.

Ea vero Linea Curva, quæ *Figuram Sinuum rectorum* (modo memoratam) terminat, A C α fig. 155. alia non est quam Semiellipsis, sectione Semi-Cylindri facta, in planum expansa. (Quod olim docui in meo *de Cycloide* Tractatu; & in subjuncta illi Epistola, pag. 99.) Fig. 155.

Quippe si super A α D Semicirculo (fig. 154.) erigatur Semi-cylindrus, altitudinem habens, in D, æqualem ipsi D C; perque punctum ipsi D (in ea altitudine) imminens, Basisque diametrum A α, transeat Planum (Ungulam Semi-quadrantalem abscindens;) Sectionem illam, Plano secanti & Superficiei Cylindricæ communem, Semi-ellipsem esse constat. Eadem vero abscissæ Ungulæ curva superficies, in planum expansa; est ipsa quam *Figuram Sinuum rectorum* vocamus, A α C. Ipsaque A C α illam terminans, eadem est linea jam in planum expansa, quæ, in Superficie Cylindri, fuerat Semi-ellipsis.

Sin porro, Planum idem (quod Ungulam hanc ex Semi-cylindro abscindit) continuetur per totum Cylindrum, integram Ellipsin sectione perficiens; eaque integra Ellipsis, eodem modo quo hæc semi-ellipsis, expansæ in planum superficie curva, expandatur: Continuata curva A C α in A & α, exhibebit (utrinque à C) curvam eam (quam *Ellipsin expansam* pridem nominavimus) quæ *Figuram Sinuum versorum* terminabit. Quod in Tractatu de Cycloide fusius ostendimus; quæque in istius Tractatis Fig. 7 & 30. exhibetur: Et in sequentibus ulterius considerabitur, ad prop. 17 hujus.

PROP.

PROP. XIV.

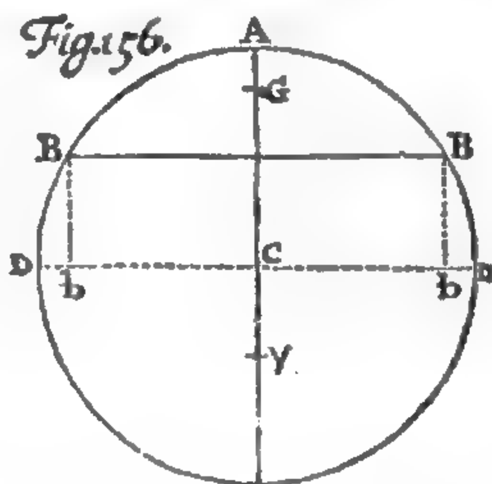
A. B. Arcus Circuli, Centrum gravitatis, est in Axis sui eo Puncto, cujus distantia à Centro circuli, est ad Radium, ut expositi arcus Chorda,
C. ad Arcum suum: Et quidem, in Semiperipheria, ut Circuli Diameter ad Semiperipheriam; seu ut Duplum Radii, ad Peripheriæ Semissem.

D. (Adeoque; Data ratione Chordæ cujusvis ad Arcum suum; datur Arcus Centrum gravitatis: Et, Dato Arcus cujusvis, tota Peripheria minoris, Centro gravitatis; datur Arcus ad Chordam suam ratio: Et, consequenter, Circuli Quadratura, seu ratio Diametri ad Perimetrum.)

E. Estque Distantia Centri-gravitatis, Superficiei Solidive, conversione (perfecta vel imperfecta) facti, ab Axe conversionis suæ; ad Distantiam Centri-gravitatis, correspondentis Ungulæ (Superficialis Solidæve,) à Plano per ipsius Aciem transeunte (rectis in ipsius Curva superficie parallelo;) ut est, ad conversionis Arcum, Chorda sua:
F. Et quidem, in Semiconversione, ut Diameter ad Semiperipheriam; seu, ut Duplum Radii, ad Peripheriæ semissem.

G. Atque hinc habetur, Superficiei Sphæricæ, Zonæ dimidiæ (aliusve imperfectæ) Centrum gravitatis.

A. Fig. 156. Esto Arcus circularis B A B, qui non sit major Semiperipheria, Chorda BB; à cujus extremis punctis B, B, demissæ (ad parallelam Diametrum D C D) Perpendiculares sint B b, B b. Adeoque, si circa D C D ut Axem, converti intelligatur D A D semiperipheria; quæ à D B describitur portio superficiei Sphæricæ, æqualis erit facto ex b D in Circuli Peripheriam, (atque hoc utrinque;) quæque à B A B describitur, æquabitur facto ex b b, hoc est B B, in eandem circuli Peripheriam: (per §. G, H, I, prop. præced.) Hoc est, si Chordæ seu Basis B B magnitudo ponatur c; &, integræ Peripheriæ, P: erit, quæ ab Arcu describitur curva Superficies, cP.



Est autem, quæ ab illo Arcu describitur Superficies curva; æqualis facto ab Arcu in Peripheriam Centro gravitatis descriptam; per prop. 12 hujus.

Ergo; si per magnitudinem Arcus, ut a, dividatur cP; prodibit $\frac{c}{a}P$ peripheria centro gravitatis descripta. Adeoque pro Peripheria P, substituendo Radium, ut R; erit $\frac{c}{a}R$ (cui æqualis ponatur G) Distantia centri gravitatis à D C D diametro.

a) cP

$$a)\ c\mathcal{P}\ (\ \frac{c}{a}\mathcal{P}. \qquad a)\ cR\ (\ \frac{c}{a}R = G. \qquad a.c :: R.G.$$

Est autem, in Arcus Axe AC; per prop. 3 hujus. Ergo, in illius eo Puncto quod à Diametro DCD, ejusve puncto C, (circuli centro,) ita distat. per prop.26. Cap.4. Nempe, ut a ad c, sic R ad G. Hoc est, ut Arcus BAB, ad BB Chordam; sic CA Radius, ad Centri Gravitatis à Centro Circuli distantiam, CG. Quod erat propositum.

Exponatur deinde, Arcus circuli Semiperipheria major, BαB. Invento, ut prius, residui arcus BAB centro gravitatis G: erit (propter totius Centrum gravitatis C, per prop. 5 hujus) expositi Centrum-gravitatis γ, in GC continuata: Atque ut BαB, ad BAB; sic CG, ad Cγ: (per prop. 27. Cap. 4.) sive, ut $\alpha = \mathcal{P} - a$, ad a; sic $G = \frac{c}{a}R$, ad $\gamma = (\frac{a}{\alpha} \times \frac{cR}{a} =)\ \frac{c}{\alpha}R$. Adeoque ut α ad c, sic R ad γ: Vel ut BαB Arcus, ad chordam suam BB; sic Radius Cα, ad Cγ, distantiam Centri gravitatis arcus expositi, à circuli Centro C. Quod erat propositum. B.

$$\alpha.a :: G = \frac{c}{a}R. \qquad \gamma = \frac{c}{\alpha}R. \qquad \alpha.c :: R.\gamma.$$

Speciatim vero, in Semiperipheria, (quam ad utrumvis duorum casuum referamus, perinde est;) cum sit (propter $c = \mathcal{D}$,) $c\mathcal{P} = \mathcal{D}\mathcal{P}$; si hoc per Arcum $a = \alpha = \frac{1}{2}\mathcal{P}$ dividatur; erit $\frac{1}{2}$P) DP (2D, peripheria Centro gravitatis descripta; cujus itaque Radius $\frac{2\mathcal{D}}{\mathcal{P}}R$, hoc est, $\frac{4R^2}{\mathcal{P}}$, est Centri Gravitatis à Circuli Centro distantia, CG$= G = \frac{4R^2}{\mathcal{P}}$. C.

$$a.c :: \tfrac{1}{2}\mathcal{P}.\mathcal{D} = 2R :: R.G = \frac{4R}{\mathcal{P}}R = \frac{4R^2}{\mathcal{P}}.$$

Corollarium item patet. Cum enim eadem sit ratio Arcus BAB ad BB chordam suam, quæ est Radii CA ad CG distantiam centri gravitatis in ipsa CA: Data rationum una, datur altera. Data vero unius Arcus (cujus ratio ad totam Peripheriam nota intelligatur) ad Chordam suam ratione; dabitur ejusdem, adeoque totius Peripheriæ, ad aliam quamvis Chordam, adeoque ad Diametrum ipsam. D.

Item illud de Ungulis, Solidisque aut Superficiebus conversione factis, similiter patet. Si enim Superficiei Solidive bddb (conversione Lineæ Planive BD E. Fig. 157.

Fig.157.

facti) singuli Arcus bBb, dDd, (plano XBD bisecti) extendi intelligantur in totidem sibi æquales rectas βBβ, δDδ, eisdem plani XBD punctis ad angulos rectos insistentes, atque ab eodem bisectas, (æqualem Ungulam, vel ex duabus compositam, complentes; per prop. 12 hujus:) Rectarum Centra Gravitatis, in ipsis

ipsis B, D, punctis constituta, ab axe conversionis X distabunt, respectivorum arcuum Semidiametris XB, XD. Ipsorum vero Arcuum singulorum (Rectis æqualium, & invicem similium,) Centra gravitatis (propter curvationem) in eadem ratione omnia (propter arcus similes) propius admoventur ad conversionis Axem X; atque in eadem ratione minuitur Momentum (respectu ejusdem X axis) singulorum; adeoque & simul omnium; &, propterea, communis omnium Centri gravitatis distantia. Nempe (per modo demonstrata) ut Arcuum unus quilibet b B b, ad b b Chordam suam; sic Distantia Centri gravitatis, adeoque Momentum, tum singularum, tum simul omnium, Rectarum $\beta\,\beta$, $\delta\,\delta$, &c. Ungulam complentium; ad Distantiam centri gravitatis, & momentum, tum singulorum respective, tum simul omnium, Arcuum b B b, d D d, &c. (Superficiem Solidumve conversione circa X factum, complentium,) ab eodem X conversionis Axe. Puta, ut Arcus a, ad Chordam c; sic X G distantia illa, ad distantiam hanc X γ. Quod item demonstrandum erat.

F. Hoc est; In Semi-conversione; ut $\frac{1}{2}P$ ad 2 R; seu ut P ad 4 R.

G. Fig. 154. Porro: Cum ostensum sit (ad §. K. prop. præced.) In portione Sphæricæ Superficiei integræ, parallelis planis interjecta (quam *Zonam integram* appello,) puta, quæ Arcus E G circa B F conversione integra describitur; Centrum gravitatis esse in Axe medio, (puta, in rectæ B F puncto medio.) Adeoque in *Zonis imperfectis*, (puta, quæ conversione dimidiata, aliave imperfecta, describuntur,) & correspondentibus Ungulis; Centrum Gravitatis in eo plano esse, quod tantundem distet à plano Sphæram in α tangente, seu, quod medium est inter B & F axi rectum.

Sitque (per prop. 12 hujus) in illo plano quod (per conversionis Axem vel Ungulæ Aciem A α incedens) bisecat, in superficie Ungulari, erectas omnes rectas illam constituentes; in Sphærali, omnes Arcus conversione factos: Quippe, in quo Plano sunt Omnium Centra gravitatis, in eodem est commune omnium. (Quod autem rectarum illarum unam bisecat, bisecat omnes; Arcuumque unum bisecans, omnes bisecat: propter similia illic Triangula, hic Arcus similes; ob eundem Inclinationis Angulum ad Aciem vel Axem A α:) Adeoque in duorum illorum Planorum communi sectione:

Quo ipsum Centrum determinetur (in Ungulis hisce, & Zonis imperfectis,) Quærenda erit etiam ejusdem (in hoc plano per Axem transeunte) distantia ab Acie vel Axe A α. Quod sic habetur.

Intelligatur Arcui cuivis, ut E G, insistens Semiquadrantalis Ungulæ (aciem habentis B F) superficies Curva: cujus singulas rectas arcui insistentes (superficiem curvam complentes) æquales esse respectivis Sinibus rectis (ad §. Q. prop. præced.) ostensum est; (adeoque superficiem illam Summæ Sinuum æqualem; hoc est, facto ex Altitudine B F, quam l dicamus, in Radium ducta; hoc est, lR; per §. N. prop. præced.) Sed earundem distantiæ à perpendiculari plano per axem B F, sunt item iidem Sinus recti. Momenta itaque singularum (magnitudine in distantiam ducta) sunt ut Sinuum Quadrata. Adeoque omnium Momenta (respectu rectæ B F) ut *omnia* s^2, summa Quadratorum Sinuum. Hoc est (per §. V. ejusdem) ut spatium E B F G in Radium ductum. Quod quidem spatium E B F G (cum satis innotescat) dicamus k^2; adeoque $k^2 R$ est Momentum expositæ superficiei curvæ Ungularis, respectu rectæ B F. Atque hoc Momentum per Magnitudinem lR divisum; exhibet $\frac{k^2 R}{lR} = \frac{k^2}{l}$ distantiam Centri gravitatis à perpendiculari Plano super A α erecto.

Cumque eadem sit ratio (hoc respectu) Ungularum cujuscunque sint Altitudinis; (utcunque enim aucta Altitudine, adeoque & Magnitudine, & Momento; puta, in ratione P ad R; erit adhuc eadem distantia; $\frac{k^2 P}{lP} = \frac{k^2 R}{lR} = \frac{k^2}{l}$:) Erit cujuscunque Superficiei Ungularis, super Arcum Circuli erectæ, (Aciem habentis, Circuli Diametrum A α,) Distantia Centri gravitatis à perpendiculari plano per ipsam A α, $\frac{k^2}{l}$; hoc est, quæ oritur ex plano E B F G ad rectam B F applicato.

Eademque esset, (dempta curvitate, quæ conversione oritur,) in Superficie conversione facta, à conversionis Axe distantia; (propter singulos Arcus in hac, singulis

singulis in correspondentis Ungulæ superficie curva respectivis rectis, æquales; atque in eadem à conversionis Axe Distantia, qua sunt illæ à parallelo Plano per Aciem suam.) Sed, propter curvaturam conversione factam; minuenda est ea Distantia, pro Ratione quam habet Conversionis Arcus ad Chordam suam; ut jam ostensum est. Puta; in Semiconversione, ut Semiperipheria $\frac{1}{2}P$, ad Diametrum $2R$; in conversione Quadrantali, ut $\frac{1}{4}P$ ad $R\sqrt{2}$: Et, universaliter, ut Arcus a vel m, ad Chordam suam c vel n; sic distantia in Ungula (jam ostensa) $\frac{k^2}{l}$, ad $\frac{k^2c}{la}$ vel $\frac{k^2m}{ln}$ distantiam Centri gravitatis Zonæ imperfectæ, à conversionis Axe.

Sed & in duorum Planorum, prius memoratorum, communi sectione reperiri, supra ostensum est: Ergo, in hujus sectionis eo Puncto quæ sic (ut dictum est) distat. Datur igitur, tum in Ungula, tum in Zona utut imperfecta, ipsum Gravitatis Centrum. Quod erat ultimo ostendendum.

PROP. XV.

Sectoris Circuli (duobus Radiis & Arcu comprehensi) Centrum gravitatis est in Axis sui illo puncto, cujus à Centro Circuli distantia, est ad duos Trientes Radii, ut expositi Arcus Chorda, ad Arcum suum. A. Fig. 158.

Adeoque, in Semicirculo; Ut Semiperipheria ad Diametrum, sic $\frac{2}{3}$ Radii ad distantiam Centri gravitatis Semicirculi à Circuli Centro.

Atque hinc etiam Segmenti circularis (recta abscissi) Centrum gravitatis colligitur: Atque de aliis Portionibus similiter. Cæteraque quæ hinc dependent. B.

Nempe; Si ponatur, in exposito circulo, Radius CA vel CB $=R$; Peripheria integra, P; Arcus BA $=a$, adeoque BAB $=2a$; Chorda BA $=c$; Sinus rectus BV $=s$, adeoque Chorda BB $=2s$: Sinus versus AV $=v$, reliquusque V$\alpha = 2R-v=b$; à Centro Distantia VC $=x=R-v$ si V sit supra Centrum, vel VC $=x=v-R$ si infra, vel VC $=x=0$ si in Centro: Item $a-s=c$; $a+s=f$; $R+v=z$. C. Fig. 159, 160.

Erit totius Semicirculi ADα, Magnitudo, $\frac{1}{4}RP$: Centrique gravitatis, sive à $\tau\alpha$, sive à TA, distantia, R; momentum respectu $\tau\alpha$, vel TA, $\frac{1}{4}R^2P$: Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{8R^2}{3P}$; momentum respectu Aα, $\frac{2}{3}R^3$. D. I. Q.

Sectoris BCA magnitudo $\frac{1}{2}aR$: Centri gravitatis distantia à DC, $\frac{2s}{3a}R$; à $\tau\alpha$, $R+\frac{2s}{3a}R$; à TA, $R-\frac{2s}{3a}R$; momentum ejus, respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}aR^2+\frac{1}{3}sR^2$; momentum ejusdem respectu TA, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{3}sR^2$: Centri gravitatis distantia ab Aα, $\frac{2vR}{3a}$; momentum respectu Aα, $\frac{1}{3}vR^2$. D. I. Q. W.

Trianguli BCV, magnitudo $\frac{1}{2}sx$: Distantia Centri gravitatis à DC, $\frac{2}{3}x$; à $\tau\alpha$, $R\pm\frac{2}{3}x=\frac{5}{3}R-\frac{2}{3}v$; à TA, $R\mp\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}R+\frac{2}{3}v$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sxR\pm\frac{1}{3}sx^2=\frac{5R-2v}{6}sx$; respectu TA, $\frac{1}{2}sxR\mp\frac{1}{3}sx^2=\frac{R+2v}{6}sx$: Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{3}s$; momentum respectu Aα, $\frac{1}{6}s^2x$. E. K. R. T.

Semisegmenti BVA, magnitudo $\frac{1}{2}cR+\frac{1}{2}sv$: Momentum respectu $\tau\alpha$, F.

 $\frac{1}{3}cR^2$

L. $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3$; respectu T A, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$; distantia centri gravitatis à τα, $R+\frac{2s^3}{3eR+3sv}$; à T A, $R-\frac{2s^3}{3eR+3sv}$; à D C, $\frac{2s^3}{3eR+3sv}$; à B V, $\frac{2s^3}{3eR+3sv}-R+v$; momentum respectu B V,
R.T.V. $-\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}avR-\frac{1}{3}s^3$: Momentum respectu Aα, $\frac{1}{2}vR^2-\frac{1}{2}s^2R+\frac{1}{3}s^2v = \frac{1}{6}v^2R+\frac{1}{6}s^2v$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{vR+s^2}{3eR+3sv}v$.

F. Trianguli B A V, magnitudo $\frac{1}{2}sv$: Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{2}{3}v$;
N. à τα, $2R-\frac{2}{3}v$; momentum respectu τα, $svR-\frac{1}{3}sv^2$; respectu TA,
S. $\frac{1}{3}sv^2$: Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{3}s$; momentum respectu Aα, $\frac{1}{6}s^2v$.

G. Segmenti A B A, magnitudo $\frac{1}{2}eR$: Momentum respectu τα, $\frac{1}{2}eR^2+$
N. $\frac{1}{6}svR$; respectu TA, $\frac{1}{2}eR^2-\frac{1}{6}svR$; distantia Centri gravitatis à DC, $\frac{sv}{3e}$;
Q. S. à τα, $R+\frac{sv}{3e}$; à T A, $R-\frac{sv}{3e}$: Momentum respectu Aα, $\frac{1}{6}v^2R$: distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{v^2}{3e}$.

Et similiter de segmento αBα, mutatis mutandis.

H. Trianguli B Cα, magnitudo $\frac{1}{2}sR$: Centri gravitatis distantia à τα,
M. $R-\frac{1}{3}v$; a T A, $R+\frac{1}{3}v$; infra D C, $\frac{1}{3}v$; momentum respectu τα, $\frac{1}{2}sR^2$
S. T. $-\frac{1}{6}svR$; respectu T A, $\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}svR$: Distantia centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{3}s$; momentum respectu Aα, $\frac{1}{6}s^2R$.

H. Trianguli B Vα, magnitudo $\frac{1}{2}sb$: Distantia centri gravitatis à τα, $\frac{2}{3}b$;
M. à T A, $2R-\frac{2}{3}b$; momentum respectu τα, $\frac{1}{3}sb^2$; respectu T A, $sbR-$
S. T. $\frac{1}{3}sb^2$: Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{3}s$; momentum respectu Aα, $\frac{1}{6}s^2b$.

H. Sectoris BαA, magnitudo $\frac{1}{2}fR$: Momentum respectu τα, $\frac{1}{2}fR^2+\frac{1}{6}sbR$;
M. respectu T A, $\frac{1}{2}fR^2-\frac{1}{6}sbR$; distantia centri gravitatis à τα, $R+\frac{sb}{3f}$;
S. à T A, $R-\frac{sb}{3f}$; à D C, $\frac{sb}{3f}$: Momentum respectu Aα, $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R$; Centri gravitatis inde distantia, $\frac{2vR+s^2}{3f}$.

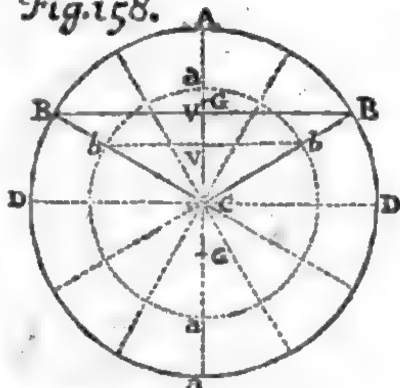
O. Momenta autem eadem sunt ubique & Semiquadrantales Ungulæ: Solidaque respectiva integra conversione facta, sunt ad Ungulas illas, ut *P* ad *R*; & Semisolida, eorum Semisses; quod & proportionaliter intelligendum est de Solidis aliis imperfecta conversione factis.

O. P. X. Quæque de Momentis & Solidis respectu rectarum T A, τα, D C, B V, dicta sunt; facile transferentur ad alias rectas hisce parallelas: Et, quæ respectu Aα, ad alias huic parallelas: Aut (propter ipsa Centra gravitatis Planorum data) ad alias etiam rectas transferentur.

Y. Quæque de Circulo dicta sunt, ejusque Portionibus; eadem Ellipsi, & portionibus hujus, facile accommodantur.

A. Fig. 158. INtelligatur Circuli Sector C B A B, vel C B α B, (major, minor, an æqualis Semicirculo, perinde est:) ex infinitis numero Sectoribus componi: Sive, quod (propter infinitatem) eodem recidit, ex totidem triangulis, invicem æqualibus; (quorum communis vertex sit C Centrum:) per def. 1. Cap. 4. Quæ totidem rectis (ut eorundem Triangulorum Axibus) repræsententur, ut C B. Cumque (per prop. 6 hujus) Centrum gravitatis in Triangulo, Altitudinis Triente à Base distet, (sive, à parallelo plano per Verticem, duobus Trientibus;) Si Radio $Cb = \frac{2}{3}CB$, describatur

describatur peripheria b b, (expositæ B B similis, & similiter posita) transibit hæc per Triangulorum singulorum Centra gravitatis. Cujus itaque cum singula puncta



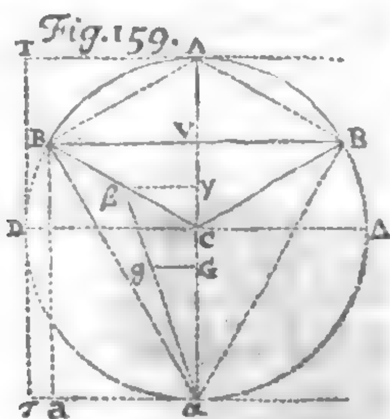
(æqualibus ab invicem distantiis remota) æqualiter onerentur (æqualibus utique Triangulis, quorum Centra gravitatis sustinere intelliguntur :) idem erit arcus b b sic onusti Centrum gravitatis, atque ipsius Sectoris B C B, per 16 Cap. 4. Facto itaque; ut chorda b b ad arcum suum, hoc est, ut Chorda B B ad arcum suum; sic C G, ad radium C b, hoc est, ad $\frac{2}{3}$ C B: (Hoc est, $CG = \frac{2}{3}\frac{c}{a} R$:) Erit G Centrum gravitatis Arcus b b, (per prop. præced.) adeoque & (per jam demonstrata) Sectoris B C B. Quod demonstrandum erat.

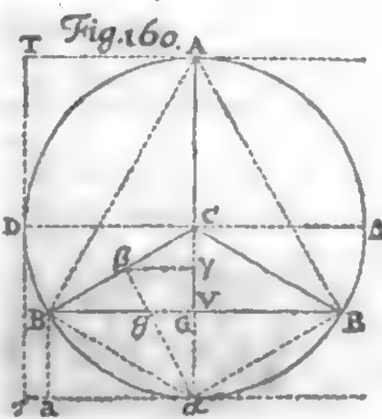
Hoc est, speciatim in Semicirculo; Ut Semiperipheria $\frac{1}{2}P$; ad Chordam suam, hoc est, ad Circuli Diametrum, $2R$: sic duo Trientes Radii, $\frac{2}{3}R$; ad $\frac{8R^2}{3P} = CG$, distantiam Centri gravitatis Semicirculi (in axe suo positi) à Circuli Centro C.

B. Corollarium, de Circuli Segmento; constat ex 27 Cap. 4. Quippe cognitis tum magnitudine, tum Centro gravitatis, Sectoris C B A B, vel C B α B, & Trianguli B B C: Cognoscitur inde tum Magnitudo tum Centrum gravitatis Segmenti B B A, vel B B α.

Idemque in aliis Circuli portionibus ostendetur.

C. Fig. 159, 160. Exempli gratia. In exposito Circulo, sit Radius C A (vel C B) $= R$: Integra Peripheria, P: Arcus B A $= a$: Adeoque B A B $= 2a$: Chorda B A $= c$: Sinus rectus B V $= s$; adeoque Chorda B B $= 2s$: Hujusque ab A vertice distan-





tia, (hoc est, Segmenti B B A altitudo, vel expositi arcus B A sinus versus) V A $= v$: ejusque Altitudo seu distantia à base, V α $= 2R - v = b$; ejusque à Centro C distantia V C $= x$; (eritque $x = R - v$, si V sit supra Centrum C, adeoque BAB minor quam Semiperipheria; vel $x = v - R$, si V sit infra Centrum, adeoque B A B major quam Semiperipheria; vel denique $x = 0$, si V sit in Centro, adeoque B A B Semiperipheria:) Item $a - s = e$; $a + s = f$; $R + v = z$.

 Est

D. Est itaque Sectoris BCBA magnitudo aR, (nempe $\frac{1}{2}$ BAB × CA, per prop. 12

Fig. 159, 160. hujus;) ejusque Semissis BCA, $\frac{1}{2}aR$. Et, speciatim, totius Semicirculi, (propter $a = \frac{1}{2}P$,) $\frac{1}{4}RP$.

E. Item Trianguli BBC magnitudo $\frac{1}{2}$ BB × CV (per prop. 6 hujus;) hoc est sx: (Nempe, $sR - sv$, si V fuerit supra Centrum; vel $sv - sR$, si infra:) Adeoque BCV $= \frac{1}{2}sx$: Hoc est, $\frac{1}{2}sR - \frac{1}{2}sv$, si supra; vel $\frac{1}{2}sv - \frac{1}{2}sR$, si infra.

F. Adeoque, Si à Sectore BCBA $= aR$, Auferatur Triangulum BBC $= sR - sv$; vel Addatur Triangulum BBC $= sv - sR$; (prout fuerit V supra infrave Centrum:) utrovis casu habetur Segmentum BBA $= (aR \mp sx =)\ aR - sR + sv = eR + sv$. Adeoque BVA $= \frac{1}{2}aR \mp \frac{1}{2}sx = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sv = \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$.

Hoc est: Si inscripto (in Circuli Segmento) Triangulo æquialto ABB $(= sv)$ addatur Triangulum aliud $(aR - sR = eR)$ cujus nempe Basis sit æqualis Circuli Radio $(= R)$ & Altitudo $(= 2a - 2s = 2e)$ æqualis excessui Arcus supra subtensam: Habetur Segmenti BBA magnitudo; $aR - sR + sv = eR + sv$. Ejusque Semissis, Semisegmentum BVA $= \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sv = \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$.

G. Adeoque, duo simul Segmenta abscissa AB, AB, (quæ, cum inscripto Triangulo, complent Segmentum BBA,) æquant $aR - sR = eR$, & eorum utrumvis $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}eR$.

Hoc est; Si $(a - s = e)$ excessus Arcus BA supra suum Sinum rectum BV, ducatur in $(\frac{1}{2}R)$ Semissem Radii: Habetur magnitudo Segmenti BA; $= \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}eR$.

H. Si vero Segmento BBA $(= eR + sv,)$ adjiciatur Triangulum BBα $(= bs:)$ Habetur Sector BαBA (angulum habens BαB in peripheria, & BAB arcum,) $eR + sv + sb$; hoc est (propter $v + b = 2R$,) $eR + 2sR$; vel (propter $e = a - s$,) $aR + sR = fR$. Adeoque BαA $= \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}fR$.

(Idem proveniret, si Sectori BCBA $= aR$, adderentur duo Triangula BCα, BCα; quorum communis Basis est Cα $= R$, & utriusvis Altitudo BC $= s$: adeoque simul utraque sR. Hoc est, BαBA $= aR + sR = fR$: Et BαA $= \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}fR$.)

Hoc est; Si $(a + s = f)$ aggregatum Arcus BA, & Sinus Recti BV; ducatur in Semissem Radii $(= \frac{1}{2}R:)$ Habetur Sector BαA $= \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}fR$.

I. Similiter de Centro Gravitatis procedendum.

Nempe, (per jam demonstrata ad hanc propositionem § A,) Sectoris BCBA (sive Semicirculo major sit, sive minor, sive ipsi æqualis) Centrum gravitatis est in CA recta, supra Centrum C, quantum est $\frac{2s}{3a}R$. Nempe ea ratione ad $\frac{2}{3}R$, quæ est Chordæ BB $= 2s$, ad arcum BAB $= 2a$; sive ut s ad a:) Adeoque illius, à puncto α, seu τα tangente, distantia est $R + \frac{2s}{3a}R = \frac{3a + 2s}{3a}R$. Adeoque à TA (tangente verticis) $R - \frac{2s}{3a}R = \frac{3a - 2s}{3a}R$. Eademque est, ab eisdem τα, TA, distantia Centri gravitatis semisectoris BCA; Propter dimidias BV & huic parallelas semisectorem complentibus, totis BB & huic parallelis complentibus Sectorem integrum, proportionales, & in eisdem cum illis distantiis sive à τα, sive à TA. (Quod & similiter intelligendum erit de Semi-conis, Semisegmentis, &c. quorum Centra gravitatis sive à Basis plano, sive à Plano verticis basi parallelo, tantundem distant, quantum inde distant Centra gravitatis integrorum suorum sive Conorum, sive Segmentorum, &c. Quod semel monitum esto, ne opus sit idem sæpius repetere.) Et, speciatim, Semicirculi ADα, Centri gravitatis (utpote in DC jacentis) distantia sive à τα, sive à TA, est $R =$ Cα $=$ CA.

Adeoque (propter magnitudinem Sectoris BCBA $= aR$, & BCA $= \frac{1}{2}aR$,) Momentum (respectu rectæ τα ut Axis Libræ) Sectoris BCBA, est $\frac{3a + 2s}{3}R^2$, (magnitudine scilicet in distantiam ducta;) & Semisectoris BCA, $\frac{3a + 2s}{6}R^2$.

Et,

Et, respectu rectæ T A, momentum Sectoris B C B A, est, $\frac{3a-2s}{3}R^2$, & ipsius B C A, $\frac{3a-2s}{6}R^2$. Et speciatim, totius Semicirculi A D α, momentum sive respectu $\tau\alpha$, sive respectu T A, (propter $a=\frac{1}{2}P$, & $s=0$,) est $\frac{1}{4}R^2P$. Fig. 159, 160.

Estque (per 5 & 6 hujus) Trianguli B B C, Centrum gravitatis in C V, ejusque à C Centro distantia $\frac{2}{3}$C V $=\frac{2}{3}x$. Adeoque à $\tau\alpha$, $R\pm\frac{2}{3}x$; prout infra suprave Centrum fuerit; (nempe $R+\frac{2}{3}x$ si supra; $R-\frac{2}{3}x$ si infra Centrum;) Hoc est (propter $x=R-v$ si supra Centrum, & $x=v-R$ si infra Centrum,) utroque casu, $\frac{5}{3}R-\frac{2}{3}v$. Adeoque ejusdem à T A distantia, $R\mp\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}R+\frac{2}{3}v$. K.

Est, autem (ut supra, § E,) magnitudo Trianguli B B C $=sx$; (hoc est, $sR-sv$ si supra, vel $sv-sR$ si infra Centrum.)

Quod ductum in Centri gravitatis distantiam a $\tau\alpha$, $R\pm\frac{2}{3}x=\frac{5}{3}R-\frac{2}{3}v$; exhibet ejusdem, respectu rectæ $\tau\alpha$, momentum $sxR\pm\frac{2}{3}sx^2=\frac{5R-2v}{3}sx$; Hoc est $\frac{5sR^2-7svR+2sv^2}{3}$, vel $\frac{-5sR^2+7svR-2sv^2}{3}$; prout supra infrave fuerit.

Idemque ductum in ejusdem à T A distantiam, $R\mp\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}R+\frac{2}{3}v$; exhibet ejusdem B B C Trianguli momentum respectu rectæ T A, $sxR\mp\frac{2}{3}sx^2$; hoc est $\frac{sR^2+svR-2sv^2}{3}$ vel $\frac{-sR^2-svR+2sv^2}{3}$, prout supra infrave Centrum fuerit.

Aut etiam (propter A α, A B, A V; hoc est $2R$, c, v; continue proportionales: adeoque $2vR=c^2=s^2+v^2$:) Illic quidem $\frac{5sR^2-3svR-2s^3}{3}$ vel $\frac{-5sR^2+3svR+2s^3}{3}$: Hic vero $\frac{sR^2-3svR+2s^3}{3}$, vel $\frac{-sR^2+3svR-2s^3}{3}$; prout supra infrave Centrum fuerit hoc Triangulum.

(Atque hic monendum duxi; quod oppido notandum velim, ne sit opus idem sæpius repetere: Hanc reductionem in sequentibus sæpissime occurrere. Nempe, propter $2vR=c^2=s^2+v^2$; quoties occurrit c^2 vel v^2; pro c^2 substitui $2vR$; &, pro v^2, substitui c^2-s^2, hoc est $2vR-s^2$. Omnino enim expedire compertum habeo, ut unam aliquam formam designandi eandem quantitatem adhiberem; ad quam æquipollentes aliæ reducantur quum opus fuerit; ne symbolorum varietas confusionem pareret. Quod memineris velim, ne, in reductionibus à nobis subinde crebro faciendis, aliquando hæreas.)

Atque hoc Trianguli Momentum, respective Subtractum Additumve, (prout supra Centrum infrave fuerit,) Momento Sectoris B C B A, (nempe, $aR^2+\frac{2}{3}sR^2$ respectu rectæ $\tau\alpha$, & $aR^2-\frac{2}{3}sR^2$ respectu rectæ T A,) exhibet (utroque casu) Momentum Segmenti B B A respectu rectæ $\tau\alpha$, $aR^2-sR^2+svR+\frac{2}{3}s^3=eR^2+svR+\frac{2}{3}s^3$; & semisegmenti B V A, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3=\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3$: Et, respectu rectæ T A, Momentum Segmenti B B A, $aR^2-sR^2+svR-\frac{2}{3}s^3=eR^2+svR-\frac{2}{3}s^3$; & semisegmenti B V A, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3=\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$. L.

Quæ quidem momenta, per magnitudinem segmenti B B A $=eR+sv$, aut semisegmenti B V A $=\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$, (respective,) divisa: exhibent Segmenti, aut Semisegmenti, distantiam à $\tau\alpha$, $R+\frac{2s^3}{3eR+3sv}$: Atque à T A, $R-\frac{2s^3}{3eR+3sv}$: Adeoque illius altitudinem supra Centrum C, aut C D rectam, $\frac{2s^3}{3eR+3sv}$, hoc est $\frac{2s^3}{3aR-3sR+3sv}$: Et supra rectam BB, seu BV, $\frac{2s^3}{3eR+3sv}-R+v=\frac{2s^3}{3aR-3sR+3sv}-R+v$.

Atque

Fig. 159, 160. Atque hæc demum, à B V, distantia; in magnitudinem ducta; exhibet momentum, respectu rectæ B V, Segmenti B B A, $\frac{2}{3}s^3 - aR^2 + sR^2 + avR - 2svR + sv^2 = -eR^2 + avR - \frac{1}{3}s^3$. Et semisegmenti B V A, $-\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}avR - \frac{1}{6}s^3 = \mp\frac{1}{2}exR + \frac{1}{6}szv$.

M. Deinde, Trianguli B B α, aut B V α, distantia Centri gravitatis à τα, est $\frac{2}{3}b = \frac{4}{3}R - \frac{2}{3}v$: adeoque à T A, $2R - \frac{2}{3}b = \frac{2}{3}R + \frac{2}{3}v$. Quæ in magnitudines ($sb$, $\frac{1}{2}sb$,) ducta; exhibet Trianguli B B α, momentum respectu τα, $\frac{2}{3}sb^2 = \frac{8}{3}sR^2 - \frac{8}{3}svR + \frac{2}{3}sv^2 = \frac{8}{3}sR^2 - \frac{4}{3}svR - \frac{2}{3}s^3$; &, respectu T A, $2sbR - \frac{2}{3}sb^2 = \frac{4}{3}sR^2 + \frac{2}{3}svR - \frac{2}{3}sv^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR + \frac{2}{3}s^3$, & Trianguli B V α, momentum respectu rectæ τα, $\frac{1}{3}sb^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$; &, respectu rectæ T A, $sbR - \frac{1}{3}sb^2 = \frac{2}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$.

Quæ quidem momenta, addita respectivis momentis Segmenti B B A, & Semisegmenti B V A, (§ L inventis) exhibent Sectorum B α B A, B α A, momenta respectu earundem τα, T A. Nempe, Sectoris B α B A momentum respectu τα, $aR^2 + \frac{2}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR = fR^2 + \frac{1}{3}sbR$; & respectu rectæ T A, $aR^2 + \frac{1}{3}sR^2 + \frac{1}{3}svR = fR^2 - \frac{1}{3}sbR$: Et Sectoris B α A, momentum respectu rectæ τα, $\frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}sbR$; & respectu T A, $\frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}sbR$.

Eodem modo; Trianguli B C α, Centrum gravitatis est in recta αβ, quæ à puncto α ad medium rectæ B C ducitur, ejusdem αβ duas tertias versus α abscindens. Est autem ipsius medii puncti β, eadem altitudo supra τα, quam habet rectæ C V medium punctum γ; nempe $\alpha\gamma = R \pm \frac{1}{2}x$ (prout supra infrave Centrum fuerit V punctum;) hoc est, (utroque casu) $\alpha\gamma = \frac{3}{2}R - \frac{1}{2}v$. Adeoque distantia Centri gravitatis Trianguli B C α, à τα est $\frac{2}{3}\alpha\gamma = R - \frac{1}{3}v$; atque à T A, $R + \frac{1}{3}v$.

Adeoque (propter magnitudinem Trianguli unius B C α $= \frac{1}{2}sR$, & simul amborum 2 B C α $= sR$,) erit unius momentum respectu rectæ τα, $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$, & simul utriusque $sR^2 - \frac{1}{3}svR$: Et, respectu rectæ T A, momentum unius $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; & simul utriusque $sR^2 + \frac{1}{3}svR$.

Quæ quidem addita momentis Sectorum B C A, & B C B A, nempe $\frac{1}{2}aR^2 \pm \frac{1}{3}sR^2$, & $aR^2 \pm \frac{2}{3}sR^2$ (per § I.) exhibent momentum, respectu rectæ τα, Sectoris B α A, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2 - \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}sbR$; & sectoris B α B A, $fR^2 + \frac{1}{3}sbR$: Et respectu rectæ T A, momentum Sectoris B α A, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}sbR$; & Sectoris B α B A, momentum $fR^2 - \frac{1}{3}sbR$, ut prius.

Atque hæc demum momenta, per suas respective planorum magnitudines ($\frac{1}{2}fR$, fR,) divisa; exhibent utriusvis Sectoris B α A, B α B A, Centri gravitatis distantiam à τα, $R + \frac{sb}{3f}$; & à T A, $R - \frac{sb}{3f}$; Adeoque altitudinem ejus supra Centrum C, vel C D rectam, $\frac{sb}{3f} = \frac{2sR - sv}{3a + 3s}$.

N. Similiter, Trianguli A B V, magnitudo, est $\frac{1}{2}sv$; distantia centri gravitatis à T A, est $\frac{2}{3}v$; adeoque, à τα, $2R - \frac{2}{3}v$; & propterea ejusdem momentum respectu τα, $svR - \frac{1}{3}sv^2 = \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$: &, respectu T A, $\frac{1}{3}sv^2 = \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$.

Quæ quidem momenta, subducta ex respectivis momentis Semisegmenti B V A, (nempe, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR \pm \frac{1}{3}s^3$, per § L.) relinquit Segmenti A B A momentum respectu τα, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{6}svR$; &, respectu T A, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}eR^2 - \frac{1}{6}svR$.

Atque hæc momenta, divisa per sectoris A B A magnitudinem, $\frac{1}{2}eR$ (per § G.) exhibent distantiam Centri gravitatis à τα, $R + \frac{sv}{3e}$; & à T A, $R - \frac{sv}{3e}$; adeoque suprà D C, $\frac{sv}{3e} = \frac{sv}{3a - 3s}$.

Pariter, de Segmento α B α judicandum; puta, pro arcu A B $= a$, substituendo arcum reliquum ad Semicirculum α B $= \alpha = \frac{1}{2}P - a$: & pro sinu verso A V $= v$, substituendo α V $= b = 2R - v$; item pro T A tangente contermino arcui A B, substituendo τα tangentem conterminum ipsi α B; &, vice versa, T A pro τα.

Quippe

Quippe sic momentum Segmenti $\alpha B \alpha$, respectu Tangentis oppositi T A, erit $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2} s R^2 + \frac{1}{6} s b R$; &, respectu Tangentis contermini $\tau\alpha$, erit $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2} s R^2 - \frac{1}{6} s b R$. Fig. 159, 160.

Aut etiam, ex $\frac{1}{4} P R^2$ momento totius Semicirculi A D α, respectu Tangentis utriusvis $\tau\alpha$ vel T A, auferendo $\frac{1}{2} a R^2 + \frac{1}{6} s R^2 - \frac{1}{6} s v R$ momentum sectoris B α A respectu ipsius $\tau\alpha$ (per § M.) habetur residui ad semicirculum Segmenti $\alpha B \alpha$ respectu ejusdem $\tau\alpha$ momentum $\frac{1}{4} P R^2 - \frac{1}{2} a R^2 - \frac{1}{6} s R^2 + \frac{1}{6} s v R$; hoc est (propter $\frac{1}{2} P - a = \alpha$, & $v = 2R - b$,) $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2} s R^2 - \frac{1}{6} s b R$: Atque similiter inde subducendo ejusdem B α A sectoris momentum respectu T A, $\frac{1}{2}\alpha R^2 + \frac{1}{6} s R^2 + \frac{1}{6} s v R$; habetur segmenti $\alpha B \alpha$, respectu ejusdem T A, momentum $\frac{1}{4} P R^2 - \frac{1}{2} a R^2 - \frac{1}{6} s R^2 - \frac{1}{6} s v R$; hoc est (propter $\frac{1}{2} P - a = \alpha$, & $v = 2R - b$,) $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2} s R^2 + \frac{1}{6} s b R$. ut prius.

Et simili ratione, mutatis mutandis, eorundem expositorum omnium Planorum momenta respectu alius rectæ ipsis $\tau\alpha$, T A, B V, parallelæ; cujus distantia infra vel supra harum aliquam datur. O.

Quodque de horum Planorum Momentis respectu rectarum $\tau\alpha$, T A, B V, aut hisce parallelarum, dictum est; pariter intelligendum est de Ungulis super eadem plana erectis, quæ plano abscindantur per easdem respective $\tau\alpha$, T A, B V, vel hisce parallelas, (quæ expositum planum non secent,) transeunte. Nempe; Si secantis plani ad expositum, inclinationis angulus sit Semiquadrantalis seu grad. 45, (quam *Semiquadrantalem Ungulam* dicimus;) eadem erit (per 11 hujus) Ungulæ atque Momenti designatio. (Erit enim Ungulæ altitudo, super quodvis expositi plani punctum, eadem atque ejusdem puncti ab illa recta quæ est communis planorum intersectio quam *Ungulæ aciem* dicimus, distantia.) Sin major fuerit minorve Inclinationis Angulus; major erit minorve illa Ungula; & quidem in ratione Tangentium Anguli Inclinationis. Nempe Solido Prismatico seu Columnari æquatur; cujus Basis, sit expositum Planum; Altitudo, æqualis altitudini rectæ Centro gravitatis insistentis; (ut ad prop. 11. ostensum est;) Hoc est, (si angulus Inclinationis sit Semiquadrantalis,) æqualis distantiæ Centri gravitatis ab illa recta quæ concipitur vel ut Axis motus, vel ut planorum, expositi & secantis, communis sectio, seu Acies Ungulæ.

Denique; Eadem quæ diximus Momenta, exhibent etiam Magnitudinem Solidi, quod expositorum Planorum circa expositas rectas conversione describitur; (per 12 hujus.) Nempe, in ea ratione ad momenta ut jam designata, vel Ungulas Semiquadrantales, quam habet Peripheria (integra, vel dimidia, &c. prout conversio illa est integra vel dimidia, &c.) ad sui Circuli Radium. Est enim distantia Centri gravitatis plani, ab exposita recta, Radius istius Peripheriæ (sive perfectæ, sive imperfectæ) quæ conversione Centri gravitatis circa illam rectam describitur.

Puta, Sectoris B C A, respectu rectæ $\tau\alpha$ Momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, est (ut supra, § I.) $\frac{1}{2} a R^2 + \frac{1}{3} s R^2$; & respectu rectæ T A, $\frac{1}{2} a R^2 - \frac{1}{3} s R^2$. Ergo Solidum Annulare, illius integra conversione circa $\tau\alpha$ factum, est, $\frac{1}{2} a R P + \frac{1}{3} s R P$; &, semiconversione, $\frac{1}{4} a R P + \frac{1}{6} s R P$: Et, circa T A, integra conversione, $\frac{1}{2} a R P - \frac{1}{3} s R P$; & semiconversione, $\frac{1}{4} a R P - \frac{1}{6} s R P$.

Item, Sectoris B α A, respectu rectæ $\tau\alpha$, Momentum, vel Semiquadrantalis Ungulæ, (ut § M.) est $\frac{1}{2} a R^2 + \frac{1}{6} s R^2 - \frac{1}{6} s v R = \frac{1}{2} f R^2 + \frac{1}{6} s b R$; & respectu rectæ T A, $\frac{1}{2} a R^2 + \frac{1}{6} s R^2 + \frac{1}{6} s v R = \frac{1}{2} f R^2 - \frac{1}{6} s b R$. Ergo, Solidum illius integra conversione circa $\tau\alpha$ descriptum, est, $\frac{1}{2} a R P + \frac{1}{6} s R P - \frac{1}{6} s v P = \frac{1}{2} f R P + \frac{1}{6} s b P$; &, conversione dimidia, $\frac{1}{4} a R P + \frac{1}{12} s R P - \frac{1}{12} s v P = \frac{1}{4} f R P + \frac{1}{12} s b P$: Atque, circa TA, conversione integra, $\frac{1}{2} a R P + \frac{1}{6} s R P + \frac{1}{6} s v P = \frac{1}{2} f R P - \frac{1}{6} s b P$; &, conversione dimidia, $\frac{1}{4} a R P + \frac{1}{12} s R P + \frac{1}{12} s v P = \frac{1}{4} f R P - \frac{1}{12} s b P$.

Item, Semisegmenti BVA, respectu ipsius $\tau\alpha$ Momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, est (per § L.) $\frac{1}{2} a R^2 - \frac{1}{2} s R^2 + \frac{1}{2} s v R + \frac{1}{3} s^3 = \frac{1}{2} e R^2 + \frac{1}{2} s v R + \frac{1}{3} s^3$; Et, respectu T A, $\frac{1}{2} a R^2 - \frac{1}{2} s R^2 + \frac{1}{2} s v R - \frac{1}{3} s^3 = \frac{1}{2} e R^2 + \frac{1}{2} s v R - \frac{1}{3} s^3$. Ergo Solidum illius integra conversione circa $\tau\alpha$ descriptum, est, $\frac{1}{2} a R P - \frac{1}{2} s R P + \frac{1}{2} s v P + \frac{s^3 P}{3R} = \frac{1}{2} e R P + \frac{1}{2} s v P + \frac{s^3 P}{3R}$; & conversione dimidia, $\frac{1}{4} a R P$

 $-\frac{1}{4} s R P$

Fig. 159, 160. $-\frac{1}{4}sRP+\frac{1}{4}svP+\frac{s^3P}{6R}=\frac{1}{4}eRP+\frac{1}{4}svP+\frac{s^3P}{6R}$: Ac, circa T A, conversione integra; $\frac{1}{2}aRP-\frac{1}{2}sRP+\frac{1}{2}svP-\frac{s^3P}{3R}=\frac{1}{2}eRP+\frac{1}{2}svP-\frac{s^3P}{3R}$; & conversione dimidia, $\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{4}sRP+\frac{1}{4}svP-\frac{s^3P}{6R}=\frac{1}{4}eRP+\frac{1}{4}svP-\frac{s^3P}{6R}$.

Item, ejusdem Semisegmenti B V A, respectu rectæ B V, momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, est (per § L.) $-\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}avR-\frac{1}{6}s^3$. Ergo Solidi illius circa BV, conversione integra, descriptum, est $-\frac{1}{2}eRP+\frac{1}{2}avP-\frac{s^3P}{6R}$; & conversione dimidia, $-\frac{1}{4}eRP+\frac{1}{4}avP-\frac{s^3P}{12R}$.

Quodque hic de Semisolidis, (intellige, quæ conversione dimidia describuntur,) ostensum est; quæ sunt Integrorum dimidia: Similiter de aliis, quæ conversionibus aliis imperfectis, (puta Quadrantali, &c.) describuntur; servata proportione, judicandum erit. Quod & in sequentibus pariter intelligendum erit.

Quodque, de Solidis, Planorum horum conversione circa rectas $\tau\alpha$, T A, B V, ostensum est; similiter ad alia, mutatis mutandis, accommodabitur, quæ eorundem planorum, circa aliam quamvis in eodem plano rectam illis parallelam (quæ planum convertendum non secet,) in quacunque ab illis distantia, infra supreve, positam, conversione describuntur.

P. Atque jam quidem, quod ad Sectores integros BCBA, BαBA, & integrum Segmentum B B A, &c. quorum non modo Centri gravitatis altitudo, (puta quantum distat à $\tau\alpha$, T A, B V, vel C D, &c.), sed ipsa Centra jam determinantur (ut quæ sint, in altitudine designata, in ipso Axe, puta Aα recta, per 5 hujus:) Illorum Momenta, Ungulæ, & Solida conversione facta, satis determinantur; non modo respectu rectæ quæ sit ipsis $\tau\alpha$, T A, &c. parallela, sed respectu rectæ cujusvis expositæ utcunque in illo plano sitæ (saltem quæ convertenda Plana, seu, Ungulæ Basin, non secet.) Nam, propter datum ipsum gravitatis Centrum, datur etiam ejusdem distantia à quavis sic exposita recta: Unde reliqua consequuntur.

Quod etiam, de Sectore BCA, Segmentis ABA, αBα, Triangulis BVC, BCα, &c. similiter intelligendum est: utpote quorum ipsa Centra gravitatis non minus determinantur, quam ipsorum BCBA, BBC; quippe in illorum axe posita.

Sed Semisectoris BαA, & Semisegmenti BVA; quorum Centra Gravitatis nondum ipsa determinantur, sed ipsorum tantum à $\tau\alpha$, T A, vel quæ hisce parallelæ sunt rectis, Distantia: Momenta, Ungulæ, & Solida conversione facta, nondum determinantur, nisi respectu ipsarum $\tau\alpha$, T A, rectarum, aut hisce parallelarum. Quum vero eorum item Centrorum distantia ab Aα determinata fuerit (quod jam facturi sumus;) adeoque illorum Centra ipsa determinata; eadem etiam ad rectas ipsi Aα parallelas, aut etiam alias in eodem plano rectas, similiter transferentur.

Ut igitur, de his etiam, eadem universaliter determinentur: eorum ipsa Gravitatis Centra jam determinabimus, (per 26 Cap. præced.) exhibita eorum etiam ab Aα distantia, quæ ipsis $\tau\alpha$, T A, &c. parallela non est.

Q. Nempe; Centri gravitatis Sectoris BCA, à recta Aα, distantia, est $\frac{c^2}{3a}=\frac{2vR}{3a}$.

Fig. 161, 162. Quod sic ostenditur. Bisectis B A, B A, arcubus in δ, δ; erit (propter arcum $\delta\delta$, æqualem arcui B A $=a$,) Chorda $\delta\delta=$ B A $=c$; ejusque semissis $\delta\iota=\frac{1}{2}c$. Item Sectoris B C A, Centrum gravitatis G, in recta Cδ; ejusque à Centro distantia C G $=\frac{2c}{3a}R$; (per hujus § A.) Atque (propter similia Triangula) ut C$\delta=R$, ad $\delta\iota=\frac{1}{2}c$; sic C G $=\frac{2c}{3a}R$, ad G e $=\frac{c^2}{3a}$, distantiam Centri gravitatis ab Aα;

Vel

Fig. 161.

Fig. 162.

vel (propter $2vR = c^2$,) $\frac{2vR}{3a}$. Et, speciatim, in Semicirculo A D α, (propter $v = 2R$, & $a = \frac{1}{2}P$,) distantia Centri gravitatis ab A α, est $\frac{8R^2}{3P}$. In Quadrante vero A D C, propter $v = R$, & $a = \frac{1}{4}P$) distantia Centri gravitatis ab A α, est similiter $\frac{8R^2}{3P}$.

Est igitur, (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}aR$, per § D,) Sectoris B C A, respectu rectæ A α, Momentum vel Ungula Semiquadrantalis, (ducta magnitudine in distantiam,) $\frac{1}{6}c^2R = \frac{1}{3}vR^2$. Adeoque Solidum integra conversione circa A α descriptum, $\frac{1}{6}c^2P = \frac{1}{3}vRP$; &, conversione dimidia, $\frac{1}{12}c^2P = \frac{1}{6}vRP$. Et, speciatim, Momentum Semicirculi A D α respectu A α, vel correspondens Ungula, $\frac{2}{3}R^3$: Et solidum conversione circa A α factum (nempe Sphæra integra) $\frac{2}{3}R^2P$; & Semisolidum, seu Hemisphærium, $\frac{1}{3}R^2P$. Fig. 159, 160.

Quæque Quadrantem spectant, sunt eorum Semisses.

Sin, ex hoc Sectoris B C A momento $\frac{1}{6}c^2R = \frac{1}{3}vR^2$; auferatur momentum (respectu ejusdem A α) Trianguli A B C; hoc est (propter Basin A C $= R$; altitudinem B V $= s$, adeoque à base A C distantiam, $\frac{1}{3}s$,) $\frac{1}{6}s^2R$: Habetur, segmenti A B A, momentum (respectu ejusdem A α) $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R = \frac{1}{6}c^2R - \frac{1}{6}s^2R = \frac{1}{6}v^2R$. Quod, per magnitudinem $\frac{1}{2}eR$ (per § G,) divisum; exhibet Centri gravitatis ab A α distantiam $\frac{v^2}{3e} = \frac{2vR - s^2}{3a - 3s}$. Solidumque ejusdem integra conversione circa A α, $\frac{1}{3}vRP - \frac{1}{6}s^2P = \frac{1}{6}v^2P$; & conversione dimidia, $\frac{1}{6}vRP - \frac{1}{12}s^2P = \frac{1}{12}v^2P$.

Et similiter de segmento α B α, mutatis mutandis: Puta, substitutis α pro a, & b pro v.

Deinde, Trianguli B V C, distantia centri gravitatis ab A α, (per 6 hujus) est $\frac{1}{3}$ B V $= \frac{1}{3}s$. Adeoque (propter magnitudinem, ut prius $\frac{1}{2}sx$; hoc est, $\frac{1}{2}sR - \frac{1}{2}sv$, vel $\frac{1}{2}sv - \frac{1}{2}sR$, prout supra infrave Centrum fuerit;) ejusdem, respectu rectæ A α, Momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, est $\frac{1}{6}s^2x$; hoc est $\frac{1}{6}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$, vel $\frac{1}{6}s^2v - \frac{1}{6}s^2R$, prout supra infrave fuerit. Adeoque Solidum integra conversione circa A α factum, est, $\frac{s^2xP}{6R}$; (hoc est, $\frac{R-v}{6R}s^2P$, vel $\frac{v-R}{6R}s^2P$, prout supra ve infrave fuerit:) Et, semiconversione, $\frac{s^2xP}{12R}$; hoc est (prout supra infrave fuerit) $\frac{R-v}{12R}s^2P$, vel $\frac{v-R}{12R}s^2P$. R.

Illudque Trianguli B V C momentum vel semiquadrantalis Ungula, momento vel Ungulæ semiquadrantali Sectoris B C A (respectu ejusdem A α rectæ,) sublatum si supra Centrum fuerit, vel additum si infra; exhibet Momentum (respectu ejusdem A α) vel semiquadrantalem Ungulam correspondentem, Semisegmenti B V A. Hoc est, si momento Sectoris B C A, $\frac{1}{6}c^2R = \frac{1}{3}vR^2$ (per § Q.) aufe-

Fig. 159, 160. ratur $\frac{1}{6}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$, vel addatur $-\frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$; habetur Semisegmenti BVA Momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) respectu ipsius Aα, $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$. Adeoque Solidum illius integra conversione circa Aα descriptum, $\frac{1}{3}vRP - \frac{1}{6}s^2P + \frac{s^2vP}{6R}$: & Semiconversione, $\frac{1}{6}vRP - \frac{1}{12}s^2P + \frac{s^2vP}{12R}$. Centrique gravitatis, ejusdem BVA Semisegmenti distantia ab Aα, (diviso Momento per magnitudinem §F inventam) erit $\frac{\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v}{\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sv} = \frac{2vR^2 - s^2R + s^2v}{3cR + 3sv}$.

Aut etiam, propter $2vR - s^2 = c^2 - s^2 = v^2$; Momentum erit $\frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}s^2v$; Solidum conversione integra factum $\frac{1}{6}v^2P + \frac{s^2vP}{6R}$; &, conversione dimidia, $\frac{1}{12}v^2P + \frac{s^2vP}{12R}$; & distantia centri gravitatis ipsius Semisegmenti BVA, ab Aα, $\frac{v^2R + s^2v}{3cR + 3sv} = \frac{vR + s^2}{3cR + 3sv}v$.

S. Si autem, ex hoc Semisegmenti BVA momento $\frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}s^2v$, auferamus momentum Trianguli BAV (respectu ejusdem Aα) $\frac{1}{6}s^2v$ (est enim Basis AV $= v$, altitudo BV $= s$, Centrique gravitatis à base distantia $\frac{1}{3}s$; adeoque momentum $\frac{1}{6}s^2v$:) relinquitur Segmenti ABA (respectu ejusdem Aα) momentum, $\frac{1}{6}v^2R$. Ut prius.

Similiter; Distantia Centri gravitatis Trianguli BCα, à recta Aα, est (per 6 hujus) $\frac{1}{3}$BV $= \frac{1}{3}s$; ejusque magnitudo $\frac{1}{2}sR$. Ergo illius (respectu rectæ Aα) Momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, est $\frac{1}{6}s^2R$: Adeoque Solidum integra conversione circa Aα factum, $\frac{1}{6}s^2P$, & conversione dimidia, $\frac{1}{12}s^2P$.

Trianguliquе BCα momentum illud $\frac{1}{6}s^2R$, additum Sectoris BCA momento (§Q reperto) $\frac{1}{3}vR^2 = \frac{1}{6}c^2R$: exhibet Sectoris B$\alpha$A (respectu ejusdem A$\alpha$) Momentum, vel Semiquadrantalem Ungulam, $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R = \frac{1}{6}c^2R + \frac{1}{6}s^2R$: Solidumque integra conversione circa Aα factum, $\frac{1}{3}vRP + \frac{1}{6}s^2P = \frac{1}{6}c^2P + \frac{1}{6}s^2P$; & Semisolidum, $\frac{1}{6}vRP + \frac{1}{12}s^2P = \frac{1}{12}c^2P + \frac{1}{12}s^2P$.

Aut etiam; Propter Trianguli BVα magnitudinem $\frac{1}{2}sb = \frac{1}{2}sR - \frac{1}{2}sv$; & Centri gravitatis ab Aα distantiam $\frac{1}{3}s$; erit ejusdem, respectu Aα, momentum $\frac{1}{6}s^2b = \frac{1}{6}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$: Et solidum ejusdem circa Aα integra conversione factum, $\frac{s^2bP}{6R} = \frac{1}{6}s^2P - \frac{s^2vP}{6R}$; & Semisolidum, $\frac{s^2bP}{12R} = \frac{1}{12}s^2P - \frac{s^2vP}{12R}$.

Trianguliquе BVα momentum illud $\frac{1}{6}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$; semisegmenti BVA momento $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$ (§R reperto) additum; exhibet Sectoris BαA (respectu ejusdem Aα) momentum, seu semiquadrantalem Ungulam $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R$. Ut prius. Adeoque (ut prius) Solidum, $\frac{1}{3}vRP + \frac{1}{6}s^2P$; & Semisolidum $\frac{1}{6}vRP + \frac{1}{12}s^2P$.

Eritque (momento per magnitudinem $\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}fR$, §H inventam, diviso,) Sectoris BαA distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R}{\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR} = \frac{2vR + s}{3f} = \frac{c^2 + s^2}{3f}$.

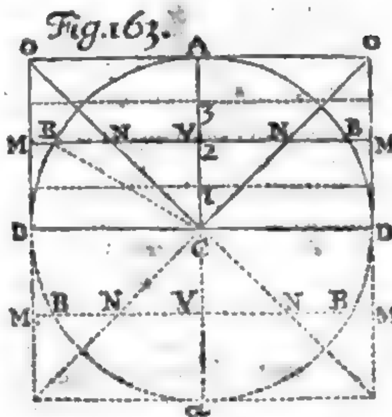
Determinavimus igitur (inter alia) tum Sectoris BCA, tum BαA, tum Semisegmenti BVA, Centra gravitatis, (per eorum tum à $\tau\alpha$, seu TA, seu BV, seu DC, tum ab Aα, distantias,) quæque hinc dependent.

Atque ad eandem formam, mutatis mutandis, de aliis circuli portionibus judicandum erit.

T. Possunt autem hæc eadem, quæ rectam Aα spectant, (§Q, R, S, tradita,) hac adhuc alia methodo explorari.

Sunt utique (per nostræ *Arithmeticæ Infinitorum*, prop. 111, 121, 123, &c.) Quadrata ordinatim-applicatarum in Quadrante, (vel Subtensarum in Semicirculo,) Series Æqualium mulctata serie Secundanorum. Puta, ut $R^2 - 0$, $R^2 - 1$, $R^2 - 4$, $R^2 - 9$, &c. usque ad $R^2 - R^2$. Hoc est, ut Plana Cylindri Conice excavati, (per prop. 113. ejusdem;) Vel, (per ejusdem prop. 112.) ut Rectæ in Semiparabola diametro parallelæ.

Fig. 163. Si enim Quadranti ADC, circumscribatur AODC quadratum, quod Diagonali



nali CO dividatur; ducanturque ordinatim-applicatæ VB, occurrentes ipsi DO in M, ipsique CO in N: Manifestum est, Quadratum ordinatim-applicatæ BV, æquari quadrato CB minus quadrato CV (per 47 el. 1. Euclidis:) Hoc est, Quadrato VM minus quadrato VN: sunt enim VM = CB, & VN = CV: & sic ubique.

Adeoque, Omnia quadrata BV complentium ADC quadrantem; æquantur omnibus quadratis VM complentium AODC quadratum, minus omnibus quadratis NV complentium ACO Triangulum. Et singula singulis respectivè sumptis.

Adeoque si ex Parallelepipedo ODCA (quod compleant omnia MVq;) eximi intelligatur Pyramis OCA (quam compleant omnia NVq;) quod reliquum est, æquabitur omnibus BVq.

Aut etiam (propter Circulos Quadratis Radiorum proportionales) Cylindrus ODDO, excempto Cono OCO; æquabitur Hæmisphærio, DAD.

Sed & (propter singula BVq, singulis MVq − NVq, æqualia,) etiam partes partibus respectivè sumpus æquantur.

Nempe; Parallelepipedum OMVA dempto Pyramidis trunco ONVA (si V sit supra Centrum) vel dempta Pyramide aucta OCNVA (si infra Centrum;) hoc est, dempto OCA ∓ NCV: Æquatur quadratis ordinatim-applicatarum in ABV, segmento. Et sic ubique.

Et similiter: Cylindrus OMMO, dempto ONNO vel OCNNO (hoc est, dempto Cono OCO, mulctato vel aucto simili cono NCN, prout supra infrave Centrum fuerit punctum V) æquatur Segmento Sphærico ABB. Et sic ubique.

His positis; erit (propter $MVq = R^2$, & $AV = v$,) Parallelepipedum $OMVA = vR^2$.

Item; (propter $OAq = ACq = R^2$, & $AC = R$,) est Pyramis $OCA = \frac{1}{3}R^3$.

Item; (propter $NVq = VCq = x^2$, & $VC = x$;) Pyramis $NCV = \frac{1}{3}x^3$.

Est ergo, Summa Quadratorum omnium Ordinatim-applicatarum (puta omnia o^2) complentium ipsum ABV semisegmentum; $OMVA - OCA \pm NCV = vR^2 - \frac{1}{3}R^3 \pm \frac{1}{3}x^3$.

Est autem, supra Centrum, $x = R - v$; infra Centrum, $x = -R + v$: Adeoque illic $x^3 = R^3 - 3vR^2 + 3v^2R - v^3$; hic vero $x^3 = -R^3 + 3vR^2 - 3v^2R + v^3$. Ergo (cum illo casu habeatur $+\frac{1}{3}x^3$; hoc vero $-\frac{1}{3}x^3$) erit $vR^2 - \frac{1}{3}R^3 \pm \frac{1}{3}x^3 = v^2R - \frac{1}{3}v^3$ (utroque casu) summa omnium o^2; seu Quadratorum ordinatim-applicatarum complentium ABV semisegmentum.

Vel etiam (propter $v^2 = c^2 - s^2 = 2vR - s^2$; adeoque $v^2R = 2vR^2 - s^2R$: & $\frac{1}{3}v^3 = \frac{2}{3}v^2R - \frac{1}{3}s^2v = \frac{4}{3}vR^2 - \frac{2}{3}s^2R - \frac{1}{3}s^2v$;) erit eadem Omnium o^2 summa $v^2R - \frac{1}{3}v^3 = \frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v$.

Sed & manifestum porro est; cujusque rectæ ut BV, (atque de huic parallelis, Semisegmentum BVA complentibus simile erit judicium,) momentum respectu rectæ Aα, æquari semiquadrato ejusdem, (propter Rectæ Centrum gravitatis in ipsius medio; adeoque $VB \times \frac{1}{2}VB = \frac{1}{2}VBq$.) Et similiter quæ semiquadrantalem Ungulam (aciem habentem Aα) complent plana, ipsis BV insistentia, æquari ejusdem BV semiquadrato; (nam, propter angulum in V semirectum; altitudo in B, æqualis erit ipsi BV basi; ipsumque Triangulum Rectangulum Isosceles, erit Quadrati dimidium.) Et consequenter, tum Semisegmenti BVA momentum respectu ipsius Aα; tum semiquadrantalis Ungula eidem BVA insistens, aciem habens Aα; æquabitur eorundem o^2 semisummæ; Hoc est, $\frac{1}{2}v^2R - \frac{1}{6}v^3 = \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$. Idem quod supra (§ R.) repertum erat.

Huic vero Semisegmenti BVA momento (respectu rectæ Aα) sic invento; Si addantur Triangulorum BVC, BVα, (respectu ejusdem Aα) Momenta; (§ R, S, reperta:) Prodibunt Momenta (respectu ejusdem Aα) Sectorum BCA, BαA: Cæteraque de Solidis conversione circa Aα factis, Centrisque gravitatis planorum

 ab

Fig. 163. ab A α distantiis, similiter elicientur atque prius. Ut non sit opus eisdem ulterius immorari.

At interim haud erit incommodum hic loci monuisse; eadem etiam methodo Triangulorum BCV, B α V, BC α, momenta respectu ipsius A α, haberi posse.

Cum enim singularum BV rectarum (seu huic parallelarum) Triangulum BCV complentium, momenta respectu A α; seu Triangula eisdem insistentia, semiquadrantalem Ungulam (aciem habentem A α) complentia; sint earundem BV, &c. Semiquadrata: Quæ quidem Semiquadrata, Pyramidem complent, cujus Basis est $\frac{1}{2}$BV $q = \frac{1}{2}s^2$, altitudo, CV $= x$; Erit ipsa Pyramis (per 6 hujus;) Hoc est, momentum illud, seu semiquadrantalis ungula BVC aciem habens A α, $\frac{1}{2}s^2 \times \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}s^2 x$. ut prius § R.

Item, (pari de causa,) Momentum Trianguli B α V, seu huic insistens Semiquadrantalis Ungula aciem habens A α; Pyramis erit, cujus Basis $\frac{1}{2}$BV $q = \frac{1}{2}s^2$, altitudo V α $= b$; adeoque ipsa Pyramis (hoc est, Momentum illud, seu semiquadrantalis Ungula,) $\frac{1}{2}s^2 \times \frac{1}{3}b = \frac{1}{6}s^2 b$. Ut prius § S.

Estque Triangulum BC α; idem atque BV α dempto additove (prout supra infrave Centrum C, sit V punctum,) BCV: Adeoque (respectu ipsius A α) momentum Trianguli BC α; idem atque momentum BV α, dempto, additove, momento BCV: Adeoque Trianguli BC α momentum (respectu ipsius A α) seu Semiquadrantalis Ungula eidem insistens aciem habens A α; est $\frac{1}{6}s^2 b \mp \frac{1}{6}s^2 x$. Hoc est, (propter $b = 2R - v$; &, supra Centrum, $x = R - v$, auferendum; infra vero, $x = -R + v$ addendum; adeoque $b \mp x = R$;) $\frac{1}{6}s^2 R$. Ut prius, § S.

V. Eadem item ostendentur ex prop. 112. Arithm. Infin.

Fig. 154. Cum enim illic ostendatur, Rectas in Semiparabola, Diametro vel Axi parallelas, esse ut Seriem Æqualium serie Secundanorum Mulctatam; (sunt enim Omnes V δ, parallelogrammum AC Δ δ complentes, series Æqualium; omnesque β δ, complentes Semiparabolæ complementum A Δ δ, series Secundanorum; Ergo, omnes residuæ V β, parabolæ diametro C Δ parallelæ, sunt series Æqualium mulctata serie Secundanorum:) Hoc est, Ut quadrata ordinatim-applicatarum in Circuli quadrante; ut modo ostensum est.

Si igitur, super eadem A α recta, (ut communi Base,) describatur tum AD α Semicirculus, tum A Δ α Parabola recta (cujus Axis C Δ æqualis sit ipsi CD circuli Radio:) Et ordinatim-applicata in Semicirculo quælibet BV producta, occurrat Parabolæ in β: Erunt omnes V β Rectæ, omnibus Quadratis VB respective sumptis proportionales.

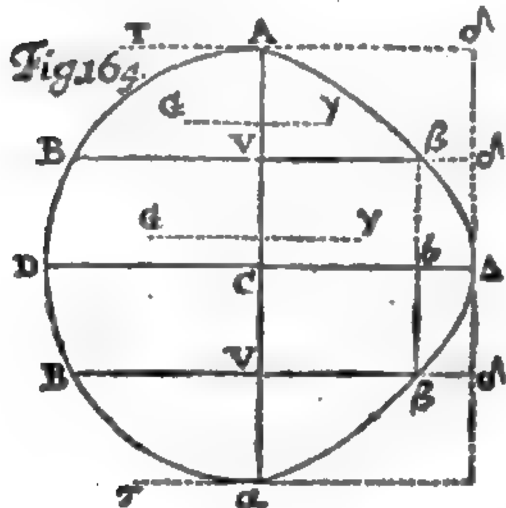
Adeoque ductis omnibus V β rectis, (sive totam Parabolam, sive ipsius segmentum ut AV β complentibus,) in communem altitudinem $R =$ C Δ $=$ CD: Erunt omnia V β in R parallelogramma (Prisma, Parabolæ, ejusve portioni, insistens complentia,) æqualia omnibus VB quadratis (& singula singulis respective sumptis;) Hoc est (per ante demonstrata) Duplo momenti Semicirculi, ejusve cui insistunt portioni, respectu rectæ A α; seu, Duplo semiquadrantalis Ungulæ correspondentis, aciem habentis A α. (Sunt enim hæc Parallelogramma, propter communem altitudinem R, ipsis quibus insistunt Rectis V β, proportionalia; adeoque, per jam ostensa, proportionalia ipsis VB quadratis: Sed &, propter CD $=$ C Δ $= R$, Parallelogrammum, C Δ in R, æquatur ipsi CD quadrato: Ergo & reliqua reliquis respective.) Eademque, V β in $\frac{1}{2}R$, (utpote illorum dimidia,) ipsi Momento plani ABV respectu ipsius A α; vel Semiquadrantali Ungulæ correspondenti æquantur.

Si igitur, Parallelogrammo AV δ δ; auferatur A β δ δ vel A Δ β δ δ (hoc est, Semiparabolæ Complementum A Δ δ, dempto additove Δ β δ, prout supra infrave Centrum fuerit V punctum;) habetur Parabolæ segmentum AV β $=$ AV δ $-$ A Δ δ $\pm$ β Δ δ.

Est autem (propter AV $= v$, & V δ $= R$) Parallelogrammum AV δ δ $= vR$.

Item; (propter Semiparabolæ Complementum, subtriplum circumscripti Parallelogrammi, per prop. 23. *Arithm. Infin.* vel prop. 1. hujus; rectamque AC $=$ C Δ $= R$;) Semiparabolæ complementum A Δ δ $= \frac{1}{3}R^2$.

Item;



Item; (propter $AC = C\Delta$;) Parabolæ Latus rectum erit æquale ipsi $C\Delta = R$: Et (propter $\beta b = VC = x$) erit $\beta\delta = b\Delta = \frac{x^2}{R}$: Adeoque Semiparabolæ complementum $\beta\Delta\delta$ (utpote circumscripti Parallelogrammi $\beta b\Delta\delta$ triens) $= \frac{x^3}{3R}$.

Ergo; Parabolæ Segmentum $AV\beta = AV\delta - A\Delta\delta \pm \beta\Delta\delta = vR - \frac{1}{2}R^2 \pm \frac{x^3}{3R}$. Atque hoc demum in $\frac{1}{2}R$ ductum; exhibet $\frac{1}{2}vR^2 - \frac{1}{4}R^3 \pm \frac{1}{6}x^3$ Semisegmenti Circularis ABV Momentum respectu rectæ $A\alpha$; vel Semiquadrantalem Ungulam correspondentem: Ejusque duplum, $vR^2 - \frac{1}{2}R^3 \pm \frac{1}{3}x^3 = v^2R - \frac{1}{3}v^3 = \frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v$; ut prius, § T.

Atque hinc similiter elicientur, tum Sectorum BCA, $B\alpha A$, Momenta seu semiquadrantales Ungulæ respectu rectæ $A\alpha$, tum Centrorum gravitatis inde distantiæ; cæteraque ut prius.

Eademque adhuc alias sic investigantur.

Si intelligatur Sphæra, vel Sector Sphæricus, (puta BCB ex conversione Sectoris circularis BCA circa $A\alpha$ factus,) ex numero-infinitis Pyramidulis (juxta def. 1. Cap. 4.) conflari: Quorum omnium communis vertex sit C Centrum; & communis altitudo Circuli Sphæræve Radius; Basesque compleant ipsam superficiem Sphæricam, vel Sectoris Sphærici Superficiem curvam, (puta BAB quæ arcus BA circa $A\alpha$ conversione describitur:) Erit (propter, Pyramides Prismatum super eisdem basibus æque altorum Trientes, per prop. 6 hujus;) Sector Sphæricus BCBA, æqualis superficiei Sphæricæ segmento BAB in Trientem Radii ducto. W. Fig. 159, 160.

Habetur autem Superficiei Sphæricæ segmentum illud BAB, si ducatur Arcus $AB = a$, in Peripheriam ejusdem arcus Centro gravitatis descriptam, per 12 hujus. Est autem ejusdem AB arcus Centrum gravitatis, puta G (in fig. 161, 162.) in recta $C\delta$ arcus axe; rectaque $CG = \frac{c}{a}R$, (per 14 hujus.) Rectaque $\delta\iota = \frac{1}{2}c$, (ut § Q. ostensum est:) Atque (propter similia Triangula) Ut $C\delta = R$, ad $\delta\iota = \frac{1}{2}c$, sic $CG = \frac{c}{a}R$, ad $\frac{c^2}{2a} = Ge$ distantiam Centri gravitatis Arcus AB, ab $A\alpha$; Adeoque $\frac{c^2 P}{2aR}$ est Peripheria ejusdem integra conversione circa $A\alpha$ descripta. In quam itaque si ducatur $AB = a$, habetur Sphæricæ Superficiei segmentum $BAB = \frac{c^2 P}{2R}$: vel (propter $c^2 = 2vR$,) Superficiei Sphæricæ segmentum $BAB = vP$. Fig. 161, 162.

Vel etiam (per 13 hujus;) Propter integram sphæræ superficiem quatuor Circulis maximis æqualem; hoc est, $2RP$: atque abscissum segmentum ABB, in ea ratione ad totam, qua est ipsius altitudo $AV = v$, ad $A\alpha = 2R$: Erit ut $A\alpha = 2R$, ad $AV = v$, sic tota superficies Sphærica $2RP$, ad ipsius segmentum $BAB = vP$. ut prius. Fig. 159. 160.

Quod itaque superficiei Sphæricæ segmentum, in $\frac{1}{3}R$ ductum, exhibet Sectorem Sphæricum $BCBA = \frac{1}{3}vRP$: Adeoque Semiquadrantalem Ungulam, seu Plani BCA momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2$. Idem quod supra, § Q. repertum est. Cæteraque hinc, ut ibidem, deducentur.

Exhibuimus itaque Semicirculi Partiumque ipsius expositarum, tum Magnitudines, tum Momenta respectu rectarum aliquot expositarum; eorumque distantiam Centri gravitatis à rectis illis. Adeoque per prop. 26. Cap. præced. (propter datas eorum X.

eorum à duabus in eodem plano rectis, non invicem parallelis, distantias,) ipsa gravitatis Centra.

Eademque methodo, de aliis Circuli portionibus, eorumque Momentis, & Solidis conversione factis fiet judicium. Puta, si pro sectore B α A, (ad verticem terminato) exponeretur sector D α B, aliusve hujusmodi: Cum enim tum Sectoris B α A, tum D α A, magnitudines & momenta (reliquaque quæ hinc dependent) jam exhibeantur; etiam sectoris D α B (qui illorum vel differentia vel summa sit) magnitudines & momenta (adeoque & quæ hinc dependent) facile exhiberi poterunt.

Item; eadem methodo qua momenta, verbi gratia, semisegmenti B V A, à recta τ α, ad rectas T A, vel B V, transferuntur; possunt similiter à recta A α, ad T τ, vel B a, transferri. Eaque, quæ hic traduntur, mille modis aliis ampliari.

Y. Quæ autem de Circulo ejusque portionibus dicta sunt: eadem ad Ellipsin, hujusque portiones, facile transferentur. Nempe, si intelligatur Axium ellipseos alter A α, alter D Δ: Manente, ut prius, $A\alpha = 2R$; (adeoque $AV = v$, $V\alpha = b$;) erit D Δ in ea ratione ad $2R$, qua est ad A α; adeoque B V in eadem ratione ad s. Adeoque ubicunque B V, aut huic parallelæ in calculum veniunt; pro s, substituenda erit quantitas quæ sit, ad s, in ea ratione qua est D Δ ad A α: (majore quidem, si D Δ sit axium major; minore, si minor;) Adeoque, pro s^2; quantitatem quæ sit ad hanc in duplicata ratione rectæ D Δ ad A α: & similiter, mutatis mutandis, in reliquis ejusdem potestatibus.

PROP. XVI.

A. **Sectoris Sphærici Centrum gravitatis, est in Axis sui illo puncto,**
Fig. 165. **quod à Centro Circuli distat Tribus Quadrantibus Radii, minus Tribus Octantibus altitudinis superficiei Curvæ: Seu Tribus Quadrantibus Radii, minus Tribus Octantibus sinus Versi: Seu, quod à Centro Circuli distat, Tribus Octantibus altitudinis residuæ superficiei curvæ; seu Tribus Octantibus sinus Versi residui.**

Hoc est, in Hemisphærio; $\frac{3}{8}$ Radii.

B. **Atque hinc Segmenti Sphæræ (plano abscissi) Centrum gravitatis colligitur: Et in aliis portionibus similiter. Et quæ hinc dependent.**

Fig. 159, 160.
Nempe; Si ponantur Symbola ut in propositione præcedente; erit,
C. Semiquadrantalis Ungulæ totius semicirculi, aciem habentis A α, (unde de Solidis conversione factis, & Semisolidis fiet judicium,) Magnitudo $\frac{2}{3}R^3$; distantia Centri gravitatis, sive à τ α, sive à TA,
P. R; momentum respectu τ α, vel TA, $\frac{2}{3}R^4$: Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{3}{32}P$; momentum respectu A α, $\frac{1}{16}R^3P$.

I. Aciemque habentis τ α, Magnitudo $\frac{1}{4}R^2P$; momentum respectu A α,
T. $\frac{2}{3}R^4$; distantia Centri gravitis ab A α, $\frac{8R^2}{3P}$: Momentum respectu τ α, $\frac{3}{16}R^3P$; respectu T A, $\frac{3}{16}R^3P$; distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4}R$; à TA, $\frac{3}{4}R$.

I. Aciemque habentis TA, Magnitudo $\frac{1}{4}R^2P$; momentum respectu A α,
T. $\frac{2}{3}R^4$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{8R^2}{3P}$: Momentum respectu τ α, $\frac{3}{16}R^3P$; respectu T A, $\frac{3}{16}R^3P$; distantia centri gravitatis a τ α, $\frac{3}{4}R$; à T A, $\frac{3}{4}R$.

C. Semiquadrantalis Ungulæ, Sectoris B C A, aciem habentis A α, (unde de Solidis conversione factis, & semisolidis, fiet judicium;) Magnitudo, $\frac{1}{3}vR^2$; distantia Centri gravitatis à DC, $\frac{3}{8}b$; à τ α, $R+\frac{3}{8}b$; à T A; $R-\frac{3}{8}b$; momentum respectu τ α, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2$; respectu TA,

$\frac{1}{3}vR^3$

$\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{4}s^2R^2$: Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3c}{8v}R + \frac{1}{8}s$; mo- Fig. 159, 160.
mentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{4}cR^3 + \frac{1}{8}svR^2$. P.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$; momentum reſpectu I.
$A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{8vR + 3s^2}{12a + 8s}$:
Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{19}{24}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2$; reſpectu TA, $\frac{3}{8}aR^3$ X.
$- \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}svR^2$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{15aR + 19sR - 3sv}{12a + 8s}$;
à TA, $\frac{9aR - 3sR + 3sv}{12a + 8s}$.

Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}sR^2$; momentum re- I.
ſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,
$\frac{8vR - 3s^2}{12a - 8s}$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}svR^2$; re- X.
ſpectu TA, $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{13}{24}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2$; diſtantia Centri gravitatis à
$\tau\alpha$, $\frac{9aR - 3sR + 3sv}{12a - 8s}$; à TA, $\frac{15aR - 13sR - 3sv}{12a - 8s}$.

Ungulæ (Semiquadrantalem intellige) Trianguli BVC, aciem haben- D.
tis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{6}s^2x$; diſtantia Centri gravitatis à DC, $\frac{3}{4}x$; à
$\tau\alpha$, $R \pm \frac{3}{4}x$; à TA, $R \mp \frac{3}{4}x$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}s^2xR \pm \frac{1}{8}s^2x^2$;
reſpectu TA, $\frac{1}{6}s^2xR \mp \frac{1}{8}s^2x^2$: Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}s$ Q.
momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^3x$.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{5}{6}sxR - \frac{1}{3}sxv$; momentum reſpectu M.
$A\alpha$, $\frac{7}{24}s^2xR - \frac{1}{8}s^2vx$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{7R - 3v}{20R - 8v}s$.
Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sxR^2 \pm \frac{1}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$; reſpectu TA, X.
$\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R \pm \frac{4xR \pm 3x^2}{6R \pm 4x}$; à
TA, $R \mp \frac{4xR \pm 3x^2}{6R \pm 4x}$.

Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{6}sxR + \frac{1}{3}sxv$; momentum re- M.
ſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{24}s^2xR + \frac{1}{8}s^2xv$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$
$\frac{R + 3v}{4R + 8v}s$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$; reſpectu TA, X.
$\frac{1}{2}sxR^2 \mp \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$; $R \pm \frac{4xR \mp 3x^2}{6R \mp 4x}$;
à TA, $R \mp \frac{4xR \mp 3x^2}{6R \mp 4x}$.

Ungulæ Semiſegmenti BVA aciem habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{6}v^2R$ E.
$+ \frac{1}{6}s^2v$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; re-
ſpectu TA, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$; diſtantia Centri gravitatis
à $\tau\alpha$, $R + \frac{6R - 3v}{4vR + 4s^2}s^2$; à TA, $R - \frac{6R - 3v}{4vR + 4s^2}s^2$; à DC, $\frac{6R - 3v}{4vR + 4s^2}s^2$
$= \frac{3s^2b = 3b^2v}{4vR + 4vb}$; à BV, $\frac{3b^2}{4R + 4b} - R + v$; momentum reſpectu BV,
$\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{24}s^4$: Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}cR^3 + \frac{1}{8}svR^2 \mp \frac{1}{12}s^3x$; Q.
diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3cR^3 + 3svR^2 \mp 2s^3x}{4v^2R + 4s^2v}$.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}cR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$; momentum K.

 reſpectu

Fig. 159, 160. respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; distantia Centri gravita-
T. tis ab $A\alpha$, $\frac{4vR^2 + 4s^2R + 3s^2b}{12eR^2 + 12svR + 8s^3}v$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{6}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; respectu TA, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$; respectu BV, $-\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R + \frac{3s^3b}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$; à TA, $\frac{3}{4}R - \frac{3s^3b}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$; à BV, $\frac{3}{4}R - b + \frac{3s^3b}{6eR^2 + 6svR + 4s^3} = -\frac{1}{4}R + v + \frac{3s^3b}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$.

K. Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$; momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$; distantia Centri gravi-
T. tatis ab $A\alpha$, $\frac{4vR^2 + 4s^2R - 8s^2b}{12eR^2 + 12svR - 8s^3}v$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$; respectu TA, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; respectu BV, $-\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R + \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}$; à TA, $\frac{1}{4}R - \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}$; à BV, $\frac{3}{4}R - b + \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3} = -\frac{1}{4}R + v + \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}$.

K. Aciemque habentis BV; Magnitudo, $-\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}avR - \frac{1}{3}s^3$; momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{24}s^4 = \frac{1}{6}v^2R^2 - \frac{1}{24}v^2b^2$; distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{4vR^2 - s^2b}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}v$:
V. Momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{4}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$; respectu TA, $-\frac{5}{4}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$; respectu BV, $\frac{5}{4}eR^3 + \frac{5}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{-9eR^3 + 12avR^2 + 3svR^2 - 6s^3R + 2s^3v}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}$; à TA, $\frac{-15eR^3 + 12avR^2 - 3svR^2 - 2s^3R - 2s^3v}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}$; à BV, $\frac{15eR^3 + 15svR^2 - 12as^2R + 2s^3R - 2s^3v}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}$.

G. Ungulæ Trianguli BAV, aciem habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}s^2v$; centri gravitatis Distantia à $\tau\alpha$, $2R - \frac{2}{3}v$; à TA, $\frac{2}{3}v$; momentum re-
S. spectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; respectu TA, $\frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$: Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}s$; momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^3v$.

N. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$; momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; centri gravitatis distantia ab $A\alpha$, $\frac{2vR + 3s^2}{8vR + 8s^2}s$:
Y. Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4vR^2 + 10s^2R - 3s^2v}{4vR + 4s}$; à TA, $\frac{4R^2 - 2s^2R + 3s^2v}{4vR + 4s^2}$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}svR^2 + \frac{2}{3}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; respectu TA, $\frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{3}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$.

N. Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{1}{2}sv^2$; momentum respectu $A\alpha$,
Y. $\frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$; centri gravitatis ab $A\alpha$ distantia, $\frac{1}{2}s$: Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $2R - \frac{2}{3}v$; à TA, $\frac{2}{3}v$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}sv^2R - \frac{1}{3}sv^3$; respectu TA, $\frac{1}{3}sv^3$.

Ungulæ

Ungulæ Segmenti A B A, aciem habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}v^2R^2$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}v^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$; reſpectu TA, $\frac{1}{3}v^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; Fig. 159, 160. G.
diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R+\frac{1}{2}b$; à TA, $R-\frac{1}{2}b$; à DC, $\frac{1}{8}b$. S.
Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3eR^2+3svR-2s^3}{8vR-4s^2=4v^2}$.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{6}svR$; momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}v^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$; centri gravitatis ab $A\alpha$ diſtantia N.
$\frac{4R^2-2bR+s^2}{6eR+2sv}v$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}eR^3+\frac{7}{24}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$; Y.
reſpectu TA, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{1}{24}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{15eR^2+7svR+2s^3}{12eR+4sv}$; à TA, $\frac{9eR^2+svR-2s^3}{12eR+4sv}$.

Aciemque habentis TA, Magnitudo, $\frac{1}{2}eR^2-\frac{1}{6}svR$; momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}v^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; centri gravitatis ab $A\alpha$ diſtantiâ N.
$\frac{4R^2-2bR-s^2}{6eR-2sv}v$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{1}{24}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$;
reſpectu TA, $\frac{5}{8}eR^3-\frac{3}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis à Y.
$\tau\alpha$, $\frac{9eR^2+svR-2s^3}{12eR-4sv}$; à TA, $\frac{15eR^2-9svR+2s^3}{12eR-4sv}$.

Ungulæ Trianguli BCα, aciem habentis $A\alpha$, Magnitudo, $\frac{1}{6}s^2R$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R-\frac{1}{2}v$; à TA, $\frac{1}{4}R+\frac{1}{2}v$; momentum F.
reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{24}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; reſpectu TA, $\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$: Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}s$; momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^3R$. R.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}svR$; momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{5}{24}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; centrique gravitatis ab $A\alpha$ diſtantia, M.
$\frac{5R-2v}{12R-4v}s$: Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{7R^2-3vR-s^2}{6R-2v}$; à X.
TA, $\frac{5R^2-vR+s^2}{6R-2v}$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{7}{12}sR^3-\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; reſpectu TA, $\frac{5}{12}sR^3-\frac{1}{12}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$.

Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}svR$; momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, . M.
$\frac{3R+2v}{12R+4v}s$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{12}sR^3-\frac{1}{12}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$; reſpectu TA, $\frac{7}{12}sR^3+\frac{5}{12}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, X.
$\frac{5R^2-vR+s^2}{6R+2v}$; à TA, $\frac{7R^2+5vR-s^2}{6R+2v}$.

Ungulæ Trianguli BVα, aciem habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}s^2b$; centri gravitatis diſtantia à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}b$; à TA, $2R-\frac{3}{4}b$; momentum reſpectu F.
$\tau\alpha$, $\frac{1}{8}s^2b^2$; reſpectu TA, $\frac{1}{3}s^2bR-\frac{1}{8}s^2b^2$: Diſtantia Centri gravitatis R.
ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}s$; momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^3b$.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{3}sb^2$; momentum reſpectu $A\alpha$, M.
$\frac{1}{8}s^2b^2$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3}{8}s$: Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}b$; à TA, $2R-\frac{3}{4}b$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}sb^3$; reſpectu TA, $\frac{2}{3}sb^2R-\frac{1}{4}sb^3=\frac{1}{12}sb^3+\frac{1}{3}s^3b$. W.

Aciemque habentis TA; Magnitudo, $sbR-\frac{1}{3}sb^2$; momentum reſpectu M.
$A\alpha$, $\frac{1}{3}s^2bR-\frac{1}{8}s^2b^2$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{8R-3b}{24R-8b}s$:
Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}s^3R-\frac{1}{4}s^3v=\frac{2}{3}sb^2R-\frac{1}{4}sb^3=\frac{1}{12}sb^3+\frac{1}{3}s^3b$; reſpectu TA, $\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; di- W.

Fig. 159, 160. stantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R - \frac{3s^2v}{8R^2 - 4vR + 4s^2}$; à TA, $R + \frac{3s^2v}{8R^2 - 4vR + 4s^2}$; à DC, $\frac{3s^2v}{8R^2 - 4vR + 4s^2} = \frac{3v^2}{12R - 4b}$ $= \frac{3v^2}{4R + 4v}$.

F. Ungulæ Sectoris $B\alpha A$, aciem habentis $A\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; respectu TA, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{12}s^2vR$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R + \frac{s^2b}{4vR + 2s^2}$; à

R. TA, $R - \frac{s^2b}{4vR + 2s^2}$; à DC, $\frac{s^2b}{4vR + 2s^2}$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3eR^2 + 3svR + 2s^3}{8vR + 4s^2}$.

L. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}sbR = \frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; distan-

W. tia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{4vR^2 + 4s^2R - s^2v}{6fR + 2sb}$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{11}{8}sR^3 - \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{8}fR^3 + \frac{3}{8}sbR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; respectu TA, $\frac{1}{8}aR^3 + \frac{1}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{1}{8}fR^3 - \frac{1}{24}sbR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{15fR^2 + 9sbR - 2s^3}{12fR + 4sb}$; à TA, $\frac{9fR^2 - sbR + 2s^3}{12fR + 4sb}$.

L. Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}sbR = \frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{12}s^2vR$; distantia Centri

W. gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{4vR^2 + s^2v}{6fR - 2sb}$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{8}fR^3 - \frac{1}{24}sbR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; respectu TA, $\frac{1}{8}aR^3 + \frac{1}{24}sR^3 + \frac{7}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{5}{8}fR^3 - \frac{7}{24}sbR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{9fR^2 - sbR + 2s^3}{12fR - 4sb}$; à TA, $\frac{15fR^2 - 7sbR - 2s^3}{12fR - 4sb}$.

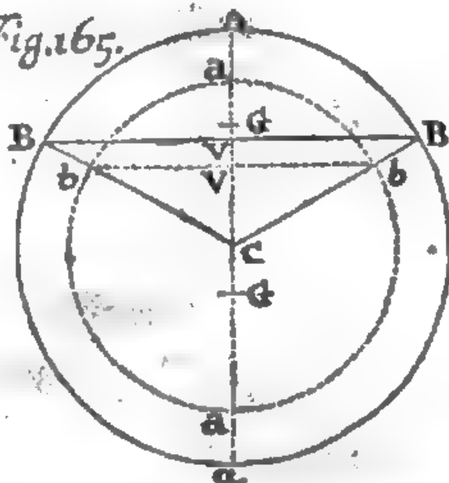
Z. Adeoque exhibuimus, Sphæricorum Sectorum & Segmentorum, Ungularum item aliorumque Solidorum expositorum, tum magnitudines, tum momenta respectu expositorum aliquot planorum, eorumque Centrorum gravitatis à planis illis distantiam, ipsaque gravitatis Centra.

Quæ omnia, ad alia etiam Solida, ad Sphæram ejusve partes spectantia, facile poterunt accommodari: Aut etiam ad alia Solida ex Circulorum portionibus oriunda.

Quæque, de Ungulis Semicirculi ejusve portionum; Sphæraque & portionibus hujus, dicta sunt; eadem ad Ungulas Semi-ellipseos hujusve portionum; & Sphæroeides, portionesque hujus; facile accommodantur.

Intelligatur

A.



INtelligatur B C B Sector Sphæricus; (intellige Figuram Solidam in Sphæra, quæ conversione Sectoris Circularis B C A, seu B C α, Circa A C α, describitur :) Ex infinitis numero Pyramidulis similibus & æqualibus (juxta def. 1. Cap. 4.) componi: Quarum communis vertex sit Sphæræ Centrum C; Basesque componant Sphæricæ superficiei segmentum Sectori sphærico conveniens. Erit itaque, Tum simul omnium Magnitudo, æqualis Trienti Radii (communis Altitudinis omnium) in Sphæricam superficiem B A B, vel B α B, sectori convenientem, (utpote Basium Aggregatum,) ducto : (Quod ex 1 vel 6 hujus probabitur ; propter Parallela Pyramidum Plana similia, aut etiam parallelas Sectorum sphæricorum curvas superficies similes, in ratione Secundanorum :) Tum Centra gravitatis omnium, in Simili Superficie Sphærica, descripta Radio $Cb = \frac{3}{4}CB = \frac{3}{4}R$: (propter Centra gravitatis Pyramidum, in Axe suo posita, tres quadrantes ejusdem ad verticem abscindentia ; per 6 hujus.) Cujus quidem superficiei b a b, radio C b descriptæ, cum singula puncta intelligantur æque onusta, (ut quæ æqualium Pyramidum Centra gravitatis sustineant;) idem erit hujus Centrum gravitatis, atque expositi Sectoris Sphærici. Puta (in sectore B C B A) in G, medio puncto rectæ a v (sinus versi arcus b a) per 13 hujus. Est autem, (propter $Cb = \frac{3}{4}CB = \frac{3}{4}R$:) recta $av = \frac{3}{4}AV = \frac{3}{4}v$: Adeoque $aG = \frac{1}{2}av = \frac{3}{8}v$, & $CG = Ca - aG = \frac{3}{4}CA - \frac{3}{8}AV = \frac{3}{4}R - \frac{3}{8}v = \frac{3}{8}b$, (propter $2R - v = b$.) Et similiter ostendetur, in opposito Sectore B C B α, $av = \frac{3}{4}\alpha V = \frac{3}{4}b$; & $aG = \frac{1}{2}av = \frac{3}{8}b$; & $CG = Ca - aG = \frac{3}{4}R - \frac{3}{8}b = \frac{3}{8}v$, (propter $2R - b = v$.) Hoc est; Distantia Centri gravitatis Sectoris Sphærici (in Sectoris Axe positi) à Centro Sphæræ, æqualis Tribus Quadrantibus Radii minus Tribus Octantibus altitudinis superficiei Curvæ sectori convenientis ; aut etiam (quod eodem recidit) æqualis Tribus Octantibus altitudinis reliquæ superficiei sphæricæ. Quod erat propositum.

Hoc est, speciatim in Hemisphærio, (propter $v = b = R$,) $\frac{3}{4}R - \frac{3}{8}R = \frac{3}{8}R$.

Corollarium constat, ex prop. 27. Cap. præced. Nam Sectori B C B A, dempto B B C Cono, habetur Segmentum B B A ; & Sectori B C B α, addito eodem B B C Cono, habetur Segmentum B B α. Cum itaque tum Sectoris sphærici (per jam ostensa ;) tum dempti additive Coni (per 6 hujus ;) magnitudines & Centra gravitatis assignantur ; habebitur & Residui, vel Aggregati, Segmenti Sphærici, tum Magnitudo, tum & Centrum gravitatis. Et similiter, (mutatis mutandis,) in aliis Sphæræ portionibus. B.

Exempli gratia. Centri gravitatis Sectoris integri B C B A (conversione Semisectoris Circularis B C A, circa C A, descripti) distantia à C, (per modo demonstrata) est $\frac{3}{4}CA - \frac{3}{8}AV = \frac{3}{8}A\alpha - \frac{3}{8}AV = \frac{3}{8}V\alpha$, in ipso Axe A C. C. Fig. 159, 160.

Hoc est (positis ut in demonstratione propositionis præcedentis, Radio $CA = CB = C\alpha = R$; integra Peripheria $= \mathcal{P}$; Arcu $BA = a$; chorda $BA = c$; sinu recto $BV = s$; & verso $AV = v$; versique residuo ad Diametrum $V\alpha = 2R - v = b$; à Centro Distantia $VC = x = R - v$ vel $v - R$; Item $a - s = e$; $a + s = f$; &c.) $\frac{3}{4}R - \frac{3}{8}v = \frac{3}{8}b$.

Adeoque ejusdem Centri gravitatis ab α, vel τα, (intellige ; à plano in α Sphæram Tangente,) $R + \frac{3}{8}b = \frac{7}{4}R - \frac{3}{8}v$. Atque à T A, $R - \frac{3}{8}b = \frac{1}{4}R + \frac{3}{8}v$.

Eademque est ab iisdem τα, vel T A, planis; distantia Centri gravitatis Semisectoris, (puta, qui plano per A α transeunte, integrum bisecante, determinatur ;) aut Sectoris Quadrantalis ; aliusve imperfecta quavis conversione descripti, (adeoque duobus ejusmodi planis, quorum communis sectio sit A α, interjecti;) propter omnia plana, Sectorem integrum complentia, ipsorum partibus, Sectores partiales complentibus, proportionalia, atque in iisdem à τα, T A, planis Tangentibus, distantiis. Quod de semi-conis, vel semisegmentis Sphæricis aliis, aliisve Solidis imperfecta conversione descriptis, & correspondentibus Ungulis, &c. similiter obtinet. Quod semel moneo, ne sæpius sit opus idem repetere.

 Est

Fig. 159, 160. Eſt autem (per prop. præced. § Q.) Sphærici Sectoris integri B C B A magnitudo, $\frac{1}{6}c^2P=\frac{1}{3}vRP$; (adeoque ſemiſectoris magnitudo, $\frac{1}{12}c^2P=\frac{1}{6}vRP$;) & Ungulæ Semiquadrantalis, qui huic reſpondet, (intellige, qui Sectori circulari B C A inſiſtit, aciem habens A α,) magnitudo $\frac{1}{6}c^2R=\frac{1}{3}vR^2$.

Ducta igitur diſtantia illa in magnitudinem; Habetur momentum ſphærici ſectoris integri B C B A (reſpectu Axis motus, Planive Tangentis, $\tau\alpha$,) $\frac{1}{6}c^2RP+\frac{1}{16}c^2bP=\frac{7}{12}vR^2P-\frac{1}{8}v^2RP=\frac{1}{3}vR^2P+\frac{1}{8}s^2RP$: Semiſectoris, $\frac{1}{6}vR^2P+\frac{1}{16}s^2RP$: Ungulæque Semiquadrantalis, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2$.

Et, reſpectu ipſius T A, momentum ſphærici Sectoris integri B C B A, $\frac{1}{6}c^2RP-\frac{1}{16}c^2bP=\frac{1}{12}vR^2P+\frac{1}{8}v^2RP=\frac{1}{3}vR^2P-\frac{1}{8}s^2RP$: Semiſectoris $\frac{1}{6}vR^2P-\frac{1}{16}s^2RP$: Ungulæque Semiquadrantalis, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$.

Et ſpeciatim, quæ toti Semicirculo inſiſtit Semiquadrantalis Ungula aciem habens A α; (propter $v=2R$, & $s=0$,) eſt $\frac{2}{3}R^3$, & ſolidum converſione factum, hoc eſt, Sphæra integra, $\frac{2}{3}R^2P$; & Semiſolidum, ſeu Hemiſphærium $\frac{1}{3}R^3P$. Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, vel T A, R: Momentum Ungulæ reſpectu $\tau\alpha$, vel T A, $\frac{2}{3}R^4$; Sphæræ, $\frac{2}{3}R^3P$; Hemiſphærii A D α; $\frac{1}{3}R^3P$.

D. Deinde (per prop. præced. § R.) Coni integri B B C, (converſione Trianguli B V C, circa A α,) magnitudo eſt $\frac{xs^2P}{6R}$; Semiconi, $\frac{xs^2P}{12R}$; Ungulæ Semiquadrantalis, $\frac{1}{6}xs^2$. Hoc eſt; Si V ſit ſupra C Centrum; $\frac{R-v}{6R}s^2P$, $\frac{R-v}{12R}s^2P$, $\frac{R-v}{6}s^2$: Si, infra Centrum; $\frac{v-R}{6R}s^2P$, $\frac{v-R}{12R}s^2P$, $\frac{v-R}{6}s^2$.

Eſt autem (per 6 hujus) Centri gravitatis à D C diſtantia, $\frac{3}{4}x$: Hoc eſt $\frac{3}{4}R-\frac{3}{4}v$, ſi ſupra Centrum; & $\frac{3}{4}v-\frac{3}{4}R$, ſi infra Centrum. Et utroque caſu, ejuſdem à $\tau\alpha$ diſtantia, $\frac{7}{4}R-\frac{3}{4}v=R\pm\frac{3}{4}x$: Atque à T A, $\frac{1}{4}R+\frac{3}{4}v=R\mp\frac{3}{4}x$.

Et propterea (ductis magnitudinibus in diſtantias) Momentum, reſpectu ipſius $\tau\alpha$, Coni integri B C B, $\frac{1}{6}xs^2P\pm\frac{x^2s^2P}{8R}$; Semi-coni, $\frac{1}{12}xs^2P\pm\frac{x^2s^2P}{16R}$, Semiquadrantalis Ungulæ, $\frac{1}{6}xs^2R\pm\frac{1}{8}x^2s^2$: vel, $\frac{7R-3v}{24R}xs^2P$, $\frac{7R-3v}{48}xs^2P$, $\frac{7}{24}xs^2R-\frac{1}{8}xs^2v$. Hoc eſt; ſi ſupra Centrum, $\frac{7R^2-4vR-3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{7R^2-4vR-3s^2}{48R}s^2P$, $\frac{7}{24}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$; Si infra Centrum, $\frac{-7R^2+4vR+3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{-7R^2+4vR+3s^2}{48R}s^2P$, $-\frac{7}{24}s^2R^2+\frac{1}{6}svR+\frac{1}{8}s^4$.

Et, reſpectu ipſius T A; momentum Coni integri, Semi-coni, & Semiquadrantalis Ungulæ, $\frac{1}{6}xs^2P\mp\frac{x^2s^2P}{8R}$, $\frac{1}{12}xs^2P\mp\frac{x^2s^2P}{16R}$, $\frac{1}{6}xs^2R\mp\frac{1}{8}x^2s^2$: vel, $\frac{R+3v}{24R}xs^2P$, $\frac{R+3v}{48R}xs^2P$, $\frac{1}{24}xs^2R+\frac{1}{8}xs^2v$. Hoc eſt, Supra Centrum; $\frac{R^2-4vR+3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{R^2-4vR+3s^2}{48R}s^2P$, $\frac{1}{24}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; vel Infra centrum $\frac{-R^2+4vR-3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{-R^2+4vR-3s^2}{48R}s^2P$, $-\frac{1}{24}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$.

E. Hæc itaque momenta Coni, Semiconi, Ungulæve, B B C, B V C; momentis Sectoris, Semiſectoris, Ungulæve, B C B A, B C A, reſpectivis; Subducta, Additave, prout vel ſupra vel infra centrum fuerint; exhibent Segmenti, Semiſegmenti, Ungulæve, B B A, B V A, momenta reſpectu ipſius $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2P-\frac{1}{6}s^2RP+\frac{1}{6}s^2vP+\frac{s^4P}{8R}$, $\frac{1}{6}vR^2P-\frac{1}{12}s^2RP+\frac{1}{12}s^2vP+\frac{s^4P}{16R}$, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR+\frac{1}{8}s^4=\frac{1}{6}v^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$.

Et,

Et, respectu ipsius T A, $\frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{6}s^2RP + \frac{1}{6}s^2vP - \frac{s^4P}{8R}$, $\frac{1}{6}vR^2P -$ Fig.
$\frac{1}{12}s^2RP + \frac{1}{12}s^2vP - \frac{s^4P}{16R}$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4 = \frac{1}{6}v^2R^2 +$ 159, 160.
$\frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$.

Adeoque, momenta per magnitudines dividendo (puta, Ungulæ momenta, per magnitudinem Ungulæ, $\frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}s^2v = \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$, prop. præced. § R. inventam,) habetur distantia Centri gravitatis Ungulæ B V A aciem habentis A α, (adeoque & Sectoris, vel Semisectoris correspondentis,) à $\tau\alpha$, $R + \frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}$: à T A, $R - \frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}$: à D C, $\frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}$: à BV, $\frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v} + R - b = \frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v} - R + v$.

Vel (quod eodem recidit) à $\tau\alpha$, $R + \frac{6R - 3v}{4vR + 4s^2}s^2$; à T A, $R - \frac{6R - 3v}{4vR + 4s^2}s^2 = \frac{2vR + 3s^2}{4vR + 4s^2}v$; à DC, $\frac{6R - 3v}{4vR + 4s^2}s^2 = \frac{3bs^2}{4vR + 4s^2} = \frac{3b^2v}{4vR + 4vb} = \frac{3b^2}{4R + 4b}$; à BV, $\frac{3b^2}{4R + 4b} + R - b = \frac{3b^2}{4R + 4b} - R + v$.

Et (restituendo magnitudines) momentum (respectu ipsius B V) Segmenti Sphærici B B A, $\frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{6}s^2RP - \frac{s^4P}{24R}$; Semisegmenti B V A, $\frac{1}{6}vR^2P - \frac{1}{12}s^2RP - \frac{s^4P}{48R}$; & correspondentis Ungulæ, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{24}s^4$.

Sed & possunt hæc eadem, sic alias haberi.

Cum enim (ut ostensum est prop. præced. §. V.) Semi-Quadrata rectarum B V & huic parallelarum Semisegmentum A V B complentium; sint rectis V β, &c. (fig. 164.) Parabolæ portionem A V β complentibus, proportionalia; & quidem ipsis V β, &c. in $\frac{1}{2}R$ ductis sigillatim æqualia; atque in eisdem à $\tau\alpha$, T A, D C, distantiis: Eadem erunt respectu ipsarum $\tau\alpha$, T A, D C, momenta Semiquadrantalis Ungulæ (quam illa complent Semiquadrata) Semisegmento A V B insistentis; atque Prismatis portioni Parabolæ A V β insistentis, quam illa complent parallelogramma β V $\times \frac{1}{2}R$; Eademque utriusque Solidi distantia Centri gravitatis, (puta G, & γ,) ab ipsis $\tau\alpha$, T A, D C, (planis) respective. Hoc est (per 5 hujus) quantum inde distat ipsius portionis Parabolæ A V β centrum gravitatis γ. Fig. 164.

Est autem Semiparabolæ A Δ C magnitudo (per 6 hujus) $\frac{2}{3}\Delta C \times CA = \frac{2}{3}R^2$; ejusque Centri gravitatis ab Axe C Δ distantia (per 8 hujus) $\frac{3}{8}AC = \frac{3}{8}R$; adeoque à $\tau\alpha$, $R + \frac{3}{8}R = \frac{11}{8}R$; à T A, $R - \frac{3}{8}R = \frac{5}{8}R$. Adeoque ipsius momentum respectu [illegible] C Δ, est $\frac{1}{4}R^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{11}{12}R^3$; respectu T A, $\frac{5}{12}R^3$.

Item Semiparabolæ $\beta\,\Delta$ b, magnitudo $\frac{2}{3}\Delta b \times b\beta = \frac{2x^2}{3R}x = \frac{2x^3}{3R}$: Centrique gravitatis à CΔ distantia $\frac{3}{8}b\beta = \frac{3}{8}x$: (adeoque à $\tau\alpha$, $R \pm \frac{3}{8}x$; à TA, $R \mp \frac{3}{8}x$; prout fuerit supra infrave rectam C Δ.) Adeoque momentum ejus, respectu ipsius CΔ, $\frac{x^4}{4R}$; Cui additum momentum parallelogrammi V C b β, hoc est (propter βb $= x$, & Cb $= R - \frac{x^2}{R} = \frac{R^2 - x^2 = s^2}{R}$; Centrique gravitatis à C Δ distantiam, $\frac{1}{2}\beta$b $= \frac{1}{2}x$ [illegible]) $\frac{x^2R^2 - x^4}{2R} = \frac{s^2}{2R}x^2$, exhibet portionis V $\beta\,\Delta$ G momentum respectu ipsius C Δ, $\frac{2x^2R^2 - x^4}{4R} = \frac{2s^2 + x^2}{4R}x^2$. Hujusque propterea portionis V $\beta\,\Delta$ C (propter magnitudinem $xR - \frac{x^3}{3R}$) distantia Centri gravitatis à C Δ, est $\frac{6x^2R^2 - 3x^4}{12xR^2 - 4x^3} = \frac{6R^2 - 3x^2}{12R^2 - 4x^2}x$: Adeoq; à $\tau\alpha$, $R \pm \frac{6R^2 - 3x^2}{12R^2 - 4x^2}x$; à TA, $R \mp \frac{6R^2 - 3x^2}{12R^2 - 4x^2}x$; (prout

supra

Fig. 164. ſupra infrave Centrum fuerit.) Et (reſtituendo Magnitudinem) Momentum ejuſdem V $\beta \triangle$ C, reſpectu $\tau\alpha$, $xR^2 - \frac{1}{3}x^3 \pm \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2$, & reſpectu T A, $xR^2 - \frac{1}{3}x^3 \mp \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2$.

Atque hæc portionis V $\beta \triangle$ C momenta reſpectiva, dempta additave (prout ſupra infrave Centrum C contigerit V punctum,) reſpectivis Semiparabolæ A $\triangle$ C (reſpectu rectarum $\tau\alpha$, T A,) momentis, $\frac{11}{12}R^3$, $\frac{3}{12}R^3$: exhibent Portionis A V β, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{11}{12}R^3 \mp xR^2 \pm \frac{1}{3}x^3 - \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2$; & reſpectu T A, $\frac{3}{12}R^3 \mp xR^2 \pm \frac{1}{3}x^3 + \frac{2R^2 - x^2}{4R}x$.

Reductione autem facta, valorem ipſius x reſtituendo, reperientur hæc momentis ſuperius deſignatis convenire.

Eſt enim $x = \pm R \mp v$; prout ſupra infrave Centrum contigerit; (Hoc eſt, $x = R - v$, ſupra Centrum; vel $x = -R + v$ ſi infra Centrum.) Adeoque $\mp xR^2 = -R^3 + vR^2$.

Similiter $x^3 = \pm R^3 \mp 3vR^2 \pm 3v^2R \mp v^3$. Adeoque $\pm\frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}R^3 - vR^2 + v^2R - \frac{1}{3}v^3$. Hoc eſt (propter $v^2 = 2vR - s^2$, & $v^3 = 4vR^2 - 2s^2R - s^2v$,) $\pm\frac{1}{3}x^3 = +\frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v$.

Et utroque caſu (hoc eſt, ſive $x = +R - v$, ſive $x = -R + v$,) eſt $x^2 = R^2 - 2vR + v^2 = R^2 - s^2$. Adeoque $\frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2 = \frac{R^2 + s^2}{4R}x^2 = \frac{R^4 - s^4}{4R} = \frac{1}{4}R^3 - \frac{s^4}{4R}$.

Adeoque momentum Portionis A V β, reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{11}{12}R^3 \mp xR^2 \pm \frac{1}{3}x^3 - \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2 = \frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v + \frac{s^4}{4R}$; & reſpectu T A, $\frac{3}{12}R^3 \mp xR^2 \pm \frac{1}{3}x^3 + \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2 = \frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{3}s^2v - \frac{s^4}{4R}$.

Atque hæc momenta (propter Priſmatis ipſi A V β inſiſtentis altitudinem $\frac{1}{2}R$) ducta in $\frac{1}{2}R$; exhibent iſtius Priſmatis momentum, hoc eſt momentum Semiquadrantalis Ungulæ Semiſegmento Circulari A B V inſiſtentis (aciem habentis A α) reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; & reſpectu T A, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$. Ut prius.

Indeque Centri gravitatis diſtantia, ſive à $\tau\alpha$, ſive T A, ſive à B V, elicietur, ut prius.

F. Fig. 159, 160. Porro; Coni integri BBα (Trianguli BVα, circa A α converſione deſcripti,) magnitudo (per prop. præced. § S.) $\frac{s^2b}{6R}P = \frac{2R - v}{6R}s^2P$; ſemiconi, $\frac{2R - v}{12R}s^2P$; Ungulæque $\frac{1}{6}s^2b = \frac{1}{3}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$.

Centrique gravitatis diſtantia (per 6 hujus) à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}b = \frac{3}{2}R - \frac{3}{4}v$; à T A, $2R - \frac{3}{4}b = \frac{1}{2}R + \frac{3}{4}v$.

Quæ quidem diſtantiæ, in magnitudines ductæ, exhibent momenta, reſpectu ipſius $\tau\alpha$, Coni $\frac{s^2b^2P}{8R} = \frac{4R^2 - 4vR + v^2}{8R}s^2P = \frac{4R^2 - 2vR - s^2}{8R}s^2P$; Semiconi $\frac{4R^2 - 2vR - s^2}{16R}s^2P$; Semiquadrantalis Ungulæ, $\frac{1}{8}s^2b^2 = \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$.

Et, reſpectu ipſius TA, Momentum Coni $\frac{1}{3}s^2bP - \frac{s^2b^2P}{8R} = \frac{4R^2 - 2vR + 3s^2}{24R}s^2P$; Semiconi, $\frac{4R^2 - 2vR + 3s^2}{48R}s^2P$; Ungulæque $\frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR + \frac{1}{8}s^4 = \frac{1}{3}s^2bR - \frac{1}{8}s^2b^2$.

Atque,

Atque hæc momenta, momentis Sphærici Segmenti, Semisegmenti, & correspondentis Ungulæ, B B A, B V A, respective addita, exhibent momenta, respectu ipsius $\tau\alpha$, Sphærici Sectoris B α B A, $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{3}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$; Semisectoris B α A, $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{6}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$; & correspondentis Ungulæ, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{3}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$. Fig. 159, 160.

Et respectu TA, momentum Sectoris Sphærici B α B A, $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$; Semisectoris B α A, $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$; Ungulæque $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{12}s^2vR$.

Vel etiam; Intelligatur, super B C α Triangulo, Ungula Semiquadrantalis, aciem habens A α: Quæ Pyramis erit verticem habens α; & basin Triangularem super B C rectam. Hujusque Basis Triangularis (in rectam C B projectæ) Centrum gravitatis puta β, distabit à C (vertice Trianguli) $\frac{2}{3}$CB, (per 6 hujus;) ejusque ab A α (plano) distantia, $\beta\gamma=\frac{2}{3}$B.V$=\frac{2}{3}s$; &, in recta inde ad α ducta, Trianguli centrum gravitatis ut g, abscindet $\alpha g=\frac{3}{4}\alpha\beta$; Cujus itaque ab A α distantia g G $=\frac{3}{4}\beta\gamma=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}s=\frac{1}{2}s$: Ejusque à $\tau\alpha$ distantia, G $\alpha=\frac{3}{4}\gamma\alpha$; hoc est (propter $\gamma\alpha=R\pm\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}R-\frac{2}{3}v$,) $\frac{1}{4}R-\frac{1}{2}v$; adeoque ejusdem à T A distantia $\frac{3}{4}R+\frac{1}{2}v$.

Quæ quidem distantiæ, in $\frac{1}{6}s^2R$ (Pyramidis magnitudinem, per prop. præced. § S.) ductæ; exhibent momentum Pyramidis; (seu Ungulæ B C α, aciem habentis A α,) respectu ipsius $\tau\alpha$, $\frac{1}{24}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; &, respectu ipsius T A, $\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$. Adeoque Solidi (scil. Coni, conice excavati,) conversione Trianguli B C α circa A α facti, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{24}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$; &, respectu T A, $\frac{1}{8}s^2R\mathcal{P}+\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$: Semisolidique momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{48}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$; &, respectu T A, $\frac{1}{16}s^2R\mathcal{P}+\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$.

Atque hæc momenta, momentis Sphærici Sectoris, Semisectoris, & correspondentis Ungulæ, B C B A, B C A, respective addita; exhibent momenta Sectoris, Semisectoris, Ungulæque, B α B A, B α A, respectu ipsius $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{3}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$, $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{6}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{3}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$;

Et, respectu ipsius T A, $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$, $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P}+\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{12}s^2vR$. Ut prius.

Quæ quidem momenta, per magnitudines divisa, (prop. præced. § S. traditas) exhibent distantiam Centri gravitatis, à $\tau\alpha$, $\frac{\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{3}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR}{\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R}=R+\frac{2s^2R-s^2v}{4vR+2s^2}$; & à T A, $R-\frac{2s^2R-s^2v}{4vR+2s^2}$; à D C, $\frac{2s^2R-s^2v}{4vR+2s^2}=\frac{hs^2}{4vR+2s^2}$.

Similiter; Coni integri B A B, (Trianguli B A Y conversione circa A α descripti) magnitudo (per § R, prop. præced.) $\frac{s^2v\mathcal{P}}{6R}$; Semiconi $\frac{s^2v\mathcal{P}}{12R}$; & Semiquadrantalis Ungulæ $\frac{1}{6}s^2v$. Centrique gravitatis distantia à T A, $\frac{3}{4}v$ (per 6 hujus;) atque à $\tau\alpha$, $2R-\frac{3}{4}v$. Quæ quidem distantiæ in magnitudines ductæ, exhibent, respectu T A, momentum Coni $\frac{s^2v^2\mathcal{P}}{8R}$; Semiconi $\frac{s^2v^2\mathcal{P}}{16R}$; Ungulæque $\frac{1}{8}s^2v^2=\frac{1}{4}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$: Respectu $\tau\alpha$, momentum Coni $\frac{1}{3}s^2v\mathcal{P}-\frac{s^2v^2\mathcal{P}}{8R}$, Semi-coni $\frac{1}{6}s^2v\mathcal{P}-\frac{s^2v^2\mathcal{P}}{16R}$; Ungulæque $\frac{1}{3}s^2vR-\frac{1}{8}s^2v^2=\frac{1}{12}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$. G.

Quæ quidem momenta, ex respectivis momentis Segmenti, Semisegmenti, Ungulæque, B B A, B V A, (§ E. traditis,) subducta; relinquunt Annuli, (conversione segmenti A B A circa A α,) momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P}-\frac{1}{6}s^2R\mathcal{P}+\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$; Semiannuli $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P}-\frac{1}{12}s^2R\mathcal{P}+\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$; Et correspondentis Ungulæ $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR=\frac{1}{6}v^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$. Atque, respectu T A, momentum Annuli $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P}-\frac{1}{6}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{12}s^2v\mathcal{P}$; Semiannuli $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P}-\frac{1}{12}s^2R\mathcal{P}-\frac{1}{24}s^2v\mathcal{P}$: Ungulæque $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR=\frac{1}{6}v^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$. Adeoque (propter Ungulæ magnitudinem § Q, R. prop. præced. $\frac{1}{6}v^2R=\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R$,) distantia Centri gravitatis est à $\tau\alpha$, $R+\frac{s^2}{2v}=R+\frac{1}{2}b$; à T A, $R-\frac{1}{2}b$; atque à D C, $\frac{1}{2}b=\frac{s}{2v}s$.

Porro,

H. Fig. 159, 160. Porro, Cum jam exhibuerim, Momenta respectu rectæ $\tau\alpha$ (aut huic parallelæ) ut Axis Motus seu Libræ; Solidorum ex conversione vel semiconversione Semisectorum vel Semisegmentorum BCA, BαA, BVA, circa Aα ut axem Conversionis; & Ungularum Semiquadrantalium, illis correspondentium, aciem habentium Aα: Eadem opera etiam exhibuimus, Momenta respectu Aα ut Axis Motus seu Libræ, Solidorum ex conversione vel Semiconversione eorundem Semisectorum vel Semisegmentorum BCA, BαA, BVA, circa $\tau\alpha$ (vel huic parallelam) ut axem Conversionis. Et Ungularum Semiquadrantalium illis correspondentium, aciem habentium $\tau\alpha$, vel huic parallelam. (Quod &, Solidis ex quavis alia conversione imperfecta, non minus quam ex Semiconversione ortis; Ungulisque aliis quam Semiquadrantalibus; mutatis mutandis, accommodabitur.)

Quippe idem omnino momentum erit; sive sit Aα Axis Conversionis, & $\tau\alpha$ axis Libræ; sive $\tau\alpha$ axis Conversionis, & Aα axis Libræ. (Et similiter in ungulis; idem momentum erit, sive Acies Ungulæ sit Aα, & Axis Libræ $\tau\alpha$; sive Acies Ungulæ $\tau\alpha$, & Axis Libræ Aα, & similiter alibi.)

Cum enim, (verbi gratia,) rectæ BV momentum respectu Aα, sit $BV \times \frac{1}{2}BV$, (propter ipsius centrum gravitatis in sui medio,) hoc est, $\frac{1}{2}BVq$: Atque tantundem etiam sit Triangulum, in Ungula Semiquadrantali (cujus Acies Aα,) eidem BV insistens, (ut dudum ostensum est:) Erit hujus Trianguli momentum respectu $\tau\alpha$ rectæ (propter Vα distantiam) $\frac{1}{2}BVq \times V\alpha$. Sed & in Ungula Semiquadrantali cujus acies $\tau\alpha$, eidem BV insistet parallelogrammum cujus altitudo (propter angulum Semiquadrantalem) æqualis erit ipsi Vα distantiæ; cujus itaque magnitudo erit $BV \times V\alpha$: Cumque hujus Centrum gravitatis sit in media sui longitudine (per 2 hujus,) adeoque illius distantia ab Aα, seu perpendiculari plano huic insistente, sit $\frac{1}{2}BV$; erit ejusdem Parallelogrammi, respectu axis Libræ Aα, momentum, $\frac{1}{2}BV \times BV \times V\alpha = \frac{1}{2}BVq \times V\alpha$, ut prius. Cumque idem obtineat, de singulis rectis ipsi BV parallelis, Semisectores vel Semisegmenta BCA, BαA, BVA, complentibus: Idem de totius Ungulæ Momento obtinebit: Nempe idem omnino esse Momentum Ungulæ (super eodem plano,) sive sit Aα acies, & $\tau\alpha$ axis libræ; sive $\tau\alpha$ acies, & axis libræ Aα.

Atque idem plane obtinet de Solidis conversione, vel semiconversione descriptis: Quippe hæc tum magnitudine, tum & momento, nihil aliud ab Ungulis Semiquadrantalibus correspondentibus differunt quam quod sint ad illas in ratione $\mathcal{P}$ ad R, vel $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad R: ut supra ostensum est. Adeoque tum facti ex conversione BV circa Aα momentum respectu $\tau\alpha$, tum ejusdem conversione circa $\tau\alpha$, momentum respectu Aα, est $\frac{\frac{1}{2}BVq \times V\alpha}{R}\mathcal{P}$ seu $\frac{BVq \times V\alpha}{2R}\mathcal{P}$; factique ex semiconversione, utrobique, $\frac{BVq \times V\alpha}{4R}\mathcal{P}$. Et sic ubique.

I. Est itaque Semiquadrantalis Ungulæ super BCA Sectore, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu rectæ (planive perpendicularis) Aα (ut § C.) $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$; Solidique ejusdem integra conversione circa $\tau\alpha$ facti momentum (respectu ipsius Aα) $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P} + \frac{1}{8}s^2R\mathcal{P}$; & Semisolidi $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P} + \frac{1}{16}s^2R\mathcal{P}$.

Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (vel momentum Sectoris BCA respectu $\tau\alpha$) $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$ (per prop. præced. § I.) erit istius Ungulæ Centri gravitatis ab Aα distantia $\frac{8vR + 3s^2}{12a + 8s} = \frac{14R - 3v}{12a + 8s}v = \frac{8R + 3b}{12a + 8s}v$. Eademque est distantia ab Aα (recta, planove perpendiculari) Solidi conversione (perfecta vel imperfecta) BCA circa $\tau\alpha$ descripti.

Ungulæque Semiquadrantalis super eodem BCA Sectore aciem habentis TA, momentum respectu ipsius Aα, est (ut § C) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; Solidique correspondentis, $\frac{1}{3}vR^2\mathcal{P} - \frac{1}{8}s^2R\mathcal{P}$; & Semisolidi, $\frac{1}{6}vR^2\mathcal{P} - \frac{1}{16}s^2R\mathcal{P}$. Adeoque, (propter Ungulæ magnitudinem, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}sR^2$, per § I. prop. præced.) distantia Centri gravitatis istius Ungulæ (adeoque & Solidi seu Semisolidi correspondentis) ab Aα, est $\frac{8vR - 3s^2}{12a - 8s} = \frac{8R - 3b}{12a - 8s}v$.

Et, speciatim, quæ toti Semicirculo insistit semiquadrantalis Ungulæ aciem habentis

bentis sive $\tau\alpha$, sive T A, Momentum respectu A α, est $\frac{1}{3}R^4$; Solidique correspondentis $\frac{2}{3}R^3P$; & Semisolidi, $\frac{1}{3}R^3P$: Centrique gravitatis ab A α distantia, $\frac{8R^2}{3P}$. Fig. 159, 160.

Item, Semiquadrantalis Ungulæ super B V A Semisegmento, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu A α, est (ut § E.) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; (Solidique correspondentis, & Semisolidi, momenta, ad hoc; ut P, vel $\frac{1}{2}P$, ad R.) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (vel momentum Semisectoris B V A respectu $\tau\alpha$,) $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$, (per § L. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis istius Ungulæ (adeoque Solidi Semisolidive correspondentis) ab A α, $\frac{8vR^3 - 4s^2R^2 + 4s^2vR + 3s^4}{12aR^2 - 12sR^2 + 12svR + 8s^3} = \frac{4vR^2 + 4s^2R + 3s^2b}{12cR^2 + 12svR + 8s^3}v$. K.

Ungulæque Semiquadrantalis super eodem B V A Semisegmento, aciem habentis T A, momentum respectu ejusdem A α, est (ut § E.) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$; (Solidique aut Semisolidi correspondentis momentum, ad hoc; ut P vel $\frac{1}{2}P$ ad R:) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (seu plani B V A momentum respectu T A,) $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$, (per § L. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis Ungulæ (Solidive aut Semisolidi conversione facti) ab A α, $\frac{8vR^3 - 4s^2R^2 + 4s^2vR - 3s^4}{12aR^2 - 12sR^2 + 12svR - 8s^3} = \frac{4vR^2 + 4s^2R - 3s^2b}{12eR^2 + 12svR - 8s}v$.

Similiter, Semiquadrantalis Ungulæ super eodem B V A, aciem habentis B V, momentum respectu A α, est (ut § E,) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{24}s^4 = \frac{1}{8}v^2R^2 - \frac{1}{24}v^2b^2$; (Solidique & Semisolidi conversione facti momenta, ad hoc, ut P & $\frac{1}{2}P$ ad R:) Adeoque propter Ungulæ magnitudinem (vel plani respectu B V momentum) $-\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}avR - \frac{1}{6}s^3 = \mp\frac{1}{2}exR + \frac{1}{6}svz$; (per § L prop. præc.) Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{8vR^3 - 4s^2R^2 - s^4}{-12aR^2 + 12sR^2 + 12avR - 4s^3}$: Vel (quod eodem recidit). $\frac{c^2 + s^2}{4svz \mp 12cxR}v^2$, seu $\frac{4R - v = 2R + b}{4svz \mp 12cxR}v^2$, seu $\frac{4vR^2 - s^2b}{-12cR^2 + 12avR - 4s^3}v$.

Item, Semiquadrantalis Ungulæ super B α A, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu A α, (ut § F.) $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR = \frac{1}{2}s^2R^2 + \frac{1}{12}v^2R$; (Solidique conversione facti, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{3}s^2RP - \frac{1}{12}s^2vP$; & Semisolidi $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{6}s^2RP - \frac{1}{24}s^2vP$:) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (seu plani momentum respectu $\tau\alpha$,) $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{5}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$ (per § M. prop. præced.) distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{4vR^2 + 4s^2R - s^2v}{6aR + 10sR - 2sv} = \frac{4R^2 + 4bR - s^2}{6fR + 2sb}v$. L.

Ungulæque Semiquadrantalis super eodem B α A, aciem habentis T A, momentum respectu ejusdem A α (ut § F) $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{12}s^2vR$; (Solidique & Semisolidi, conversione facti, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{12}s^2vP$, $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{24}s^2vP$:) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem, (seu plani momentum respectu T A,) $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$, (per § M. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{4vR^2 + s^2v}{6aR + 2sR + 2sv} = \frac{4R^2 + s^2}{6fR - 2sb}v$.

Eodem-modo, Semiquadrantalis Ungulæ Triangulo B C α insistentis aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu A α, est (ut § F.) $\frac{5}{24}s^3R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; (& Solidorum, conversione vel semiconversione descriptorum, his proportionalia; nempe in ratione P seu $\frac{1}{2}P$ ad R: quod & in sequentibus intellige.) Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$, per § M. prop. præced.) distantia Centri gravitatis ab A α, est $\frac{5sR - 2sv}{12R - 4v} = \frac{5R - 2v}{12R - 4v}s$. Ungulæque Semiquadrantalis super eodem B C α insistentis, aciem habentis T A, momentum respectu A α, est (ut § F) $\frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR$; adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$ per § M. prop. præced.) distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{3R + 2v}{12R + 4v}s$. M.

Ungulæque Semiquadrantalis super Triangulo B V C, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu A α; est (ut § D.) $\frac{7R - 3v}{24}s^2x$: Et magnitudo (per § K.

 prop.

Fig. 159, 160. prop. præced.) $\frac{5R-2v}{6}sx$: distantiaque Centri gravitatis ab Aα $\frac{7R-3v}{20R-8v}s$. Aciemque habentis TA, momentum (respectu Aα,) $\frac{R+3v}{24}s^2x$; magnitudo, $\frac{R+2v}{6}sx$; distantiaque $\frac{R+3v}{4R+8v}s$.

Et Semiquadrantalis Ungulæ super Triangulo BVα = BCα ± BVC, aciem habentis τα, momentum (respectu Aα) $\frac{5R-2v}{24}s^2R \pm \frac{7R-3v}{24}s^2x$; hoc est (propter $x=R-v$, supra centrum, addendum; vel $x=-R+v$, infra Centrum, auferendum;) $\frac{5R-2v}{24}s^2R + \frac{7R^2-10vR+3v^2}{24}s^2 = \frac{12R^2-12vR+3v^2}{24}s^2$; vel (propter $v^2=2vR-s^2$,) $\frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4 = \frac{1}{8}s^2b^2$; (ut § F.) Adeoque (propter mag. $\frac{3R-v}{6}sR \pm \frac{5R-2v}{6}sx = \frac{3R-v}{6}sR + \frac{5R^2-7vR+2v^2}{6}s = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{4}{3}svR + \frac{1}{3}sv^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}sb^2$; ut § M. prop. præced.) distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3}{8}s$. Aciemque habentis TA; momentum (ut § F.) $\frac{1}{3}s^2bR - \frac{1}{8}s^2b^2$; magnitudo (ut § M. prop. præced.) $sbR - \frac{1}{3}sb^2$; distantiaque $\frac{8R-3b}{24R-8b}s = \frac{2R+3v}{8R+8v}s$.

N. Ungulæque Semiquadrantalis super Triangulo BAV, aciem habentis τα, momentum respectu Aα, est (ut § G,) $\frac{1}{12}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; & magnitudo (propter magnitudinem Trianguli $\frac{1}{2}sv$; distantiamque Centri gravitatis à TA $\frac{2}{3}v$, & à τα $2R-\frac{2}{3}v$,) $svR - \frac{1}{3}sv^2 = \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$; & distantia Centri gravitatis ab Aα $\frac{2vR+3s^2}{8vR+8s^2}s$. Aciemque habentis TA, momentum respectu Aα, $\frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$; magnitudo, $\frac{1}{3}sv^2 = \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$; Centrique gravitatis ab Aα distantia, $\frac{6vR-3s^2}{16vR-8s^2}s = \frac{3}{8}s$.

Et Semiquadrantalis Ungulæ super ABA Segmento, aciem habentis τα, momentum respectu Aα, est (ut § G.) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR = \frac{1}{6}v^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR$; magnitudo (per § N. pr. præced.) $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; Centrique gravitatis ab Aα distantia, $\frac{4vR^2-2s^2R+s^2v}{6aR-6sR+2sv} = \frac{4R^2-2bR+s^2}{6eR+2sv}v$. Aciemque habentis TA, momentum $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR = \frac{1}{6}v^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; magnitudo, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; distantiaque $\frac{4vR^2-2s^2R-s^2v}{6aR-6sR-2sv} = \frac{4R^2-2bR-s^2}{6eR-2sv}v$.

O. Atque jam (inter alia) Solidorum Semisectoris BCA, BαA, aut semisegmenti BVA, Segmentive ABA (nedum Triangulorum BCα, BCV, BAV, BVα, &c.) circa Aα, integra conversione descriptorum, Centra gravitatis determinavimus: Ostendimus utique, distantiam Centri gravitatis à τα, TA, BV, &c. Atque in ipso Axe Aα situm esse, constat, ex prop. 5 hujus. Ipsum itaque punctum determinavimus.

Et similiter, Centra gravitatis Solidorum integrorum, quæ (non modo Sectoris BCB, vel BαB, vel Segmenti BBA; ut quæ in medio Axis conversionis esse manifestum est; sed &) Semisectoris BCA, vel BαA, aut Semisegmenti BVA, Segmentive ABA, circa τα vel TA, aut etiam Semisegmenti BVA circa BV, conversione integra describuntur, determinavimus. Cum enim eorum distantias ab Aα plano designavimus, eaque in ipso conversionis Axe τα, TA, vel BV, esse constet (per 5 hujus:) ipsa Axis puncta, quæ Centra gravitatis sunt, determinantur.

Verum

Verum in horum Semisolidis, solidisve imperfecta quavis conversione descriptis; Ungulisque correspondentibus: nondum determinantur ipsa Centra; ut quæ non in ipso Axe polita sunt, sed alibi, extra axem, in plano per axem transeunte. Fig. 159, 160.

Cum tamen in quo per Axem conversionis, seu Aciem Ungulæ, transeunte plano constituta sint, jam constet ex § G prop. 12. hujus; (nempe, in eo per conversionis axem plano quod solidorum, conversione factorum, arcum conversionis bisecat; eoque per Ungularum aciem plano, quod bisecat ungulæ altitudinem:) Atque in qua quidem hujus plani recta, jam sit determinatum; nempe in eis quorum Axis seu Acies est A α, per Centri gravitatis distantiam, à τ α, T A, B V, &c. & in eis quorum Axis est τ α, T A, vel B V, per ejus ab A α distantiam. Id solum superest, ut in quo istius rectæ puncto situm sit, determinemus per ipsius à conversionis Axe distantiam in eis quæ conversione describuntur Solidis; &, in Ungulis, per distantiam à perpendiculari per Aciem Plano. (Unde ipsum gravitatis Centrum determinatum iri constat, per prop. 26. Cap. præced.) Id autem sic aggredimur.

Ut Sectorem Sphæricum integrum, B C B A, § A, (plani B C A circa rectam A α integra conversione descripti,) sic ejusdem semissem seu Semisectorem Sphæricum, aliumve imperfectum, (conversione dimidia, aliave imperfecta descriptum,) intelligamus ex Pyramidulis (similibus & æqualibus) componi, (juxta def. 1. Cap. 4.) Quarum communis vertex sit Sphæræ centrum, Basesque compleant Superficiei Sphæricæ portionem Semisectori huic, Sectorive imperfecto, convenientem: nempe Trilineum Sphæricum, quod *Sectoris Basin* appellabimus. P.

Cumque (per 6 hujus) Centri gravitatis in Pyramide, distantia à vertice pyramidis sit $\frac{3}{4}$ totius altitudinis; Pyramidularum illarum omnia Centra gravitatis (æqualibus ab invicem distantiis remota) intelligantur complere Simile Trilineum Sphæricum, ut b a, fig. 165. cujus radius sit C b $= \frac{3}{4}$ C B $= \frac{3}{4} R$. Cujus cum singula puncta, (utpote æqualium Pyramidum Centra gravitatis,) æqualiter onerata reputentur; idem erit Trilinei hujus, ipsiusque expositi Semisectoris, Sectorisve imperfecti, Centrum gravitatis; (per 16 Cap. 4.) adeoque tantundem ab A α conversionis axe distabit.

Quod & similiter accommodabitur Ungulæ eidem B C A Sectori Circulari insistenti; Cujus utique (pari ratione) Centrum gravitatis idem erit atque Superficiei Ungulæ Cylindraceæ arcui b a insistentis aciem habentis A α; adeoque tantundem ab A α perpendiculari plano distans.

Est autem (per § V, W. prop. 13.) Semiquadrantalis Ungulæ superficialis, arcui B A insistentis, momentum respectu ipsius A α; idem atque summa quadratorum sinuum rectorum ipsi A B arcui convenientium; adeoque æquatur facto ex B V A semisegmento, in R ducto; hoc est, (propter B V A $= \frac{1}{2} e R + \frac{1}{2} s v$, per § F. prop. præced.) $\frac{1}{2} e R^2 + \frac{1}{2} s v R$: Atque hoc, per Ungulæ superficialis magnitudinem divisum; hoc est, (per § N. Q. prop. 13.) per $v R$ divisum; exhibet istius Ungulæ Superficialis B A, distantiam Centri gravitatis ab A α $= \frac{e}{2v} R + \frac{1}{2} s$. Adeoque (propter C b $= \frac{3}{4}$ C B $= \frac{3}{4} R$,) arcui b a insistentis Ungulæ superficialis, & propterea (per jam demonstrata) Ungulæ Solidæ ipsi B C A insistentis, aciem habentis A α, distantiam Centri gravitatis ab A α plano, $\frac{3e}{8v} R + \frac{3}{8} s$. (Et, speciatim, istius quæ toti A D α semicirculo insistit, Ungulæ, distantia Centri gravitatis ab A α, propter $s = 0$, adeoque $e = a = \frac{1}{2} P$, & $v = 2 R$, erit $\frac{3}{32} P$.)

Eademque esset distantia Centri gravitatis Solidi, imperfecta ejusdem B C A circa A α conversione descripti, ab A α conversionis axe; dempta curvatura. Sed, propter curvaturam, minuenda est pro ratione quam habet ad conversionis arcum chorda sua, (per prop. 14. hujus) hoc est, in Semiconversione, ut $2 R$ ad $\frac{1}{2} P$, seu ut $4 R$ ad P; (& in aliis conversionibus similiter, mutatis mutandis, in ratione Chordæ ad Arcum;) Adeoque Semisolidi, ipsius B C A semiconversione circa A α descripti, distantia Centri gravitatis à conversionis suæ Axe A α, est $\frac{3eR + 3sv}{2vP} R$. (Et, speciatim, quod Semiconversione Semicirculi A D α describitur, Hemisphærii, distantia Centri gravitatis ab A α, est $\frac{3}{8} R$.) Atque

Fig. 159, 160. Atque hæ distantiæ in magnitudines ductæ, (nempe Ungulæ, $\frac{1}{3}vR^2$; & Semisolidi, $\frac{1}{6}vRP$, per § Q. prop. præced.) exhibent Semiquadrantalis Ungulæ super BCA Sectore, aciem habentis A α, momentum respectu ipsius A α, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2$; Semisolidique correspondentis, $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2$. Et speciatim, pro Ungula Semicirculi, & Hemisphærio; $\frac{1}{16}R^3P$, & $\frac{1}{8}R^3P$.

(Atque hic obiter notare non erit importunum, momentum Semisolidi respectu sui axis conversionis, duplum esse momenti correspondentis Ungulæ Semiquadrantalis respectu aciei suæ seu Plani per illam perpendicularis; quod in hujusmodi casibus semper obtinet, quod semel moneo: Cum enim magnitudo ad magnitudinem sit ut $\frac{1}{2}P$ ad R; Centrique distantia, propter conversionem dimidiam, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$; erit quæ ex utrisque componitur, momentorum ratio $\frac{\frac{1}{2}P}{R}\times\frac{2R}{\frac{1}{2}P}=\frac{2}{1}$.)

Q. Deinde, quæ Triangulo BVC insistit Semiquadrantalis Ungula, aciem habens A α, Pyramis est; verticem habens C Centrum; Basemque Triangularem rectæ BV insistentem; cujus quidem Trianguli Centrum gravitatis ab A α plano, distat $\frac{2}{3}$BV $=\frac{2}{3}s$; Centrumque gravitatis Pyramidis (utpote in recta, à basis Centro ad C pyramidis verticem ducta, quæ est Pyramidis axis, tres quadrantes versus C abscindens; per 6 hujus;) distabit ab A α plano, $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}s=\frac{1}{2}s$. Quæ quidem distantia, ducta in Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{6}s^2x$, (per § R. prop. præced.) exhibet ejusdem momentum respectu A α, $\frac{1}{12}s^3x$: Et Semisolidi correspondentis (cujus magnitudo ad magnitudinem Ungulæ est ut $\frac{1}{2}P$ ad R; Centrique gravitatis distantia, ad distantiam hujus, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$;) momentum $\frac{1}{6}s^3x$.

Atque hæc Ungulæ, Semisolidique momenta; momentis Ungulæ Semisolidique Sectoris BCA (§ P. repertis;) Ablata, si supra Centrum; vel Addita, si infra Centrum; exhibent Ungulæ Semisegmento BVA insistentis, aciem habentis A α, momentum respectu A α, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2\mp\frac{1}{12}s^3x$: Hoc est, (propter $x=R-v$, supra Centrum, auferendum; & $x=-R+v$, infra Centrum, addendum;) $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$: Et semisolidi, $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2\mp\frac{1}{6}s^3x=\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{6}s^3R+\frac{1}{6}s^3v$. Adeoque (propter Ungulæ magnitudinem, $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v$, per § R. propositionis præcedentis) distantia centri gravitatis Ungulæ ab A α, $\frac{3eR^3+3svR^2-2s^3R+2s^3v}{8vR^2-4s^2R+4s^2v}=\frac{3eR^3+3svR^2\mp2s^3x}{4v^2R+4s^2v}$: Centrique Semisolidi inde distantia, ad hanc ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P.

Potest autem hoc momentum Ungulæ & Semisolidi, Semisegmento BVA convenientium, sic aliter concipi. Nempe, si omnes ordinatim applicatæ BV &c. æqualibus intervallis sumptæ, (complentes BVA spatium,) ducantur primum in sui semisses, ut habeantur Triangula eidem insistentia (Ungulam complentia,) quæ sunt (ut supra ostensum est) ordinatim-applicatarum Semiquadrata: Atque hæc demum Triangula (semiquadratis æqualia) in rectarum duos Trientes, (pro distantia Centri gravitatis à vertice in Triangulo:) Quod prodit, BV$\times\frac{1}{2}$BV$\times\frac{2}{3}$BV $=\frac{1}{3}$BVc, exhibebit momentum Trianguli rectæ BV insistentis. Quod cum ubique fiat: Erit Ungulæ Semiquadrantalis, super BVA insistentis, aciem habentis A α, momentum respectu ipsius A α; summæ Cuborum ordinatim applicatarum Triens; Puta, $\frac{1}{3}$ *Omn.* o^3. (Quod perinde verum est, si pro Semisegmento BVA in vertice terminato, sumeretur BVCD, vel quævis alia Semicirculi portio, duabus ordinatim-applicatis interjecta. Quippe, & hic, $\frac{1}{3}$ *Omn.* o^3 momentum Ungulæ similiter exhibebit.)

Sed & idem momentum jam modo repertum est, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$. Hujus itaque Triplum, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$, æquatur *Omnibus* o^3; hoc est, summæ cuborum ordinatim-applicatarum, quæ Semisegmentum circulare BVA, in vertice terminatum, complent.

(Si vero hæc ad summam Cuborum ordinatim-applicatarum in alia portione, puta BVCD, non ad verticem A terminata, accommodare libet; id fiet, ut aliis modis, sic hac saltem facili ratione; nempe, si, modo jam tradito, habeatur primum summa *omnium* o^3 quæ totum ADC Semisegmentum spectant; atque deinde summa *omnium* o^3 quæ spectant Semisegmentum ABV; atque demum hæc summa, ab illa subducatur; quod restat, erit *omnium* o^3 portionem BVCD spectantium summa.)

Verum

Verum potest & hoc idem Ungulæ semisegmento B V A insistentis, aciem habentis A α, momentum respectu ipsius A α, sic adhuc aliter concipi. Nempe, si rectæ omnes ipsi A V parallelæ, Semisegmentum B V A complentes, ducantur in quadrata distantiarum suarum respective, à recta A V: (hoc est; propter æqualia quæ supponimus parallelarum illarum intertitia; in seriem secundanorum, ut 0, 1, 4, 9, &c. quorum maximum sit remotissimæ parallelarum distantia quadrata :) Nam rectarum quælibet in distantiam suam ducta, exhibet parallelogrammum eidem insistens in Semiquadrantali Ungula exposita; idemque iterum in eandem distantiam ductum, exhibet istius parallelogrammi momentum respectu Axis A V, seu A α. Adeoque simul omnia, istius parallelogrammi momentum. Fig. 159, 160.

Quæque de Ungula dicta sunt; solido ejusdem plani B V A conversione imperfecta descripto facile (ex præmonstratis) accommodari poterunt. Sed de his hactenus.

Progredimur ad imperfectum Sectorem, Sectoris plani B α A circa A α imperfecta conversione descriptum; Ungulamque huic correspondentem. Quantum scilicet, in his, Centrum gravitatis distat ab A α, conversionis Axe, seu plano per aciem Ungulæ perpendiculari. R.

Quæ Triangulo B V α insistit semiquadrantalis Ungula aciem habens A α, Pyramis est; Cujus vertex α; Basisque triangularis ipsi B V insistens. Centrique gravitatis distantia ab A α, $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} s = \frac{1}{2} s$. (Quod eodem modo ostendetur, atque in § Q. de Pyramide triangulo B V C incumbente.) Ejusque magnitudo (per § S. prop. præced.) $\frac{1}{6} s^2 b$. Adeoque momentum respectu A α, $\frac{1}{12} s^3 b = \frac{1}{6} s^3 R - \frac{1}{12} s^3 v$. Quod quidem additum momento Ungulæ Semisegmenti B V A (§ Q. invento) $\frac{1}{8} c R^3 + \frac{1}{8} s v R^2 - \frac{1}{12} s^3 R + \frac{1}{12} s^3 v$; exhibet Semiquadrantalis Ungulæ sectori B α A insistentis, aciem habentis A α, momentum respectu ipsius A α, $\frac{1}{8} c R^3 + \frac{1}{8} s v R^2 + \frac{1}{12} s^3 R$.

Idemque sic habetur. Semiquadrantalis Ungula Trianguli B C α, aciem habens A α, est item Pyramis cujus vertex, α; Basisque Triangularis (ipsi C B insistentis.) Centrum gravitatis ab A α plano distat, $\frac{2}{3}$ B V $= \frac{2}{3} s$; adeoque Centrum Pyramidis inde distat, $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} s = \frac{1}{2} s$. Adeoque, propter magnitudinem $\frac{1}{4} s^2 R$ (per § S. prop. præced.) momentum $\frac{1}{12} s^3 R$. Atque hoc Additum momento Ungulæ B C A, (§ P. invento,) $\frac{1}{8} c R^3 + \frac{1}{8} s v R^2$; exhibet momentum Ungulæ Semiquadrantalis Sectori B α A insistentis, aciem habentis A α, respectu ipsius A α, $\frac{1}{8} c R^3 + \frac{1}{8} s v R^2 + \frac{1}{12} s^3 R$. Ut prius. (Hujusque duplum, est Semisolidi correspondentis momentum.)

Atque hoc Ungulæ momentum, per ipsius magnitudinem divisum; hoc est, per $\frac{1}{3} v R^2 + \frac{1}{6} s^2 R$, (per § S. prop. præced.) exhibet hujus Ungulæ Sectori B α A insistentis, aciem habentis A α, distantiam Centri gravitatis ab A α plano, $\frac{3 c R^2 + 3 s v R + 2 s^3}{8 v R + 4 s^2}$. Adeoque Semisolidi correspondentis, distantia Centri gravitatis est ab A α conversionis axe, $\frac{3 c R^2 + 3 s v R + 2 s^3}{2 v R P + s^2 P} R$: nempe ad illam Ungulæ, ut $4 R$ ad P.

Similiter ostendetur, Ungulæ Semiquadrantalis Triangulo B A V insistentis, aciem habentis A α, (quæ etiam Pyramis est,) Centrum gravitatis ab A α plano distare $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} s = \frac{1}{2} s$; magnitudinem esse $\frac{1}{6} s^2 v$; momentum respectu A α, $\frac{1}{12} s^3 v$. Atque hoc ex momento Ungulæ Semisegmenti B V A (§ Q. invento) sublatum; exhibet Semiquadrantalis Ungulæ, Segmento A B A insistentis, aciem habentis A α, momentum respectu A α, $\frac{1}{8} c R^3 + \frac{1}{8} s v R^2 - \frac{1}{12} s^3 R$. S.

Vel etiam; Ungulæ Semiquadrantalis Triangulo B A C insistentis, aciem habentis A α, (quæ vel Pyramis, vel saltem duarum Pyramidum aggregatum vel differentia, quarum communis basis triangularis ipsi B V insistit,) Centrum gravitatis similiter ab A α distare, $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} s = \frac{1}{2} s$; magnitudinem, $\frac{1}{6} s^2 R$; momentum respectu A α, $\frac{1}{12} s^3 R$. Atque hoc ex momento Ungulæ Sectoris B A C (§ P. invento) $\frac{1}{8} c R^3 + \frac{1}{8} s v R^2$, subductum; relinquit $\frac{1}{8} c R^3 + \frac{1}{8} s v R^2 - \frac{1}{12} s^3 R$, momentum, respectu A α, Ungulæ aciem habentis A α, ipsi A B A, segmento insistentis. Ut prius. (Hujusque duplum $\frac{1}{4} c R^3 + \frac{1}{4} s v R^2 - \frac{1}{6} s^3 R$, momentum Semisolidi correspondentis.)

Illudque

Fig. 159, 160. Illudque Ungulæ momentum, per ipsius magnitudinem divisum, hoc est per $\frac{1}{4}v^2R=\frac{1}{2}vR^2-\frac{1}{4}s^2R$ (per § Q. prop. præced.) exhibet istius Ungulæ Segmento ABA insistentis, aciem habentis $A\alpha$, distantiam Centri gravitatis ab $A\alpha$ plano, $\frac{3cR^2+3svR-2s^3}{8vR-4s^2=4v^2}$. Semisolidique correspondentis, Centri inde distantiam $\frac{3cR^2+3svR-2s^3}{2vRP-s^2P}R$.

T. Restat, ut similiter expendamus Solida, imperfecta conversione circa $\tau\alpha$, TA, BV, descripta: Ungulasque correspondentes: Eorum Momenta respectu $\tau\alpha$, TA, BV, respective, determinando; Centrique gravitatis inde distantiam.

Intelligatur itaque super $AD\alpha$ Semicirculo, Ungula Semiquadrantalis, aciem habens $\tau\alpha$. Cujus itaque singulis ordinatim-applicatis, ut BV, totidem insistunt Parallelogramma Rectangula, Ungulam complentia; quorum altitudines sint ipsis $V\alpha$ respectivis æquales; eorumque à TA distantia VA. Eritque propterea Rectangulorum horum cujusque momentum respectu TA, (oppositæ tangentis,) æquale facto ex Base BV, in altitudinem $V\alpha$, & distantiam à vertice VA, continue ducta: Hoc est, $BV \times V\alpha \times VA$. Est autem $\alpha V \times VA = BVq$, (propter BV mediam proportionalem inter Diametri segmenta AV, αV:) Adeoque $BV \times \alpha V \times VA = BVc$. Et sic ubique.

Idemque erit (eadem de causa) momentum, respectu $\tau\alpha$, Ungulæ, aciem habentis TA. Quæ enim est, in altera, altitudo; est, in reliqua, distantia: & vice versa.

Sunt itaque Parallelogrammorum horum omnium (sive quæ Ungulam totam ipsi $A\alpha D$ insistentem; sive quæ ipsius portionem ipsi BVA, vel BVCD, insistentem complent; quippe utrobique eadem est ratio;) momenta respectu TA, si acies sit $\tau\alpha$; vel respectu $\tau\alpha$, si acies sit TA; Summa cuborum ordinatim-applicatarum basin complentium. Puta, *omnium* o^3, respective.

Et quidem in ea quæ Semisegmento BVA insistit, (ad Verticem A terminato) *Omn.* $o^3_{,}=\frac{3}{8}cR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$, ut § Q. ostensum est. (Idemque, si opus fuerit ad aliam portionem, ut BVCD, facile accommodabitur; ut ibidem etiam ostensum est.)

Illud itaq; momentum; si dividatur per Ungulæ magnitudinem ipsi BVA Semisegmento insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}cR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3$ (per § L. prop. præced.) exhibet distantiam Centri gravitatis ab (opposita) TA, $\frac{9cR^3+9svR^2-6s^3R+6s^3v}{12cR^2+12svR+8s^3}$ $=\frac{3}{4}R-\frac{6s^3R-3s^3v}{6cR^2+6svR+4s^3}=\frac{3}{4}R-\frac{3s^3b}{6cR^2+6svR+4s^3}$: Adeoque ab ipsa $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R+\frac{3s^3b}{6cR^2+6svR+4s^3}$; & à BV, $\frac{3}{4}R-b+\frac{3s^3b}{6cR^2+6svR+4s^3}$. Ungulæque propterea respectu ipsius BV, momentum $-\frac{3}{8}cR^3+\frac{1}{2}avR^2+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$: Ejusdemque respectu ipsius $\tau\alpha$, aciei suæ, momentum, $\frac{3}{8}cR^3+\frac{3}{8}svR^2+\frac{11}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$. Hujusque duplum $\frac{3}{4}cR^3+\frac{3}{4}svR^2+\frac{11}{6}s^3R-\frac{1}{2}s^3v$ momentum semisolidi, semiconversione semisegmenti BVA circa $\tau\alpha$, respectu ipsius $\tau\alpha$ axis conversionis: Atque hoc, per Semisolidi magnitudinem divisum, exhibet $\frac{15cR^3+15svR^2+22s^3R-6s^3v}{3cR^2P+3svRP+2s^3P}R=\frac{5R}{P}R+\frac{12s^3R-6s^3v}{3cR^2P+3svRP+2s^3P}R$ $=\frac{5R}{P}R+\frac{6s^3b}{3cR^2P+3svRP+2s^3P}R$: Semisolidi istius, distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, (nempe ad illam Ungulæ, ut $4R$, ad P.) Adeoque, à TA, $\frac{2P-5R}{P}R-\frac{6s^3b}{3cR^2P+3svRP+2s^3P}R$, Semisolidique istius, respectu ipsius TA (axi oppositæ) momentum $\frac{1}{2}cR^2P+\frac{1}{2}svRP+\frac{1}{3}s^3P-\frac{3}{4}cR^3-\frac{3}{4}svR^2$ $-\frac{11}{6}s^3R+\frac{1}{2}s^3v$.

Idemque (quod prius) momentum $\frac{3}{8}cR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; si dividatur per Ungulæ magnitudinem ipsi BVA insistentis, aciem habentis TA, $\frac{1}{2}cR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$, (per § L. prop. præced.) exhibet, hujus, Centri gravitatis distantiam

distantiam ab (opposita) $\tau\alpha$, $\frac{9eR^3+9svR^2-6s^3R+6s^3v}{12eR^2+12svR-8s^3}=\frac{3}{4}R$ Fig.
$+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$: Atque à B V, $\frac{3}{4}R-b+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}=-\frac{5}{4}R+$ 159, 160.
$v+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$; à T A, $\frac{1}{4}R-\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$: Ungulæque propterea, respectu B V, momentum $-\frac{5}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; & respectu ipsius T A (aciei suæ) momentum $\frac{3}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$: Hujusque duplum, $\frac{3}{4}eR^3+\frac{3}{4}svR^2-\frac{1}{6}s^3R-\frac{1}{2}s^3v$, momentum Semisolidi correspondentis. Hujusque propterea Semisolidi distantia Centri gravitatis à T A (axe suo) est $\frac{5R}{P}R-\frac{6s^3v}{3eR^2P+3svRP-2s^3P}R$; adeoque à $\tau\alpha$, (axi opposita) $\frac{2P-5R}{P}R+\frac{6s^3v}{3eR^2P+3svRP-2s^3P}R$. Ejusque momentum respectu hujus $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eR^2P+\frac{1}{2}svRP-\frac{1}{3}s^3P-\frac{3}{4}eR^3-\frac{3}{4}svR^2+\frac{5}{6}s^3R+\frac{1}{2}s^3v$.

Et, speciatim, quæ toti Semicirculo A D α insistit Ungula, aciem habens, sive $\tau\alpha$, sive T A; momentum habet (propter $s=0$, & $e=a=\frac{1}{2}P$,) respectu earum alterius, nempe aciei suæ, $\frac{3}{16}R^3P$; alterius vero, quæ aciei opponitur, $\frac{5}{16}R^3P$; Adeoque Centri gravitatis distantiam inde, $\frac{5}{4}R$; hinc, $\frac{3}{4}R$. Et correspondentis Semisolidi conversione facti, momentum respectu axis conversionis suæ, $\frac{3}{8}R^3P$; Centrique gravitatis inde distantia, erit $\frac{5R^2}{P}$. Unde habetur ejusdem ab altero extremo distantia, & momentum respectu istius.

Deinde; ut hæc ad Axem B V, transferantur; (per § F. prop. 11. hujus:) Ex Ungulæ Semisegmenti B V A, aciem habentis T A, momento respectu $\tau\alpha$, modo invento, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; si auferatur factum ex Ungulæ magnitudine $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$, in αV $=b$ ducta, hoc est, $\frac{1}{2}ebR^2+\frac{1}{2}svbR-\frac{1}{3}s^3b=\frac{1}{2}ebR^2+\frac{1}{2}s^3R-\frac{1}{3}s^3b$, (propter $bv=s^2$,) hoc est, $eR^3-\frac{1}{2}evR^2+\frac{1}{2}s^3R-\frac{2}{3}s^3R+\frac{1}{3}s^3v=eR^3-\frac{1}{2}avR^2+\frac{1}{2}svR^2-\frac{1}{6}s^3R+\frac{1}{3}s^3v$: Quod restat $-\frac{5}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$, est ejusdem Ungulæ BVA aciem habentis TA, momentum respectu B V; (quod § T. aliter ostensum est:) Ejusque Centri gravitatis distantia à B V, $\frac{-15eR^3+12avR^2-3svR^2-2s^3R-2s^3v}{12eR^2+12svR-8s^3}$ V.
$=v-\frac{5}{4}R+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$. Idemque habetur, si ejusdem Centri distantia à T A, auferatur ex A V $=v$, (aut ab ejus à $\tau\alpha$ distantia auferatur $b=2R-v$;) ut habeatur illius à B V distantia; atque hæc à B V distantia ducatur in magnitudinem Ungulæ, ut habeatur momentum: (ut § T. factum est.) Et, utrovis modo, habebitur Semisolidi correspondentis momentum respectu ejusdem BV; Centriq; gravitatis inde distantia: Nempe, distantia, $\frac{6s^3v}{3eR^2P+3svRP-2s^3P}R-\frac{5R^2}{P}+v$; & momentum, $\frac{1}{4}fvRP-\frac{1}{4}s^3P-\frac{s^3vP}{6R}-\frac{3}{4}eR^3-\frac{3}{4}svR^2+\frac{5}{6}s^3R+\frac{1}{2}s^3v$.

Ex Ungula vero Semisegmenti B V A, aciem habentis $\tau\alpha$; puta V v f A (fig. 141.) auferendum primo factum ex plano B V A in α V, puta Prisma V v a A, ut habeatur v a f, seu V A F, Ungula ejusdem basis aciem habens B V: Atque ex momento istius Ungulæ respectu ejusdem $\tau\alpha$ hoc est, ex $\frac{3}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2+\frac{11}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$ (per § T.) auferendum illius Prismatis respectu ejusdem $\tau\alpha$ momentum; hoc est, plani B V A momentum, in V v, seu α V $=b$ ductum; hoc est (per § L. prop. præced.) $\frac{1}{2}ebR^2+\frac{1}{2}svbR+\frac{1}{3}s^3b=eR^3-\frac{1}{2}avR^2+\frac{1}{2}svR^2+\frac{7}{6}s^3R-\frac{1}{3}s^3v$; ut habeatur momentum Ungulæ B V A F (Semisegmento B V A insistentis, aciem habentis B V,) respectu ipsius $\tau\alpha$, $-\frac{5}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$. (Idem atque momentum respectu B V,

Fig. 159, 160. aciem habentis $\tau\alpha$.) Atque ex hoc demum momento respectu $\tau\alpha$, auferendum quod fit ex ipsa Ungulæ BVAF magnitudine, in $V\alpha = b$; hoc est, (per § L. prop. præced.) $-\frac{1}{2}ebR^2 + \frac{1}{2}avbR - \frac{1}{6}s^3b = -eR^3 + \frac{1}{2}evR^2 + \frac{1}{2}as^2R - \frac{1}{3}s^3R + \frac{1}{6}s^3v$: Et habebitur $\frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$ momentum Ungulæ BVAF (semisegmento BVA insistentis, aciem habentis BV,) respectu aciei suæ BV: Adeoque (per magnitudinem dividendo) distantia Centri gravitatis à BV, $\frac{15eR^3 + 15svR^2 - 12as^2R + 2s^3R - 2s^3v}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}$; atque à $\tau\alpha$, $\frac{-9eR^3 + 12avR^2 + 3svR^2 - 6s^3R + 2s^3v}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}$. (Semisolidique correspondentis momentum, sive respectu $\tau\alpha$, sive BV, est duplum momentum Ungulæ: Ejusque Centri gravitatis, distantia sive à $\tau\alpha$, sive à BV, est ad distantiam Centri Ungulæ, ut $4R$ ad P.) Centrique Ungulæ distantia à TA, $\frac{-15eR^3 + 12avR^2 - 3svR^2 - 2s^3R - 2s^3v}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}$; ejusque momentum respectu TA, $-\frac{5}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$. (Idem atque, respectu BV, momentum aciem habentis TA.) Similiter, si Semisolidi distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, auferatur ex $A\alpha = 2R$; habebitur ejusdem à TA distantia. Atque hæc in Semisolidi magnitudinem ducta, exhibet ejusdem respectu TA momentum.

W. Porro; Triangulo $BV\alpha$ insistens Ungula Semiquadrantalis aciem habens $\tau\alpha$, est Pyramis; Cujus magnitudo $BV \times V\alpha \times \frac{1}{3}V\alpha = \frac{1}{3}sb^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{4}{3}svR + \frac{1}{3}sv^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$: Ejusque Centri gravitatis, à $\tau\alpha$, distantia $\frac{3}{4}V\alpha = \frac{3}{4}b$: Adeoque Ungulæ momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}sb^3 = 2sR^3 - 3svR^2 + \frac{3}{2}sv^2R - \frac{1}{4}sv^3 = 2sR^3 - \frac{3}{2}s^3R - \frac{1}{4}sv^3 = 2sR^3 - svR^2 - s^3R + \frac{1}{4}s^3v$.

Atque hoc additum momento Ungulæ ipsi BVA insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu ejusdem $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 + \frac{11}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$ (ut § T.) seu $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3 + \frac{3}{8}svR^2 + \frac{11}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; exhibet $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{13}{8}sR^3 - \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, seu $\frac{3}{8}fR^3 + \frac{5}{8}sbR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, momentum Ungulæ sectori $B\alpha A$ insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu ipsius $\tau\alpha$. (Hujusque duplum est momentum correspondentis Semisolidi, respectu ejusdem $\tau\alpha$.) Idemque per magnitudinem divisum, hoc est, per $\frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}sbR = \frac{1}{2}aR^2 + \frac{5}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; (ut § M. prop. præced.) exhibet distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$ $\frac{15aR^2 + 33sR^2 - 9svR - 2s^3}{12aR + 20sR - 4sv} = \frac{15fR^2 + 9sbR - 2s^3}{12fR + 4sb}$. Adeoque ejusdem Centri distantia à TA, $\frac{9aR^2 + 7sR^2 + svR + 2s^3}{12aR + 20sR - 4sv} = \frac{9fR^2 - sbR + 2s^3}{12fR + 4sb}$; & propterea ejusdem Ungulæ momentum respectu TA, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{13}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{8}fR^3 - \frac{1}{24}sbR^2 + \frac{1}{12}s^3R$. (Et correspondentis Semisolidi, distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, est ad illam Ungulæ, ut $4R$ ad P; ejusque residuum ad $2R$, est ejusdem distantia à TA; atque hæc in Semisolidi magnitudinem ducta, exhibet semisolidi momentum respectu ipsius TA.)

Ejusdemque Triangulo $BV\alpha$ insistentis Ungulæ, Pyramidisve, Centrum gravitatis à TA, distat $2R - \frac{3}{4}b = \frac{1}{2}R + \frac{3}{4}v$: Adeoque ipsius respectu TA momentum (distantia in magnitudinem ducta) $\frac{2}{3}sR^3 + \frac{2}{3}svR^2 - \frac{1}{2}sv^2R - \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{4}s^3v = \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{4}s^3v = \frac{2}{3}sb^2R - \frac{1}{4}sb^3 = \frac{1}{12}sb^3 + \frac{1}{3}s^3b$; propter $s^2 = bv$.

Atque hoc additum, momento Ungulæ ipsi BVA insistentis, aciem item habentis $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3$ $(= \frac{3}{8}eR^3)$ $+ \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, (ut § V.) exhibet $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, seu $\frac{3}{8}fR^3 - \frac{1}{24}sbR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, momentum Ungulæ sectori $B\alpha A$ insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu ipsius TA. ut prius.

Eidem vero Triangulo $BV\alpha$ insistens Ungula, aciem habens TA, constat ex Prismate eidem insistente cujus altitudo $AV = v$; eique superjacente pyramide, cujus

cujus basis Triangulum B V α (aut huic æquale;) altitudo, perpendicularis supra α punctum æqualis ipsi V $\alpha = b$; Adeoque (propter B V $\alpha = \frac{1}{2} s b$) Pyramidis magnitudo $\frac{1}{6} s b^2 = \frac{2}{3} s R^2 - \frac{1}{3} s v R + \frac{1}{6} s v^2 = \frac{2}{3} s R^2 - \frac{1}{3} s v R - \frac{1}{6} s^3$: Et, (propter Centri gravitatis basis B V α, à $\tau\alpha$ distantiam, $\frac{2}{3} b$; pyramidisque Centrum gravitatis in recta inde ad verticem ipsi α puncto supereminentem ducta, abscissa inde versus verticem, $\frac{3}{4}$ ipsius;) distantia Centri gravitatis pyramidis à $\tau\alpha$ plano, erit $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} b = \frac{1}{2} b$; & propterea pyramidis momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12} s b^3 = \frac{2}{3} s R^3 - s v R^2 + \frac{1}{2} s v^2 R - \frac{1}{12} s v^3 = \frac{2}{3} s R^3 - \frac{1}{3} s v R^2 - \frac{1}{6} s^3 R + \frac{1}{12} s^3 v$. Prismatis vero, eidem B V α incumbentis magnitudo (propter basem B V $\alpha = \frac{1}{2} s b$; & altitudinem V A $= v$) est $\frac{1}{2} s b v = \frac{1}{2} s^3$: Ejusque Centri gravitatis à $\tau\alpha$ distantia (quippe eadem quæ basis Triangularis) $\frac{2}{3} b$; adeoque Prismatis respectu $\tau\alpha$ momentum $\frac{1}{3} s v b^2 = \frac{1}{3} s^3 b = \frac{2}{3} s^3 R - \frac{1}{3} s^3 v$. Atque hoc additum Pyramidis momento $\frac{1}{12} s b^3$; exhibet Ungulæ (ipsi B V α insistentis, aciem habentis T A,) momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12} s b^3 + \frac{1}{3} s v b^2 = \frac{1}{12} s b^3 + \frac{1}{3} s^3 b = \frac{2}{3} s R^3 - \frac{1}{3} s v R^2 + \frac{1}{3} s^3 R - \frac{1}{4} s^3 v$. (Idem atque aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu T A.) Atque hoc additum, momento Ungulæ Semisegmento B V A insistentis, aciem item habentis T A, respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3} a R^3 - \frac{2}{3} s R^3 (= \frac{2}{3} c R^3) + \frac{2}{3} s v R^2 - \frac{1}{4} s^3 R + \frac{1}{4} s^3 v$; exhibet, Ungulæ Sectori B α A insistentis aciem habentis T A, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3} a R^3 + \frac{1}{24} s R^3 + \frac{1}{24} s v R^2 + \frac{1}{12} s^3 R = \frac{2}{3} f R^3 - \frac{1}{24} s b R^2 + \frac{1}{12} s^3 R$. (Idem plane atque Ungulæ aciem habentis $\tau\alpha$ momentum respectu T A: Quippe quæ illic est Altitudo, hic est Distantia; & vice versa.) Atque hoc momentum per Ungulæ mag. divisum, hoc est, per $\frac{1}{2} f R^2 - \frac{1}{6} s b R = \frac{1}{2} a R^2 + \frac{1}{6} s R^2 + \frac{1}{6} s v R$ (ut § M. prop. præced.) exhibet $\frac{9 a R^2 + 7 s R^2 + s v R + 2 s^3}{12 a R + 4 s R + 4 s v} = \frac{9 f R^2 - s b R + 2 s^3}{12 f R - 4 s b}$; distantiam Centri gravitatis (Ungulæ sectori B α A insistentis, aciem habentis TA,) à $\tau\alpha$. Adeoque ejusdem Centri à TA distantia est $\frac{15 a R^2 + s R^2 + 7 s v R - 2 s^3}{12 a R + 4 s R + 4 s v}$ $= \frac{15 f R^2 - 7 s b R - 2 s^3}{12 f R - 4 s b}$; & Ungulæ respectu ipsius T A (aciei suæ) momentum $\frac{2}{3} a R^3 + \frac{1}{24} s R^3 + \frac{1}{24} s v R^2 - \frac{1}{12} s^3 R = \frac{2}{3} f R^3 - \frac{1}{24} s b R^2 - \frac{1}{12} s^3 R$. (Quæ omnia correspondenti semisolido, facile accommodantur: eodem modo quo in iis quæ aciem habent $\tau\alpha$ factum est.)

Vel etiam; propter Ungulæ Triangulo B V α insistentis (aciem habentis T A, ex Pyramide & Prismate constantis) magnitudinem (modo exhibitam) $\frac{1}{6} s b^2 + \frac{1}{2} s b v = \frac{2}{3} s R^2 - \frac{1}{3} s v R + \frac{1}{3} s^3 = s b R - \frac{1}{3} s b^2$; Momentum ejus respectu $\tau\alpha$ (modo ostensum) $\frac{2}{3} s R^3 - \frac{1}{3} s v R^2 + \frac{1}{3} s^3 R - \frac{1}{4} s^3 v$, per magnitudinem illam dividendo; habebitur istius Centri gravitatis à $\tau\alpha$ distantia $\frac{8 s R^3 - 4 s v R^2 + 4 s^3 R - 3 s^3 v}{8 s R^2 - 4 s v R + 4 s^3}$ $= R - \frac{3 s^2 v}{8 R^2 - 4 v R + 4 s^2}$; & à T A, $R + \frac{3 s^2 v}{8 R^2 - 4 v R + 4 s^2}$; (adeoque à B C, $\frac{3 s^2 v}{8 R^2 - 4 v R + 4 s^2} = \frac{3 v^2}{12 R - 4 b} = \frac{3 v^2}{4 R + 4 v}$;) & propterea ejusdem respectu T A momentum, $\frac{2}{3} s R^3 - \frac{1}{3} s v R^2 + \frac{1}{3} s^3 R + \frac{1}{4} s^3 v$. Atque hoc additum Momento Ungulæ Semisegmento B V A insistentis (aciem item habentis T A) respectu ipsius T A, $\frac{2}{3} a R^3 - \frac{2}{3} s R^3 (= \frac{2}{3} c R^3) + \frac{2}{3} s v R^2 - \frac{1}{12} s^3 R - \frac{1}{4} s^3 v$, (ut § T;) exhibet momentum Ungulæ sectori B α A insistentis, aciem habentis T A, respectu ipsius T A, $\frac{2}{3} a R^3 + \frac{1}{24} s R^3 + \frac{1}{24} s v R^2 - \frac{1}{12} s^3 R$. ut prius.

Deinde; ex his momentis Ungularum sectori B α A insistentium, subductis Ungularum Triangulo B C α insistentium momentis respectivis, habentur momenta Ungularum sectori B C A insistentium respectiva. X.

Quæ autem Triangulo B C α insistit Ungula semiquadrantalis, aciem habens $\tau\alpha$, est Pyramis: Cujus vertex α; Basis, Trapezium rectæ B C insistens, duabus rectis plano circuli perpendicularibus & invicem parallelis interjectum; quarum altera, puncto C insistens, æqualis est rectæ C $\alpha = R$; altera, insistens puncto B, æqualis rectæ V $\alpha = b$; quas itaque, in planum replicatas, repræsentant rectæ C α, B a. Quod quidem Trapezium, (quo Centrum gravitatis habeatur,) dirimi intelligatur in duo Triangula α B C, α B a. Quæ (propter communem altitudinem

Fig. 159, 160. nem αa seu B V $= s$,) sunt ut bases C α, B a; hoc est C α, V α; seu, R, b: Puta $\frac{1}{2} s R$, $\frac{1}{2} s b$. Distatque illius Centrum gravitatis ab A α (recta planove) $\frac{1}{3}$ V B $= \frac{1}{3} s$; hujus vero, $\frac{2}{3}$ B V $= \frac{2}{3} s$. Eruntque, propterea, eorum momenta respectu A α, ut $\frac{1}{6} s^2 R$, $\frac{1}{3} s^2 b$. Adeoque momentum totum $\frac{1}{6} s^2 R + \frac{1}{3} s^2 b$, per totam magnitudinem $\frac{1}{2} s R + \frac{1}{2} s b$ divisum, exhibet totius Trapezii distantiam Centri gravitatis, quod puncto β designatum intelligatur (toto scilicet Trapezio, in rectam cui insistit, B C projecto,) ab A α, $\frac{s^2 R + 2 s^2 b}{3 s R + 3 s b} = \frac{R + 2 b}{3 R + 3 b} s = \beta \gamma$. Adeoque (propter similia Triangula B V C, $\beta \gamma$ C,) ut B V $= s$, ad V C $= x$; sic $\beta \gamma$, ad γ C $= \frac{R + 2 b}{3 R + 3 b} x$. Et $\gamma \alpha = R \pm \frac{R + 2 b}{3 R + 3 b} x$. Sumptaque $\alpha g = \frac{3}{4} \alpha \beta$, (ductaque, ut $\beta \gamma$, sic g G, ipsi $\tau \alpha$ parallela,) erit α G $= \frac{3}{4} \alpha \gamma = \frac{3}{4} R \pm \frac{R + 2 b}{4 R + 4 b} x = \frac{3}{4} R \pm \frac{5 R - 2 v}{12 R - 4 v} x$, distantia Centri gravitatis pyramidis à (plano Tangente) $\tau \alpha$. Hoc est (propter $x = R - v$, supra Centrum, addendum; vel $x = - R + v$, infra Centrum, auferendum; adeoque $\pm x = R - v$,) $\frac{3}{4} R + \frac{5 R^2 - 7 v R + 2 v^2}{12 R - 4 v} = \frac{7 R^2 - 5 v R + v^2}{6 R - 2 v} = \frac{7 R^2 - 3 v R - s^2}{6 R - 2 v}$. Atque hæc distantia, in Pyramidis magnitudinem ducta, hoc est, (per § M. prop. præced.) in $\frac{1}{2} s R^2 - \frac{1}{2} s v R$, exhibet Pyramidis illius respectu $\tau \alpha$, momentum $\frac{7 R^2 - 3 v R - s^2}{12} s R = \frac{7}{12} s R^3 - \frac{1}{4} s v R^2 - \frac{1}{12} s^3 R$. Atque hoc demum momentum, subductum ex momento Ungulæ Sectori B α A insistentis, (aciem item habentis $\tau \alpha$) respectu ipsius $\tau \alpha$; hoc est (ut § W.) ex $\frac{2}{3} a R^3 + \frac{11}{12} s R^3 - \frac{3}{4} s v R^2 - \frac{1}{12} s^3 R$, relinquit momentum Ungulæ Sectori B C A insistentis, aciem habentis $\tau \alpha$, respectu ipsius $\tau \alpha$, $\frac{2}{3} a R^3 + \frac{1}{3} s R^3 - \frac{1}{2} s v R^2$. (Semisolidique correspondentis momentum, hujus duplum.) Quod quidem Ungulæ (ipsi B C A insistentis) momentum, per magnitudinem $\frac{1}{2} a R^2 + \frac{1}{3} s R^2$ (ut § I. prop. præced.) divisum, exhibet ejusdem Centri gravitatis distantiam à $\tau \alpha$, $\frac{15 a R + 19 s R - 3 s v}{12 a + 8 s}$. (Adeoque Semisolidi correspondentis, Centri gravitatis inde distantiam, $\frac{15 a R + 19 s R - 3 s v}{3 a P + 2 s P} R$; utpote ad illam Ungulæ, ut $4 R$ ad P.) Et propterea distantia Centri gravitatis Ungulæ, à T A, $\frac{9 a R - 3 s R + 3 s v}{12 a + 8 s}$; Ungulæque istius (Sectori B C A insistentis, aciem habentis $\tau \alpha$,) momentum respectu T A, $\frac{1}{3} a R^3 - \frac{1}{6} s R^3 + \frac{1}{6} s v R^2$. (Quod Semisolido facile accommodabitur.)

Aut etiam, propter Pyramidis illius, Triangulo B C α incumbentis, magnitudinem $\frac{1}{2} s R^2 - \frac{1}{2} s v R$; Centrique gravitatis à $\tau \alpha$ distantiam $\frac{7 R^2 - 3 v R - s^2}{6 R - 2 v}$, (ut dictum est,) adeoque à T A, $\frac{5 R^2 - v R + s^2}{6 R - 2 v}$; erit ejusdem, respectu T A, momentum $\frac{5}{12} s R^3 - \frac{1}{12} s v R^2 + \frac{1}{12} s^3 R$. Quod quidem momento Ungulæ sectori B α A incumbentis (aciem habentis $\tau \alpha$) respectu T A, $\frac{1}{3} a R^3 + \frac{3}{12} s R^3 + \frac{1}{12} s v R^2 + \frac{1}{12} s^3 R$, (ut § W.) sublatum; relinquit Ungulæ Sectori B C A insistentis, aciem habentis $\tau \alpha$, momentum respectu T A, $\frac{1}{3} a R^3 - \frac{1}{6} s R^3 + \frac{1}{6} s v R^2$. Ut prius.

Quæ vero Triangulo illi B C α insistit Semiquadrantalis Ungula aciem habens T A, idem plane habet respectu $\tau \alpha$ momentum, quod habet respectu T A ea quæ aciem habet $\tau \alpha$; (propter Altitudines & Distantias ubique reciprocatas, ut pridem aliquoties:) Hoc est, (ut modo ostensum est) $\frac{5}{12} s R^3 - \frac{1}{12} s v R^2 + \frac{1}{12} s^3 R$; quod per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{2} s R^2 + \frac{1}{2} s v R$ (ut § M. prop. præced.) divisum; exhibet sui Centri gravitatis distantiam à $\tau \alpha$, $\frac{5 R^2 - v R + s^2}{6 R + 2 v}$; Adeoque, à T A,

$7 R^2$

$\frac{7R^2+5vR-s^2}{6R+2v}$; & propterea ejusdem respectu T A (aciei suæ) momentum $\frac{7}{12}sR^3+\frac{2}{12}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$ (Solidique correspondentis momentum est hujus duplum.) Quæ quidem Ungulæ momenta, momentis respectivis Ungulæ sectori B α A insistentis, aciem habentis T A, hoc est, $\frac{3}{8}aR^3+\frac{1}{24}sR^3+\frac{1}{24}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$, resp. τ α; & resp. T A, $\frac{5}{8}aR^3+\frac{1}{24}sR^3+\frac{1}{24}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; ut § W.) sublata; relinquunt Ungulæ Sectori BCA insistentis, aciem habentis T A, momentum respectu τ α, $\frac{3}{8}aR^3-\frac{1}{8}sR^3+\frac{1}{8}svR^2$ (idem nempe quod Ungulæ eidem B C A insistentis, aciem habentis τ α, respectu T A; propter altitudines & distantias ubique reciprocatas;) & respectu (aciei suæ) T A, $\frac{5}{8}aR^3-\frac{13}{24}sR^3-\frac{1}{8}svR^2$; (hujusque duplum, est momentum correspondentis Semisolidi, respectu sui axis conversionis:) Ungulæque hæc momenta, per magnitudinem $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{3}sR^2$ (ut § I. prop. præced.) divisa; exhibent ejusdem Centri grav. distant. à τ α, $\frac{9aR-3sR+3sv}{12a-8s}$; &, à T A, $\frac{15aR-13sR-3sv}{12a-8s}$; (quæ, observatis observandis, Semisolidis accommodari facile poterunt.)

Eadem haberi poterunt, ope Trianguli B V C, & Ungularum huic insistentium.

Quæ autem huic insistit Ungula semiquadrantalis, aciem habens D C; est Pyramis: Cujus vertex C, altitudo C V $=x$, Basis (rectæ B V insistens) BV×CV $=sx$; adeoque pyramidis magnitudo $\frac{1}{3}sx^2$; Distantia Centri gravitatis à D C, $\frac{3}{4}x$; adeoque momentum Pyramidis respectu D C, $\frac{1}{4}sx^3$.

Si vero ponatur Ungulæ axis τ α, sitque V supra Centrum; vel acies T A, sitque V infra Centrum; Pyramidi huic subjungendum, est Prisma, super eadem base, altitudinem habens C α, vel C A, hoc est, R; cujus itaque (propter Trianguli magnitudinem $\frac{1}{2}sx$,) magnitudo erit $\frac{1}{2}sxR$: Centrique gravitatis à D C distantia (eadem quippe quæ Trianguli,) $\frac{2}{3}x$; adeoque momentum respectu D C, $\frac{1}{3}sx^2R$.

Totius itaque Ungulæ ipsi B V C triangulo insistentis; aciem habentis τ α vel T A, tangentem remotiorem; ex Prismate & Pyramide conflatæ: momentum respectu D C, est, $\frac{1}{3}sx^2R+\frac{1}{4}sx^3$.

Atque hoc per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{2}sxR+\frac{1}{3}sx^2$ divisum, exhibet Centri gravitatis à D C distantiam $\frac{4xR+3x^2}{6R+4x}$; adeoque ab Ungulæ acie, seu tangente remotiore, (intellige, ut alibi, à perpendiculari plano huic insistente,) $R+\frac{4xR+3x^2}{6R+4x}$; à propiore, $R-\frac{4xR+3x^2}{6R+4x}$; Adeoque momentum respectu remotioris tangentis (aciei suæ) $\frac{1}{2}sxR^2+\frac{2}{3}sx^2R+\frac{1}{4}sx^3$; & respectu tangentis propioris (quæ aciei opposita est) $\frac{1}{2}sxR^2-\frac{1}{4}sx^3$.

Si vero ponatur Ungulæ acies τ α, & V infra Centrum; vel acies T A, & V supra Centrum; Prismati auferenda est illa Pyramis, (ejusque momento momentum hujus:) Adeoq; Ungulæ magnitudo, erit, $\frac{1}{2}sxR-\frac{1}{3}sx^2$; momentum respectu D C, $\frac{1}{3}sx^2R-\frac{1}{4}sx^3$; Centrique gravitatis à D C distantia, $\frac{4xR-3x^2}{6R-4x}$; & ab Acie, seu tangente propiore; $R-\frac{4xR-3x^2}{6R-4x}$; à remotiore (quæ aciei opposita est) $R+\frac{4xR-3x^2}{6R-4x}$: Et momentum respectu aciei (seu tangentis propioris) $\frac{1}{2}sxR^2-\frac{2}{3}sx^2R+\frac{1}{4}sx^3$; & respectu tangentis oppositæ (remotioris) $\frac{1}{2}sxR^2-\frac{1}{4}sx^3$.

Hoc est: Ungulæ Triangulo B V C insistentis, aciem habentis τ α; momentum respectu ipsius τ α; est $\frac{1}{2}sxR^2\pm\frac{2}{3}sx^2R+\frac{1}{4}sx^3$, (prout supra infrave Centrum fuerit V:) Et respectu T A, $\frac{1}{2}sxR^2-\frac{1}{4}sx^3$, (sive supra sive infra Centrum fuerit V, propter altitudinum & distantiarum reciprocationem.) Centrique gra-

vitatis

Fig. 159, 160. vitatis à $\tau\alpha$, distantia, $R \pm \frac{4xR \pm 3x^2}{6R \pm 4x}$; &, à T A, $R \mp \frac{4xR \pm 3x^2}{6R \pm 4x}$.

Ungulæque eidem Triangulo B V C insistentis, aciem habentis T A; momentum respectu $\tau\alpha$ (oppositæ) $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$ (sive supra Centrum, sive infra, fuerit V punctum;) &, respectu Aciei suæ T A, $\frac{1}{2}sxR^2 \mp \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$, (prout supra Centrum infrave fuerit V punctum) Centrique gravitatis à $\tau\alpha$ (opposita) distantia, $R \pm \frac{4xR \mp 3x^2}{6R \mp 4x}$; à T A (acie) $R \mp \frac{4xR \mp 3x^2}{6R \mp 4x}$.

Atque hæc momenta, momentis Ungularum (respective sumptarum) semisegmento B V A insistentium, Addita, vel Ablata, prout supra infrave Centrum fuerit V punctum; exhibent momenta respectiva Ungularum Sectori B C A insistentium.

Puta; Ungulæ Semisegmenti B V A, aciem habentis $\tau\alpha$, momento respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{2}{3}sR^3 (= \frac{2}{3}eR^3) + \frac{2}{3}svR^2 + \frac{11}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^2v$; (ut § T.) si addatur, vel auferatur, (prout supra infrave fuerit,) respectivum Ungulæ Trianguli B V C momentum, $\frac{1}{2}sxR^2 \pm \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$; Hoc est, (propter $x = R - v$, supra Centrum, addendum; & $x = -R + v$, infra Centrum, auferendum: adeoque $x^3 = R^3 - 3vR^2 + 3v^2R - v^3 = R^3 - vR^2 - s^2R + s^2v$, addendum; & $x^3 = -R^3 + 3vR^2 - 3v^2R + v^3 = -R^3 + vR^2 + s^2R - s^2v$, auferendum; quæ tantundem valent: Sed, $x^2 = R^2 - 2vR + v^2 = R^2 - s^2$; estque vel $+x^2$ addendum, vel $-x^2$ auferendum, quod tantundem valet:) Si addatur $\frac{11}{12}sR^3 - \frac{2}{3}svR^2 - \frac{11}{12}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$: Habetur momentum Ungulæ sectori B C A insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}aR^3 + \frac{11}{12}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2$. Ut prius.

Atque ejusdem Ungulæ B V A (aciem habentis $\tau\alpha$) momento respectu T A, $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{2}{3}sR^3 (= \frac{2}{3}eR^3) + \frac{2}{3}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$ (ut § T.) si addatur vel auferatur (prout supra infrave fuerit V,) momentum correspondens Ungulæ B V C, $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$; Hoc est, (ob causam modo dictam) si addatur $\frac{1}{4}sR^3 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{4}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$: Habetur, Ungulæ sectori B C A insistentis aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu T A, $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{1}{4}sR^3 + \frac{1}{4}svR^2$. Ut prius.

Ungulæque aciem habentis T A, momentum respectu $\tau\alpha$; idem est atque illud aciem habentis $\tau\alpha$, respectu T A; propter altitudines & distantias ubique reciprocatas.

Ungulæ vero insistentis semisegmento illi B V A, aciem habentis T A, momentum respectu aciei suæ T A, $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{2}{3}sR^3 (= \frac{2}{3}eR^3) + \frac{2}{3}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; si addatur, vel auferatur, (prout supra infrave fuerit V,) momentum correspondens Ungulæ B V C, $\frac{1}{2}sxR^2 \mp \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$; Hoc est (ob causam modo dictam) si addatur $\frac{1}{12}sR^3 - \frac{2}{3}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$: Habetur momentum Ungulæ Sectori B C A insistentis, aciem habentis T A, respectu ipsius T A, $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{11}{12}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2$. Ut prius.

Y. Denique: Ex momentis eisdem Ungularum Semisegmento B V A insistentium, si auferantur respectiva momenta insistentium Triangulo B A V; habentur momenta insistentium Segmento A B A.

Quæ autem Triangulo B A V insistit Semiquadrantalis Ungula, aciem habens T A; est Pyramis. Cujus vertex A, basis B V × V A $= sv$; altitudo A V $= v$; adeoque magnitudo $\frac{1}{3}sv^2 = \frac{1}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$: Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{3}{4}v$; adeoque à $\tau\alpha$, $2R - \frac{3}{4}v$: Et propterea momentum respectu T A, $\frac{1}{4}sv^3 = svR^2 - \frac{1}{2}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}sv^2R - \frac{1}{4}sv^3 = \frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$.

Hæc itaque momenta, momentis respectivis Ungulæ Semisegmento B V A insistentis, ($\frac{2}{3}eR^3 + \frac{2}{3}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$, & $\frac{2}{3}eR^3 + \frac{2}{3}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, per § T.) subducta; relinquunt, Ungulæ segmento A B A insistentis, aciem habentis T A, momentum respectu T A, $\frac{2}{3}eR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}eR^3 + \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; Et (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}eR^2 - \frac{1}{3}svR$, ut § N. prop. præced.) distantia Centri gravitatis à T A, erit $\frac{15eR^2 - 9svR + 2s^3}{12eR - 4sv}$; & à $\tau\alpha$, $\frac{9eR^2 + svR - 2s^3}{12eR - 4sv}$.

Quæque Triangulo B A V insistit semiquadrantalis Ungula, aciem habens $\tau\alpha$; idem

idem habet reſpectu T A momentum, quod habet ea cujus acies T A reſpectu $\tau\alpha$; (propter altitudines & diſtantias reciprocatas:) hoc eſt, (ut modo) $\frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$: Adeoque (propter magnitudinem $svR - \frac{1}{3}sv^2 = \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$, per § N. prop. præced.) diſtantia Centri gravitatis à TA, erit $\frac{4vR^2 - 2s^2R + 3s^2v}{4vR + 4s^2}$; Fig. 159, 160

& à $\tau\alpha$, $\frac{4vR^2 + 10s^2R - 3s^2v}{4vR + 4s^2}$; ideoque momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}svR^2 + \frac{5}{6}s^3R - \frac{1}{4}s^3v = 2svR^2 - \frac{4}{3}sv^2R + \frac{1}{4}sv^3$.

Eaque momenta, momentis reſpectivis Ungulæ Semiſegmento B V A inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, ($\frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, & $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 + \frac{11}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$, ut § T.) ſubducta; relinquunt Ungulæ Segmento A B A inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu T A, $\frac{3}{8}eR^3 + \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; &, reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{7}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; & (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{6}svR$; per § N. propoſitionis præced.) Diſtantia Centri gravitatis à TA, $\frac{9eR^2 + svR - 2s^3}{12eR + 4sv}$;

& à $\tau\alpha$, $\frac{15eR^2 + 7svR + 2s^3}{12eR + 4sv}$.

Eademque Segmento $\alpha B\alpha$ reſpectu rectæ $\tau\alpha$, accommodantur, quæ Segmento A B A reſpectu T A; & vice verſa. (Nempe, pro a, ſubſtituendo $\alpha = \frac{1}{2}P - a$; & pro v, ſubſtituendo $b = 2R - v$.)

Puta; Segmento $\alpha B\alpha$ inſiſtens Semiquadrantalis Ungula aciem habens $\tau\alpha$, magnitudinem habet $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}sbR = \frac{1}{4}R^2P - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{5}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}\alpha R^3 - \frac{5}{8}sR^3 - \frac{3}{8}sbR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{16}R^3P - \frac{3}{8}aR^3 - \frac{11}{8}sR^3 + \frac{3}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; reſpectu T A, $\frac{3}{8}\alpha R^3 - \frac{3}{8}sR^3 + \frac{1}{24}sbR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{16}R^3P - \frac{3}{8}aR^3 - \frac{7}{24}sR^3 - \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$.

Et; Segmento $\alpha B\alpha$ inſiſtens Semiquadrantalis Ungula aciem habens TA, magnitudinem habet $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}sbR = \frac{1}{4}R^2P - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}\alpha R^3 - \frac{3}{8}sR^3 + \frac{1}{24}sbR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{16}R^3P - \frac{3}{8}aR^3 - \frac{7}{24}sR^3 - \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; & reſpectu T A, $\frac{3}{8}\alpha R^3 - \frac{5}{8}sR^3 + \frac{7}{24}sbR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{16}R^3P - \frac{3}{8}aR^3 - \frac{1}{24}sR^3 - \frac{7}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$.

Exhibuimus itaque, expoſitorum Sectorum Sphæricorum, & Segmentorum, Ungularumque eo ſpectantium, & correſpondentium Solidorum ſeu Semiſolidorum converſione factorum, tum magnitudines, tum momenta reſpectu Planorum aliquot expoſitorum; eorumque Centrorum gravitatis diſtantiam à duobus ſaltem planis ſibi invicem non parallelis; atque in quo tertio per Ungulæ aciem ſeu converſionis axem ducto, neutri priorum parallelo, idem reperiatur: Adeoque (per prop. 26. Cap. præced.) ipſa gravitatis Centra determinavimus. Z.

Quæque ad calcem Propoſitionis præcedentis monuimus; etiam hic monenda erunt: Nempe, hæc omnia aliis Sphæræ portionibus, ſimili methodo accommodari poſſe. Puta, quæ de Sectore B α A (ad verticem terminato) ejuſque Ungulis, &c. dicta ſunt; facile accommodari poſſe ſectori D α B (duorum ad verticem terminatorum D α A, B α A, differentiæ,) ejuſque Ungulis &c.

Et, prout hic quæ de Ungularum aut Solidorum magnitudinibus & momentis docentur; à recta $\tau\alpha$, ad T A vel B V, transferuntur; ſimili methodo, hæc aut his ſimilia, à recta A α, ad T τ vel B a, transferri poterunt. Aliaque quæ hic traduntur, mille modis ampliari.

Quæque de Ungulis Semicirculi, ejuſve portionibus; Sphæraque, & portionibus hujus; dicta ſunt; ad Ungulas Semiellipſeos, & portionum hujus; Sphæroides hujuſque portiones; facile accommodantur. Nempe ſi intelligatur axium ellipſeos alter A α, alter D Δ: manente A $\alpha = 2R$, (adeoque AV $= v$, V $\alpha = b$;) erit D Δ in ea ratione ad $2R$, qua eſt ad A α; majore quidem ſi ſit D Δ axium major, (adeoque Sphæroides converſione deſcriptum, Sphæroides latum;) minore, ſi ſit D Δ axium minor, (adeoque Sphæroides longum, converſione deſcriptum:) & B V, in eadem ratione ad s. Adeoque, quoties B V in calculum venit; pro s, ſubſtituenda erit alia quantitas, quæ ſit ad hanc, ut eſt D Δ ad A α: &, pro s^2, alia quæ ſit ad hanc, ut in duplicata ratione rectæ D Δ ad A α: & in reliquis poteſtatibus ſimiliter, mutatis mutandis.

PROP. XVII.

PARS PRIMA:

A. Figura *Sinuum Versorum*, ut A$\tau\alpha$; (quæ eadem est & Figura *Arcuum*:) Est Semicirculi correspondentis *Dupla*; & partes, partium (respective sumptarum,) *Duplæ*; Puta, bβaA $= 2$ BαA. Et sic ubique.

Fig. 169, 170.

C. Momenta vero illorum, ad momenta horum, respectu ejusdem $\tau\alpha$ tangentis, sunt ut 3 ad 2, seu *sesquialtera*.

Atque hinc, eadem respective determinantur, tum quod ad Magnitudines, tum quod ad Momenta, & Centra gravitatis, in hac Sinuum Versorum Figura; quæ supra in Semicirculo (prop. 15.) determinantur. Nempe; (retentis Symbolis ut in propositionibus præcedentibus;)

B. C. Trilinei A$\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{2}RP$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^2P$; respectu TA, $\frac{1}{8}R^2P$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R$; à TA, $\frac{1}{4}R$:

G. Momentum respectu Aα, $\frac{1}{8}RP^2-2R^3$; respectu Tτ, $\frac{1}{8}RP^2+2R^3$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{4}P-\frac{4R^2}{P}$; à T$\tau$, $\frac{1}{4}P+\frac{4R^2}{P}$.

B. D. Portionis b$\beta\alpha$A; Magnitudo, fR: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}sbR$; respectu TA, $\frac{1}{4}fR^2-\frac{1}{4}sbR$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$,

H. $\frac{3}{4}R+\frac{sb}{4f}$; à TA, $\frac{1}{4}R-\frac{sb}{4f}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$; respectu bβ; $\frac{1}{2}a^2R+vR^2$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{a^2+2as-2vR}{2a+2s}$; à b$\beta$, $\frac{a^2+2vR}{2a+2s}$.

B. E. Portionis AbK; Magnitudo, eR: Momentum respectu TA, $\frac{1}{4}eR^2-\frac{1}{4}svR$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR$; distantia Centri gravitatis, à TA,

H. $\frac{1}{4}R-\frac{sv}{4e}$; à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R+\frac{sv}{4e}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{1}{2}a^2R-asR+vR^2$; respectu βbK, $\frac{1}{2}a^2R-vR^2$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{a^2-2as+2vR}{2a-2s}$; à βbK, $\frac{a^2-2vR}{2a-2s}$.

B. E. Portionis b$\beta\tau$; Magnitudo, $\alpha R-sR$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}\alpha R^2-\frac{3}{4}sR^2-\frac{1}{4}sbR$; respectu TA, $\frac{1}{4}\alpha R^2-\frac{1}{4}sR^2+\frac{1}{4}sbR$; distantia Cen-

H. tri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R-\frac{sb}{4\alpha-4s}$; à TA, $\frac{1}{4}R+\frac{sb}{4\alpha-4s}$: Momentum respectu τT, $\frac{1}{2}\alpha^2R-\alpha sR+bR^2$, respectu βb, $\frac{1}{2}\alpha^2R-bR^2$; distantia Centri gravitatis à τT, $\frac{\alpha^2-2\alpha s+2bR}{2\alpha-2s}$; à βb, $\frac{\alpha^2-2bR}{2\alpha-2s}$.

B. F. Parallelogrammi bB$\alpha\beta$; Magnitudo, $ab=2aR-av$: Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}b$; à TA, $2R-\frac{1}{2}b$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ab^2$;

I. respectu TA, $2abR-\frac{1}{2}ab^2=2aR^2-\frac{1}{2}av^2$: Distantia Centri gravitatis ab Aα, seu bβ, $\frac{1}{2}a$; momentum respectu Aα, vel bβ, $\frac{1}{2}a^2b$.

B. F. Portionis bBA; Magnitudo $fR-ab=-eR+av$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{4}eR^2+avR-\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2$; respectu TA, $-\frac{1}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$; distantia Centri gravitatis a $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R-\frac{fvR-2as^2}{-4eR+4av}$; à TA, $\frac{1}{4}R+\frac{fvR-2as^2}{-4eR+4av}$; à bB, $v-\frac{3}{4}R-\frac{fvR-2as^2}{-4eR+4av}$; momentum

respectu

respectu bB, $\frac{3}{4}cR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$: Momentum respectu Aα, $-\frac{1}{2}a^2R+$ I.
$asR-vR^2+\frac{1}{2}a^2v$; respectu bβ, $-\frac{1}{2}a^2R+vR^2+\frac{1}{2}a^2v$; distantia Fig. 169, 170.
Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a-\frac{2vR-as}{-2cR+2av}R$; à bβ, $\frac{1}{2}a+\frac{2vR-as}{-2cR+2av}R$.

Adeoque determinavimus, totius Figuræ Sinuum Versorum, Arcuumve, ejusque partium expositarum magnitudines, & momenta respectu rectarum aliquot expositarum, eorumque Centrorum gravitatis ab illis rectis distantias; adeoque & ipsa Centra gravitatis, per eorundem à duabus saltem in eodem plano non parallelis rectis distantias, determinavimus.

Atque hinc Ungularum, & Solidorum conversione factorum, horumve Semisolidorum, momentis jam traditis correspondentium, magnitudines habentur. Horumque omnium rationes, ad his correspondentia Semicirculum ejusve portiones spectantia. Quæ & ad alia facile poterunt ampliari. K.L.R.

PARS SECUNDA.

Atque his Analoga, in Figura *Sinuum Rectorum* ατκ, similiter determinantur. Nempe, Fig. 170. M.

Bilinei ατκ, Magnitudo, $2R^2$; Momentum respectu τα, $\frac{1}{4}R^2P$; distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{1}{8}P$; à Tτ vel Aα, $\frac{1}{4}P$; momentum respectu Tτ, vel Aα, $\frac{1}{2}R^2P$.

Trilinei αδκ; Magnitudo, R^2; Momentum respectu τα, $\frac{1}{16}R^2P$; distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{1}{16}P$: Momentum respectu Aα, R^3; respectu δκ, $\frac{1}{4}R^2P-R^3$; distantia Centri gravitatis ab Aα, R; à δκ, $\frac{1}{4}P-R$. N. Q. P. Q.

Portionis αβν, Magnitudo vR; Momentum respectu τα, $\frac{1}{4}cR^2+\frac{1}{4}svR$; distantia Centri gravitatis a τα, $\frac{cR+sv}{4v}$: Momentum respectu Aα, $-cR^2+avR$; respectu βν, cR^2; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{-cR+av}{v}$; à βν, $\frac{cR}{v}$. O. Q. P. Q.

Adeoque determinavimus, totius Figuræ Sinuum Rectorum, ejusque partium expositarum, magnitudines, & momenta respectu rectarum aliquot expositarum; eorumque Centrorum gravitatis distantias ab illis rectis: Adeoque & ipsa gravitatis Centra, per suas à duabus saltem in eodem plano rectis non sibi mutuo parallelis distantias, determinavimus. R.

Atque hinc de Ungulis; Solidisve conversione factis, eorumve Semisolidis, aliisque quæ hinc dependent, calculo debite adhibito, judicium fiet.

Quæque de portionibus hic expositis dicta sunt, possunt & aliis portionibus facile accommodari; aliasve multis modis ampliari.

Eademque (horum ope) ad ακΓ figuræ Sinuum rectorum unius quadrantis Complementum, facile transferentur.

Quæ autem de his Sinuum Versorum, Rectorumve, Figuris dicta sunt: ad easdem Protractas, vel Contractas, facile accommodantur. S.

Quæque de Figura Sinuum Rectorum unius quadrantis traduntur, eadem ad figuram Subtensarum sive Chordarum Semicirculi, similiter transferentur. Quod & de Solidis inde oriundis etiam intelligendum erit. T.

Ccccc Intel-

A INtelligatur Circuli Aα, (Fig. 169.) Semiperipheria ADα, in partes quotlibet æquales dividi, in punctis X, Z, D, E, &c. unde ducantur XO, ZV, DC, EΣ, &c. Sinus Recti arcuum arithmetice proportionalium, AX, AZ, AD, AE, &c. quorum Sinus Versi AO, AV, AC, &c. adeoque arcuum residuorum ad Semicirculum Sinus versi (seu punctorum X, Z, D, &c. altitudines supra τα, tangentem,) Oα, Vα, Cα, &c.

Fig.169.

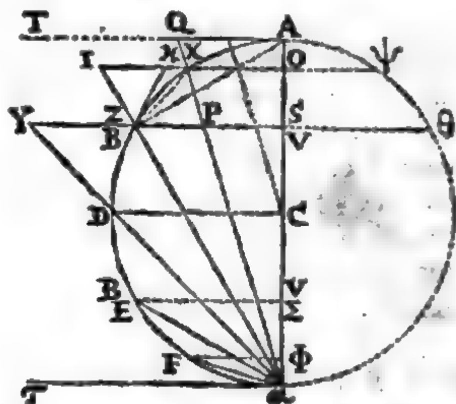
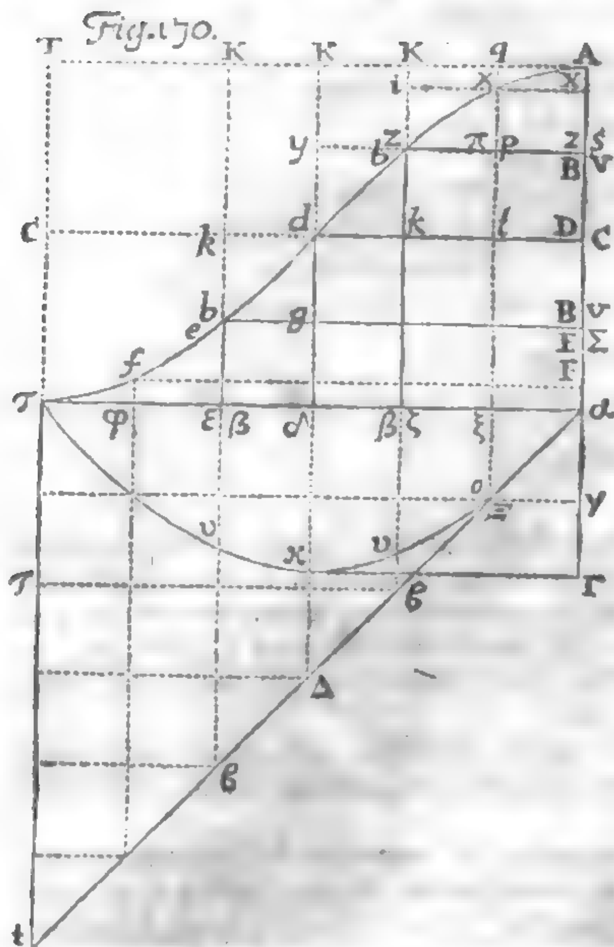


Fig.170.



Eique Semiperipheriæ in rectam expansæ, æqualis ponatur (Fig. 170.) AT, seu ατ, similiter divisa, in punctis ξ, ζ, δ, ι, &c. quibus insistant (ex una parte,) ξo, ζυ, δκ, &c. ipsis XO, ZV, DC, &c. (Fig. 160.) æquales; figuram Sinuum Rectorum ακτ (si numero infinitæ intelligantur) complentes, (juxta def. 1. Cap. 4.) & (ex parte contraria) ipsis Oα, Vα, Cα, &c. æquales rectæ xξ, zζ, dδ, &c. similiter complentes Aτα figuram Sinuum versorum; ipsi Aα circulo æqualtam.

Quæ

Quæ quidem $A\tau\alpha$ *Figura Sinuum versorum*, sumptis arcubus arithmetice proportionalibus; est etiam, alia consideratione, *Figura Arcuum*, sumptis nempe Sinubus Versis arithmetice proportionalibus. Sumptis utique A V, A C, A Σ, &c. Sinubus versis arithmetice proportionalibus; (divisa scilicet recta $A\alpha$ in partes quotlibet æquales) quæ ipsis occurrunt rectæ z V, d C, e Σ, &c. æqualibus intervallis dissitæ figuram $A\tau\alpha$ complentes; hoc est, $\alpha\zeta$, $\alpha\delta$, $\alpha\iota$, &c. æquantur arcubus correspondentibus, A Z, A D, A F, &c. & sic ubique. Fig. 169, 170.

Ductis jam in Semicirculo rectis $X\alpha$, $Z\alpha$, $D\alpha$, &c. dirimi intelligatur Semicirculus in totidem Sectores $A\alpha X$, $X\alpha Z$, $Z\alpha D$, &c. quorum arcus A X, X Z, Z D, &c. sint æquales; adeoque Sectorum $X\alpha A$, $Z\alpha A$, $D\alpha A$, &c. arcus X A, Z A, D A, &c. arithmetice proportionales.

Quibus quidem arcuum æqualium Sectoribus $A\alpha X$, $X\alpha Z$, $Z\alpha D$, &c. respondeant, in figura Sinuum versorum, quadrilatera $A\alpha\xi x$, $x\xi\zeta z$, $z\zeta\delta d$, &c. basium $\alpha\xi$, $\xi\zeta$, $\zeta\delta$, &c. æqualium, tum inter se, tum ipsis A X, X Z, Z D, &c. arcubus; (propter rectam $\alpha\tau$, Semiperipheriæ $AD\alpha$, æqualem, & similiter divisam.) Adeoque arcuum arithmetice proportionalium Sectoribus, $X\alpha A$, $Z\alpha A$, $D\alpha A$, &c. similiter respondebunt quadrilinea $x\xi\alpha A$, $z\zeta\alpha A$, $d\delta\alpha A$, basium arithmetice proportionalium $\alpha\xi$, $\alpha\zeta$, $\alpha\delta$, &c.

Suntque hæc Quadrilinea, Sectorum illorum, (Singula singulorum respective sumptorum,) dupla. Quod sic ostenditur.

Intelligatur vel tota $AD\alpha$ Semiperipheria, vel ipsius arcus A B, in partes æquales numero infinitas dirimi; adeoque (ductis à divisionum punctis ad α rectis $X\alpha$, $Z\alpha$, &c.) vel totus $AD\alpha$ Semicirculus, vel ipsius Sector $B\alpha A$, in totidem Sectores dirimi. Ductisque, à divisionum punctis, rectis X O, Z P, &c. tangenti $\tau\alpha$ parallelis, intelligatur Sectori Inscribi figura ex totidem Triangulis, $OX\alpha$, $PZ\alpha$, &c. Ductisque porro eidem tangenti parallelis, A Q, X I, &c. (productisque αX, αZ, &c.) similiter intelligatur Sectori Circumscribi figura ex Triangulis $AQ\alpha$, $XI\alpha$, &c.

Et similiter Figuræ Sinuum versorum $A\tau\alpha$, vel tota, vel ipsius portio $b\beta\alpha A$, (Sectori $B\alpha A$ correspondens) in totidem Quadrilinea, basium æqualium, (Sectoribus correspondentia) distribui; (recta scilicet $\alpha\tau$, vel $\alpha\beta$ similiter divisa, prout dividitur $AD\alpha$, vel A B, arcus; ductisque rectis correspondentibus, ξx, ζz, &c.) Ductisque x O, z p, &c. ipsi $\tau\alpha$ parallelis; inscribi intelligatur Figura ex Parallelogrammis $Ox\xi\alpha$, $pz\zeta\xi$, &c. (Triangulis $OX\alpha$, $PZ\alpha$, &c. correspondentibus.) Ductisque eidem $\tau\alpha$ parallelis A q, x ι, &c. (productisque ξx, ζz, &c.) Circumscribi intelligatur Figura ex Parallelogrammis $Aq\xi\alpha$, $x\iota\zeta\alpha$, &c. (Triangulis $AQ\alpha$, $XI\alpha$, &c. correspondentibus.)

Suntque hæc Parallelogramma Triangulis illis, (propter rectas $A\alpha$, $x\xi$, $z\zeta$, &c. ipsis $A\alpha$, $O\alpha$, $V\alpha$, &c. ex constructione æquales,) singula singulis respective sumptis, æquealta: Tum quæ Circumscriptas, tum quæ Inscriptas figuras complent.

Sunt autem Inscriptorum Parallelogrammorum Bases, basibus Triangulorum inscriptorum correspondentium, ubique majores; & propterea Parallelogramma Triangulorum, (singula singulorum respective, adeoque & omnia omnium,) plusquam dupla. Est utique Parallelogrammi $Ox\xi\alpha$, basis x o, seu $\xi\alpha$ recta, hoc est, (utpote ipsi æqualis ex constructione) arcus X A, major sinu suo X O (base Trianguli correspondentis;) ut patet. In reliquis autem; ut $pz\zeta\xi$; Parallelogrammi basis z p, seu $\zeta\xi$, recta; (æqualis arcui Z X, ex constructione;) est major quam Z X chorda: sed & hæc major est quam Z P, basis trianguli correspondentis $PZ\alpha$; propter angulum Z P X (Trianguli P Z X) illi oppositum majorem angulo huic opposito Z X P. Est enim angulus Z P X, vel huic æqualis P X O, hoc est, α X O, angulus in Peripheria, arcum subtendens (in opposito Semicirculo) æqualem arcui $X\alpha$; & angulus Z X P, hoc est, $ZX\alpha$, angulus item in Peripheria, subtendens arcum $z\alpha$, (arcu $X\alpha$ minorem;) est igitur angulus P X O, hoc est angulus Z P X, major angulo Z X P; adeoque Z X recta, major recta Z P; & multo magis Z X Curva, seu huic æqualis $\zeta\xi$ seu z p basis Parallelogrammi, major erit quam eadem Z P basis Trianguli: adeoque Parallelogrammum Trianguli plusquam Duplum. Et sic ubique. Est itaque Figura ex Parallelogrammis, sive toti Figuræ Sinuum versorum, sive ipsius portioni $Az\zeta\alpha$ inscripta plusquam dupla Figuræ ex Triangulis inscriptæ sive toti Semicirculo, sive Sectori $B\alpha A$.

 Sed

Fig. 169, 170. Sed Circumscriptorum Parallelogrammorum bases, Basibus Triangulorum circumscriptorum correspondentibus, minores sunt. Est enim Parallelogrammi A q ξ α, basis A q seu ξ α, hoc est arcus X A, minor Tangente Q A; (cujus semissis, est tangens semiarcus, secanti ex Centro ductæ occurrens: adeoque semiarcu illo major.) In reliquis vero, ut x i ζ ξ; Basis Parallelogrammi x i, seu ξ ζ, hoc est arcus Z X, minor est quam recta X I, basis Trianguli correspondentis. Ducta enim tangente Z χ, (quæ rectæ X I occurrat in χ,) æquales erunt anguli (propter eundem arcum Z A interceptum) χ Z A, & Z α A (angulus in peripheria) seu I α O: adeoque & horum ad rectum residui χ Z I & χ I Z seu O I α; (est utique, propter A Z α angulum in semicirculo, etiam A Z I, hoc est χ Z A + χ Z I, rectus; &, propter I O α triangulum rectangulum, ad O, duo reliqui anguli O I α + I α O rectum æquant.) Et propterea æquales sunt Z χ & I χ rectæ; & (sumpta communi χ X,) recta I X, hoc est I χ + χ X, æqualis duabus simul Z χ + χ X; adeoque major arcu Z X. Est itaque Z X arcus, hoc est recta ζ ξ, seu i x, basis Parallelogrammi, minor quam I X basis Trianguli correspondentis: Et propterea Parallelogrammum Trianguli minus quam Duplum. Et sic ubique. Est itaque, Figura ex Parallelogrammis, sive toti A τ α figuræ Sinuum versorum, sive ipsius portioni b β α A, circumscripta, minor quam Dupla Figuræ ex Triangulis correspondentis, sive toti Semicirculo, sive ejusdem Sectori B α A circumscriptæ.

Cum itaque Figura ex Parallelogrammis inscripta, sit inscriptæ ex Triangulis major quam dupla; & circumscripta circumscriptæ minor quam dupla: Cumque, multiplicatis sectionibus, inscriptæ & circumscriptæ differentia continue decrescat utrobique, donec tandem data quavis minor evadat: Nec tamen unquam Inscripta inscriptæ minor quam dupla, nec Circumscripta circumscriptæ major quam dupla esse possit: Continuata in infinitum sectione, evanescet differentia; inscriptis simul & circumscriptis coincidentibus; illic, cum Figura A τ α, ejusve Quadrilineo b β α A; hic, cum Semicirculo A D α, ejusve Sectore B α A: Eritque illa Sinuum versorum Figura A τ α, ejusve Portio b β α A; Dupla semicirculi A D α, ejusve Sectoris B α A. Quod erat probandum.

Hoc est; Trilineum A τ α, duplum semicirculi A D α; ejusque portio b β α A, dupla Sectoris B α A; Et, propterea, portio reliqua b β τ, segmenti α B α, dupla erit. Item, d δ ξ x, dupla Sectoris correspondentis D α X; & sic ubique.

B. Est autem, (retentis symbolis, ut in propositionibus duabus proxime præcedentibus,) Semicirculus $A D \alpha = \frac{1}{4} \mathcal{P} R$; ergo, Figura Sinuum versorum seu Trilineum $A \tau \alpha = \frac{1}{2} \mathcal{P} R$. Item Sector $B \alpha A = \frac{1}{2} a R + \frac{1}{2} s R = \frac{1}{2} f R$, (per § H pr. 15.) Ergo, (posita $\alpha \beta = B A = a$; adeoque $\beta b = \alpha V = b$; & $b K = V A = v$;) portio $b \beta \alpha A$ (utpote Sectoris dupla) $a R + s R = f R$. Item, Segmentum $A B A = \frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s R = \frac{1}{2} e R$ (per § G. prop 15.) Ergo $A b K = a R - s R = e R$. (Est utique A z K: simile, & similiter positum ad T A, ut τ e ι ad τ α: sicut &, in Semicirculo, Segmentum A Z A ad T A, ut α E α ad τ α: & sic alibi.) Et similiter Segmentum $\alpha B \alpha = \frac{1}{2} \alpha R - \frac{1}{2} s R = \frac{1}{4} \mathcal{P} R - \frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s R = \frac{1}{4} \mathcal{P} R - \frac{1}{2} f R$: Ergo portio $b \beta \tau = \alpha R - s R = \frac{1}{2} \mathcal{P} R - a R - s R = \frac{1}{2} \mathcal{P} R - f R$. Et sic alibi.

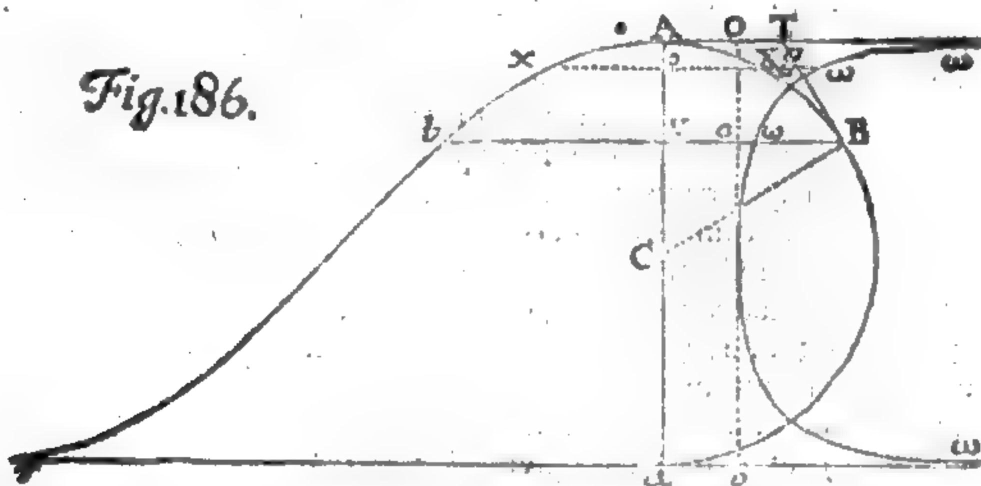
Et consequenter; si ex b β α A portione, auferatur Parallelogrammum $\beta b B \alpha = a b = 2 a R - a v$; erit Segmentum residuum $A b B = f R - a b = - a R + s R + a v = - e R + a v$. Et speciatim in segmento A d C, (propter $a = \frac{1}{4} \mathcal{P}$, & $s = v = R$,) R^2.

Item Quadrilineum $z k C A = z \zeta \alpha A - k \zeta \alpha C$ (propter $z \zeta \alpha A = a R + s R$, & $k \zeta \alpha C = a R$) est $s R$. Et $z k d = R^2 - s R$: Nempe, (propter $R - s$, differentium Radii & Sinus recti arcus Z A, æqualem sinui verso arcus Z D,) factum ex sinu verso arcus D Z in Radium ducto. (Dico autem z k C A, potius quam b k C A; ut distinguam punctum b supra Centrum, ab illo infra Centrum. Quanquam & alteri etiam b, re rite intellecta, idem accommodabitur: Nempe, si d k b infra Centrum hoc est d k e, exponatur negative, utpote ad contrarias partes rectæ C d c & extra figuram A τ α: Quippe sic, utrovis situ, erit $b \beta \alpha A - k \beta \alpha C = b k C A$; id quod rectis b k, k C, C A, & curva A b, comprehenditur; nempe, utrobique, A d C — d k b, & sensu positivo.)

Et similiter de aliis portionibus utcunque recta abscissis, mutatis mutandis, fiet judicium.

Poteſt-

Poteftque Trilinei A b B feu A b V fig. 170. (quod utique complent rectæ b V æquales arcubus B A = *a*, quorum Sinus verfi A V = *v* fint arithmetice proportionales) magnitudo, fic alias (ex arcuum ad finus verfos ratione) explicari.



Ductis enim B g T Semicirculum tangentibus, (Tangenti verticis T A in T occurrentibus;) divifaque A α diametro in partes æquales infinite exiguas, quarum una intelligatur V o = *B*; (adeoque fumptis A V = *v*, arithmetice proportionalibus;) ductaque recta u X g (rectæ B V parallela) quæ femicirculo in X occurrat, & tangenti proximæ B T in g: Erit ubique (per § A. propofitionis 13.) ut B V = *s*, ad *R*; fic V o = *B*, ad B g = $\frac{BR}{s}$. (Nempe, ut *Secantes complementi*, Sinibus rectis reciproce proportionales.) Et confequenter; fi intelligantur α O, vel V O, rectangulum A α O O complentes, fingulis V o (rectam A α complentibus) æquales; & fumantur ubique, ut B V = *s*, ad *R*; fic V O, ad V ω: erunt fingulæ V ω, (hoc eft totidem $\frac{BR}{s}$, fumptis *v* arithmetice proportionalibus,) fingulis B g tangentibus (refpective fumptis,) hoc eft, (in partibus infinite exiguis,) ipfis B X arcubus (totum B A complentibus) æquales. Adeoque, ut *Omnes* $\frac{BR}{s}$, feu rectæ V ω, complentes A V ω ω figuram interminabilem; ad *totidem B*, complentes A V O O rectangulum; (feu ut Figura illa, ad hoc rectangulum;) fic *omnes* B X arcum B A complentes, ad *totidem* V o complentes rectam V A; feu Arcus A B, ad ejufdem finum verfum A V. Fig. 186.

Cumque hoc ubique obtineat; erunt, *Omnes* A B arcus (fuperficialem Ungulam Semiquadrantalem B A, cujus acies B V, complentes,) vel (his æquales) rectæ b V trilineum A b V complentes; ad *omnes* A V refpectivos finus verfos arithmetice proportionales, vel A V Semiquadrantalem Ungulam aciem habentem V, hoc eft, ad Semiquadratum A V; ut funt *omnes* A V ω ω figuræ interminabiles correfpondentes, hoc eft, Ungula A V ω ω aciem habens V ω; ad *omnes* A V O O, hoc eft, Ungulam A V O O aciem habentem V O.

(Et, eadem ratione; Momentum fuperficialis iftius Ungulæ, arcui B A infiftentis, ad momentum iftius fuperficialis Ungulæ feu Semiquadrati A V, refpectu ejufdem b V B; ut ejufdem Ungulæ folidæ A V ω ω momentum, ad momentum correfpondentis Ungulæ Solidæ A V O O, refpectu aciei V ω. Et fimiliter ejufmodi aliæ folidorum portiones huc fpectantium, facile exhibentur.)

Verum, cum præcedens illa figuræ A τ α confideratio, fit calculo magis accommoda, quam hæc figuræ interminabilis, (*Secantium complementi*, finibus verfis arithmetice proportionalibus convenientium:) priorem potius profequemur. Atque inde, fi opus fuerit, interminabilis hujus figuræ dimenfio, reliquaque quæ eo fpectant, deduci poterunt. Quod hic fufficiat innuiffe.

Porro; Si intelligatur Semicirculus (juxta def. 1. Cap. 4.) ex infinitis numero Sectoribus conftitutus ut A α X, X α Z, &c. vel etiam (quod in partibus infinite exiguis, propter infinitam approximationem, tantundem valet,) ex infinitis numero Triangulis, figuram infcriptam complentibus, ut O α X, P α Z, &c. five, ex totidem Triangulis figuram circumfcriptam complentibus, ut Q α A, I α X, &c. aut C. Fig. 169, 170.

Fig. 169, 170. aut etiam figuram inscriptæ & circumscriptæ intermediam (utpote partim inscriptam partim circumscriptam) complentibus, ut Y α P, &c. (quæ rectis α X, α Z, &c. ut illorum axibus repræsententur:) Intelligenda erit similiter Figura Sinuum versorum A τ α, ex totidem constitui correspondentibus Quadrilineis ut A α ξ x, x ξ ζ z, &c. Sectorum illorum duplis; vel etiam (quod eodem recidit, sectione in infinitum continuata,) ex totidem Parallelogrammis, figuram inscriptam complentibus, ut X x ξ α, p z ζ ξ; &c. aut circumscriptam complentibus, ut A q ξ α, x i ζ ξ, &c. aut quæ figuram partim inscriptam partim circumscriptam complent, qualia p y δ ξ, &c. (quæ rectis x ξ, z ζ, &c. ut eorum axibus repræsententur; quæ triangulorum æquealtorum α X, α Z, &c. dupla intelligantur.)

Est autem Distantia Centri gravitatis in Parallelogrammis ξ x, ζ z, &c. ad Distantiam Centri gravitatis in Triangulis æquealtis, α X, α Z, &c. (à recta τ α;) ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{2}{3}$; seu, ut 3 ad 4, (per prop. 6. hujus.) Adeoque (propter magnitudines ut 2 ad 1;) Erunt momenta Parallelogrammorum (tum singulorum, tum simul omnium,) ad Triangulorum respectivorum momenta, (tum singulorum, tum simul omnium;) ut 3 ad 2, (propter $\frac{2}{1}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$:) Adeoque Momentum Trilinei A τ α, ad momentum Semicirculi A D α; ejusque portionis, (ut A b β α, seu x ξ δ d, seu b β τ,) momentum, ad momentum sectoris correspondentis, (ut B α A, seu X α D, seu segmenti α B α,) respectu rectæ τ α; ut 3 ad 2.

Est autem Semicirculi A D α respectu τ α momentum (propter magnitudinem $\frac{1}{2}PR$, & Centri gravitatis distantiam R,) $\frac{1}{2}R^2R$; ergo Trilinei A τ α, respectu τ α, momentum, (utpote ad illud Semicirculi, ut 3 ad 2,) $\frac{3}{4}R^2P$. (Hoc est, omnia $\frac{1}{2}b^2$, seu $\frac{1}{2}v^2$ totius semicirculi, seu semisumma quadratorum sinuum versorum totius semicirculi, sumptis arcubus arithmetice proportionalibus.) Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{2}PR$,) distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{2}R$; adeoque à T A, $\frac{1}{2}R$; ejusque momentum respectu T A, $\frac{1}{4}R^2P$.

Ergo & Semiquadrantalis Ungula eidem insistens, aciem habens τ α, $\frac{3}{4}R^2P$; & aciem habens T A, $\frac{1}{4}R^2P$: Solidumque ejusdem conversione circa τ α factum, $\frac{3}{2}RP^2$; & Semisolidum $\frac{3}{16}RP^2$: &, circa T A, Solidum $\frac{1}{2}RP^2$; & Semisolidum $\frac{1}{16}RP^2$.

Item; Sectoris B α A momentum respectu τ α (per §M. prop. 15.) $\frac{1}{2}aR^2+\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}svR=\frac{1}{2}fR^2+\frac{1}{6}sbR$: Ergo, Portionis b β α A, momentum respectu τ α, $\frac{3}{4}aR^2+\frac{3}{4}sR^2-\frac{1}{4}svR=\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}sbR$; (idemque est Ungula Semiquadrantalis, portioni b β α A insistens, aciem habens τ α:) Adeoque (propter magnitudinem, $aR+sR=fR$,) distantia Centri gravitatis portionis b β α A, à τ α, $\frac{3}{4}R+\frac{sb}{4f}$; & à T A, $\frac{1}{4}R-\frac{sb}{4f}$; & propterea ejusdem respectu T A, momentum (seu Semiquadrantalis Ungula,) $\frac{1}{4}aR^2+\frac{1}{4}sR^2+\frac{1}{4}svR=\frac{1}{4}fR^2-\frac{1}{4}sbR$. Et consequenter, Solidum, portionis b β α A conversione circa τ α factum, $\frac{3}{4}fRP+\frac{1}{4}sbP$; & Semisolidum, $\frac{3}{8}fRP+\frac{1}{8}sbP$: &, circa T A, Solidum $\frac{1}{4}fRP-\frac{1}{4}sbP$; & Semisolidum, $\frac{1}{8}fRP-\frac{1}{8}sbP$.

E. Item; Segmenti A B A, momentum respectu T A, (per § N. prop. 15.) est $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}svR=\frac{1}{2}eR^2-\frac{1}{6}svR$; ergo, Trilinei A b K momentum respectu T A (vel semiquadrantalis Ungula aciem habens T A,) est $\frac{3}{4}eR^2-\frac{1}{4}svR$: (Hoc est, omnia $\frac{1}{2}v^2$; seu semisumma quadratorum sinuum versorum arcuum arithmetice proportionalium, ab A, usque ad A B.) Adeoque (propter magnitudinem eR) distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{3}{4}R-\frac{sv}{4e}$ ideoque à τ α, $\frac{1}{4}R+\frac{sv}{4e}$; ejusque respectu τ α momentum, $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR$: Et consequenter; Solidum ejusdem conversione factum circa T A, $\frac{3}{4}eRP-\frac{1}{4}svP$; & Semisolidum, $\frac{3}{8}eRP-\frac{1}{8}svP$: &, circa τ α, Solidum, $\frac{1}{4}eRP+\frac{1}{4}svP$; & Semisolidum, $\frac{1}{8}eRP+\frac{1}{8}svP$.

Similiter; Segmenti α B α, momentum respectu τ α, $\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}sbR=\frac{1}{4}R^2P-\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}svR$: Ergo, Trilinei b β τ, momentum respectu τ α, $\frac{3}{4}\alpha R^2-\frac{3}{4}sR^2-\frac{1}{4}sbR=\frac{3}{8}R^2P-\frac{3}{4}aR^2-\frac{3}{4}sR^2+\frac{1}{4}svR$. Adeoque (propter magnitudinem $\alpha R-sR$) distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4}R-\frac{sb}{4\alpha-4s}$:

ideoque

ideoque à T A, $\frac{3}{4}R+\frac{sb}{4\alpha-4s}$; ejusque respectu T A momentum (vel correspondens Ungula) $\frac{3}{4}\alpha R^2-\frac{3}{4}sR^2+\frac{1}{4}sbR$. Et consequenter, Solidum ejusdem circa $\tau\alpha$ conversione factum, $\frac{3}{4}\alpha RP-\frac{3}{4}sRP-\frac{1}{4}sbP$; & Semisolidum, $\frac{3}{8}\alpha RP-\frac{3}{8}sRP-\frac{1}{8}sbP$: Et, circa T A, Solidum $\frac{3}{4}\alpha RP-\frac{3}{4}sRP+\frac{1}{4}sbP$; & Semisolidum, $\frac{3}{8}\alpha RP-\frac{3}{8}sRP+\frac{1}{8}sbP$. Fig. 169, 170.

Si vero ex momento Quadrilinei b $\beta\alpha$ A, respectu $\tau\alpha$, vel T A; auferatur momentum Parallelogrammi β b B α; habebitur (respectu earundem $\tau\alpha$, T A,) momentum Segmenti A b B. F.

Est autem Parallelogrammi β b B α (propter $\beta\alpha=a$, & b$\beta=b$) magnitudo ab; & (propter Centri gravitatis à $\tau\alpha$ distantiam $\frac{1}{2}b$, adeoque à T A, $2R-\frac{1}{2}b$,) momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ab^2=2aR^2-2avR+\frac{1}{2}av^2=2aR^2-avR-\frac{1}{2}as^2$; & respectu T A, $2abR-\frac{1}{2}ab^2=2aR^2-\frac{1}{2}av^2=2aR^2-avR+\frac{1}{2}as^2$.

Adeoque (subductione facta) Segmenti b B A, momentum respectu $\tau\alpha$ (vel correspondens Ungula Semiquadrantalis,) $-\frac{5}{4}aR^2+\frac{3}{4}sR^2+avR-\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2=-\frac{3}{4}cR^2+avR-\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2=\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}sbR-\frac{1}{2}ab^2$; respectu T A, $-\frac{5}{4}aR^2+\frac{3}{4}sR^2+avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2=\frac{3}{4}fR^2-2abR-\frac{1}{4}sbR+\frac{1}{2}ab^2$. Et (propter magnitudinem, $-aR+sR+av$,) distantia Centri gravitatis Segmenti AbB, à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R-\frac{fvR-2as^2}{-4cR+4av}$; à T A, $\frac{3}{4}R+\frac{fvR-2as^2}{-4cR+4av}$; à b V, $\frac{5}{4}R-b-\frac{fvR-2as^2}{-4cR+4av}=-\frac{3}{4}R+v-\frac{fvR-2as^2}{-4cR+4av}$: Adeoque momentum respectu b V, $\frac{3}{4}aR^2-\frac{3}{4}sR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2=\frac{3}{4}cR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$. Et speciatim, Segmenti A d C momentum respectu D C (propter $a=\frac{1}{4}P$, & $s=v=R$,) $\frac{1}{16}R^2P$: Ejusque Centri gravitatis à D C distantia, $\frac{1}{16}P$. (Vel etiam, ex Trilinei A b B momento respectu $\tau\alpha$, subducto quod fit ex magnitudine in α V $=b$, nempe $-abR+sbR+abv=-2aR^2+2sR^2+avR-svR+as^2$; habetur Trilinei A b B momentum respectu b V vel Semiquadrantalis Ungula, $\frac{3}{4}aR^2-\frac{3}{4}sR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2=\frac{3}{4}cR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$; ut prius.)

Adeoque Solidum ejusdem A b B conversione circa $\tau\alpha$ factum, est, $-\frac{3}{4}cRP+avP-\frac{1}{4}svP+\frac{as^2P}{2R}$; circa T A, $-\frac{3}{4}cRP+avP+\frac{1}{4}svP-\frac{as^2P}{2R}$; & circa b V, $\frac{3}{4}cRP+\frac{3}{4}svP-\frac{as^2P}{2R}$: Et semisolida, semisses horum.

Habentur autem eorundem Planorum, Momenta respectu A α, vel Semiquadrantales Ungulæ aciem habentes A α, per prop. 18. Cap. 3. vel prop. 22. Cap. 4. vel prop. 10. hujus. G.

Si enim rectæ omnes x ξ, z ζ, &c. complentes A $\tau\alpha$ Trilineum, (vel minuta quæ his repræsentantur parallelogramma, Trilineum illud complentia,) ducantur in suas ab A α distantias $\alpha\xi$, $\alpha\zeta$, &c. vel in his æquales $\xi\pi$, $\zeta\varsigma$, &c. (triangulum $\alpha\tau$ t complentes;) Habetur Semiquadrantalis Ungula trilineo A $\tau\alpha$ insistens, aciem habens A α. Quam utique complent, ipsa x $\xi\alpha$, z $\zeta\alpha$, &c. seu x $\xi\pi$, z $\zeta\varsigma$, &c. Parallelogramma (seu minuta Prismata) ipsis x ξ, z ζ, &c. (rectis, seu minutis parallelogrammis) insistentia. Hoc est, omnia ab, facta ex arcubus arithmetice proportionalibus in residuorum ad semiperipheriam sinus versos ductis.

Aut etiam; si intelligatur A α in partes invicem æquales, in punctis Z, D, &c. dividi, (adeoque rectas Z z, D d, &c. hoc est $\alpha\zeta$, $\alpha\delta$, &c. repræsentare non quidem arcus arithmetice-proportionales, sed qui respondent sinubus versis A V, A C, &c. arithmetice proportionalibus, puta A Z, A D, &c. fig. 169. adeoque Trilineum A $\tau\alpha$ consideretur non tam ut *Figura Sinuum Versorum* arcubus arithmetice proportionalibus convenientium, ipsi A α parallelorum, quam ut *Figura Arcuum*, in rectas expansorum, sinubus versis arithmetice proportionalibus convenientium, ipsi $\alpha\tau$ parallelarum;) eandem Ungulam complebunt Arcuum illorum Semiquadrata, seu Triangula eisdem Z z, D d, &c. insistentia; ipsis scilicet $\alpha\zeta\varsigma$, $\alpha\delta\Delta$, &c. similia & æqualia: Hoc est, Omnia $\frac{1}{2}a^2$, sumptis v arithmetice proportionalibus.

Si

Fig. 169, 170. Si vero eadem Ungula, tertiis adhuc planis (seu exiguis Prismatibus) componi intelligatur, Basi seu Trilineo A $\tau\alpha$ parallelis, Ungulam complentibus; erunt ea (propter Ungulæ Obliquam Sectionem, adeoque plana superiora continue magis magisque ab A α deficientia,) Trilineis A $\tau\alpha$, x $\tau\xi$, z $\tau\zeta$, &c. (usque ad ultimum f $\tau\varphi$, ipsumve τ punctum ;) æqualia : Hoc est, totidem A $\tau\alpha$ planis, demptis omnibus x $\xi\alpha$ A, z $\zeta\alpha$ A, &c. Hoc est ; Prismati altitudinem habenti $\alpha\tau$, dempta contraria Ungula, super eadem A $\tau\alpha$ base, aciem habente T τ. Et similiter, quæ Ungulam portioni b $\beta\alpha$ A insistentem complent plana ; sunt ipsis b $\beta\alpha$ A, b $\beta\xi$ x, b $\beta\zeta$ z, &c. (usque ad ipsam b β) æqualia : Hoc est, totidem b $\beta\alpha$ A, demptis omnibus x $\xi\alpha$ A, z $\zeta\alpha$ A, &c. seu Prismati ipsi b $\beta\alpha$ A insistenti altitudinem habenti æqualem ipsi $\varsigma\beta = \beta\alpha$, seu arcui B A $= a$; dempta contraria Ungula, aciem habente b β.

Atque hanc tertiam Ungulæ compositionem, ut calculo magis opportunam, (cum perinde sit, Ungulæ magnitudinem quod spectat, planive momentum, sive hæc, sive illa, sive ista demum sumatur,) speciatim hic considerabimus.

Est autem (ut § A.) Trilineum A $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}RP$; ergo, *omnia* A $\tau\alpha$; hoc est, A $\tau\alpha$, in $\tau\alpha = \frac{1}{2}P$, ducta ; $\frac{1}{4}RP^2$.

Item ; portio b $\beta\alpha$ A, (per § A.) $aR + sR$; Adeoque omnia x $\xi\alpha$ A, z $\zeta\alpha$ A, &c. (usque ad $\tau\alpha$ A,) sunt *omnia* $aR + sR$. Suntque, omnia a, (hoc est, summa arcuum arithmetice proportionalium, quorum maximus A D $\alpha = \frac{1}{2}P$,) Semissis quadrati $\tau\alpha = \frac{1}{2}P$; seu $\frac{1}{8}P^2$: (per prop. 1. hujus.) Adeoque *Omn.* aR, $= \frac{1}{8}RP^2$. Et *omnia* s, (hoc est, summa Sinuum rectorum totius Semicirculi,) $= 2R^2$ (per § M. prop. 13. hujus.) Adeoque *Omn.* $sR, = 2R^3$. Ergo omnia x $\xi\alpha$ A, z $\zeta\alpha$ A, &c. quadrilinea ; hoc est, *Omn.* $aR + sR$; (hoc est, Ungula Trilinei A $\tau\alpha$, aciem habens, τ T ; seu correspondens Momentum ;) $\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$.

Ergo ; Momentum ejusdem A $\tau\alpha$, respectu A α ; (seu correspondens Ungula aciem habens A α ;) hoc est, Omnia A $\tau\alpha$, x $\tau\xi$, z $\tau\zeta$, &c. seu, Totidem A $\tau\alpha$, demptis omnibus x $\xi\alpha$ A, z $\zeta\alpha$ A, &c. Hoc est, Prisma Trilinei A $\tau\alpha$, (altitudinem habens $\tau\alpha$,) dempta contraria Ungula aciem habente τ T ; Hoc est, totidem $\frac{1}{2}RP$ demptis omnibus $aR + sR$: Est $\frac{1}{4}RP^2 - \frac{1}{8}RP^2 - 2R^3 = \frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$. Atque hoc momentum, per magnitudinem $\frac{1}{2}RP$ divisum ; exhibet distantiam Centri gravitatis Trilinei A $\tau\alpha$, ab A α, $\frac{1}{4}P - \frac{4R^2}{P}$; adeoque à τ T, $\frac{1}{4}P + \frac{4R^2}{P}$.

Vel etiam ; momentum ejusdem respectu τ T, ($\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$) modo inventum ; per magnitudinem ($\frac{1}{2}RP$) divisum ; exhibet Centri gravitatis à τ T distantiam $\frac{1}{4}P + \frac{4R^2}{P}$; adeoque ab A α, $\frac{1}{4}P - \frac{4R^2}{P}$; estque (restituendo magnitudinem) ejusdem momentum (seu semi-quadrantalis Ungula) respectu A α, $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$. Ut prius.

H. Similiter ; Portonis b $\beta\alpha$ A, momentum respectu A α (eadem ratione,) erit Aggregatum omnium b $\beta\alpha$ A, b $\beta\xi$ x, b $\beta\zeta$ z, &c. usque ad ipsam b β: Hoc est, Totidem b $\beta\alpha$ A demptis omnibus x $\xi\alpha$ A, z $\zeta\alpha$ A, &c. Hoc est, Prisma ejusdem b $\beta\alpha$ A altitudinem habens $\beta\alpha$, dempta contraria Ungula (ejusdem b $\beta\alpha$ A Sectionis) aciem habente b β.

Est autem ejusmodi portio quævis ut b $\beta\alpha$ A, (per § B.) $aR + sR$. Adeoque Omnes x $\xi\alpha$ A, z $\zeta\alpha$ A, &c. usque ad maximum b $\beta\alpha$ A ; sunt *Omn.* $aR + sR$; sumptis a arcubus arithmetice proportionalibus usque ad maximum $\alpha\beta$, qui dicatur A; ipsisque s sinubus rectis eorundem arcuum, quorum maximus $\beta\nu$ dicatur S.

Sunt autem *Omnes* a, usque ad A, (per prop. 1. hujus, utpote arithmetice proportionales,) $\frac{1}{2}A^2$ (seu $\alpha\beta\varsigma$ triangulum ;) adeoque *Omn.* aR, $= \frac{1}{2}A^2R$. Et *Omnes* s, usque ad maximum $\beta\nu = S$, cui respondet Sinus versus A V $= v$; (hoc est, $\alpha\beta\nu$ trilineum ;) sunt vR (per § M, V. prop. 13 hujus) adeoque *Omn.* sR, $= vR^2$.

Ergo ; *Omn.* $aR + sR$: $= \frac{1}{2}A^2R + vR^2$, est aggregatum omnium x $\xi\alpha$ A, z $\zeta\alpha$ A, &c. usque ad b $\beta\alpha$ A : Hoc est, momentum portionis b $\beta\alpha$ A respectu ipsius b β; vel huic correspondens Ungula.

Ejusdem itaque momentum respectu A α, (aut correspondens Ungula ;) hoc est, totidem b $\beta\alpha$ A minus omnibus x $\xi\alpha$ A, z $\zeta\alpha$ A, &c. seu Prisma basis b $\beta\alpha$ A altitudinem habens $\beta\alpha = A$, dempta contraria Ungula b $\beta\alpha$ A aciem habente b β:

Est,

Eſt, $A^2R + ASR$ minus, $\frac{1}{2}A^2R + vR^2$: Hoc eſt, $\frac{1}{2}A^2R + ASR - vR^2$; vel (reſtituto valore minuſcularum a, s,) $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$. Fig. 169, 170.

Adeoque (momentis per magnitudinem diviſis) Portionis b$\beta\alpha$A, diſtantia centri gravitatis à bβ, $\frac{a^2 + 2vR}{2a + 2s}$; & ab A$\alpha$, $\frac{a^2 + 2as - 2vR}{2a + 2s}$. Vel à b$\beta$, $\frac{1}{2}a + \frac{2vR - as}{2a + 2s}$; & ab A$\alpha$, $\frac{1}{2}a - \frac{2vR - as}{2a + 2s}$.

Eodem modo oſtendetur (propter b$\tau\beta = aR - sR$,) momentum portionis b$\beta\tau$, reſpectu bβ, (ungulamve correſpondentem cujus acies bβ,) eſſe $\frac{1}{2}a^2R - bR^2$; & reſpectu τT, $\frac{1}{2}a^2R - asR + bR^2$: Et Centri gravitatis diſtantiam à bβ, $\frac{a^2 - 2bR}{2a - 2s}$; &, à τT, $\frac{a^2 - 2as + 2bR}{2a - 2s}$.

Aut etiam, (propter A b K $= aR - sR$,) momentum portionis A b K reſpectu b K (ungulamve correſpondentem,) eſſe $\frac{1}{2}a^2R - vR^2$; & reſpectu Aα, $\frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$: Centrique gravitatis diſtantiam à b K, $\frac{a^2 - 2vR}{2a - 2s}$; & ab A$\alpha$, $\frac{a^2 - 2as + 2vR}{2a - 2s}$.

Si vero, ex Portionis b$\beta\alpha$A, momentis reſpectu bβ, & Aα; auferatur Parallelogrammi B b$\beta\alpha$ momentum reſpectu utriuſvis (propter centrum gravitatis æqualiter ab utraque diſtans:) Hoc eſt, (propter bβ = V$\alpha = b$, & b B $= a$, hujuſque ſemiſſem $\frac{1}{2}$b B $= \frac{1}{2}a$,) $\frac{1}{2}a^2b = a^2R - \frac{1}{2}a^2v$: Habetur Segmenti A b B, momentum reſpectu bβ, $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; & reſpectu A$\alpha$, $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$: Hoc eſt, Semiſumma quadratorum arcuum ſinibus verſis arithmetice proportionalibus convenientium, portionem b B A complentium: Adeoque hujus duplum, eorundem quadratorum Summa. Et (momenta per magnitudinem dividendo, hoc eſt, per $-aR + sR + av$, ut § B.) Diſtantia centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a + \frac{2vR - as}{-2cR + 2av}R$; & ab A$\alpha$, $\frac{1}{2}a - \frac{2vR - as}{-2cR + 2av}R$. I.

Et, ſpeciatim, Segmenti A d C momentum reſpectu dδ, (propter $v = R$) eſt R^3. Centrique gravitatis à dδ diſtantia eſt R.

Solidaque & Semiſolida converſione facta; ſunt ad reſpectivas Ungulas, (ut ſæpius dictum eſt,) ut P, & $\frac{1}{2}P$, ad R. Puta, K.

Solidum Trilinei A$\tau\alpha$ converſione circa τT factum, eſt $\frac{1}{6}P^3 + 2R^2P$; &, circa Aα, $\frac{1}{6}P^3 - 2R^2P$.

Solidum Portionis b$\beta\alpha$A converſione circa bβ factum, eſt $\frac{1}{2}a^2P + vRP$; &, circa Aα, $\frac{1}{2}a^2P + asP - vRP$.

Solidum Portionis b$\beta\tau$ converſione circa bβ factum, eſt $\frac{1}{2}a^2P - bRP$; &, circa τT, $\frac{1}{2}a^2P - asP + bRP$.

Solidum Portionis A b K converſione circa b K factum, eſt $\frac{1}{2}a^2P - vRP$; & circa Aα, $\frac{1}{2}a^2P - asP + vRP$.

Solidumque Segmenti A b B converſione circa βb K factum, eſt $-\frac{1}{2}a^2P + vRP + \frac{a^2vP}{2R}$; & circa A$\alpha$, $-\frac{1}{2}a^2P + asP - vRP + \frac{a^2vP}{2R}$.

Et Semiſolida, horum ſemiſſes.

Si vero libeat hæc Quadrilineorum, & Sectorum correſpondentium, momenta reſpectu Aα, inter ſe comparare; (præterquam quod illud jam factum eſt, dum utrorumque momenta dantur;) Dicendum eſt, Momentum Quadrilinei b$\beta\alpha$A reſpectu ſibi adjacentis Aα, ad momentum Sectoris BαA reſpectu Aα adjacentis ſibi; eſſe ut, omnes bβ (illud complentes) in reſpectivas $\beta\zeta$ (complentes $\alpha\beta\zeta$ Triangulum;) ad eaſdem bβ in reſpectivarum $\beta\upsilon$ (complentium $\alpha\beta\upsilon$ Trilineum) Trientem. Hoc eſt, ut Omnia rectangula b$\beta\zeta$ (eo ſpectantia) ad Trientem omnium b$\beta\upsilon$. Hoc eſt, ut Omnia ab, ad Omnia $\frac{1}{3}sb$. L.

Quippe Triangula ſingula ut αB (Sectorem complentia) ſunt (quoad magnitudinem) ad correſpondentia Parallelogramma bβ (Quadrilineum complentia) ut

Fig. 169, 170. ut 1 ad 2, (Intellige, in partibus infinite exiguis, dum Triangula Sectoribus, & Parallelogramma respectivis Quadrilineis coincidere reputantur.) Eorumque Triangulorum centra gravitatis in αB posita, ab α distant $\frac{2}{3}$ αB; ideoque, ab Aα, $\frac{2}{3}$ BV; hoc est $\frac{2}{3}$ βυ. Ergo (propter $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$,) Momenta singulorum αB Triangulorum respectu adjacentis Aα; hoc est, Triangulum αB $= \frac{1}{2}$ bβ, in $\frac{2}{3}$ BV $= \frac{2}{3}$ βυ; est ad bβ in βυ; ut 1 ad 3. Et, consequenter, omnium Triangulorum, hoc est Sectoris BαA, momentum respectu Aα; ad momentum omnium bβ Parallelogrammorum quadrilineum bβαA complentium in respectivis distantiis βυ suspensorum; ut 1 ad 3. Est autem (per § S. prop. 15.) Sectoris BαA, momentum respectu Aα, seu correspondens Ungula, $\frac{1}{3} v R^2 + \frac{1}{3} s^2 R$: Ergo, omnia bβυ Rectangula; seu Omnia bs, aut omnia $2sR - vs$, eo spectantia; (hoc est, Solidum Quadrilineo bβαA incumbens, altitudinem habens super singulas rectas xξ, zζ, &c. æqualem respectivis ξυ, ζυ, &c.) $v R^2 + \frac{1}{3} s^2 R$. Et de aliis istiusmodi Solidi portionibus, mutatis mutandis, simile fiet judicium. Puta, (propter Segmentum ABA $= \frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s R$, ejusque respectu Aα, momentum $\frac{1}{3} v R^2 - \frac{1}{3} s^2 R$, per § Q. prop. 15.) quæ portioni AbK incumbit ejusdem Solidi continuati portio (hoc est, omnia vs eo spectantia,) erit $v R^2 - \frac{1}{3} s^2 R$. Et, similiter, quæ trilineo τbβ incumbit ejusdem Solidi portio (hoc est, omnia bs huc spectantia,) $b R^2 - \frac{1}{3} s^2 R$. Et sic alibi.

M. Atque his ita in *Figura Sinuum Versorum* Aτα absolutis; idem etiam in *Figura Sinuum Rectorum* (totius Semicirculi) ατκ absolvetur. Est utique hujus uterque Semissis αδκ, τδκ, eadem plane figura atque dCA, (figuræ Aτα segmentum,) vel dcτ; alio situ posita. Cum enim bβ hoc est Vα (& de reliquis similiter) sit arcus Bα $=$ τβ, sinus versus; erit propterea (ejusdem à Radio differentia) bk, hoc est VC, arcus BD sinus rectus. Et sic ubique. Est igitur, tum dCA, tum dcτ, figura Sinuum rectorum totius Quadrantis, (puta quadrantis DA, vel Dα, fig. 169. utrinque à D inchoando;) adeoque eadem plane figura cum αδκ, vel τδκ; quæ itidem (per constructionem) sunt figuræ Sinuum Rectorum unius quadrantis integri, atque ad eundem Radium. Cum igitur tum ipsius dCA trilinei, tum partium ipsius, magnitudines, momenta & Centra gravitatis determinantur: Etiam figuræ ατκ utriusque Semissis, adeoque & totius, ejusque partium, magnitudines momenta & Centra gravitatis determinantur.

N. Exempli gratia; αδκ $=$ τδκ $=$ dCA $= -aR + sR + av$ (per § B.) id est, hoc casu, (propter $v =$ AC $= R$, & $s =$ DC $= R$, & arcum $a =$ DA $= \frac{1}{4} P$,) $-\frac{1}{4} RP + R^2 + \frac{1}{4} RP = R^2$. Ejusque momentum respectu basis αδ, vel dC, (hoc est, omnia Semiquadrata Sinuum rectorum unius quadrantis,) $\frac{3}{4} a R^2 - \frac{3}{4} s R^2 + \frac{3}{4} s v R - \frac{1}{2} a s^2$ (per § F.) id est, in hoc casu, $\frac{3}{16} P R^2 - \frac{3}{4} R^3 + \frac{3}{4} R^3 - \frac{1}{8} P R^2 = \frac{1}{16} P R^2$; (Adeoque, Summa quadratorum Sinuum rectorum, seu *omnia* s^2, totius quadrantis, $\frac{1}{8} R^2 P$; ut supra § V. prop. 13.) Centrique gravitatis à base αδ seu dC distantia (momentum per magnitudinem dividendo) $\frac{1}{16} P$.

O. Similiter; portio κδβυ, hoc est (sumpta Cl $=$ δβ) AClx, est (ut § B.) sR, sumpto arcu xO hoc est XA, $= a$. Nempe factum ex Radio R, in s Sinum rectum arcus XA $=$ xO; hoc est, in Sinum arcus DB $=$ δβ; hoc est, (posito αβ $=$ AB $= a$; adeoque BD ejusdem complemento,) in $x =$ VC. Hoc est, κδβυ $= xR$.

Et consequenter, αβυ $=$ αδκ $\mp$ δκυβ (prout minor majorve quadrante fuerit arcus αβ seu AB) erit $R^2 \mp xR$; hoc est (propter $x = R - v$ si AB sit quadrante minor, & $x = -R + v$ si quadrante major; adeoque, utcunque, $R \mp x = v$,) αβυ $= R^2 \mp xR = vR$.

Hinc item deducetur Momentorum ratio in Trilinei αδκ vel τδκ portionibus; ex momentis portionum Trilinei dCA; sed perplexiori aliquantum calculo, ob contrarium Figurarum situm. Cum enim, in priori situ, arcus ab A inchoavimus, (ut, verbi gratia, arcum AB diximus a; cujus sinus rectus s, & versus v; adeoque BD esset ejusdem arcus complementum, cujus sinus rectus VC $= x$:) jam, mutato situ, arcus inchoantur ab α, hoc est à D; (adeoque arcus αβ, hoc est DB, dicetur a, cujus sinus rectus $s =$ VC; & sinus complementi BV $= x$, &c.) Verbi gratia,

Ex Parallelogrammi qlCA momento respectu TA, hoc est, (posito xX, hoc

hoc est XA, $=a$,) ex $\frac{1}{4}aR^2$; si auferatur momentum Trilinei Axq, hoc est, (per § E.) $\frac{1}{4}aR^2-\frac{3}{4}sR^2-\frac{1}{4}svR$; habetur quadrilinei xlCA momentum respectu TA, $-\frac{1}{4}aR^2+\frac{3}{4}sR^2+\frac{1}{4}svR$. Adeoque (propter magnitudinem sR, per § B.) distantia centri gravitatis à TA, $\frac{-aR+3sR+sv}{4s}$; adeoque, à dC, $\frac{aR+sR-sv}{4s}$; ejusque respectu dC momentum, $\frac{1}{4}aR^2+\frac{1}{4}sR^2-\frac{1}{4}svR$ $=\frac{1}{4}aR^2+\frac{1}{4}sxR$. Idemque est momentum portionis $\nu\beta\delta\kappa$, respectu $\tau\alpha$, posito $\delta\beta$ $(=xX)=a$: Sed, posito $\alpha\beta=a$, adeoque (ejusdem complementum ad quadrantem, aut etiam excessus supra quadrantem,) $\delta\beta=DB=\frac{1}{4}P\backsim a$, (arcus a differentiam à quadrante $\frac{1}{4}P$,) quem arcum q dicemus; eritque hujus sinus rectus, non s, sed $x=OC$ (sinus complementi arcus $a=XA$.) Adeoque mutato a in q; permutatis etiam si opus s & x (sed hic nihil opus, perinde enim est sx & xs;) pro $\frac{1}{4}aR^2+\frac{1}{4}sxR$, habebitur quadrilinei $\nu\beta\delta\kappa$ momentum respectu $\tau\alpha$, (posito $\alpha\beta=a$,) $\frac{1}{4}qR^2+\frac{1}{4}xsR$; (hoc est, omnia $\frac{1}{2}s^2$, seu Semisumma quadratorum Sinuum rectorum complentium portionem $\nu\beta\delta\kappa$, seu arcus DB particulis respondentium.) Ejusque à $\tau\alpha$ Distantia Centri gravitatis $\frac{qR+xs}{4x}$. Fig. 169, 170.

Adeoque; (propter Trilinei $\alpha\delta\kappa$, respectu ejusdem $\tau\alpha$, momentum $\frac{1}{16}R^2P$, ut supra;) portionis $\alpha\beta\nu=\alpha\delta\kappa\mp\delta\kappa\nu\beta$ (prout $\alpha\beta$ minor majorve quadrante fuerit) momentum respectu $\tau\alpha$, erit $\frac{1}{16}R^2P\mp\frac{1}{4}qR^2\mp\frac{1}{4}sxR$; Hoc est (propter $q=\frac{1}{4}P-a$, & $x=R-v$, si $\alpha\beta$ sit quadrante minor; vel $q=-\frac{1}{4}P+a$, & $x=-R+v$; si $\alpha\beta$ quadrante major;) $\frac{1}{4}aR^2-\frac{1}{4}sR^2+\frac{1}{4}svR$: (Quæ itaque est, Semisumma quadratorum Sinuum rectorum, complentium portionem $\alpha\beta\nu$; seu omnia $\frac{1}{2}s^2$ arcus AB particulis competentia, sumptis a arithmetice proportionalibus.) Factaque, per magnitudinem $\alpha\beta\nu=vR$, divisione; habetur distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{aR-sR+sv}{4v}=\frac{eR+sv}{4v}$.

Similiter, Trilinei $\alpha\delta\kappa$ momentum respectu Aα (productæ,) Hoc est, Trilinei dCA momentum respectu δd (productæ;) est, (per § I.) $-\frac{1}{2}a^2R+vR^2+\frac{1}{2}a^2v$. Hoc est, in præsenti casu, (propter $v=R$,) R^3. (Hoc est, omnia as, totius quadrantis.) Atque hoc, per magnitudinem R^2 divisum; exhibet R, distantiam Centri gravitatis trilinei dCA, à δd; vel $\alpha\delta\kappa$, ab Aα. Adeoque Centri gravitatis illius ab Aα, hujus à $\delta\kappa$, distantia, est $\frac{1}{4}P-R$. Et propterea, momentum correspondens (seu Semiquadrantalis Ungulæ,) nempe Trilinei dCA respectu Aα, vel $\alpha\delta\kappa$ respectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{4}R^2P-R^3$. P.

Et similiter in Portionibus, (licet perplexiori paulum calculo, ob mutandum ut prius, symbolorum valorem pro mutato situ figuræ,) idem obtinebitur.

Est utique (per § H.) quadrilinei x$\xi\alpha$A momentum respectu Aα, (posito $xX=a$,) $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$: Adeoque (dempto Parallelogrammi ξlCα momento respectu ejusdem Aα, $\frac{1}{2}a^2R$;) momentum quadrilinei xlCA, respectu ejusdem Aα, $asR-vR^2$. Atque tantundem erit momentum Quadrilinei $\nu\beta\delta\kappa$ respectu $\delta\kappa$, posito $\delta\beta=xX=a$: Centrique gravitatis à $\delta\kappa$ (propter magnitudinem sR,) distantia, $\frac{as-vR}{s}$. Sed, posito $\alpha\beta=a$; adeoque $\beta\delta=\frac{1}{4}P\backsim a=q$: Et propterea mutatis s in x (sinum complementi arcus q;) & v in $R-s$: Erit ejusdem $\nu\beta\delta\kappa$ momentum respectu $\delta\kappa$, $qxR-R^3+sR^2$; & centri gravitatis à $\delta\kappa$ distantia, $\frac{qx-R^2+sR}{x}$: Adeoque, ab Aα, $\frac{1}{4}P\mp\frac{qx-R^2+sR}{x}$; ejusque momentum respectu Aα, $\frac{1}{4}xRP\mp qxR\pm R^3\mp sR^2=axR\pm R^3\mp sR^2$.

Et, propterea, Momentum portionis $\alpha\beta\nu=\alpha\delta\kappa\mp\delta\kappa\nu\beta$, respectu A$\alpha$, (propter ipsius $\alpha\delta\kappa$, respectu Aα, momentum, R^3) erit $\mp axR+sR^2=-aR^2+sR^2+avR$. Centrique gravitatis ab Aα distantia (propter magnitudinem, vR,) erit $\frac{-aR+sR+av}{v}=\frac{-eR+av}{v}$: Adeoque, à $\beta\nu$, $\frac{eR}{v}$; ejusque respectu $\beta\nu$ momentum eR^2.

Q. Verum hæc omnia quæ Trilineum $\alpha \tau \kappa$, ejusque portiones spectant; simplicius, ex ante traditis, per se eliciuntur, sine ope Figuræ Sinuum versorum.

Est utique (per § T. prop. 13.) posito $\alpha \beta = a$ (ubicunque in $\alpha \tau$ sit β punctum) reliquisque symbolis proportionaliter; $\alpha \beta v = v R$, $\alpha \delta \kappa = R^2$, $v \beta \delta \kappa = x R$.

Item, Trilinei $\alpha \beta v$ momentum respectu $\tau \alpha$; hoc est, omnia Semiquadrata Sinuum rectorum sectionem illam complentium; hoc est, *omnia* $\frac{1}{2} s^2$, seu omnia $\frac{1}{2} v b$, eo spectantia, arcubus arithmetice proportionalibus ab α usque ad $\alpha \beta$ convenientia; (per § V. prop. 13.) $\frac{1}{4} a R^2 - \frac{1}{4} s R^2 + \frac{1}{4} s v R = \frac{1}{4} e R^2 + \frac{1}{4} s v R$. (Nempe, quod fit ex Semi-Radio $\frac{1}{2} R$, ducto in correspondens Semisegmentum circulare $ABV = \frac{1}{2} a R \mp \frac{1}{2} s x = \frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s R + \frac{1}{2} s v = \frac{1}{2} e R + \frac{1}{2} s v$.) Adeoque (propter magnitudinem $v R$,) distantia Centri gravitatis portionis $\alpha \beta v$ à $\tau \alpha$, $\frac{e R + s v}{4 v}$.

Et speciatim, Trilinei $\alpha \delta \kappa$ (propter $a = \frac{1}{4} P$, & $v = R$,) momentum respectu $\tau \alpha$, $\frac{1}{16} R^{2} P$. Centrique gravitatis à $\tau \alpha$ distantia, $\frac{1}{12} P$.

Similiter (per prop. 10. hujus) sumptis omnibus $\alpha \xi v$, $\alpha \zeta v$, &c. usque ad $\alpha \beta v$; hoc est, omnibus $v R$ eo spectantibus; Hoc est, facto ex R in omnes v, hoc est, in omnes AO &c. sinus versos arcuum arithmetice proportionalium ab A usque ad maximum AV quem jam dicamus V; hoc est, facto ex R in trilineum $AbK = a R - s R = e R$ (per § B:) Habetur momentum Trilinei $\alpha \beta v$ respectu βv, nempe $a R^2 - s R^2 = e R^2$. Factaque per magnitudinem $v R$ divisione; distantia Centri gravitatis à βv, $\frac{a R - s R = e R}{v}$; adeoque ab A$\alpha$, $a - \frac{e R}{v}$. Et, propterea, ejusdem momentum respectu Aα, $- e R^2 + a v R$.

(Eademque de portione $\tau \beta v$; substitutis α pro a, & b pro v, item Tτ pro Aα; & vice versa.)

Et, speciatim, Trilinei $\alpha \delta \kappa$ (propter $s = v = R$) momentum respectu Aα, R^3; respectu $\delta \kappa$, $\frac{1}{4} R^2 P - R^3$: Centrique gravitatis distantia ab Aα, R; atque à $\delta \kappa$, $\frac{1}{4} P - R$.

S. Determinavimus itaque totius Figuræ, partiumque ejusdem expositarum, tum magnitudines, tum momenta respectu expositarum aliquot rectarum; earumque Centrorum gravitatis distantias ab illis rectis. Adeoque, propter exhibitas eorundem à duabus saltem rectis non parallelis distantias; etiam ipsa Centra gravitatis (per prop. 26. cap. præced.) exhibentur.

Atque hinc de Ungulis, Solidisque conversione factis aut Semisolidis, aliisque quæ hinc dependent, calculo rite adhibito, judicium fiet. Quæque de his dicta sunt, ad alia facile poterunt multis modis ampliari.

Atque hæc quidem omnia quæ de $\alpha \delta \kappa$ figura Sinuum rectorum unius quadrantis tradita sunt; eadem ejusdem complemento $\alpha \kappa \Gamma$ facile accommodantur. Quippe si ex $\alpha \delta \kappa \Gamma$ parallelogrammo, auferatur trilineum $\alpha \kappa \delta$; restat trilineum $\alpha \kappa \Gamma$: & similiter, si ex parallelogrammi illius Momentis, Ungulis, & Ungularum Momentis; auferantur respectiva Trilinei $\alpha \delta \kappa$ Momenta, Ungulæ, & Ungularum Momenta; restabunt respectiva Trilinei $\alpha \kappa \Gamma$ Momenta, Ungulæ, & Ungularum Momenta: unde & Centrorum gravitatis Distantiæ ab expositis rectis colliguntur. Quodque de tota $\alpha \kappa \Gamma$ dictum est; idem de partibus, ut $\alpha o \gamma$, mutatis mutandis, intelligendum est.

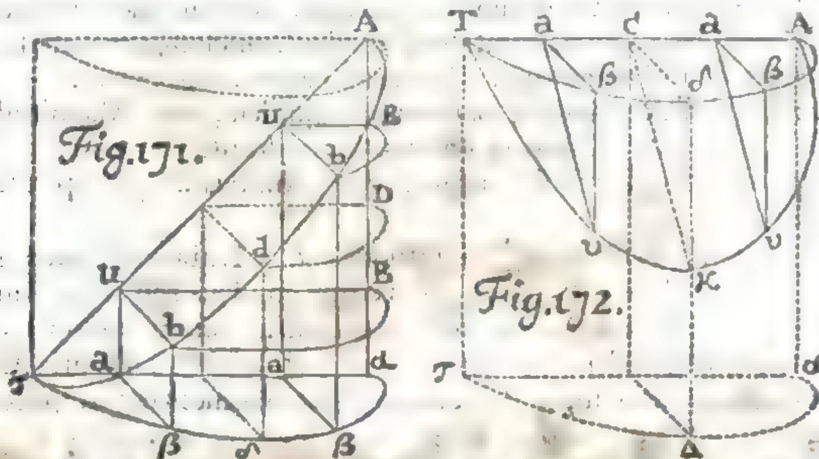
S. Si autem, in his Sinuum Versorum, Rectorumque, Figuris: Manente, ut prius, $A\alpha = 2 R$, & $\delta \kappa = R$, reliquisque hisce parallelis in eadem qua nunc ratione; Recta $\tau \alpha$, Protracta sit, vel Contracta, (puta, Major, vel Minor, quam $\frac{1}{2} P$;) reliquæque huic parallelæ, similiter vel Protractæ vel Contractæ; (quas Figuras Sinuum Versorum, Rectorumve, *Protractas*, dicamus; vel *Contractas*:) Eadem quæ jam tradita sunt, etiam his conveniunt; cum hoc solo discrimine; Quod quoties rectæ bB in calculum veniunt; pro a, substituenda erit alia quantitas quæ ad hanc sit in ea ratione quæ est $\tau \alpha$, ad $\frac{1}{2} P$: Et similiter, mutatis mutandis, pro earundem bB quadratis, cubis, reliquisque potestatibus; nempe, pro a^2, a^3, &c. quantitates quæ sint ad has in Duplicata, Triplicata, &c. ratione, illius quam habet $\tau \alpha$ ad $\frac{1}{2} P$.

Quæ-

Quæque de figura Sinuum rectorum unius quadrantis, (ut α δ κ fig. 170.) dicta sunt: eadem figuræ Sinuum Chordarum seu Subtensarum in semicirculo (ut A δ κ fig. 183.) facile accommodantur: Sunt enim Chordæ Arcuum in semicirculo, ubique Duplæ Sinuum Rectorum, Semiarcuum in Quadrante correspondentium. Adeoque figura Chordarum in Semicirculo A δ κ fig. 183. Ipsi α δ κ fig. 170. Figuræ Sinuum Rectorum Quadrantis, omnino similis; & partes partibus respective sumptis. Quod & de solidis inde oriundis pariter intelligendum est.) Qua de re videantur plura, ad prop. 22. § G, H, I, ubi hac operatione opus erit. T.

SCHOLIUM.

HÆc autem sive Sinuum versorum sive Arcuum figura A τ α, alia non est quam, Dimidia Semicylindri (plano oblique secti) Superficies curva in planum expansa: Seu Semiquadrantalis Ungulæ Semicylindricæ Superficies curva in planum expansa. Eaque qua terminatur sinuosa curva A d τ, est Semiellipseos linea curva, in planitiem item expansa. Fig. 170, 171.



Intelligatur enim super Semicirculo α τ β fig. 171. (qui sit ipsa A α B fig. 169. æqualis; adeoq; illius curva τ β α, fig. 171. curvæ hujus A B α, fig. 169.) Semicylindrus rectus, altitudinem A α, ipsi A α fig. 169, 170. æqualem habens. Quem secet planum ellipseos τ b A, (quod ipsi per axem Cylindri plano τ α A rectum sit,) abscindens Semiquadrantalem Ungulam τ b A α; cujus superficiem curvam compleant (juxta def. 1. cap. 4.) parallelæ rectæ β b &c. singulis curvæ τ β α punctis insistentes: (ut & paralleli arcus b B, &c. singulis rectæ A α punctis occurrentes.)

Sumpto jam, in Trilinei base τ β α, fig. 170. puncto quovis β, cui respondeat punctum β in curva τ β α fig. 171. quæ huic in curva Ungulæ superficie insistit recta, sit β b. Dico rectam hanc β b in curva Ungulæ superficie, æqualem esse correspondenti rectæ β b in Trilinei plano. Est enim (per constructionem) arcus τ β, æqualis τ β rectæ, hoc est arcui α B: Sed & huic similis (propter æquales circulorum Diametros:) . Adeoque hujus sinui verso α V, fig. 169, 170. æqualis est illius sinus versus τ α; hoc est, (propter angulum semiquadrantalem,) perpendicularis a v; & (propter parallelas) ipsa β b in Ungulæ superficie curva. Sed & eidem α V fig. 170. æqualis est (ipsi parallela) β b in Trilineo. Æquales itaque sunt, quæ in Ungulæ superficie curva, & quæ in Trilineo plano, rectæ β b respective sumptæ. (Similiter ostendetur, arcus b B, d D, &c. fig. 171. æquales esse rectis b B, d D, &c. fig. 170. hoc est, arcubus A B, A D, &c. fig. 169.) Cumque hoc ubique obtineat: Expansa in planum superficies illa curva, Trilineo super-imposita congruet: adeoque tum tota toti, tum partes partibus respective sumptis æquales. (Puta, superficies curvæ A b β α, A b B, ipsis A b β α, A b B, planis: & sic ubique.) Ipsaque quæ, in superficie Cylindrica, erat semiellipseos curva τ b A; eadem, in superficie expansa, est sinuosa curva τ b A terminans Trilineum A τ α, quam *Figuram Sinuum Versorum, Arcuumve*, diximus.

Eodem modo; si intelligatur idem τ A semicylindrus, plano A κ T secari, Semiquadrantalem Ungulam A T κ abscindente, (cujus itaque altitudo δ κ sit basis semidiametro æqualis:) Ostendetur, superficiem Ungulæ curvam T δ A κ, in planum Fig. 170, 172.

 expan-

Fig. 170. 172. expansam, congruere Bilineo τδακ fig. 170. quam *Figuram Sinuum Rectorum* diximus. Quippe utrobique ostendetur βυ, ipsi BV sinui recto correspondentis arcus AB, hoc est τβ, æqualis: & sic ubique. Adeoque & τκα semiellipsis curvam in superficie Cylindri, expansa in planitiem superficie curva, curvæ τκα figuram Sinuum rectorum terminanti congruere; & partes partibus respective sumptis. Quæ pridem monuimus ad prop. 13.

PROP. XVIII.

PARS PRIMA.

A. Fig. 170. Si super Aτα Figura Sinuum versorum, Arcuumve, Solidum insistat altitudinem habens in singulis bβ Sinibus versis, æqualem respectivis βυ Sinibus rectis eorundem arcuum: Solidum sic constructum, Triplum erit Semiquadrantalis Ungulæ Semicirculi, aciem habentis Semicirculi Diametrum. Et partes partium respective.

Unde; Solidi sic constructi, partiumque ejusdem, tum Magnitudines, tum Momenta, & Centra gravitatis, innotescent.

Nempe, (retentis Symbolis, ut in propositionibus aliquot præcedentibus;)

A. C. Solidi Aτα, sic constructi; Magnitudo, $2R^3$: Distantia Centri gravitatis à plano Aτα, $\frac{1}{16}P$; momentum correspondens respectu τα in plano Aτα erecto, $\frac{1}{8}R^3P$: Distantia Centri gravitatis à plano τακ, $\frac{2}{3}R$;
E.
H. momentum respectu τα in plano τακ erecto, $\frac{4}{3}R^4$: Distantia Centri gravitatis à plano super Aα erecto, $\frac{3}{16}P$; momentum respectu Aα, $\frac{3}{8}R^3P$.

A. C. Portionis, ejusdem Solidi, Abβα; Magnitudo, $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$: Momentum respectu τα in erecto plano Aτα, $\frac{1}{4}cR^3+\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{6}s^3R$; distantia
E. Centri gravitatis ab illo plano, $\frac{3cR^2+3svR+2s^3}{12vR+6s^2}$: Momentum respectu τα in erecto plano τακ, $\frac{2}{3}vR^3+\frac{2}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR$; distantia
H. Centri gravitatis à plano τακ, $\frac{4vR^2+4s^2R-s^2v}{6vR+3s^2}$; Momentum respectu Aα, $-\frac{5}{4}cR^3+avR^2-\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{2}as^2R$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{-5cR^2+4avR-svR+2as^2}{4vR+2s^2}$.

A. Portionis, ejusdem Solidi, bβτ; Magnitudo, $2R^3-vR^2-\frac{1}{2}s^2R$
I. $=bR^2-\frac{1}{2}s^2R=\frac{1}{2}b^2R$: Momentum respectu plani Aτα erecti, $\frac{1}{8}R^3P-\frac{1}{4}cR^3-\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{6}s^3R$; respectu plani τακ erecti, $\frac{4}{3}R^4-\frac{2}{3}vR^3-\frac{2}{3}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR$; respectu Aα, $\frac{3}{8}R^3P+\frac{5}{4}cR^3-avR^2+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$; distantia Centri gravitatis à plano Aτα, $\frac{3R^2P-6cR^2-6svR-4s^3}{48R^2-24vR-12s^2}$; à plano τακ, $\frac{8R^3-4vR^2-4s^2R+s^2v}{12R^2-6vR-3s^2}$; ab Aα, $\frac{3R^2P+10cR^2-8avR+2svR-4as^2}{16R^2-8vR-4s^2}$.

A. I. Portionis AbK; Magnitudo, $vR^2-\frac{1}{2}s^2R=\frac{1}{2}v^2R$: Momentum respectu plani Aτα erecti, $\frac{1}{4}cR^3+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{6}s^3R$; respectu plani τακ erecti, $\frac{2}{3}vR^3-\frac{2}{3}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR=\frac{2}{3}v^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR$; respectu TA, $\frac{2}{3}vR^3-\frac{1}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR=\frac{1}{6}v^3R$; respectu Aα, $-\frac{5}{4}cR^3+avR^2+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$; distantia

distantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{3eR^2 + 3svR^2 - 2s^3R}{12vR^2 - 6s^2R = 6v^2R}$; à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{2}{3}R + \frac{1}{3}b$; à TA, $\frac{2}{3}R - \frac{1}{3}b = \frac{1}{3}v$; ab $A\alpha$, $\frac{-3eR^2 + 4avR + svR - 2as^2}{4vR - 2s^2 = 2v^2}$.

Portionis $AK\beta\alpha$; Magnitudo, $2vR^2$; distantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$; momentum respectu ejusdem $A\tau\alpha$ plani (erecti) $\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2$; distantia Centri gravitatis à TA, vel $\tau\alpha$, (hoc est, à planis super rectas illas erectis,) R; momentum respectu TA, vel $\tau\alpha$, $2vR^3$; distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $a - \frac{eR}{v}$; momentum respectu $A\alpha$, $2avR^2 - 2eR^3$. I.

Portionis AKbB; Magnitudo, v^2R; distantia Centri gravitatis à TA vel bB, $\frac{1}{3}v$; à $\tau\alpha$, $2R - \frac{1}{3}v$; ab $A\alpha$, $a - \frac{eR}{v}$; à plano $A\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$; momentum respectu TA, vel bB, $\frac{1}{3}v^3R$; respectu $\tau\alpha$, $2v^2R^2 - \frac{1}{3}v^3R$; respectu $A\alpha$, $av^2R - evR^2$; respectu plani (erecti) $A\tau\alpha$, $\frac{1}{4}evR^2 + \frac{1}{4}sv^2R$. I.

Portionis $b\beta\alpha B$; Magnitudo, $vbR = s^2R$: Distantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$; momentum respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $A\tau\alpha$, $\frac{1}{4}ebR^2 + \frac{1}{4}s^3R$: Distantia Centri gravitatis ab erecto plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{1}{2}b$; momentum respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\tau\alpha\kappa$, $s^2R^2 - \frac{1}{2}s^2vR = \frac{1}{2}s^2bR$: Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{-eR+av}{v}$; momentum respectu $A\alpha$, $-2eR^3 + evR + as^2R$. B. D. F. H.

Segmenti Solidi AbB; Magnitudo, $\frac{1}{2}v^2R$: Momentum respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $A\tau\alpha$, $-\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}avR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; distantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{-3eR^2 + 3avR - s^3}{6v^2}$: Momentum respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$; distantia Centri gravitatis à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{2}{3}R + \frac{1}{3}b$; & à bB, $\frac{2}{3}R - \frac{1}{3}b = \frac{1}{3}v$; à TA, $\frac{1}{3}v$; momentum respectu bB, $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR = \frac{1}{6}v^3R$; respectu TA, $\frac{1}{3}v^3R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{3}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$; distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3eR^2 + 3svR - 2as^2}{4vR - 2s^2 = 2v^2}$. B. D. F. G.

PARS SECUNDA.

Porro; Si super $A\tau\alpha$, (Figura Sinuum versorum, Arcuumve,) Solidum insistat; altitudinem habens, in singulis bB rectis (seu arcubus in rectas expansis,) æqualem respectivis BV in Semicirculo, (eorum respective arcuum sinibus rectis:) Solidi sic constructi, partiumque ejusdem, tum magnitudines, tum momenta, & Centra gravitatis innotescunt. K. Fig. 169, 170.

Nempe; (retentis Symbolis, ut in propositionibus præcedentibus;)

Solidi totius $A\tau\alpha$ sic constructi; Magnitudo, $\frac{1}{16}RP^2$; Momentum respectu TA, $\frac{1}{16}R^2P^2 + \frac{4}{9}R^4$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}R^2P^2 - \frac{4}{9}R^4$; distantia Centri gravitatis à TA, $R + \frac{64R^3}{9P^2}$; à $\tau\alpha$, $R - \frac{64R^3}{9P^2}$: Momentum respectu K. M. N.

Fig. 169, 170. respectu Aα, $\frac{1}{32} R P^3 - \frac{1}{16} R^3 P$; distantia Centri gravitatis ab Aα,
O. $\frac{1}{2} P - \frac{R^2}{P}$: Momentum respectu plani A$\tau\alpha$ (erecti) $\frac{1}{6} R^3 P$; Distantia Centri gravitatis ab illo plano, $\frac{8 R^2}{3 P}$.

K. Portionis, ejusdem Solidi, A b $\beta\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{4} a R P - \frac{1}{4} a^2 R + \frac{1}{4} s^2 R$
M. $= \frac{1}{4} a R P - \frac{1}{4} e f R$: Momentum respectu TA, $\frac{1}{4} a R^2 P - \frac{1}{4} a^2 R^2 + \frac{1}{36} s^2 R^2 + \frac{2}{9} v R^3 + \frac{1}{9} s^2 v R$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4} a R^2 P - \frac{1}{4} a^2 R^2 + \frac{17}{36} s^2 R^2 - \frac{2}{9} v R^3 - \frac{1}{9} s^2 v R$; distantia Centri gravitatis à TA, $R + \frac{4 v^2 R + 4 s^2 v}{9 a P - 9 e f}$;
N. à $\tau\alpha$, $R - \frac{4 v^2 R + 4 s^2 v}{9 a P - 9 e f}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{1}{8} a^2 R P - \frac{1}{8} e R^3 - \frac{1}{8} s v R^2 - \frac{1}{6} a^3 R + \frac{1}{4} a s^2 R$; distantia Centri gravitatis ab
O. Aα, $\frac{3 a^2 P - 3 e R^2 - 3 s v R - 4 a^3 + 6 a s^2}{6 a P - 6 e f}$: Momentum respectu plani A$\tau\alpha$, $\frac{1}{3} f R^3 + \frac{1}{18} s^3 R$; distantia Centri gravitatis ab A$\tau\alpha$ plano, $\frac{12 f R^2 + 2 s^3}{9 a P - 9 e f}$.

M. Portionis AK$\beta\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{4} a R P$: Distantia Centri gravitatis à
N. TA, vel $\tau\alpha$, R; momentum respectu TA, vel $\tau\alpha$, $\frac{1}{4} a R^2 P$: distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2} a$; momentum respectu Aα, $\frac{1}{8} a^2 R P$: Di-
O. stantia Centri gravitatis à plano A$\tau\alpha$, $\frac{8 R^2}{3 P}$; momentum respectu istius plani A$\tau\alpha$ (erecti) $\frac{2}{3} a R^3$.

L. Portionis, b$\beta\alpha$B; Magnitudo, $\frac{1}{4} a R P - \frac{1}{2} a^2 R + \frac{1}{2} a s R - \frac{1}{2} a s v = \frac{1}{4} a R P$
P. $- \frac{1}{2} e a R - \frac{1}{2} a s v$: Momentum respectu TA, $\frac{1}{4} a R^2 P - \frac{1}{2} e a R^2 - \frac{1}{2} a s v R + \frac{1}{3} a s^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4} a R^2 P - \frac{1}{2} e a R^2 - \frac{1}{2} a s v R - \frac{1}{3} a s^3$; respectu A$\alpha$, $\frac{1}{8} a^2 R P - \frac{1}{4} a^3 R + \frac{1}{4} a^2 s R - \frac{1}{4} a^2 s v$; respectu plani A$\tau\alpha$, $\frac{2}{3} a R^3 - \frac{1}{3} a v R^2 + \frac{1}{6} a s^2 R - \frac{1}{6} a s^2 v$; distantia Centri gravitatis, à TA, $R + \frac{4 s^3}{3 R P - 6 e R - 6 s v}$; à $\tau\alpha$, $R - \frac{4 s^3}{3 R P - 6 e R - 6 s v}$; ab A$\alpha$, $\frac{1}{2} a$; à plano A$\tau\alpha$, $\frac{8 R^3 - 4 v R^2 + 2 s^2 R - 2 s^2 v}{3 R P - 6 e R - 6 s v}$.

L. M. Portionis, AKbB; Magnitudo $\frac{1}{2} e a R + \frac{1}{2} a s v$: Momentum respectu TA, $\frac{1}{2} e a R^2 + \frac{1}{2} a s v R - \frac{1}{3} a s^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2} e a R^2 + \frac{1}{2} a s v R + \frac{1}{3} a s^3$; distantia Centri gravitatis à TA, $R - \frac{2 s^3}{3 e R + 3 s v}$; à $\tau\alpha$, $R + \frac{2 s^3}{3 e R + 3 s v}$:
N. Momentum respectu Aα, $\frac{1}{4} a^3 R - \frac{1}{4} a^2 s R + \frac{1}{4} a^2 s v$; distantia Centri
O. gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2} a$: Momentum respectu plani (erecti) A$\tau\alpha$, $\frac{1}{6} a v^2 R + \frac{1}{6} a s^2 v$; distantia Centri gravitatis ab illo plano, $\frac{v^2 R + s^2 v}{3 e R + 3 s v}$.

L. Portionis, AbB; Magnitudo, $\frac{1}{4} a^2 R - \frac{1}{2} a s R + \frac{1}{4} s^2 R + \frac{1}{2} a s v = \frac{1}{4} e^2 R$
M. $+ \frac{1}{2} a s v$: Momentum respectu TA, $\frac{1}{4} a^2 R^2 - \frac{1}{2} a s R^2 + \frac{5}{36} s^2 R^2 + \frac{2}{9} v R^3 + \frac{1}{2} a s v R + \frac{1}{9} s^2 v R - \frac{1}{3} a s^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4} a^2 R^2 - \frac{1}{2} a s R^2 + \frac{13}{36} s^2 R^2 - \frac{2}{9} v R^3 + \frac{1}{2} a s v R - \frac{1}{9} s^2 v R + \frac{1}{3} a s^3$; distantia Centri gravitatis à TA, $R + \frac{4 v^2 R^2 + 4 s^2 v R - 12 a s^3}{9 e^2 R + 18 a s v}$; à $\tau\alpha$, $R - \frac{4 v^2 R^2 + 4 s^2 v R - 12 a s^3}{9 e^2 R + 18 a s v}$:
N. Momentum respectu Aα, $- \frac{1}{8} e R^3 - \frac{1}{8} s v R^2 + \frac{1}{12} a^3 R - \frac{1}{4} a^2 s R + \frac{1}{4} a s^2 R + \frac{1}{4} a^2 s v$; distantia Centri gravitatis ab Aα,
O. $\frac{-3 e R^3 - 3 s v R^2 + 2 a^3 R - 6 a^2 s R + 6 a s^2 R + 6 a^2 s v}{6 e^2 R + 12 a s v}$: Momentum respectu

plani

plani $A\tau\alpha$, $-\frac{1}{3}eR^3+\frac{1}{3}avR^2-\frac{1}{6}as^2R+\frac{1}{18}s^3R+\frac{1}{6}as^2v$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\tau\alpha$ plano, $\frac{-12eR^3+12avR^2-6as^2R+2s^3R+6as^2v}{9e^2R+18asv}$.

Portionis AbK; Magnitudo, $\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{4}s^2R=\frac{1}{4}efR$: Momentum reſpectu TA, $\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{5}{36}s^2R^2-\frac{2}{9}vR^3-\frac{1}{9}s^2vR$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2R^2-\frac{13}{36}s^2R^2+\frac{2}{9}vR^3+\frac{1}{9}s^2vR$; diſtantia Centri gravitatis à TA, $R-\frac{4v^2R+4s^2v}{9ef}$; à $\tau\alpha$, $R+\frac{4v^2R+4s^2v}{9ef}$: Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{6}a^3R-\frac{1}{4}as^2R$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3eR^2+3svR+4a^3-6as^2}{6a^2-6s^2=6ef}$: Momentum reſpectu plani $A\tau\alpha$, $\frac{1}{3}eR^3-\frac{1}{18}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\tau\alpha$ plano, $\frac{12eR^2-2s^3}{9ef}$. K. M. N. O.

Portionis $b\beta\tau$; Magnitudo $\frac{1}{4}\alpha^2R-\frac{1}{4}s^2R$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha^2R^2-\frac{5}{36}s^2R^2-\frac{2}{9}bR^3-\frac{1}{9}s^2bR$; reſpectu TA, $\frac{1}{4}\alpha^2R^2-\frac{13}{36}s^2R^2+\frac{2}{9}bR^3+\frac{1}{9}s^2bR$; reſpectu $T\tau$, $\frac{1}{8}\alpha R^3-\frac{1}{8}sR^3+\frac{1}{8}sbR^2+\frac{1}{6}\alpha^3R-\frac{1}{4}\alpha s^2R$; reſpectu plani $A\tau\alpha$, $\frac{1}{3}\alpha R^3-\frac{1}{3}sR^3-\frac{1}{18}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R-\frac{4b^2R+4s^2b}{9\alpha^2-9s^2}$; à TA, $R+\frac{4b^2R+4s^2b}{9\alpha^2-9s^2}$; ab $A\alpha$, $\frac{3\alpha R^2-3sR^2+3sbR+4\alpha^3-6\alpha s^2}{6\alpha^2-6s^2}$; à plano $A\tau\alpha$, $\frac{12\alpha R^2-12sR^2-2s^3}{9\alpha^2-9s^2}$. K. Q.

Adeoque exhibentur, in utroque ſolido; tum eo quod fit ex $A\tau\alpha$ figuræ Sinuum verſorum rectis $b\beta$, in $\beta\upsilon$ Figuræ Sinuum rectorum reſpectivas rectas; tum eo quod fit ex $A\tau\alpha$ Figuræ Arcuum rectis bB, in BV, reſpectivas Semicirculi rectas; eorumque partibus expoſitis; Tum Magnitudines; tum Momenta reſpectu planorum aliquot expoſitorum; & Centrorum gravitatis ab illis planis diſtantiæ. Et propterea, propter exhibitas Centrorum gravitatis diſtantias à tribus ſaltem planis non parallelis; exhibentur (per prop. 26. cap. præced.) ipſa Centra gravitatis. R.

Quæque de expoſitis dicta ſunt; ad alia facile poterunt accommodari. Et quidem quæ de his ſolidis traduntur; ad Protracta, & Contracta, facile transferentur.

Quæque de ſolidis Figuram Sinuum Rectorum unius Quadrantis reſpicientibus, traduntur; eadem ad Solida Figuram Chordarum Semicirculi ſimiliter reſpicientia, transferentur.

SUper $\alpha\tau\kappa$ Figura ſinuum rectorum, erigi intelligatur Cylindri (Priſmatiſve) recti portio; ea ratione, ut ſuper ſingulis $\beta\upsilon$, figuram complentibus (arcuum arithmetice proportionalium finibus rectis,) altitudinem habeat reſpectivis βb (eorundem arcuum, eorumve complementorum ad ſemicirculum ſinibus verſis) æqualem. Aut etiam (quod eodem recidit) ſuper $A\tau\alpha$ figura Sinuum verſorum (Arcuumve) inſiſtens ad angulos rectos, in $\tau\alpha$ recta, Figura Sinuum rectorum $\alpha\tau\kappa$, promoveri intelligatur ad TA, ſolidum deſcribens columnare (Cylindraceum dicas, Priſmaticumve, perinde eſt,) Parallelogrammo $TA\alpha\tau$ incumbens; quod ſinuoſa ſuperficie ſinuoſæ curvæ $Ad\tau$ ad angulos rectos inſiſtente, ſecari porro intelligatur, Solidum $Ad\tau\alpha$ abſcindente. A. Fig. 169, 170.

Manifeſtum eſt, ex conſtructione, Plana Solidum hoc complentia, rectis $b\beta$ inſiſtentia, Parallelogramma eſſe rectangula; ipſis $b\beta\upsilon$ rectangulis ubique æqualia;

Fig. 169. lia ; hoc eſt, rectangulis $b s$; factis nempe ex arcuum $\tau\beta$ (hoc eſt α B fig. 169.)
170. ſeu complementorum arcuum $\alpha\beta$ (ſeu A B) ſinibus verſis ; in $\beta\upsilon$ (hoc eſt B V fig. 169.) eorundem arcuum ſinibus rectis. Adeoque Solidum hoc ſive totum, ſive ipſius portio ut A b $\beta\alpha$, eſt aggregatum omnium $b s$, ſeu $s b$, figuram ſive totam, ſive ipſius aſſumptam portionem, ſpectantium ; diviſa $\alpha\tau$ in partes æquales ; hoc eſt, ſumptis a arcubus arithmetice proportionalibus.

Manifeſtum item eſt, Plana rectis b B inſiſtentia, ſolidum hoc complentia, æqualia eſſe reſpectivis $\alpha\beta\upsilon$ Figuræ ſinuum rectorum portionibus ; diviſa A α in partes æquales, hoc eſt, ſumptis υ arithmetice proportionalibus. Adeoque (propter $\alpha\beta\upsilon = \upsilon R$, per § Q. prop. 17.) Solidum hoc, ſive totum, ſive ipſius portio ut A b B, eſt aggregatum omnium υR, eo ſpectantium, ſumptis υ arithmetice proportionalibus.

Eſtque ſolidum hoc, Semiquadrantalis Ungulæ à Semicirculi A D α aciem habentis A α, (ſeu Momenti ſemicirculi A D α reſpectu A α rectæ,) Triplum : Et partes partium reſpective ſumptarum : Puta Solidi portio A b $\beta\alpha$, tripla correſpondentis Ungulæ B α A (aciem habentis A α,) & Portio b $\beta\tau$, tripla Ungulæ correſpondentis α B α, (aciem habentis A α ;) & ſic ubique. Sunt enim (per prop. 17.) ſingula α B triangula Semicirculum complentia, ad b β Parallelogramma, complentia figuram Sinuum verſorum, ut 1 ad 2 : Item Trianguli α B cujuſque Centrum gravitatis ab α diſtat $\frac{2}{3}\alpha$B, (per prop. 6. hujus ;) adeoque ab A α, $\frac{2}{3}$ B V ; cujus itaque ad B V $= \beta\upsilon$ ratio, eſt ut 2 ad 3. Eſt ergo (propter $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$,) Trianguli cujuſque momentum reſpectu A α, ſeu ſemiquadrantalis Ungula Pyramiſve (æqualis utique facto ex magnitudine, in illam diſtantiam ;) ad reſpectivum Parallelepipedum (factum ex b β in $\beta\upsilon$;) ut 1 ad 3 : Et ſic ubique. Hoc eſt, B α A Ungula, quam illæ complent Pyramides ; ad ſolidum b $\beta\alpha$ A, ex Parallelepipedis conflatum ; ut 1 ad 3. Totumque A d $\tau\alpha$ Solidum, Triplum iſtius Ungulæ Semicirculi (aciem habentis A α :) Et partes partium reſpective ; Nempe A b $\beta\alpha$ Solidum, triplum ungulæ B α A aciem habentis A α.

Eſt autem illa Semicirculi Ungula (ſeu momentum reſpectu A α,) $\frac{2}{3} R^3$; & Sectoris B α A, $\frac{1}{3} \upsilon R^2 + \frac{1}{6} s^2 R$; & Segmenti α B α, $\frac{1}{6} b^2 R$; (per § Q, S, prop. 15.) Ergo totius A $\tau\alpha$ ſolidi, magnitudo $2 R^3$; & portionis A b $\beta\alpha$, $\upsilon R^2 + \frac{1}{2} s^2 R$; & portionis b $\beta\tau$, $\frac{1}{2} b^2 R = 2 R^3 - \upsilon R^2 - \frac{1}{2} s^2 R = b R^2 - \frac{1}{2} s^2 R$.

Et ſimiliter oſtendetur portionis A b K (extra trilineum) magnitudo ; ſeu *Omn.* $s \upsilon$; (ſumptis a arith. propor.) $\frac{1}{2} \upsilon^2 R = \upsilon R^2 - \frac{1}{2} s^2 R$.

B. Si vero ex hac portione Solidi A b $\beta\alpha$; auferatur pars b $\beta\alpha$ B (quæ nempe huic parallelogrammo incumbit ;) hoc eſt, factum ex plano A $\beta\upsilon$ ($= \upsilon R$, per § Q. prop. 17,) in β b $= b$; hoc eſt $b \upsilon R = s^2 R$; (propter s mediam proportionalem inter υ & b ; hoc eſt, B V inter A V & V α :) Relinquitur Solidi ſegmentum A b B, $= \upsilon R^2 + \frac{1}{2} s^2 R - b \upsilon R = \upsilon R^2 + \frac{1}{2} s^2 R - s^2 R = \upsilon R^2 - \frac{1}{2} s^2 R = \frac{1}{2} \upsilon^2 R$. Quod eſt aggregatum Omnium υR eo ſpectantium, ſumptis υ ſinibus verſis arithmetice proportionalibus : (Singulis enim b V rectis reſpective inſiſtit planum $\alpha\beta\upsilon = \upsilon R$.) Seu, quod tantundem valet, Omnium $s \upsilon$, ſumptis a arithmetice proportionalibus : (Ut ad § I. videbitur.) Hoc eſt factum ex omnibus $\beta\upsilon$ in reſpectivas b K. Adeoque Sinuoſa ſuperficies, curvæ A d τ inſiſtens, biſecat K b B ſolidum, facitque ſolidum A b B & ſolidum A b K, invicem æqualia ; (quod merito obſervandum ;) utrumvis utique $\frac{1}{2} \upsilon^2 R$: Eſt enim (propter $\alpha\beta\upsilon = \upsilon R$, & A V $= \upsilon$,) Solidum K b B A $= \upsilon^2 R$.

Idemque per ſe, (ſine ope portionis A b $\beta\alpha$,) ſic colligitur. Cum ſingula plana (æqualibus intervallis ſumpta, Solidum complentia,) quæ rectis b B inſiſtunt, ſint reſpectivis $\alpha\beta\upsilon$ æqualia ; (quod ex conſtructione manifeſtum eſt ;) ſintque plana illa $\alpha\beta\upsilon = \upsilon R$ reſpective, (per § P, Q, prop. 17.) Solidi ſegmentum A b B, aut etiam ſolidum integrum A $\tau\alpha$, eſt aggregatum Omnium υR, eo ſpectantium ; ſumptis υ arithmetice proportionalibus, uſque ad eorum maximum V. Sunt autem *Omnes* υ, (arithmetice proportionales, uſque ad maximum V,) $= \frac{1}{2} V^2$, (per prop. 1. hujus.) Ergo *Omn.* $\upsilon R := \frac{1}{2} V^2 R$, ſeu (reſtituto minuſculæ υ valore) $\frac{1}{2} \upsilon^2 R$; ut prius. (Adeoque ſolidum integrum, (propter $\upsilon = 2 R$,) $= 2 R^3$, ut prius.) Cui ſi addatur portio b $\beta\alpha$ B, habebitur portio A b $\beta\alpha$, eadem quam prius exhibuimus. Cumque Solidum A b B ſit (ut dictum eſt) $\frac{1}{2} \upsilon^2 R$; ſitque ſolidum AKbB, $\upsilon^2 R$ (propter baſin $\alpha\beta\upsilon = \upsilon R$, & altitudinem A V $= \upsilon$,) erit etiam pars reſidua A b K, $\frac{1}{2} \upsilon^2 R$, (ipſi A b B æqualis ;) adeoque Superficies curva, curvæ A b inſiſtens, biſecat ipſum A K b B ſolidum.

Porro ;

Porro; Si intelligatur Solidum integrum ita positum, ut $\tau\alpha\kappa$ planum sit in situ horizontali, adeoque A$\tau\alpha$ (super illo erectum) in plano ad Horizontem recto: Momentum solidi totius, respectu $\tau\alpha$ rectæ; erit Duplum momenti Ungulæ semicirculi aciem habentis Aα, respectu ipsius Aα. (Et similiter in partibus respective sumptis.) Sunt utique singula b$\beta\upsilon$ parallelepipeda Solidum hoc complentia (ut ostensum est § A,) ad respectivas Pyramides αB Ungulam illam complentes, ut 3 ad 1. Eorumque Parallelepipedorum à perpendiculari plano $\tau\alpha$A distantiæ Centri gravitatis, hoc est $\frac{1}{2}\beta\upsilon$ respective, (per prop. 2. hujus;) ad Pyramidum illarum distantias Centri gravitatis à perpendiculari plano Aα, $\frac{3}{4}$BV, (distant utique ab α, $\frac{3}{4}\alpha$B, per prop. 6 hujus; adeoque, $\frac{3}{4}$BV, ab Aα;) seu $\frac{3}{4}\beta\upsilon$; ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{3}{4}$, seu 2 ad 3. Ergo, (propter $\frac{3}{1}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{1}$,) momentum cujusque Parallelepipedi, (adeoque & simul omnium,) ad respectivæ Pyramidis (adeoque & simul omnium) momentum; est ut 2 ad 1. Quod quidem momentum, est aggregatum Omnium $\frac{1}{2}s^2b$, sive totum Solidum, sive ipsius portionem, spectantium. (Sunt utique magnitudines, aggregatum Omnium sb; distantiæque Centrorum gravitatis respective, $\frac{1}{2}s$.) Est autem Ungulæ Semicirculi ADα aciem habentis Aα, momentum respectu Aα, $\frac{1}{16}R^3\mathcal{P}$; Ungulæque Sectoris B$\alpha$A, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$; (per § P, R, prop. 16.) Ergo Totius Solidi A$\tau\alpha$ (situ illo positi) momentum respectu $\alpha\tau$, est $\frac{1}{8}R^3\mathcal{P}$; & portionis Ab$\beta\alpha$, momentum, $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{6}s^3R$. Atque hæc momenta, per respectivas magnitudines divisa, (hoc est, per $2R^3$, & $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$, ut ad § A.) exhibent Centrorum gravitatis ab A$\tau\alpha$ plano distantias; nempe totius Solidi, $\frac{1}{16}\mathcal{P}$; & portionis Solidi Ab$\beta\alpha$, $\dfrac{3eR^2+3svR+2s^3}{12vR+6s^2}$. C. Fig. 169, 170.

Si vero ex eo Solidi Ab$\beta\alpha$ momento; auferatur momentum ipsius b$\beta\alpha$B: restat momentum Solidi AbB. D.

Est autem Solidi b$\beta\alpha$B magnitudo (per § B.) $s^2R=vbR$; ejusque Centri gravitatis ab A$\tau\alpha$ plano distantia, (quanta plani A$\beta\upsilon$ à $\tau\alpha$, per § C. prop. 5.) est $\dfrac{eR+sv}{4v}$, per § Q. prop. 17. adeoque momentum (in eo situ) respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}ebR^2+\frac{1}{4}svbR=\frac{1}{4}ebR^2+\frac{1}{4}s^3R=\frac{1}{4}eR^3-\frac{1}{4}evR^2+\frac{1}{4}s^3R=\frac{1}{4}eR^3-\frac{1}{4}avR^2+\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{4}s^3R$: Hoc itaque, ex totius Ab$\beta\alpha$ momento, $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{6}s^3R$, (§ C.) subductum; relinquit $-\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}avR^2-\frac{1}{12}s^3R$, momentum Solidi AbB (super plano $\alpha\beta\upsilon$ erecti) respectu $\tau\alpha$. (Quæ est summa omnium vR solidum complentium in suas respective distantias $\dfrac{eR+sv}{4v}$ ductarum; seu, omnium $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR$; sumptis v arithmetice proportionalibus.) Illudque momentum, per magnitudinem divisum (§ B. traditam) $vR^2-\frac{1}{2}s^2R=\frac{1}{2}v^2R$; exhibet ejusdem AbB, Centri gravitatis à plano A$\tau\alpha$ distantiam $\dfrac{-3eR^2+3avR-s^3}{12vR-6s^2=6v^2}$.

Idem etiam per se (absque ope portionis Ab$\beta\alpha$) sic colligitur. Cum singula plana rectis bB insistentia, Solidum complentia, æqualia sint ipsis respective $\alpha\beta\upsilon=vR$, (ut dictum est;) sintque eorum Centra gravitatis in eadem ab A$\tau\alpha$ plano distantia, qua ipsorum $\alpha\beta\upsilon$ à $\tau\alpha$; hoc est $\dfrac{eR+sv}{4v}$ respective: Erunt singulorum momenta, respectu ipsius A$\tau\alpha$ perpendicularis plani, $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR$, seu $\frac{1}{4}aR^2-\frac{1}{4}sR^2+\frac{1}{4}svR$. Adeoque Solidi AbB momentum, erit Omnium Summa; hoc est, *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2-\frac{1}{4}sR^2+\frac{1}{4}svR$: sumptis v arithmetice proportionalibus.

Sunt autem, *Omnes* a, (sumptis v arithmetice proportionalibus,) ipsum AbB planum; hoc est, $-eR+av$, (per § B. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2=-\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}avR^2$.

Et similiter, *Omnes* s, (sumptis v arithmetice proportionalibus) sunt ipsum in semicirculo AΠV planum; hoc est, $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$, (per § F. prop. 15.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{4}sR^2:=\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2$.

Item, *Omnia* sv, (hoc sensu,) sunt ipsius, in semicirculo, plani ABV, momentum respectu TA, (est enim singulorum s, à TA distantia v, respective;)

 hoc

Fig. 169, 170. hoc est, $\frac{1}{3}eR^2 + \frac{1}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$ (per § F. prop. 15.) Adeoque, *Omn.* $\frac{1}{4}svR := \frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR := -\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}avR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, momentum Solidi A b B, respectu perpendicularis plani A $\tau\alpha$. Ut prius. Unde Centri gravitatis inde distantia habebitur. Atque huic momento, si addatur momentum Solidi b $\beta\alpha$ B, habebitur momentum Solidi A b $\beta\alpha$, idem quod alia methodo jam invenimus.

E. Deinde; Si intelligatur Solidum illud integrum A $\tau\alpha$, ita positum, ut sit A $\tau\alpha$ planum in situ horizontali, adeoque $\alpha\tau\varkappa$ planum, situ ad horizontem recto: Momentum Solidi totius, Duplum erit momenti Ungulæ Semicirculi A D α, aciem habentis A α, respectu rectæ $\tau\alpha$. Et similiter in partibus respective sumptis. Sunt enim (ut prius dictum § A, C.) Singula Parallelepipeda Solidum hoc complentia, ad respectivas Pyramides complentes illam Ungulam, ut 3 ad 1: Eorumque parallelepipedorum rectis β b insistentium distantiæ Centrorum gravitatis ab erecto plano $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$ b $= \frac{1}{2}b$, respective; Pyramidum vero à $\tau\alpha$ plano, Distantiæ Centrorum gravitatis, respective, $\frac{3}{4}$ V $\alpha = \frac{3}{4}b$. Cum igitur magnitudines sint ut 3 ad 1; & distantiæ, ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{3}{4}$, seu 2 ad 3; erit (propter $\frac{3}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{1}$) Momentorum ratio, ut 2 ad 1. Hoc est, Momentum Solidi A $\tau\alpha$ (hoc situ positi) respectu $\tau\alpha$ rectæ, duplum momenti Ungulæ Semicirculi A D α, aciem habentis A α, respectu rectæ $\tau\alpha$: Et portionis Solidi A b $\beta\alpha$ momentum, duplum momenti Ungulæ correspondentis B α A, (aciem habentis A α,) respectu $\tau\alpha$. Est autem (per § C, F. prop. 16.) Ungulæ Semicirculi, aciem habentis A α, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}R^4$; Ungulæque Sectoris B α A, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$. Ergo Solidi A $\tau\alpha$ sic positi, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}R^4$; & portionis A b $\beta\alpha$, $\frac{2}{3}vR^3 + \frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$. (Quæ est summa, omnium $\frac{1}{2}sb^2$, eo spectantium; sumptis a arithmetice proportionalibus: Sunt enim magnitudines, summa omnium sb; & distantia $\frac{1}{2}b$ respective.) Eaque momenta per respectivas magnitudines, $2R^3$, & $vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$, (per § A.) divisa; exhibent Centrorum gravitatis ab erecto plano $\tau\alpha\varkappa$, distantias: Nempe, totius Solidi, $\frac{2}{3}R$; & portionis A b $\beta\alpha$ $\frac{4vR^2 + 4s^2R - s^2v}{6vR + 3s^2}$.

F. Ex illo autem portionis A b $\beta\alpha$ momento; si eximatur momentum portionis b $\beta\alpha$ B: habetur momentum Segmenti A b B.

Est autem b $\beta\alpha$ B, (per § B.) vbR seu s^2R; distantia Centri gravitatis (per prop. 2 hujus,) $\frac{1}{2}$ b $\beta = \frac{1}{2}b$: Ergo momentum (in hoc situ) respectu rectæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}vb^2R = \frac{1}{2}s^2bR$, seu (propter $vb = s^2$, & $b = 2R - v$,) $s^2R^2 - \frac{1}{2}s^2vR$. Hoc itaque subductum ex Portionis Solidi A B $\beta\alpha$ momento, $\frac{2}{3}vR^3 + \frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$ (§ præced.) Relinquit $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$, momentum Solidi A b B (in hoc situ) respectu rectæ $\tau\alpha$. Quod per magnitudinem, $vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$, (§ B.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha\varkappa$ plano, $\frac{4vR^2 - 2s^2R + 2s^2v}{6vR - 3s^2}$: seu $\frac{4vR^2 - 2vbR + 2v^2b}{6vR - 3vb} = \frac{4R^2 - 2bR + 2vb}{6R - 3b = 3v} = \frac{2vR + 2vb}{3v} = \frac{2}{3}R + \frac{2}{3}b$: Adeoque, à b B, $\frac{2}{3}R - \frac{1}{3}b = \frac{1}{3}v$: Et propterea momentum ejusdem A b B solidi (sic positi) respectu b B, $\frac{1}{3}v^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR = \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR = \frac{1}{6}v^3R$.

Quod quidem momentum, est summa omnium planorum $\alpha\beta\varkappa$ eo spectantium, (hoc est, omnium vR, per § O, Q. prop. 17. sumptis v arithmetice proportionalibus usque ad V eorum maximum,) in suas respective à b B distantias ductorum, hoc est, in $V - v$ respective: Hoc est, *Omnium* vVR, minus *Omn.* v^2R. Adeoque, (per prop. 1. hujus,) $\frac{1}{2}V^3R - \frac{1}{3}V^3R = \frac{1}{6}V^3R$, seu $\frac{1}{6}v^3R$: ut prius.

Idem per se habebitur, (sine ope portionis A b $\beta\alpha$.) Cum enim singula rectis b B insistentia plana Solidum complentia, æqualibus intervallis ab invicem distita, sint æqualia ipsis $\alpha\beta\varkappa = vR$ respective, (ut dictum est:) Sintque in distantiis à vertice T A, ipsis v respective æqualibus; erit cujusque momentum respectu T A, v^2R; adeoque summa omnium (propter v arithmetice proportionales, usque ad V maximum,) $\frac{1}{3}V^3R$, (per prop. 1. hujus.) Seu, restituta v minuscula, $\frac{1}{3}v^3R$. Adeoque propter magnitudinem, $\frac{1}{2}v^2R$, (per § B.) Centri gravitatis à T A distantia $\frac{2}{3}v$: Ergo, à $\tau\alpha$, $2R - \frac{2}{3}v$, seu $\frac{4}{3}R + \frac{2}{3}b$; ut prius: Et propterea ejusdem, respectu $\tau\alpha$, momentum, $v^2R^2 - \frac{1}{3}v^3R$, seu $\frac{1}{3}v^2R^2 + \frac{1}{3}v^2bR$, hoc est $\frac{2}{3}vR^3$
$- \frac{1}{3}s^2R^2$

$-\frac{1}{3}s^2R^2+\frac{1}{3}s^2vR$, ut prius. Atque huic momento, ſi addatur momentum por- Fig. 169,
tionis b$\beta\alpha$B, habebitur momentum portionis A b$\beta\alpha$; eadem quæ prius. 170.

Idemque Solidum A b B, eodem ſitu poſitum, ſi reſpectu rectæ Aα conſidere- G.
tur; Momentum ejus eſt aggregatum omnium $\alpha\beta\nu$ planorum ſolidum complentium (hoc eſt, omnium vR, eo ſpectantium,) in ſuas reſpective centrorum gravitatis diſtantias ab Aα; (hoc eſt, in $\frac{-eR+av}{v}$ reſpective, per §, P, Q. prop. 17.) Hoc eſt, Omnium $-eR^2+avR$, ſeu Omnium $-aR^2+sR^2+avR$; ſumptis v arithmetice proportionalibus, uſque ad V eorum maximum.

Sunt autem *Omn.* a, (ſumptis v arithmetice proportionalibus;) ipſum planum A b B; hoc eſt, $-eR+av$, per § B. prop. 17. Adeoque *Omn.* $aR^2=-eR^3+avR^2$.

Et, *Omn.* s. (hoc ſenſu,) ipſum Semicirculi ſegmentum A B V, $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$; per § F. prop. 15. Adeoque *Omn.* $sR^2:=\frac{1}{2}eR^3+\frac{1}{2}svR^2$.

Item, *Omn.* av, ſunt ipſæ b B rectæ, planum A b B complentes, in ſuas reſpective à T A diſtantias v; Hoc eſt, Plani A b B momentum reſpectu T A; Hoc eſt, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$: per § F. prop. 17. Adeoque *Omn.* $avR:=-\frac{3}{4}eR^3+avR^2+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$.

Ergo, *Omn.* $-aR^2+sR^2+avR:=\frac{3}{4}eR^3+\frac{3}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$. Quod itaque eſt momentum Solidi A b B reſpectu Aα.

Idemque momentum, per magnitudinem $vR^2-\frac{1}{2}s^2R$ (§ B) diviſum; exhibet ejuſdem diſtantiam Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3eR^2+3svR-2as^2}{4vR-2s^2=2v^2}$.

Huic autem Solidi A b B momento ſic reperto, ſi addatur momentum Solidi H.
b$\beta\alpha$B; habetur momentum Solidi A b$\beta\alpha$, reſpectu Aα.

Eſt autem b$\beta\alpha$B Solidi magnitudo $s^2R=vbR$. per § B: Ejuſque ab Aα diſtantia Centri gravitatis, (idem quod ipſius $\alpha\beta\nu$ plani, per prop. 1, 5. hujus) eſt $\frac{-eR+av}{v}$, per § Q. prop. 17. Ergo ejuſdem, reſpectu Aα, momentum eſt, $-ebR^2+avbR=-2eR^3+evR^2+as^2R=-2eR^3+avR^2-svR^2+as^2R$.

Hoc itaque, Solidi A b B momento (modo reperto) $\frac{3}{4}eR^3+\frac{3}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$, additum; exhibet Solidi A b$\beta\alpha$ momentum reſpectu Aα, $-\frac{5}{4}eR^3+avR^2-\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{2}as^2R$. (Adeoque totius A$\tau\alpha$ Solidi, cum ſit in hoc caſu, $a=\frac{1}{2}P$, $v=2R$, $s=0$, & $e=a-s=a=\frac{1}{2}P$, momentum reſpectu Aα, $-\frac{5}{8}R^3P+R^3P=\frac{3}{8}R^3P$.) Et momento per magnitudinem $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$ (§ A) diviſo; habetur ipſius A b$\beta\alpha$ ſolidi, diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{-5eR^2+4avR-svR+2as^2}{4vR+2s^2}$. (Adeoque in integro A$\tau\alpha$ Solido, $\frac{3}{16}P$.)

Atque hoc (ſive totius A$\tau\alpha$ Solidi, ſive ipſius portionis A b$\beta\alpha$) momentum reſpectu Aα, eſt aggregatum omnium asb eo ſpectantium; ſumptis a arcubus arithmetice proportionalibus, uſque ad maximum A. Sunt enim, rectangula ſeu parallelepipeda b$\beta\nu$, ſumma omnium sb (ut § A dictum eſt,) eorumque ab Aα diſtantiæ, $\beta\alpha=a$, reſpective.

Quæque de his Solidi portionibus dicta ſunt, facile ad alias ubi opus fuerit I.
transferentur: Quarum tum magnitudines, tum momenta & Centra gravitatis, ab his quæ jam traduntur facile derivari poterunt: Puta, Portionis b$\beta\tau$, aut A b K, &c.

Si enim ex totius Solidi A$\tau\alpha$, magnitudine $2R^3$; Momento reſpectu $\tau\alpha$, in Fig. 170.
erecto plano A$\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^3P$; reſpectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{4}{3}R^4$; & reſpectu plani ſuper Aα erecti, $\frac{3}{8}R^3P$; ſupra traditis: Auferantur Magnitudo, & reſpectiva momenta Solidi A b$\beta\alpha$, $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$; & $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{6}s^3R$; & $\frac{2}{3}vR^3+\frac{2}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR$; & $-\frac{5}{4}eR^3+avR^2-\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{2}as^2R$; ſupra tradita: Relinquentur, Solidi b$\beta\tau$, magnitudo, $2R^3-vR^2-\frac{1}{2}s^2R$; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, in erecto plano A$\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^3P-\frac{1}{4}eR^3-\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{6}s^3R$; reſpectu $\tau\alpha$ in plano $\tau\alpha\kappa$ erecto, $\frac{4}{3}R^4-\frac{2}{3}vR^3-\frac{2}{3}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR$; reſpectu plani

Aα

Fig. 169, 170. A α erecti, $\frac{3}{4}R^2P+\frac{3}{4}eR^3-avR^2+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{3}as^2R$. Atque hæc Momenta per Magnitudinem divisa; exhibent Solidi b$\beta\tau$ distantiam Centri gravitatis à plano A$\tau\alpha$, $\frac{3R^2P-6eR^2-6svR-4s^3}{48R^2-24vR-12s^2}$; à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{8R^3-4vR^2-4s^2R+s^2v}{12R^2-6vR-3s^2}$; ab A$\alpha$ plano, $\frac{3R^2P+10eR^2-8avR+2svR-4as^2}{16R^2-8vR-4s^2}$.

Similiter, cum solidi portio A K$\beta\alpha$ parallelogrammo incumbens, Magnitudinem habeat (ex ductu A$\alpha=2R$, in $\alpha\beta\nu=vR$, factam,) $2vR^2$; & Momentum respectu plani A$\tau\alpha$ erecti, (ex ductu Magnitudinis $2vR^2$, in distantiam Centri gravitatis plani $\alpha\beta\nu$, à $\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$; per § O, Q. prop. 17.) $\frac{1}{2}eR^3+\frac{1}{2}svR^2$; & respectu $\tau\alpha\kappa$ erecti plani, (ex ductu αC$=R$, dimidii longitudinis prismatis, in magnitudinem $2vR^2$,) $2vR^3$; & respectu Aα erecti plani, (ex ductu magnitudinis $2vR^2$, in distantiam Centri gravitatis plani $\alpha\beta\nu$ ab Aα, hoc est, in $\frac{-eR+av}{v}$, per § P, Q. prop. 17.) $-2eR^3+2avR^2$ (est enim Prismatis centrum gravitatis in medio rectæ Centra gravitatis basium oppositarum jungente, per prop. 1, & 5 hujus:) Si ex his Solidi A K$\beta\alpha$ magnitudine & momentis; auferantur Magnitudo & Momenta respectiva Solidi A b$\beta\alpha$; $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$; & $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{6}s^3R$; & $\frac{2}{3}vR^3+\frac{2}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR$; & $-\frac{3}{4}eR^3+avR^2-\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{2}as^2R$; supra tradita: Relinquentur, Solidi A b K, magnitudo, (hoc est, aggregatum *Omnium* sv, eo spectantium, sumptis a arithmetice proportionalibus,) $vR^2-\frac{1}{2}s^2R=\frac{1}{2}v^2R$; Momentum respectu plani A$\tau\alpha$ erecti, (hoc est, *Omn.* $\frac{1}{2}s^2v$, eo spectantia,) $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{6}s^3R$; Momentum respectu plani $\tau\alpha\kappa$ erecti, $\frac{4}{3}vR^3-\frac{2}{3}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR=\frac{2}{3}v^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR$; Momentum respectu plani Aα, (hoc est, *Omnia* asv, eo spectantia,) $-\frac{3}{4}eR^3+avR^2+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$. Atque hæc momenta, per magnitudinem divisa; exhibent, Solidi A b K, distantiam Centri gravitatis à plano A$\tau\alpha$, $\frac{3eR^2+3svR-2s^3}{12vR-6s^2=6v^2}$; à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{16vR^2-8s^2R+2s^2v}{12vR-6s^2=6v^2}=\frac{4}{3}R+\frac{s^2=bv}{3v}$; (adeoque, à T A, $\frac{2}{3}R-\frac{s^2}{3v}=\frac{2}{3}R+\frac{1}{3}b=\frac{1}{3}v$; & propterea ejusdem respectu T A, momentum, hoc est aggregatum Omnium $\frac{1}{2}sv^2$, eo spectantium, sumptis a arithmetice proportionalibus, $\frac{1}{6}v^3R=\frac{1}{3}v^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR=\frac{2}{3}vR^3-\frac{1}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR$;) distantiamque ab A$\alpha$ plano, $\frac{-3eR^2+4avR+svR-2as^2}{4vR-2s^2=2v^2}$.

Item; Portionis A K b B, magnitudo & momenta, habentur ex Portionum A b K, & A b B, magnitudinibus & momentis (respective) additis: Vel subductis Portionis b$\beta\alpha$B magnitudine & momentis, ex magnitudine & momentis (respectivis) portionis A K$\beta\alpha$: Vel etiam eodem modo quo habentur ipsius b$\beta\alpha$B magnitudo & momenta. Nempe ex ductu plani $\alpha\beta\nu=vR$, in A V$=v$, habetur ipsius A K b B (prismatis) magnitudo v^2R. Atque ex hac magnitudine in $\frac{1}{2}v$ (ejusdem Centri gravitatis à T A vel b B distantiam,) habetur ejusdem, respectu T A vel b B, momentum, $\frac{1}{2}v^3R$. Ductaque in $b+\frac{1}{2}v=2R-\frac{1}{2}v$ (distantiam à $\tau\alpha$,) ejusdem momentum respectu $\tau\alpha$, $2v^2R^2-\frac{1}{2}v^3R$. Eademque magnitudine ducta in Centri gravitatis distantiam ab Aα, $\frac{-eR+av}{v}$; & à plano A$\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$, (easdem utique quæ sunt, in $\alpha\beta\nu$ plano, distantiæ ab Aα, & $\tau\alpha$;) habentur ejusdem momenta, respectu Aα, av^2R-evR^2; & respectu plani A$\tau\alpha$, $\frac{1}{4}evR^2+\frac{1}{4}sv^2R$.

Et similiter de portionibus aliis, mutatis mutandis, judicandum erit.

K. Super A Dα Semicirculo, erigi intelligatur Cylindri recti portio; ea ratione, ut super singulas B V ordinatim applicatas, altitudinem habeat respectivis b B æqualem,

qualem, hoc est arcubus B A. Aut etiam (quod eodem recidit) super *Trilinei* Fig. 169,
Rejituti A τ α, (quam *Figuram Sinuum versorum, Arcuumve,* dicimus,) recta 170.
A α, positus ad angulos rectos A D α Semicirculus, promoveri intelligatur usque ad T τ, Semicylindrum describens; qui Semicylindrus sinuosa superficie, sinuosæ rectæ A d τ ad angulos rectos ubique insistente, secari intelligatur, Solidum A d τ α terminante.

Manifestum est, ex constructione, Plana Solidum hoc complentia, rectis b B directe insistentia, Parallelogramma esse rectangula; ex rectis b B fig. 170. hoc est arcubus B A fig. 169. in B V eorundem sinus rectos, seu ad diametrum circuli ordinatim-applicatas, ductis: Hoc est, rectangula b B V, fig. 166, 168. Hoc est, *a s* rectangula, sumptis arcubus *a* non quidem arithmetice proportionalibus, sed qui sinibus versis A V, &c. arithmetice proportionalibus conveniunt: quo plana Solidum hoc complentia sint æqualibus intervallis dissita. Adeoque A b V, Solidi frustum, est aggregatum omnium *a s*, eo spectantium, sumptis *v* sinibus versis arithmetice proportionalibus.

Manifestum item est, ex constructione, Plana rectis b β directe insistentia, Solidum idem complentia, (cum semicylindri portio sit,) semicirculo rectæ A α insistenti parallela, Segmenta esse Semicirculi, ut B V α fig. 169. ipsis b β rectis fig. 170. (arcuum arithmetice proportionalium sinibus versis) æquealta. Puta rectæ x ξ, Segmentum O X D α; rectæ z ζ, Segmentum S Z D α, & sic deinceps; usque ad ultimum Φ F α seu ipsum α punctum, si totum Solidum spectemus; vel usque ad V B α segmentum, si solidi portionem A b β α, spectemus. Et sic alibi. Adeoque A b β α, Solidi portio, est aggregatum omnium V B α Segmentorum Semicirculi, eo spectantium sumptis *a* arcubus, (puta A X, A Z, &c.) arithmetice proportionalibus. Sunt autem Omnia Segmenta O X D α, S Z D α, &c. totidem Semicirculi demptis contrariis Segmentis O X A, S Z A, &c. Hoc est, Semicirculus A D α in rectam α τ ductus, seu A α τ T Semicylindrus, si totum Solidum spectemus; vel, si portionem A b β α spectemus, idem Semicirculus in α β ductus, (seu A α β K Semicylindrus:) Demptis utrobique omnibus O X A, S Z A, &c. hoc est omnibus A B V eo spectantibus; Hoc est, dempto Solido quod ipsi A τ T, vel A b K, trilineo insistere deberet ad respectivum Semicylindrum complendum; (cui æquale est, quod simili portioni puncto τ adjacenti incumbit: Puta, quod A z K trilineo incumberet, incumbenti trilineo τ ε ι; & sic ubique.)

Est autem Segmentum B V A quodvis, (per § F. prop. 15.) $\frac{1}{2} \epsilon R + \frac{1}{2} s v = \frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s R + \frac{1}{2} s v$. Adeoque summa omnium eo spectantium, sunt *Omnia*, $\frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s R + \frac{1}{2} s v$, usque ad (eo spectantium) ultimum, quod dicamus impræsentiarum $\frac{1}{2} A R - \frac{1}{2} S R + \frac{1}{2} S V$.

Sunt autem *Omnes a*, (arcus arithmetice proportionales, usque ad *A* maximum,) $= \frac{1}{2} A^2$, (per prop. 1. hujus:) adeoque *Omn.* $\frac{1}{2} a R = \frac{1}{4} A^2 R$.

Item, *Omnes s*, (sinus recti arcubus illis convenientes, usque ad *S* maximum,) sunt $= V R$, (per § Q. prop. 17.) adeoque *Omn.* $- \frac{1}{2} s R: = - \frac{1}{2} V R^2$.

Item, *Omnia s v*, usque ad *S V* maximum; sunt facta ex sinibus rectis arcuum arithmetice proportionalium, puta X O, Z S, &c. fig. 169. hoc est ξ ο, ζ υ, &c. fig. 170. ductis in respectivos sinus versos, ut A O, A S, &c. fig. 169, 170. hoc est, x q, z K, &c. sinuum versorum ξ x, ζ z, &c. residuos ad diametrum $A \alpha = 2 R$. (Nempe, Solidi prius constructi, portio A b K, § A, I, exhibita.) Hoc est, Omnes ξ ο, ζ υ, &c. rectæ, in $2 R$ ductæ; demptis eisdem in ξ x, ζ z, &c. respective ductis. Sunt autem, Omn. ξ ο, ζ υ, &c. hoc est Omn. *s* usque ad *S* maximum, hoc est α β υ trilineum, $= V R$; (ut modo dictum:) adeoque eædem Omnes in $A \alpha = 2 R$, sunt $2 V R^2$; Item eædem Omnes in respectivas ξ x, ζ z, &c. hoc est, *Omnes s b* usque ad *S H* maximum, (seu Solidi, prius constructi, portio A b β α, § A exhibita;) sunt Triplum momenti Sectoris correspondentis B α A fig. 169. respectu rectæ A α, (ut § L. prop. 17. & § A. hujus ostensum est,) hoc est, $V R^2 + \frac{1}{3} S^3 R$; per § S. prop. 15. vel § A. hujus. Ergo, eædem omnes ξ ο, ζ υ, &c. in respectivas A O, A S, &c. seu x q, z K, &c. hoc est, *Omn. s v*, usque ad maximum *S V*; sunt, $2 V R^2$ minus $V R^2 + \frac{1}{3} S^3 R$; hoc est $V R^2 - \frac{1}{3} S^3 R$ $(= \frac{1}{2} V^2 R$, ut § A, I.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2} s v: = \frac{1}{2} V R^2 - \frac{1}{6} S^3 R$.

Omnia igitur, A X O, A Z S, &c. Semicirculi Segmenta, usque ad maximum (eo spectantium) A B V, (Solidum A b K complentia;) hoc est *Omn.* $\frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s R + \frac{1}{2} s v$: usque ad $\frac{1}{2} A R - \frac{1}{2} S R + \frac{1}{2} S V$: sunt; $\frac{1}{4} A^2 R$, minus $\frac{1}{2} V R^2$ plus

Fig. 169, 170. plus $\frac{1}{2} V R^2 - \frac{1}{4} S^2 R$: Hoc est, $\frac{1}{4} A^2 R - \frac{1}{4} S^2 R = \frac{1}{4} efR$. (Nempe Solidi hujus portio A b K.)

Ergo, Omnia O X α, S Z α, &c. Segmenta; hoc est totidem Semicirculi, demptis ipsis A X O, A Z S, &c. sunt (propter Semicirculum $= \frac{1}{4} R\mathcal{P}$;) $\frac{1}{4} AR\mathcal{P}$, minus $\frac{1}{4} A^2 R - \frac{1}{4} S^2 R$; Hoc est, $\frac{1}{4} AR\mathcal{P} - \frac{1}{4} A^2 R + \frac{1}{4} S^2 R$: seu (restitutis minuscularum valoribus,) $\frac{1}{4} aR\mathcal{P} - \frac{1}{4} a^2 R + \frac{1}{4} s^2 R = \frac{1}{4} aR\mathcal{P} - \frac{1}{4} efR$: Quæ est, Portionis Solidi quadrilineo A b $\beta \alpha$ incumbentis magnitudo.

Adeoque, totum A d $\tau \alpha$ solidum, (propter $a = \frac{1}{2}\mathcal{P}$, & $s = 0$;) est $\frac{1}{8} R\mathcal{P}^2 - \frac{1}{16} R\mathcal{P}^2 = \frac{1}{16} R\mathcal{P}^2$.

Sed & eadem totius Solidi magnitudo, sic facilius colligitur. Sumptis in A α diametro, duobus punctis quibusvis æqualiter à C Centro utrinque remotis, ut S, Σ: manifestum est, tum sinus rectos S Z, Σ E, fig. 169. invicem æquales esse; tum rectas S z, Σ e, seu Z z, E e, fig. 170. hoc est, arcus B A, E A, seu Π A, B α, fig. 169. simul æquales Semiperipheriæ A B α, seu $\tau \alpha$ rectæ. Adeoque duo simul rectangula, z Z × Z S, e E × E Σ, æqualia uni $\tau \alpha$ × S Z. Hoc est, Omnes B V totius Semicirculi, in respectivas b B; tantundem esse atque Omnes B V unius quadrantis (hoc est ipse quadrans A D C $= \frac{1}{8} R\mathcal{P}$,) in $\tau \alpha = \frac{1}{2}\mathcal{P}$, ductæ. Hoc est, $\frac{1}{16} R\mathcal{P}^2$; totius Solidi magnitudo; ut prius.

Hinc etiam; Portionis Solidi b $\beta \tau$ magnitudo colligitur. Nam totum Solidum $= \frac{1}{16} R\mathcal{P}^2$; dempto segmento A b $\beta \alpha = \frac{1}{4} aR\mathcal{P} - \frac{1}{4} a^2 R + \frac{1}{4} s^2 R$: Relinquit Segmentum $\frac{1}{16} R\mathcal{P}^2 - \frac{1}{4} aR\mathcal{P} + \frac{1}{4} a^2 R - \frac{1}{4} s^2 R$; Vel (sumpto $\alpha = \frac{1}{2}\mathcal{P} - a$,) $\frac{1}{4} \alpha^2 R - \frac{1}{4} s^2 R$. Quod ipsum in inquisitione prius repertum erat. Quippe, Sumpto A K $= \tau \beta$, (adeoque restituto a pro α,) erit $\tau \beta$ b $=$ A K b, cujus magnitudo supra inventa est $\frac{1}{4} a^2 R - \frac{1}{4} s^2 R$; seu $\frac{1}{4} efR$. Est enim, ef, hoc est $a - s$ in $a + s$, $= a^2 - s^2$.

L. Porro; Si ex Solido A b $\beta \alpha = \frac{1}{4} aR\mathcal{P} - \frac{1}{4} a^2 R + \frac{1}{4} s^2 R$: Auferatur Solidum b $\beta \alpha$ B; Hoc est, b B $= a$, in Segmentum Semicirculi V B $\alpha = \frac{1}{2} \alpha R - \frac{1}{2} sR + \frac{1}{2} sb$ (per § F. prop. 15. quippe quod in B V A est a, v, idem in B V α est α, b; & s utrobique idem;) hoc est (propter $\alpha = \frac{1}{2}\mathcal{P} - a$, & $b = 2R - v$,) in $\frac{1}{4} R\mathcal{P} - \frac{1}{2} aR + \frac{1}{2} sR - \frac{1}{2} sv$; Nempe $\frac{1}{4} aR\mathcal{P} - \frac{1}{2} a^2 R + \frac{1}{2} asR - \frac{1}{2} asv$, seu $\frac{1}{4} aR\mathcal{P} - \frac{1}{2} eaR - \frac{1}{2} asv$; Relinquitur Solidi portio A b B $= \frac{1}{4} a^2 R - \frac{1}{2} asR + \frac{1}{4} s^2 R + \frac{1}{2} asv = \frac{1}{4} e^2 R + \frac{1}{2} asv$: Seu summa rectangulorum omnium as solidum illud complentium; sumptis v arithmetice proportionalibus.

Aut etiam; Si, ex Semicylindri portione A K b B; hoc est, ex Semicirculi Segmento A B V $= \frac{1}{2} eR + \frac{1}{2} sv$ (per § F. prop. 15.) in b B $= a$ ducto; hoc est, ex $\frac{1}{2} eaR + \frac{1}{2} asv = \frac{1}{2} a^2 R - \frac{1}{2} asR + \frac{1}{2} asv$: auferatur Semicylindri portio A b K $= \frac{1}{4} a^2 R - \frac{1}{4} s^2 R$ (per § K,) restabit Semicylindri portio A b B, $= \frac{1}{4} a^2 R - \frac{1}{2} asR + \frac{1}{4} s^2 R + \frac{1}{2} asv$; ut prius.

M. Similiter de Momentis judicandum erit.

Nempe, Momentum Solidi A b K, respectu T A; idem est atque Momenta Omnium A B V Semicirculi Segmentorum illud complentium respectu ipsius (plani tangentis) T A: Hoc est, (per § L. prop. 15.) *Omn.* $\frac{1}{2} eR^2 + \frac{1}{2} svR - \frac{1}{3} s^3$: seu *Omn.* $\frac{1}{2} aR^2 - \frac{1}{2} sR^2 + \frac{1}{2} svR - \frac{1}{3} s^3$: Sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omn.* a, (arithmetice proportionales usque ad, a maximum,) $\frac{1}{2} a^2$ (per prop. 1. hujus.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2} aR^2 := \frac{1}{4} a^2 R^2$.

Item, Omnes s (eo spectantes,) sunt ipsum $\alpha \beta v = vR$, (per § Q. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $- \frac{1}{2} sR^2 := - \frac{1}{2} vR^3$.

Item, *Omnes* sv, sunt ipsum A b K Solidum ex ductu rectarum, βv in b K; hoc est (per § I.) $\frac{1}{2} v^2 R = vR^2 - \frac{1}{2} s^2 R$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2} svR := \frac{1}{2} vR^3 - \frac{1}{4} s^2 R^2$.

Item, *Omn.* s^3: (per § V. prop. 13.) $=$ *Omn.* $o^2 R$. Sunt autem *Omn.* o^2, hoc est, quadrata Ordinatim-applicatarum, Segmentum A B V complentium, seu *Omn.* s^2, sumptis v arithmetice proportionalibus: *Duplum* Momenti Segmenti A B V (fig. 169.) respectu A α: Hoc est (per § V. prop. 15.) $\frac{2}{3} vR^2 - \frac{1}{3} s^2 R + \frac{1}{3} s^2 v$: Adeoque *Omn.* $o^2 R$: ($=$ *Omn.* s^3:) $= \frac{2}{3} vR^3 - \frac{1}{3} s^2 R^2 + \frac{1}{3} s^2 vR$: Et propterea *Omn.* $- \frac{1}{3} s^3 := - \frac{2}{9} vR^3 + \frac{1}{9} s^2 R^2 - \frac{1}{9} s^2 vR$.

Ergo;

Ergo; *Omn.* $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$: Hoc est, Momentum Solidi Fig.
AbK, respectu TA; est, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2vR$. 169,

Adeoque, propter ipsius magnitudinem $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$, (per § K.) Distantia 170.
Centri gravitatis à TA, $R - \frac{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}{9a^2 - 9s^2} = R - \frac{4v^2R + 4s^2v}{9ef}$; & à $\tau\alpha$, $R + \frac{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}{9a^2 - 9s^2} = R + \frac{4v^2R + 4s^2v}{9ef}$; & propterea ejusdem, respectu $\tau\alpha$, momentum, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{13}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2vR$.

Si autem Solidi hujus AbK momenta, ex respectivis Semicylindri AK$\beta\alpha$ momentis auferantur: Relinquuntur respectiva Solidi Ab$\beta\alpha$ momenta. Est autem Semicylindri hujus magnitudo (ex ductu Semicirculi AD$\alpha = \frac{1}{4}RP$, in $\alpha\beta = a$;) $\frac{1}{4}aRP$; Centrique gravitatis distantia à TA, vel $\tau\alpha$, AC vel C$\alpha = R$. Adeoque ipsius respectu TA, vel $\tau\alpha$, momentum, $\frac{1}{4}aR^2P$. Unde subductis, Solidi AbK momentis, modo traditis, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2vR$; & $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{13}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2vR$: Relinquitur Solidi Ab$\beta\alpha$ momentum respectu TA, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{5}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2vR$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{13}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2vR$: Hujusque propterea Distantia Centri gravitatis (propter magnitudinem $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R$, per § K.) à TA, $R + \frac{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}{9aP - 9a^2 + 9s^2} = R + \frac{4v^2R + 4s^2v}{9aP - 9ef}$; à $\tau\alpha$, $R - \frac{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}{9aP - 9a^2 + 9s^2} = R - \frac{4v^2R + 4s^2v}{9aP - 9ef}$.

Si vero eadem solidi AbK momenta, ex respectivis Segmenti Semicylindri AKbB, auferantur: habentur respectiva Momenta Solidi, AbB. Est autem segmenti semicirculi ABV magnitudo $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$ (per § F. prop. 15.) quæ ducta in bB $= a$, exhibet magnitudinem segmenti Cylindri AKbB, $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv$: Centrique gravitatis distantia (utpote eadem quæ Segmenti Semicirculi ABV, per § C. prop. 5.) à TA, $R - \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$; à $\tau\alpha$, $R + \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$: Adeoque momentum respectu TA, $\frac{1}{2}eaR^2$ $(= \frac{1}{2}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2) + \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}as^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eaR^2 + \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{3}as^3$; (eadem quæ plani ABV momenta, in a ducta.) Unde subductis respectivis solidi AbK momentis, modo exhibitis, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2vR$, & $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{13}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2vR$: Relinquitur Solidi AbB, momentum respectu TA, (hoc est, *Omnia* asv, sumptis v arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{5}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{9}s^2vR - \frac{1}{3}as^3$; & respectu $\tau\alpha$, (hoc est, *Omnia* asb, sumptis v arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{13}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{9}s^2vR + \frac{1}{3}as^3$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv$, per § L.) Solidi AbB, distantia Centri gravitatis à TA, $R + \frac{8vR^3 - 4s^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9a^2R - 18asR + 9s^2R + 18asv}$; à $\tau\alpha$, $R - \frac{8vR^3 - 4s^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9a^2R - 18asR + 9s^2R + 18asv} = R - \frac{4v^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9e^2R + 18asv}$.

Totumque A$\tau\alpha$ Solidum, (sive spectetur ut Ab$\beta\alpha$, sive ut AbB, perinde est;) momentum habet (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, $s = 0$,) respectu TA, $\frac{1}{16}R^2P^2 + \frac{4}{9}R^4$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}R^2P^2 - \frac{4}{9}R^4$. Centrique gravitatis distantia à TA, est $R + \frac{64R^3}{9P^2}$; à $\tau\alpha$, $R - \frac{64R^3}{9P^2}$.

Porro; eadem ABV Segmenta plana, Solidum AbK complentia; seu, *Omnia*, N.
$\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$, (per § F. prop. 15.) ab Aα, distant ipsis bB $= a$ arcubus arithmetice proportionalibus: Adeoque eorundem omnium, hoc est ipsius AbK Solidi, Momentum respectu Aα, sunt *Omn.* $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv$; seu *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asv$: Sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem, *Omn.* $a^2 := \frac{1}{3}a^3$ (per prop. 1.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R := \frac{1}{6}a^3R$.

Et *Omn.* as: hoc est, Omnes s, trilineum $\alpha\beta v$ complentes, in a, eorundem

Fig. 170. ab Aα distantias ductæ; sunt ejusdem αβυ momentum respectu Aα; hoc est (per § P, Q. prop. 17.) $-eR^2 + avR$. Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{2}asR$: $= \frac{1}{2}eR^2 - \frac{1}{2}avR^2$.

Item, *Omn.* asv: Sunt ipsum AbK præcedentis Solidi (ex ductu rectarum βυ in bK respective) momentum respectu Aα; hoc est, $-\frac{2}{3}eR^3 + avR^2 + \frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$; per § I. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}asv$: $= -\frac{1}{3}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{4}as^2R$.

Ergo; *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asv$: Hoc est ipsius AbK Solidi Momentum respectu Aα; est, $\frac{1}{6}eR^3$ $(= \frac{1}{6}aR^3 - \frac{1}{6}sR^3)$ $+ \frac{1}{6}svR^2 + \frac{1}{6}a^3R - \frac{1}{4}as^2R$.

Hoc itaque per ipsius magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$ (per § K.) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3eR^2 + 3svR + 4a^3 - 6as^2}{6a^2 - 6s^2 = 6ef}$.

Illudque Solidi AbK momentum, ex momento Semicylindri AKβα, Subductum; hoc est, ex magnitudine $\frac{1}{4}aRP$ (§ M. ostensa) in $\frac{1}{2}a$ distantiam Centri gravitatis ab Aα (per prop. 2.) ducta; hoc est, ex $\frac{1}{8}a^2RP$ subductum: Relinquit Solidi Abβα momentum respectu ejusdem Aα, $\frac{1}{8}a^2RP - \frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{4}as^2R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R$, per § K.) Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3a^2P - 4eR^2 - 3svR - 4a^3 + 6as^2}{6aP - 6a^2 + 6s^2 = 6aP - 6ef}$.

Idemque Solidi AbK momentum, ex momento Solidi AKbB, subductum; hoc est, ex magnitudine $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv$ (§ M. ostensa) in $\frac{1}{2}a$ (Distantiam Centri gravitatis ab Aα) ducta; hoc est, ex $\frac{1}{4}ea^2R + \frac{1}{4}a^2sv$: Relinquit Momentum Solidi AbB, respectu ejusdem Aα, (seu *Omn.* $\frac{1}{2}a^2s$: eo spectantia, sumptis v arithmetice proportionalibus,) $-\frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{4}ea^2R + \frac{1}{4}as^2R + \frac{1}{4}a^2sv$, seu (propter $e = a - s$,) $-\frac{1}{6}aR^3 + \frac{1}{6}sR^3 - \frac{1}{6}svR^2 + \frac{1}{12}a^3R - \frac{1}{4}a^2sR + \frac{1}{4}as^2R + \frac{1}{4}a^2sv$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv$, per § L.) Distantia Centri gravitatis ab Aα, est $\frac{-3eR^3 - 3svR^2 + 2a^3R - 6a^2sR + 6as^2R + 6a^2sv}{6a^2R - 12asR + 6s^2R\ (= 6e^2R) + 12asv}$.

Totumque Aτα solidum quod spectat; (sive consideretur ut Abβα, sive ut AbB, perinde est,) Momentum ejus respectu Aα (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, & $s = 0$,) est $\frac{1}{32}RP^3 - \frac{1}{24}R^3P$: Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{4}P - \frac{R^2}{P}$.

O. Denique; Eadem ABV segmenta plana, Solidum AbK fig. 170. complentia Centra gravitatis habent tantundem à plano Aτα distantia, quantum ab Aα distant eorundem Centra in fig. 169. Eorumque omnium respectu Aα fig. 169. momenta; Hoc est, *Omn.* $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$: (per § R. V. prop. 15.) sunt ipsum solidi AbK momentum respectu plani Aτα erecti.

Sunt autem *Omnes* v, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) Hoc est, arcuum arithmetice proportionalium Sinus versi, eo spectantes; idem atque AbK planum; hoc est, eR, (per § B. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{3}vR^2$: $= \frac{1}{3}eR^3$.

Et, *Omnia* s^2, eo spectantia; *Duplum* Momenti ipsius αβυ respectu τα; hoc est, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR$, (per § Q. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{6}s^2R$: $= -\frac{1}{12}eR^3 - \frac{1}{12}svR^2$.

Item, *Omn.* s^2v; sunt *Duplum* Momenti Solidi AbK præcedentis, (ex ductu rectarum βυ, in bK respective,) respectu Plani (erecti) Aτα; seu $\frac{2}{3}eR^3 + \frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{3}s^3R$; (per § I. prop. hujus.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{6}s^2v$: $= \frac{1}{12}eR^3 + \frac{1}{18}svR^2 - \frac{1}{18}s^3R$.

Ergo *Omn.* $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$: $= \frac{1}{3}eR^3 - \frac{1}{18}s^3R = \frac{1}{3}aR^3 - \frac{1}{3}sR^3 - \frac{1}{18}s^3R$. Quod itaque est Solidi AbK momentum respectu erecti plani Aτα. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R = \frac{1}{4}efR$, per § K.) Distantia Centri gravitatis à plano Aτα, est $\frac{12aR^2 - 12sR^2 - 2s^3}{9a^2 - 9s^2} = \frac{12eR^2 - 2s^3}{9ef}$.

Illudque

Illudque Solidi A b K momentum; ex Semicylindri A K $\beta\alpha$ momento respe-ctivo subductum; hoc est (propter magnitudinem $\frac{1}{4}aRP$, atque Distantiam Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$, eandem quæ Semicirculi à sua diametro, $\frac{8R^2}{3P}$, per § Q. prop. 15.) ex $\frac{2}{3}aR^3$: Relinquit Momentum Solidi A b $\beta\alpha$ respectu plani A $\tau\alpha$ (erecti,) $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{1}{3}eR^3 + \frac{1}{18}s^3R = \frac{1}{3}aR^3 + \frac{1}{3}sR^3 + \frac{1}{18}s^3R = \frac{1}{3}fR^3 + \frac{1}{18}s^3R$. Adeoque (propter hujus magnitudinem $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R = \frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}efR$, per § K.) Distantia Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$, $\frac{12fR^2+2s^3}{9aP-9ef} = \frac{12aR^2+12sR^2+2s^3}{9aP-9a^2+9s^2}$. Fig. 169, 170.

Idemque Solidi A b K momentum; ex Segmenti Semicylindri A K b B momento respectivo subductum; hoc est (propter magnitudinem $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv$, & distantiam Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$, eandem quæ Segmenti Semicirculi A B V à diametro A α, $\frac{v^2R+s^2v}{3eR+3sv}$, per § R. prop. 15.) ex $\frac{1}{6}av^2R + \frac{1}{6}as^2v = \frac{1}{3}avR^2 - \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{6}as^2v$: Relinquit Solidi A b B momentum respectu ejusdem plani A $\tau\alpha$, (hoc est, *Omn.* $\frac{1}{2}as^2$: sumptis v arithmetice proportionalibus,) $-\frac{1}{3}eR^3 + \frac{1}{6}av^2R + \frac{1}{18}s^3R + \frac{1}{6}as^2v = -\frac{1}{3}aR^3 + \frac{1}{3}sR^3 + \frac{1}{3}avR^2 - \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{18}s^3R + \frac{1}{6}as^2v$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv = \frac{1}{4}e^2R + \frac{1}{2}asv$, per § L.) Distantia Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$, $\frac{-12eR^3+12avR^2-6as^2R+2s^3R+6as^2v}{9e^2R+18asv}$.

Totiusque A $\tau\alpha$ Solidi, (sive consideretur ut A b $\beta\alpha$, sive ut A b B,) Momentum respectu A $\tau\alpha$ plani (propter $a = \frac{1}{2}P$, & $v = 2R$, & $s = 0$,) $\frac{1}{6}R^3P$; Distantia Centri gravitatis ab A $\tau\alpha$ plano, $\frac{8R^2}{3P}$. Nempe tantundem atque Semicylindri A K $\delta\alpha$: Tantundem utique ponderat respectu A $\tau\alpha$ plani, atque tantundem inde distat; sive sit in situ A $\tau\alpha$, sive intelligatur pars d $\delta\tau$ in situm d K A replicata Semicylindrum complere.

Sed & eadem quæ jam Traduntur Solidi A b B momenta, similiter haberi poterunt, si, ex Solidi A B $\beta\alpha$ momentis, auferantur Solidi b $\beta\alpha$ B momenta respectiva. P.

Est autem Solidi b $\beta\alpha$ B magnitudo, $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{2}a^2R + \frac{1}{2}asR - \frac{1}{2}asv$, (ut § L. ostensum est;) ejusque Centri gravitatis ab A α distantia, $\frac{1}{2}a$; Atque à $\tau\alpha$, & T A, quantum inde distat Centrum gravitatis Segmenti Semicirculi B V α; atque ab A $\tau\alpha$ plano, quantum ab A α distat ipsius B V α plani Centrum gravitatis; (est enim, per prop. 1. & 5 hujus, in medio rectæ centra gravitatis oppositarum basium conjungente:) Hoc est, à $\tau\alpha$, $R - \frac{2s^3}{3aR-3sR+3sb} = R - \frac{4s^3}{3RP-6aR+6sR-6sv}$; à T A, $R + \frac{4s^3}{3RP-6aR+6sR-6sv}$; à plano A $\tau\alpha$, $\frac{b^2R+s^2b}{3aR-3sR+3sb} = \frac{8R^3-4vR^2+2s^2R-2s^2v}{3RP-6aR+6sR-6sv}$: Adeoque momentum respectu A α, $\frac{1}{8}a^2RP - \frac{1}{4}a^3R + \frac{1}{4}a^2sR - \frac{1}{4}a^2sv$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{2}a^2R^2 + \frac{1}{2}asR^2 - \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}as^3$; respectu T A, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{2}a^2R^2 + \frac{1}{2}asR^2 - \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{3}as^3$; respectu plani A $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{1}{3}avR^2 + \frac{1}{6}as^2R - \frac{1}{6}as^2v$.

Hæc itaque momenta, momentis respectivis Solidi A b $\beta\alpha$ subducta, Relinquunt Solidi A b B momenta respectiva: eadem quæ prius exhibentur.

Eademque Solidi b $\beta\alpha$ B momenta, momentis respectivis A b B addita; exhibebunt eadem quæ prius momenta Solidi A b $\beta\alpha$ respectiva.

Solidoque b $\beta\tau$, eadem applicantur omnia quæ de b K A traduntur: Substitutis ubique α pro a, b pro v, $\tau\alpha$ pro T A, & τ T pro A α. Similiter enim ipsis $\tau\alpha$, τ T, adjacet b $\beta\tau$; atque b K A, ipsis A T, A α. Q.

 Exhibuimus

Fig. 169, 170. Exhibuimus itaque, in utroque Solido; tum eo scilicet quod ex Figuræ Sinuum versorum $A\tau\alpha$ rectis $b\beta$, in $\beta\nu$, respectivas Figuræ Sinuum Rectorum rectas, ductis; tum eo quod ex Figuræ Arcuum $A\tau\alpha$ rectis bB, in BV, respectivas Semicirculi rectas, ductis componitur; Eorumque partibus; tum Magnitudines, tum Momenta respectu planorum aliquot expositorum, & Centrorum gravitatis ab illis planis distantias. Et propterea, (per prop. 26. cap. præced.) propter exhibitas Centrorum gravitatis à tribus saltem planis, quorum ne duo quidem sunt invicem parallela, (puta à plano $A\tau\alpha$, & duobus aliis quæ huic in rectis $A\alpha$, $\tau\alpha$, ad rectos angulos insistunt,) exhibentur ipsa gravitatis Centra. Quæque de his dicta sunt; facile erit ad alia ampliare.

R. Et quidem, quæ de Solidis his tradidimus; eadem ad Protracta & Contracta facile transferuntur. Manentibus utique, (ut in propositione præcedente) $A\alpha = 2R$, adeoque $AV = v$, & $V\alpha = h$: Si sit $\tau\alpha$, major (ut in Solido Protracto) vel minor (ut in Contracto) quam $\frac{1}{2}P$, (reliquæque his parallelæ similiter vel protractæ vel contractæ;) Quoties rectæ bB in calculum veniunt; pro a substituenda erit alia quantitas, quæ ad illam sit in eadem ratione qua est $\tau\alpha$, ad $\frac{1}{2}P$.

Quæque de solidis figuram Sinuum Rectorum unius quadrantis $\alpha\delta\kappa$ fig. 170. respicientibus, dicta sunt; eadem omnia, ad solida figuram chordarum seu subtensarum totius Semicirculi, ut $A\delta\kappa$ fig. 183. accommodanda erunt: Propter chordas subtensarum in semicirculo, ubique duplas sinuum rectorum arcuum dimidiatorum; adeoque figuras $\alpha\delta\kappa$ fig. 170. & $A\delta\kappa$ fig. 183. omnino similes. Qua de re plura videantur ad prop. 22. § G, H, I, ubi hac operatione opus erit.

PROP. XIX.

PARS PRIMA.

A. ***Ungula*** **Figuræ Sinuum versorum Arcuumve $A\tau\alpha$ insistens, Aciem habens $\tau\alpha$, est ad correspondentem Ungulam Semicirculi, ut 3 ad 2; seu *Sesquialtera*.**

Ejusque *Momentum* respectu aciei suæ; est *Sesquitertium* Momenti Ungulæ respectivæ Semicirculo $AD\alpha$ insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu aciei suæ; seu ut 4 ad 3.

Idemque in respectivis Portionibus obtinet: puta, *Ungula* Quadrilineo $b\beta\alpha A$ insistens, (aciem habens $\tau\alpha$) est *Sesquialtera* Ungulæ respectivæ, Sectori $B\alpha A$ insistentis; seu ut 3 ad 2. Ejusque *Momentum*, respectu aciei suæ $\tau\alpha$, est *Sesquitertium* momenti respectivæ Ungulæ insistentis Sectori $B\alpha A$, respectu aciei $\tau\alpha$; seu ut 4, ad 3.

Atque hinc, eadem respective determinantur, tum quoad Magnitudines, tum quoad Momenta, & Centra gravitatis, in Ungulis Figuræ Sinuum versorum, ejusve portionibus, insistentibus; atque in illis quæ Semicirculo, ejusve portionibus respectivis insistunt.

B. Nempe (retentis Symbolis ut in propositionibus præcedentibus,) Semiquadrantalis Ungulæ, Trilinei $A\tau\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo $\frac{3}{8}R^2P$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{12}R^3P$; respectu TA, $\frac{1}{6}R^3P$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{10}{9}R$; à TA, $\frac{4}{9}R$. Momentum respectu

G. $A\alpha$, $\frac{3}{32}R^2P^2 - 2R^4$; respectu $T\tau$, $\frac{3}{32}R^2P^2 + 2R^4$; distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{3P}$; a $T\tau$, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{3P}$.

B. Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{3}{8}R^2P$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{5}R^3P$; respectu TA, $\frac{11}{24}R^3P$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{8}{15}R$; à TA,

à T A, $\frac{22}{15}R$: Momentum respectu A α, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; respectu T τ, Fig. 169, 170.
$\frac{1}{32}R^2P^2 + 2R^4$; distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{5P}$; à T τ, G.
$\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{5P}$.

Aciemque habentis A α; Magnitudo $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$; momentum resp. τ α, G.
$\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; resp. T A, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4}R - \frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$; à T A, $\frac{3}{4}R + \frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$: Momentum respectu A α, $\frac{1}{24}RP^3 - R^3P$; respectu T τ, $\frac{1}{16}RP^3$; distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{3}P - \frac{8R^2P}{3P^2 - 48R^2}$; à T τ, $\frac{1}{2}P + \frac{8R^2P}{3P^2 - 48R^2}$. K.

Aciemque habentis T τ; Magnitudo, $\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$; momentum respectu G.
τ α, $\frac{1}{32}R^2P^2 + 2R^4$; respectu T A, $\frac{1}{32}R^2P^2 + 2R^4$; distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4}R + \frac{4R^3}{P^2 + 16R^2}$ à T A, $\frac{3}{4}R - \frac{4R^3}{P^2 + 16R^2}$: Momentum respectu A α, $\frac{1}{16}RP^3$, respectu T τ, $\frac{1}{24}RP^3 + R^3P$; distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}P - \frac{8R^2P}{3P^2 + 48R^2}$; à T τ, $\frac{1}{3}P + \frac{8R^2P}{3P^2 + 48R^2}$. K.

Ungulæ (Semiquadrantalem intellige) Quadrilinei A b β α, aciem habentis τ α; magnitudo, $\frac{2}{3}fR^2 + \frac{1}{3}sbR$; momentum respectu τ α, $\frac{1}{3}fR^3 + \frac{1}{3}sbR^2 - \frac{1}{5}s^3R$; respectu T A, $\frac{2}{5}fR^3 + \frac{1}{5}s^3R$; distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{10}{9}R + \frac{4sb^2}{27fR + 9sb}$; à T A, $\frac{8}{9}R - \frac{4sb^2}{27fR + 9sb}$: Momentum respectu b β, $\frac{1}{4}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$; respectu A α, $\frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; distantia Centri gravitatis a b β, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^2 - 5asR + s^2R + asv}{6aR + 10sR - 2sv}$; ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - 5asR + s^2R + asv}{6aR + 10sR - 2sv}$. C. F.

Aciemque habentis T A; Magnitudo $\frac{2}{3}fR^2 - \frac{1}{3}sbR$; momentum respectu τ α, $\frac{2}{5}fR^3 + \frac{1}{5}s^3R$; respectu T A, $\frac{11}{15}fR^3 - \frac{1}{3}sbR^2 - \frac{1}{5}s^3R$; distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{8}{15}R + \frac{24sbR + 20s^3}{225fR - 45sb}$; à T A, $\frac{22}{15}R - \frac{24sbR + 20s^3}{225fR - 45sb}$: Momentum respectu b β, $\frac{1}{4}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; respectu A α, $\frac{1}{4}a^2R^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asvR$; distantia Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^2 - s^2R - 3asR - asv}{10aR + 6sR + 2sv}$; ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - s^2R - 3asR - asv}{10aR + 6sR + 2sv}$. C. F.

Aciemque habentis A α; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$; momentum respectu τ α, $\frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; respectu T A, $\frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$; distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{1}{2}R - \frac{2vR^2 - 4asR + s^2R + 2asv}{4a^2 + 8as - 8vR}$; à T A, $\frac{1}{2}R + \frac{2vR^2 - 4asR + s^2R + 2asv}{4a^2 + 8as - 8vR}$: Momentum respectu A α, $2eR^3 - 2avR^2 + \frac{1}{3}a^3R + a^2sR$; respectu b β, $-2eR^3 + avR^2 + \frac{1}{6}a^3R$; distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{12eR^2 - 12avR + 2a^3 + 6a^2s}{3a^2 + 6as - 6vR}$; à b β, $\frac{-12eR^2 + 6avR + a^3}{3a^2 + 6as - 6vR}$. F. K.

Aciemque habentis b β; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R + vR^2$; momentum respectu F.
τ α, $\frac{1}{4}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$; respectu T A, $\frac{1}{4}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; di-

 stantia

Fig. 169, 170. K. ſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R + \frac{2vR+s^2}{4a^2+8vR}R$; à TA, $\frac{1}{4}R - \frac{2vR+s^2}{4a^2+8vR}R$: Momentum reſpectu $A\alpha$, $-2eR^3 + avR^2 + \frac{1}{6}a^3R$; reſpectu $b\beta$, $2eR^3 + \frac{1}{3}a^3R$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $a - \frac{12eR^2+2a^3}{3a^2+6vR}$; à $b\beta$, $\frac{12eR^2+2a^3}{3a^2+6vR}$.

D. Ungulæ Trilinei AbK, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo, $\frac{3}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{11}{6}eR^3 + \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{9}s^3R$; reſpectu TA, $\frac{2}{3}eR^3 - \frac{1}{9}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{22}{15}R + \frac{24svR+20s^3}{225eR+45sv}$; à TA,

H. $\frac{8}{15}R - \frac{24svR+20s^3}{225eR+45sv}$: Momentum reſpectu βbK, $\frac{1}{2}a^2R^2 - \frac{3}{4}vR^3 + \frac{1}{6}v^2R^2$; reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}a^2R^2 - \frac{3}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asvR + \frac{3}{4}vR^3 - \frac{1}{6}v^2R^2$; diſtantia Centri gravitatis à βbK, $\frac{1}{2}a - \frac{10vR^2 - v^2R - 5asR + asv}{10eR+2sv}$; ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a + \frac{10vR^2 - v^2R - 5asR + asv}{10eR+2sv}$.

D. Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{3}{4}eR^2 - \frac{1}{4}svR$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}eR^3 - \frac{1}{9}s^3R$; reſpectu TA, $\frac{3}{2}eR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{9}s^3R$; diſtantia Cen-

H. tri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{8}{9}R + \frac{4sv^2}{27eR-9sv}$; à TA, $\frac{10}{9}R - \frac{4sv^2}{27eR-9sv}$: Momentum reſpectu βbK, $\frac{1}{2}a^2R^2 - \frac{3}{4}vR^3 - \frac{1}{6}v^2R^2$; reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}a^2R^2 - \frac{3}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR + \frac{3}{4}vR^3 + \frac{1}{6}v^2R^2$; diſtantia Centri gravitatis à βbK, $\frac{1}{2}a + \frac{3asR + asv - 6vR^2 - v^2R}{6eR-2sv}$; ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a - \frac{3asR + asv - 6vR^2 - v^2R}{6eR-2sv}$.

H. Aciemque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$; momentum reſpectu TA, $\frac{1}{2}a^2R^2 - \frac{3}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR + \frac{3}{4}vR^3 + \frac{1}{4}v^2R^2$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}vR^3 + \frac{1}{4}asvR - \frac{1}{4}v^2R^2$; diſtantia Centri gravita-

L. tis à TA, $\frac{3}{4}R + \frac{v^2R - 2asv}{4a^2-8as+8vR}$; à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R - \frac{v^2R-2asv}{4a^2-8as+8vR}$: Momentum reſpectu bK, $2eR^3 - avR^2 + \frac{1}{6}a^3R$; reſpectu $A\alpha$, $-2eR^3 + 2avR^2 + \frac{1}{3}a^3R - a^2sR$; diſtantia Centri gravitatis à bK, $\frac{12eR^2 - 6avR + a^3}{3a^2 - 6as + 6vR}$; ab $A\alpha$, $\frac{-12eR^2 + 12avR + 2a^3 - 6a^2s}{3a^2-6as+6vR}$.

H. Aciemque habentis βbK; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R - vR^2$; momentum reſpectu TA, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{3}{4}vR^3 - \frac{1}{4}v^2R^2$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{4}vR^3 + \frac{1}{4}v^2R^2$; diſtantia Centri

L. gravitatis à TA, $\frac{1}{2}R - \frac{v^2R}{4a^2-8vR}$; à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}R + \frac{v^2R}{4a^2-8vR}$: Momentum reſpectu $A\alpha$, $2eR^3 - avR^2 + \frac{1}{6}a^3R$; reſpectu bK, $-2eR^3 + \frac{1}{3}a^3R$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{12eR^2 - 6avR + a^3}{3a^2-6vR}$; à bK, $\frac{-12eR^2+2a^3}{3a^2-6vR}$.

D. Ungulæ Trilinei b$\beta\tau$, aciem habentis TA; Magnitudo, $\frac{3}{4}aR^2 - \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}sbR$; momentum reſpectu TA, $\frac{11}{6}aR^3 - \frac{11}{6}sR^3 + \frac{1}{3}sbR^2 + \frac{1}{9}s^3R$, reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{9}s^3R$; diſtantia Centri gravitatis à TA, $\frac{22}{15}R + \frac{24sbR+20s^3}{225aR-225sR+45sb}$; à $\tau\alpha$, $\frac{8}{15}R - \frac{24sbR+20s^3}{225aR-225sR+45sb}$: Momen-

H. tum reſpectu bβ, $\frac{1}{2}a^2R^2 - \frac{3}{4}bR^3 + \frac{1}{6}b^2R^2$; reſpectu T$\tau$, $\frac{1}{2}a^2R^2 - \frac{3}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asbR + \frac{3}{4}bR^3 - \frac{1}{6}b^2R^2$; diſtantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a -$

$\frac{1}{2}\alpha - \frac{10bR^2 - b^2R - 5\alpha sR + \alpha sb}{10\alpha R - 10sR + 2sb}$; à $T\tau$, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{10bR^2 - b^2R - 5\alpha sR + \alpha sb}{10\alpha R - 10sR + 2sb}$. Fig. 169. 170.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{3}sbR$; momentum respectu TA, $\frac{1}{3}\alpha R^3 - \frac{1}{3}sR^3 - \frac{1}{9}s^3R$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}\alpha R^3 - \frac{1}{6}sR^3 - \frac{1}{3}sbR^2 + \frac{1}{18}s^3R$; distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{2}{3}R + \frac{4sb^2}{27\alpha R - 27sR - 9sb}$; à D.
$\tau\alpha$, $\frac{4}{3}R - \frac{4sb^2}{27\alpha R - 27sR - 9sb}$: Momentum respectu $b\beta$, $\frac{1}{4}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}bR^3 - \frac{1}{6}b^2R^2$; respectu $T\tau$, $\frac{1}{3}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}\alpha sR^2 - \frac{1}{4}\alpha sbR + \frac{3}{4}bR^3 + \frac{1}{6}b^2R^2$; distantia Centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{3\alpha sR + \alpha sb - 6bR^2 - b^2R}{6\alpha R - 6sR - 2sb}$; à $T\tau$, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{3\alpha sR + \alpha sb - 6bR^2 - b^2R}{6\alpha R - 6sR - 2sb}$. H.

Aciemque habentis $T\tau$; Magnitudo, $\frac{1}{2}\alpha^2R - \alpha sR + bR^2$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}\alpha sR^2 - \frac{1}{4}\alpha sbR + \frac{3}{4}bR^3 + \frac{1}{6}b^2R^2$; respectu TA, $\frac{1}{3}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}\alpha sR^2 + \frac{3}{4}bR^3 + \frac{1}{4}\alpha sbR - \frac{1}{6}b^2R^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R + \frac{b^2R - 2\alpha sb}{4\alpha^2 - 8\alpha s + 8bR}$; à TA, $\frac{3}{4}R - \frac{b^2R - 2\alpha sb}{4\alpha^2 - 8\alpha s + 8bR}$: Momentum respectu $b\beta$, $2\alpha R^3 - 2sR^3 - \alpha bR^2 + \frac{1}{6}\alpha^3R$; respectu $T\tau$, $-2\alpha R^3 + 2sR^3 + 2\alpha bR^2 + \frac{1}{3}\alpha^3R - \alpha^2sR$; distantia Centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{12\alpha R^2 - 12sR^2 - 6\alpha bR + \alpha^3}{3\alpha^2 - 6\alpha s + 6bR}$; à $T\tau$, $\frac{-12\alpha R^2 + 12sR^2 + 12\alpha bR + 2\alpha^3 - 6\alpha^2s}{3\alpha^2 - 6\alpha s + 6bR}$. H. L.

Aciemque habentis $b\beta$; Magnitudo, $\frac{1}{2}\alpha^2R - bR^2$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}bR^3 - \frac{1}{6}b^2R^2$; respectu TA, $\frac{1}{3}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}bR^3 + \frac{1}{6}b^2R^2$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R - \frac{b^2R}{4\alpha^2 - 8bR}$; à TA, $\frac{3}{4}R + \frac{b^2R}{4\alpha^2 - 8bR}$: Momentum respectu $T\tau$, $2\alpha R^3 - 2sR^3 - \alpha bR^2 + \frac{1}{6}\alpha^3R$; respectu $b\beta$, $-2\alpha R^3 + 2sR^3 + \frac{1}{3}\alpha^3R$; distantia Centri gravitatis à $T\tau$, $\frac{12\alpha R^2 - 12sR^2 - 6\alpha bR + \alpha^3}{3\alpha^2 - 6bR}$; à $b\beta$, $\frac{-12\alpha R^2 + 12sR^2 + 2\alpha^3}{3\alpha^2 - 6bR}$. H. L.

Ungulæ Parallelogrammi $b\beta\alpha B$, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}ab^2$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}b$; à TA, $2R - \frac{2}{3}b$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ab^3$; respectu TA, $ab^2R - \frac{1}{3}ab^3$: Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, seu $b\beta$, $\frac{1}{2}a$; momentum respectu $A\alpha$, vel $b\beta$, $\frac{1}{4}a^2b^2$. E. I.

Aciemque habentis TA; Magnitudo, $2abR - \frac{1}{2}ab^2 = 2aR^2 - \frac{1}{2}av^2$; momentum respectu TA, $\frac{8}{3}aR^3 - \frac{1}{3}av^3$; respectu $\tau\alpha$, $ab^2R - \frac{1}{3}ab^3$; distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{16R^3 - 2v^3}{12R^2 - 3v^2}$; à $\tau\alpha$, $2R - \frac{16R^3 - 2v^3}{12R^2 - 3v^2}$: Momentum respectu $A\alpha$, seu $b\beta$, $a^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2$; distantia Centri gravitatis, ab $A\alpha$, seu $b\beta$, $\frac{1}{2}a$. E. I.

Aciemque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2b$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}b$; à TA, $2R - \frac{1}{2}b$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2b^2$; respectu TA, $ab^2R - \frac{1}{4}a^2b^2$: Distantia Centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{1}{3}a$; ab $A\alpha$, $\frac{2}{3}a$; momentum respectu $b\beta$, $\frac{1}{6}a^3b$; respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}a^3b$. I. M.

Aciemque habentis $b\beta$; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2b$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}b$; à TA, $2R - \frac{1}{2}b$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2b^2$; respectu TA, $ab^2R - \frac{1}{4}a^2b^2$: Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{3}a$; à $b\beta$, $\frac{2}{3}a$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}a^3b$; respectu $b\beta$, $\frac{1}{3}a^3b$. I. M.

Eadem-

I. Eademque ab Ungulis b $\beta\alpha$ B, ad Ungulas b K A B, transferentur, substitutis ubique v pro b, & T A pro $\tau\alpha$, & vice versa.

Fig. 169, 170. Ungulæ Segmenti b B A, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}sbR-\frac{1}{2}ab^2$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}fR^3+\frac{1}{2}sbR^2-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{3}ab^3$; respectu T A, $\frac{2}{3}fR^3-ab^2R+\frac{1}{9}s^3R+\frac{1}{3}ab^3$; respectu b B, $\frac{5}{6}fR^3-\frac{3}{4}abR^2-\frac{1}{4}sbR^2-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{4}sb^2R+\frac{1}{6}ab^3$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{30fR^3+18sbR^2-4s^3R-12ab^3}{27fR^2+9sbR-18ab^2}$; à TA, $\frac{24fR^3-36ab^2R+4as^3R+12ab^3}{27fR^2+9sbR-18ab^2}$; à bB,

I. $\frac{30fR^3+18sbR^2-4s^3R-12ab^3}{27fR^2+9sbR-18ab^2}-b=v-\frac{24fR^3-36ab^2R+4s^3R+12ab^3}{27fR^2+9sbR-18ab^2}$: Momentum respectu b$\beta$, $-\frac{5}{8}a^2R^2+vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{2}a^2vR+\frac{1}{4}a^2s^2$; respectu A$\alpha$, $-\frac{5}{8}a^2R^2+\frac{5}{4}asR^2-vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2-\frac{1}{4}asvR+\frac{1}{2}a^2vR+\frac{1}{4}a^2s^2$; distantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a+\frac{8vR^3-5asR^2+s^2R^2+asvR}{-10eR^2+8avR-2svR+4as^2}$; ab A$\alpha$, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^3-5asR^2+s^2R^2+asvR}{-10eR^2+8avR-2svR+4as^2}$.

E. Aciemque habentis T A; Magnitudo, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$; Momentum respectu T A, $-\frac{5}{6}eR^3+\frac{4}{3}avR^2+\frac{1}{2}svR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{3}as^2v$; respectu $\tau\alpha$, $-\frac{2}{3}eR^3+\frac{2}{3}avR^2-\frac{1}{3}as^2R+\frac{1}{9}s^3R+\frac{1}{3}as^2v$; respectu bB, $\frac{5}{6}eR^3-\frac{1}{12}avR^2+\frac{3}{4}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R-\frac{1}{6}as^2v$; distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{-30eR^3+48avR^2+18svR^2-24as^2R-4s^3R-12as^2v}{-27eR^2+36avR+9svR-18as^2}$; à $\tau\alpha$, $\frac{-24eR^3+24avR^2-12as^2R+4s^3R+12as^2v}{-27eR^2+36avR+9svR-18as^2}$; à bB,

I. $\frac{30eR^3-3avR^2+27svR^2-12as^2R-5s^3R-6as^2v}{-27eR^2+36avR+9svR-18as^2}$: Momentum respectu b$\beta$, $-\frac{3}{8}a^2R^2+vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{2}a^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2$; respectu A$\alpha$, $-\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{3}{4}asR^2-vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{4}asvR+\frac{1}{2}a^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2$; distantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a+\frac{8vR^3-s^2R^2-3asR^2-asvR}{-6eR^2+8avR+2svR-4as^2}$; ab A$\alpha$, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^3-s^2R^2-3asR^2-asvR}{-6eR^2+8avR+2svR-4as^2}$.

E. Aciemque habentis b B; Magnitudo, $\frac{3}{4}eR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}eR^3+\frac{1}{12}avR^2+\frac{3}{4}svR^2-\frac{2}{3}as^2R+\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{6}as^2v$; respectu T A, $\frac{5}{6}eR^3-\frac{1}{12}avR^2+\frac{3}{4}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R-\frac{1}{6}as^2v$; respectu bB, $-\frac{5}{6}eR^3+\frac{5}{6}avR^2+\frac{1}{3}as^2R-\frac{11}{18}s^3R-\frac{1}{3}as^2v$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{24eR^3+3avR^2+27svR^2-24as^2R+5s^3R+6as^2v}{27eR^2+27svR-18as^2}$; à T A, $\frac{30eR^3-3avR^2+27svR^2-12as^2R-5s^3R-6as^2v}{27eR^2+27svR-18as^2}$; à

I. bB, $\frac{-30eR^3+30avR^2+12as^2R-22s^3R-12as^2v}{27eR^2+27svR-18as^2}$: Momentum respectu b$\beta$, $\frac{3}{8}a^2R^2+vR^3-\frac{7}{8}s^2R^2-\frac{1}{4}a^2s^2$; respectu A$\alpha$, $\frac{3}{8}a^2R^2-vR^3+\frac{7}{8}s^2R^2-\frac{3}{4}asR^2+\frac{3}{4}asvR-\frac{1}{4}a^2s^2$; distantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a+\frac{8vR^3-7s^2R^2+3asR^2-asvR}{6eR^2+6svR-4as^2}$; ab A$\alpha$, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^3-7s^2R^2+3asR^2-3asvR}{6eR^2+6svR-4as^2}$.

Aciem-

Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; momentum respectu τα, $-\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{2}{3}asR^2 - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$; respectu TA, $-\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$; distantia Ceutri gravitatis à τα, $\frac{3}{4}R - \frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}$; à TA, $\frac{3}{4}R + \frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}$; à bB, $\frac{3}{4}R - b - \frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}$; momentum respectu bB, $\frac{3}{8}a^2R^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{3}{4}asR^2 + \frac{3}{4}asvR - \frac{1}{4}a^2s^2$: Momentum respectu bβ, $-2eR^3 + avR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{6}a^3v$; respectu Aα, $2eR^3 - 2avR^2 - \frac{1}{3}a^3R + a^2sR + \frac{1}{3}a^3v$; distantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{-12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R + 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}$; ab Aα, $\frac{12eR^3 - 12avR^2 - 2a^3R + 6a^2sR + 2a^3v}{-3a^2R + 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}$. I. Fig. 169, 170. M.

Aciemque habentis bβ; Magnitudo, $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; momentum respectu τα, $-\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$; respectu TA, $-\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$; distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{3}{4}R - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}$; à TA, $\frac{3}{4}R + \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}$; à bB, $\frac{3}{4}R - b - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}$; momentum respectu bB, $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}a^2s^2$: Momentum respectu Aα, $-2eR^3 + avR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{6}a^3v$; respectu bβ, $2eR^3 - \frac{1}{3}a^3R + \frac{1}{3}a^3v$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{-12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}$; à bβ, $\frac{12eR^3 - 2a^3R + 2a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}$. I. M.

Pars Secunda.

Eademque in Ungulis Figuram Sinuum Rectorum, ejusque partes spectantibus; determinantur. N.

Nempe (retentis symbolis ut prius;)

Ungulæ ατκ, aciem habentis τα, Magnitudo $\frac{1}{8}R^2P$; momentum respectu τα, $\frac{4}{9}R^4$; distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{32R^2}{9P}$; à Tτ, vel Aα, $\frac{1}{4}P$; momentum respectu Tτ, vel Aα, $\frac{1}{32}R^2P^2$. N.

Aciemque habentis Tτ, vel Aα; Magnitudo, $\frac{1}{2}R^2P$; momentum respectu τα, $\frac{1}{32}R^2P^2$; distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{1}{16}P$: Momentum respectu Aciei suæ, $\frac{1}{4}R^2P^2 - 4R^4$; respectu extremi oppositi, $4R^4$; distantia Centri gravitatis ab acie sua, $\frac{1}{2}P - \frac{8R^2}{P}$; ab opposito extremo, $\frac{8R^2}{P}$. N. O.

Ungulæ αδκ, aciem habentis τα; Magnitudo, $\frac{1}{12}R^2P$; momentum respectu τα, $\frac{2}{3}R^4$; distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{32R^2}{9P}$: Momentum N. P.

Fig. 169, 170. respectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{128}R^2P^2 - \frac{1}{8}R^4$; respectu A$\alpha$, $\frac{1}{128}R^2P^2 + \frac{1}{8}R^4$; distantia Centri gravitatis à $\delta\kappa$, $\frac{1}{8}P - \frac{2R^2}{P}$; ab A$\alpha$, $\frac{1}{8}P + \frac{2R^2}{P}$.

O. Aciemque habentis $\delta\kappa$; Magnitudo, $\frac{1}{4}PR^2 - R^3$; momentum respectu Aα, $2R^4 - \frac{1}{4}R^3P$; respectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{16}R^2P^2 - 2R^4$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{8R^2 - RP}{P - 4R}$; à $\delta\kappa$, $\frac{P^2 - 32R^2}{4P - 16R}$:

P. Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{128}R^2P^2 - \frac{1}{8}R^4$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}P + \frac{1}{8}R = \frac{P^2 - 16R^2}{32P - 128R}$.

O. Aciemque habentis Aα; magnitudo, R^3; momentum respectu $\delta\kappa$, $2R^4 - \frac{1}{4}R^3P$; respectu Aα, $\frac{1}{4}R^3P - 2R^4$; distantia Centri gravitatis à $\delta\kappa$, $2R - \frac{1}{4}P$; ab Aα, $\frac{1}{4}P - 2R$:

P. Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{128}R^2P^2 + \frac{1}{8}R^4$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R + \frac{P^2}{128R}$.

N. Ungulæ $\alpha\beta\nu$, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{9}v^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4v^2R + 4s^2v}{9eR + 9sv}$:

P. Momentum respectu $\beta\nu$, $\frac{1}{8}efR^2$; respectu Aα, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR = \frac{1}{8}e^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$; distantia Centri gravitatis à $\beta\nu$, $\frac{efR}{2eR + 2sv}$; ab Aα, $\frac{e^2R + 2asv}{2eR + 2sv}$.

O. Aciemque habentis $\beta\nu$; Magnitudo, eR^2; momentum respectu Aα, $2vR^3 - asR^2$; respectu $\beta\nu$, $a^2R^2 - 2vR^3$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{2vR - as}{e}$; à $\beta\nu$, $\frac{a^2 - 2vR}{e}$:

P. Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}efR^2$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}f$.

O. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $-eR^2 + avR$; momentum respectu $\beta\nu$, $2vR^3 - asR^2$; respectu Aα, $-a^2R^2 + 2asR^2 + a^2vR - 2vR^3$; distantia Centri gravitatis à $\beta\nu$, $\frac{2vR^2 - asR}{-eR + av}$; ab A$\alpha$, $a - \frac{2vR^2 - asR}{-eR + av}$:

P. Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}e^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{e^2R + 2asv}{-8eR + 8av}$.

Q. Adeoque in expositis Ungulis, tum quæ figuram Sinuum Versorum, tum quæ figuram Sinuum Rectorum, earumque partes spectant; determinavimus tum Magnitudines & Momenta, tum & ipsa gravitatis Centra.

Quæque de Ungulis dicta sunt, ad solida conversione (perfecta vel imperfecta) descripta, facile transferentur.

Quodque in expositis factum est, ad alias portiones facile ampliabitur.

R. Quæque de Ungulis, Solidisque conversione factis, ex his figuris oriundis traduntur; ad ea quæ ex Protractis Contractisve figuris similiter oriuntur facile accommodantur.

Et quæ de Solidis figuram Sinuum rectorum unius quadrantis traduntur; eadem ad Solida figuram Chordarum semicirculi similiter respicientia, transferentur.

A. Distributis, (ut ad propositiones præcedentes,) tum Semicirculo ADα, in Sectores seu Triangula; tum Figura Sinuum Versorum A$\tau\alpha$, in Quadrilinea seu Parallelogramma, Sectoribus illis seu Triangulis correspondentia: Intelligatur, utrique insistere, Semiquadrantalis Ungula, aciem habens $\tau\alpha$.

Quarum quidem Ungularum, ea quæ vel toti semicirculo, vel ipsius sectori ut BαA, insistit; componi intelligatur ex infinitis numero Ungulis seu Pyramidulis, minutis

minutis illis Triangulis (ut αB, seu Y αP, &c.) incumbentibus: quarum communis vertex sit α punctum; Basesque super Triangulorum illorum basibus (ut Y P, &c.) erectæ altitudines habeant ipsis V α respectivis æquales. Fig. 169, 170.

Quæque Trilineo sive toti, sive ipsius Portioni, ut bβαA, (quæ Sectori BαA respondet) insistit; ex totidem Ungulis, quæ respectivis Parallelogrammis, βb, seu yδξp, &c. incumbunt; acies habentibus in τα recta continue jacentes, altitudines vero super ipsis y b p parallelogrammorum basibus (pro semiquadrantalis ungulæ ratione) ipsis V α (respective) earundem à τα distantiis æquales. Quæ quidem Ungulæ, sunt Cunei, seu Prismata basibus triangularibus (ipsis δy, ξp insistentibus) interjecta.

Sunt autem hæc Minuta Prismata, (utpote Semiquadrantales Ungulæ, parallelogrammorum quibus incumbunt, momentis respectu τα, æquales, seu Parallelepipedorum dimidia;) Pyramidularum illarum (respectivis Triangulis incumbentium, horumque momentis respectivis æqualium,) tum singula singulorum, tum omnia omnium, Sesquialtera, (per § C. prop. 17.) seu ut 3 ad 2. (& quidem Pyramis illa, est ad Parallelepipedum super eadem base æque altum, ut 1 ad 3; Cuneus vero, ut 1 ad 2: Estque $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, ut 3 ad 2.)

Cunei vero seu Prismatis cujusque, Distantia Centri gravitatis à τα (intellige, perpendiculare planum super τα erectum,) utpote eadem quæ est basium Triangularium quibus interjacet (per prop. 5. hujus;) est ad distantiam inde Centri gravitatis Pyramidis correspondentis (æque altæ) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{4}$, (per prop. 6. hujus.) Hoc est, ut 8 ad 9.

Ergo; (propter $\frac{3}{2} \times \frac{8}{9} = \frac{4}{3}$) Momentum Ungulæ seu Prismatis Parallelogrammo, ut βb, incumbentis; ad momentum correspondentis Ungulæ seu Pyramidis incumbentis Triangulo, ut αB; (respectu ejusdem τα;) est ut 4 ad 3, seu Sesquitertium. Et sic ubique.

Est itaque illius, quæ ex Prismatis componitur, Ungulæ, sive toti Aτα Trilineo, sive ipsius Portioni, ut bβαA vel bβδd, vel bβτ, &c. insistentis momentum; ad illius, quæ ex Pyramidulis componitur, Ungulæ, sive toti Semicirculo, sive ipsius correspondenti sectori, BαA, vel BαD, vel segmento αBα, insistentis momentum; ut 4 ad 3, seu Sesquitertium.

Est autem toti Semicirculo insistentis Ungulæ, aciem habentis τα, momentum respectu τα; $\frac{1}{16} R^3 P$; (per § T. prop. 16.) Adeoque Trilineo Aτα insistentis Ungulæ, (aciem habentis τα,) momentum respectu τα, (utpote istius Sesquitertium) $\frac{1}{12} R^3 P$. Et (propter magnitudinem $\frac{3}{8} R^2 P$, per § C. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{10}{9} R$: Adeoque, à T A, $\frac{8}{9} R$; ejusque momentum respectu T A, $\frac{1}{3} R^3 P$. B.

Eademque momenta ex Ungulæ toti Parallelogrammo A T τα insistentis momentis subducta, exhibent (mutatis mutandis) momenta Ungulæ aciem habentis T A; Nempe momentum Ungulæ totius Parallelogrammi A T τα (propter Aα $= 2R$, & τα vel T A $= \frac{1}{2} P$) aciem habentis τα; respectu aciei suæ, est $\frac{1}{6}$ Aαq $\times \frac{2}{3}$ Aα $\times$ τα $= \frac{4}{9} R^3 P$: Unde subductum momentum Ungulæ Trilinei Aτα, respectu τα; relinquit momentum Ungulæ Trilinei AτT, ungulam habentis τα, respectu τα; hoc est Ungulæ Trilinei Aτα (ipsi AτT similis & æqualis, inverso situ) aciem habentis T A, respectu ipsius T A, $\frac{11}{12} R^3 P$; adeoque (propter magnitudinem $\frac{5}{8} R^2 P$, per § C. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis ab acie sua $\frac{22}{15} R$; atque ab extremo opposito, $\frac{8}{15} R$; &, respectu hujus, momentum, $\frac{1}{3} R^3 P$.

Item; Ungulæ Sectoris BαA, aciem habentis τα, momentum respectu τα (per § W. prop. 16.) est $\frac{1}{4} a R^3 + \frac{1}{6} s R^3 - \frac{1}{4} s v R^2 - \frac{1}{12} s^3 R = \frac{1}{4} f R^3 + \frac{1}{4} s b R^2 - \frac{1}{12} s^3 R$. Ergo Ungulæ quadrilinei correspondentis bβαA, respectu τα, momentum (utpote istius Sesquitertium) $\frac{1}{3} f R^3 + \frac{1}{3} s b R^2 - \frac{1}{9} s^3 R = \frac{1}{3} f R^3 + \frac{1}{3} s b R^2 - \frac{1}{9} s b v R = \frac{1}{3} a R^3 + \frac{2}{9} s R^3 - \frac{1}{3} s v R^2 - \frac{1}{9} s^3 R$: Centrique gravitatis distantia à τα (propter magnitudinem $\frac{3}{4} a R^2 + \frac{3}{4} s R^2 - \frac{3}{4} s v R = \frac{3}{4} f R^2 + \frac{1}{4} s b R$, per § D. prop. 17.) $\frac{30 f R^2 + 18 s b R - 4 s^3}{27 f R + 9 s b} = \frac{10}{9} R + \frac{8 s b R - 4 s^3}{27 f R - 9 s b} = \frac{10}{9} R + \frac{8 s b R - 4 s b v}{27 f R + 9 s b} = \frac{10}{9} R + \frac{4 s b^2}{27 f R + 9 s b}$; Adeoque, à TA, $\frac{8}{9} R - \frac{4 s b^2}{27 f R + 9 s b}$. C.

ejusque,

ejusque, respectu T A, momentum, $\frac{2}{3} f R^3 + \frac{2}{9} s b R^2 - \frac{1}{9} s b^2 R = \frac{2}{3} f R^3 + \frac{1}{9} s^3 R$.

Idemque $\frac{2}{3} f R^3 + \frac{1}{9} s^3 R$, est momentum Ungulæ eidem $b\beta\alpha A$ insistentis; aciem habentis T A, respectu $\tau\alpha$, (propter altitudines & distantias ubique reciprocatas;) & (propter magnitudinem $\frac{3}{4} f R^2 - \frac{1}{4} s b R$, per § D. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{24 f R^2 + 4 s^3}{45 f R - 9 s b} = \frac{8}{15} R + \frac{24 s b R + 20 s^3}{225 f R - 45 s b}$; & à T A, $\frac{66 f R^2 - 18 s b R - 4 s^3}{45 f R - 9 s b} = \frac{22}{15} R - \frac{24 s b R + 20 s^3}{225 f R - 45 s b}$: Ejusque respectu T A, momentum, $\frac{11}{6} f R^3 - \frac{1}{2} s b R^2 - \frac{1}{9} s^3 R$.

D. Est autem, Semiquadrantalis Ungulæ toti $A\alpha\beta K$ quadrilineo insistentis aciem habentis $\tau\alpha$, (propter $A\alpha = 2R$, & $AK = \alpha\beta = a$,) momentum respectu $\tau\alpha$, (aut etiam, aciem habentis T A, momentum respectu T A,) $\frac{8}{3} a R^3$. Unde, si dematur momentum Ungulæ quadrilinei $b\beta\alpha A$, modo inventum, $\frac{2}{3} f R^3 + \frac{1}{2} s b R^2 - \frac{1}{9} s^3 R = \frac{2}{3} a R^3 + \frac{11}{6} s R^3 - \frac{1}{2} s v R^2 - \frac{1}{9} s^3 R$; relinquitur momentum, respectu $\tau\alpha$, Ungulæ insistentis Trilineo reliquo A b K, aciem habentis $\tau\alpha$, $\frac{11}{6} a R^3 - \frac{11}{6} s R^3 + \frac{1}{2} s v R^2 + \frac{1}{9} s^3 R = \frac{11}{6} e R^3 + \frac{1}{2} s v R^2 + \frac{1}{9} s^3 R$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{3}{4} e R^2 + \frac{1}{4} s v R$, per § E. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{66 e R^2 + 18 s v R + 4 s^3}{45 e R + 9 s v} = \frac{22}{15} R + \frac{24 s v R + 20 s^3}{225 e R + 45 s v}$; atque à T A, $\frac{8}{15} R - \frac{24 s v R + 20 s^3}{225 e R + 45 s v}$. Ideoque, ejusdem A b K Ungulæ aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu T A, $\frac{2}{3} e R^3 - \frac{1}{9} s^3 R$.

Idemque $\frac{2}{3} e R^3 - \frac{1}{9} s^3 R$, est momentum Ungulæ eidem A b K insistentis, aciem habentis T A, respectu $\tau\alpha$; (propter altitudines & distantias ubique reciprocatas:) Adeoque (propter magnitudinem $\frac{3}{4} e R^2 - \frac{1}{4} s v R$, per § E. prop. 17.) Centri gravitatis à $\tau\alpha$ distantia, $\frac{24 e R^2 - 4 s^3}{27 e R - 9 s v} = \frac{8}{9} R + \frac{8 s v R - 4 s^3}{27 e R - 9 s v} = \frac{8}{9} R + \frac{8 s v R - 4 s v b}{27 e R - 9 s v} = \frac{8}{9} R + \frac{4 s v^2}{27 e R - 9 s v}$; Atque, à T A, $\frac{10}{9} R - \frac{4 s v^2}{27 e R - 9 s v} = \frac{30 e R^2 - 18 s v R + 4 s^3}{27 e R - 9 s v}$; Ideoque ejusdem, respectu T A, momentum $\frac{5}{6} e R^3 - \frac{1}{3} s v R^2 + \frac{1}{9} s^3 R$.

Similiter ostendetur; Semiquadrantalis Ungulæ Trilineo $b\beta\tau$, aciem habentis T A, momentum respectu aciei suæ T A, $\frac{11}{6} \alpha R^3 - \frac{11}{6} s R^3 + \frac{1}{2} s b R^2 + \frac{1}{9} s^3 R$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3} \alpha R^3 - \frac{2}{3} s R^3 - \frac{1}{9} s^3 R$: Centrique gravitatis distantiam à TA esse $\frac{22}{15} R + \frac{24 s b R + 20 s^3}{225 \alpha R - 225 s R + 45 s b}$; atque à $\tau\alpha$, $\frac{8}{15} R - \frac{24 s b R + 20 s^3}{225 \alpha R - 225 s R + 45 s b}$.

Aciemque habentis $\tau\alpha$, momentum respectu T A, $\frac{2}{3} \alpha R^3 - \frac{2}{3} s R^3 - \frac{1}{9} s^3 R$; & respectu $\tau\alpha$, aciei suæ, $\frac{5}{6} \alpha R^3 - \frac{5}{6} s R^3 - \frac{1}{2} s b R^2 + \frac{1}{9} s^3 R$: Centrique gravitatis distantiam à T A, $\frac{8}{9} R + \frac{4 s b^2}{27 \alpha R - 27 s R - 9 s b}$: &, à $\tau\alpha$, $\frac{10}{9} R - \frac{4 s b^2}{27 \alpha R - 27 s R - 9 s b}$. Nam, eodem plane modo rectæ $\tau\alpha$ adjacet Trilineum $b\beta\tau$, atque (huic simile & æquale) Trilineum b K A rectæ A T: adeoque idem valet α, b, in illo, atque a, v, in hoc.

E. Deinde (per prop. 11. hujus § F.) si ex Ungulæ quadrilinei $b\beta\alpha A$, aciem habentis $\tau\alpha$, momento respectu $\tau\alpha$, auferatur Ungulæ Parallelogrammi $b\beta\alpha B$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$; relinquitur Ungula segmento b B A insistentis aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$.

Illa autem Parallelogrammi $b\beta\alpha B$ Ungula, aciem habentis $\tau\alpha$, est Prisma, oppositarum basium triangularium, rectis βb, αB insistentium: Cujus itaque Centri gravitatis distantia à $\tau\alpha$ (quippe eadem quæ basium triangularium, per prop. 5. hujus,) est $\frac{2}{3} \alpha V = \frac{2}{3} b$; adeoque à T A, $2R - \frac{2}{3} b$; Quæ, ductæ in magnitudinem $\frac{1}{2} \alpha b^2$ (per § F. prop. 17.) exhibent ejusdem momentum respectu aciei

suæ

fuæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ab^3 = \frac{8}{3}aR^3 - 4avR^2 + 2av^2R - \frac{1}{3}av^3 = \frac{8}{3}aR^3 - 2as^2R - \frac{2}{3}av^3$ Fig. 169.
$= \frac{8}{3}aR^3 - \frac{2}{3}avR^2 - \frac{4}{3}as^2R + \frac{1}{3}as^2v$: Et respectu TA, $ab^2R - \frac{1}{2}ab^3$. (Quod 170.
etiam erit momentum, respectu $\pi\alpha$, aciem habentis TA.)

Illud itaque (Ungulæ $b\beta\alpha B$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$,) ex Momento Ungulæ quadrilinei $b\beta\alpha A$, aciem item habentis $\tau\alpha$, respectu $\tau\alpha$, (nempe $\frac{2}{3}fR^3 + \frac{1}{3}sbR^2 - \frac{1}{6}s^3R = \frac{2}{3}aR^3 + \frac{11}{6}sR^3 - \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R$, per § C.) subductum: relinquit $-\frac{11}{6}aR^3 + \frac{11}{6}sR^3 + \frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{2}svR^2 + \frac{4}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}as^2v = \frac{5}{6}fR^3 + \frac{1}{2}sbR^2 - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}ab^3$, momentum Ungulæ Trilinei bBA, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu $\tau\alpha$; ejusque (propter magnitudinem, $-\frac{5}{4}aR^2 + \frac{5}{4}sR^2 + avR - \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 = \frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}sbR - \frac{1}{2}ab^2$ per § F. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, erit

$$\frac{-66eR^3 + 48avR^2 - 18svR^2 + 48as^2R - 4s^3R - 12as^2v}{-45eR^2 + 36avR - 9svR + 18as^2} =$$

$$\frac{30fR^3 + 18sbR^2 - 4s^3R - 12ab^3}{27fR^2 + 9sbR - 18ab^2};$$ à TA, $$\frac{24fR^3 - 36ab^2R + 4s^3R + 12ab^3}{27fR^2 + 9sbR - 18ab^2};$$

à bB, $$\frac{30fR^3 + 18sbR^2 - 4s^3R - 12ab^3}{27fR^2 + 9sbR - 18ab^2} - b = v - \frac{24fR^3 - 36ab^2R + 4s^3R + 12ab^3}{27fR^2 + 9sbR - 18ab^2}$$

$$= \frac{24eR^3 + 3avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R + 5s^3R + 6as^2v}{-45aR^2 + 45sR^2 + 36avR - 9svR + 18as^2}:$$ Adeoque ejusdem respectu TA momentum, $\frac{2}{3}fR^3 - ab^2R + \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{3}ab^3 = -\frac{2}{3}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{3}as^2v$; & respectu bB, $\frac{5}{6}fR^3 - \frac{3}{4}abR^2 - \frac{1}{4}sbR^2 - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{6}sb^2R + \frac{1}{4}ab^3 = \frac{2}{3}eR^3 + \frac{1}{12}avR^2 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R + \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{6}as^2v$.

Atque ex illo porro momento Ungulæ ipsi bBA insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu ipsius $\tau\alpha$; si subducatur Prismatis eidem bBA insistentis, altitudinem habentis $V\alpha = b$, momentum respectu ipsius $\tau\alpha$; hoc est, ipsius bBA, respectu ejusdem $\tau\alpha$, momentum in $b = 2R - v$, ductum; hoc est (per § F. prop. 17.) $-\frac{3}{4}eR^2 + avR - \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2$ in $b = 2R - v$; hoc est, $-\frac{3}{4}ebR^2 + avbR - \frac{1}{4}svbR + \frac{1}{2}as^2b = -\frac{3}{2}eR^3 + \frac{3}{4}evR^2 + 2as^2R - \frac{1}{4}s^3R - \frac{1}{2}as^2v$: Relinquitur Ungulæ eidem bBA insistentis, aciem habentis bB momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{2}{3}sR^3 + \frac{1}{12}avR^2 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R + \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{6}as^2v$. Adeoque (propter mag. $\frac{3}{4}eR^2 + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$, per § F, pr. 17.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $$\frac{24eR^3 + 3avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R + 5s^3R + 6as^2v}{27eR^2 + 27svR - 18as^2}$$

& à TA, $$\frac{30eR^3 - 3avR^2 + 27svR^2 - 12as^2R - 5s^3R - 6as^2v}{27eR^2 + 27svR - 18as^2};$$ atque

à bB, $$\frac{-30eR^3 + 30avR^2 + 12as^2R - 22s^3R - 12as^2v}{27eR^2 + 27svR - 18as^2}:$$ Ejusque momentum respectu TA, $\frac{5}{6}eR^3 - \frac{1}{12}avR^2 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R - \frac{1}{6}as^2v$: Et respectu bB, $-\frac{5}{6}eR^2 + \frac{5}{6}avR^2 + \frac{1}{3}as^2R - \frac{11}{18}s^3R - \frac{1}{3}as^2v$.

Idemque $\frac{5}{6}eR^3 - \frac{1}{12}avR^2 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R - \frac{1}{6}as^2v$, est momentum respectu bB, Ungulæ eidem bBA insistentis aciem habentis TA, (propter altitudines & distantias ubique reciprocatas:) Adeoque (propter magnitudinem, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$, per § F. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à bB $$\frac{30eR^3 - 3avR^2 + 27svR^2 - 12as^2R - 5s^3R - 6as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}:$$ Adeoque à TA, $$\frac{-30eR^3 + 48avR^2 + 18svR^2 - 24as^2R - 4s^3R - 12as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}$$

à $\tau\alpha$, $$\frac{-24eR^3 + 24avR^2 - 12as^2R + 4s^3R + 12as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}:$$ Ejusque respectu

 TA

Fig. 169, 170. TA momentum, $-\frac{2}{3}cR^3+\frac{2}{3}avR^2+\frac{1}{3}svR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{3}s^3R-\frac{1}{3}as^2v$; & respectu $\tau\alpha$, $-\frac{4}{3}cR^3+\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{3}as^2R+\frac{1}{3}s^3R+\frac{1}{3}as^2v$.

Illud autem, ejusdem Ungulæ, trilineo bBA insistentis aciem habentis TA, momentum, respectu ipsius TA, ex momento Ungulæ quadrilineo b$\beta\alpha$A insistentis aciem item habentis TA, respectu ejusdem TA, subductum; hoc est, ex $\frac{16}{3}fR^3-\frac{1}{3}sbR^2-\frac{1}{3}s^3R=\frac{16}{3}aR^3+\frac{2}{3}sR^3+\frac{1}{3}svR^2-\frac{1}{3}s^3R$, (per § C.) relinquit Ungulæ parallelogrammo b$\beta\alpha$B insistentis, aciem habentis TA, momentum respectu TA, $\frac{8}{3}aR^3-\frac{4}{3}avR^2+\frac{2}{3}as^2R+\frac{1}{3}as^2v=\frac{8}{3}aR^3-\frac{1}{3}av^3$.

Idem habetur, si ex Ungulæ parallelogrammi K$\beta\alpha$A, aciem habentis TA, momento respectu TA, $\frac{8}{3}aR^3$; subducatur parallelogrammi KbBA, (aciem item habentis TA,) momentum respectu TA, $\frac{1}{3}av^3$: Quippe quod restat, est Ungulæ Parallelogrammi b$\beta\alpha$B, aciem habentis TA, momentum respectu TA, $\frac{8}{3}aR^3-\frac{1}{3}av^3$; ut prius.

Adeoque, (propter magnitudinem, $2abR-\frac{1}{3}ab^3=2aR^2-\frac{1}{3}av^2$, per § F. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{16R^3-2v^3}{12R^2-3v^2}$; atque à $\tau\alpha$, $2R-\frac{16R^3-2v^3}{12R^2-3v^2}=\frac{8R^3-6v^2R+2v^3}{12R^2-3v^2}$; ejusque respectu $\tau\alpha$ momentum, $\frac{4}{3}aR^3-av^2R+\frac{1}{3}av^3=\frac{4}{3}aR^3-\frac{4}{3}avR^2+\frac{1}{3}as^2R-\frac{1}{3}as^2v=ab^2R-\frac{1}{3}ab^3$; ut etiam prius ostensum est.

Aut etiam ejusdem Ungulæ Parallelogrammo b$\beta\alpha$B insistentis, aciem habentis TA, magnitudo, momenta, & Centrum gravitatis, per se facile determinantur; est utique solidum ex Prismate, ejque super-imposito Cuneo constante; eidem b$\beta\alpha$B super eminentibus: Quorum utriusque separatim magnitudines, & Centra gravitatis, adeoque & momenta, facile determinantur; adeoque & aggregati ex utroque conflati.

F. Accedimus ad Ungularum Trilinei A$\tau\alpha$, ejusque partium, aciem habentium $\tau\alpha$ aut huic parallelam, momenta respectu Aα: Aciemque habentium Aα, momenta respectu $\tau\alpha$ aut parallelarum huic; quæque hinc dependent.

Si *Trilineo restituto*, seu *Figuræ Sinuum versorum*, A$\tau\alpha$, insistat Semiquadrantalis Ungula aciem habens $\tau\alpha$: Quæ rectis bβ, planum complentibus, insistunt plana Ungulam complentia, sunt (propter angulum Semiquadrantalem) Triangula Rectangula Isoscelia; ipsarum bβ, seu b, semiquadrata: Adeoque ipsa Ungula, (sive quæ toti A$\tau\alpha$, sive quæ ipsius portioni Ab$\beta\alpha$ insistit,) aggregatum omnium $\frac{1}{2}b^2$, eo spectantium. Eorumque ab Aα distantia est bB ($=a$) respective: Adeoque simul omnium, hoc est ipsius Ungulæ momentum, respectu Aα, est Aggregatum omnium $\frac{1}{2}ab^2$, eo spectantium, sumptis a arithmetice proportionalibus: Hoc est, Arcuum Arithmetice proportionalium in Semiquadrata Sinuum versorum, arcuum ad Semicirculum residuorum.

Quæ autem rectis bB, æqualiter ab invicem distantibus, planum similiter complentibus, insistunt plana Ungulam complentia, totidem erunt parallelogramma, quorum bases bB $=a$, & altitudines (propter angulum Semiquadrantalem) æquales eorum à $\tau\alpha$ distantiis respectivis, hoc est ipsis V$\alpha=b$ respective: Adeoque Ungula, sive quæ toti A$\tau\alpha$ Trilineo insistit, sive quæ ipsius Portioni AbB; est Aggregatum omnium ab, eo spectantium; sumptis AB, seu AV, hoc est v, arithmetice proportionalibus. Eorumque ab Aα distantia, $\frac{1}{2}$bB $=\frac{1}{2}a$ respective, (per prop. 2. hujus.) Adeoque simul omnium, hoc est ipsius Ungulæ, momentum respectu Aα; Aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2b$: Hoc est, Semiquadratorum arcuum sinibus versis arithmetice proportionalibus respondentium, in sinus versos arcuum ad semicirculum residuorum.

Hujusque Ungulæ aciem habentis $\tau\alpha$ momentum respectu Aα, idem est atque Ungulæ aciem habentis Aα momentum respectu $\tau\alpha$; propter magnitudines & distantias reciprocatas. Ut ad § H. prop. 16. ostensum est.

Nempe, si eidem Trilineo Restituto A$\tau\alpha$, Ungula insistat semiquadrantalis, aciem habens Aα: Quæ rectis bB insistunt plana, Ungulam complentia, erunt (propter angulum ad Aα semiquadrantalem) ipsarum bB Semiquadrata, seu $\frac{1}{2}a^2$; adeoque

adeoque ipsa Ungula, sive quæ toti $A\tau\alpha$, sive quæ illius Segmento A b B, insistit, est aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2$; sumptis A B, seu A V, hoc est v, arithmetice proportionalibus. Eorumque à $\tau\alpha$ distantia est $V\alpha = h$: Adeoque simul omnium, hoc est ipsius Ungulæ, momentum respectu $\tau\alpha$ est aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2 h$; sumptis v arithmetice proportionalibus. Atque eadem ratione, ejusdem respectu T A, erit Aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2 v$; propter singulorum planorum à T A distantiam, v respective. Fig. 169, 170.

Planaque ipsis b β insistentia, eandem Ungulam complentia, erunt rectangula b $\beta\alpha$, hoc est $a\,b$ respective; eorumque à $\tau\alpha$ distantia, $\frac{1}{2}h$: Adeoque Ungulæ aciem habentis A α, sive quæ toti $A\tau\alpha$, sive quæ ipsius portioni A b $\beta\alpha$ insistit, est aggregatum omnium $\frac{1}{2}a\,b^2$, eo spectantium; sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sed & eadem Ungula, si tertiis adhuc planis secetur, basi parallelis, æqualiter ab invicem distantibus: Erunt ea plana, (propter obliquam Ungulæ sectionem, adeoque plana superiora continue magis magisque ab A α deficientia,) æqualia ipsis $A\alpha\tau$, $x\xi\tau$, & sic deinceps, usque ad ultimum $f\varphi\tau$, seu ipsum τ punctum; si Ungulam totius $A\tau\alpha$ trilinei spectemus: Vel, si portionem A b $\beta\alpha$ spectemus; ipsis $A\alpha\beta$ b, $x\xi\beta$ b, & sic deinceps usque ad ipsam β b. Hoc est, in totius Trilinei Ungula; æqualia totidem $A\alpha\tau$ planis (hoc est, prismati ipsi $A\tau\alpha$ insistenti altitudinem habenti $\tau\alpha$,) demptis omnibus $A\,x\,\xi\,\alpha$, $A\,z\,\zeta\,\alpha$, &c. (hoc est, dempta contraria Ungula super eodem plano aciem habente $T\tau$.) Et similiter, in portione A b $\beta\alpha$; æqualia totidem A b $\beta\alpha$ planis (seu prismati A b $\beta\alpha$ altitudinem habenti ipsi $\alpha\beta$ æqualem) demptis omnibus $A\,x\,\xi\,\alpha$, $A\,z\,\zeta\,\alpha$, &c. eo spectantibus; hoc est, dempta Ungula contraria A b $\beta\alpha$ aciem habente b β. (Ut supra dictum est, § G. prop. 17.) Ergo, Ungulæ momentum, (sive totius Trilinei, sive portionis A b $\beta\alpha$,) respectu $\tau\alpha$; est Aggregatum Momenti planorum horum omnium. Quæ calculo facile exquirentur.

Est utique ejusmodi plani A b $\beta\alpha$ cujusvis momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}sbR = \frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}sbR$; per § D. prop. 17. Adeoque prismatis huic insistentis, altitudinem habentis $\beta\alpha = a$; $\frac{3}{4}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asbR$.

Item, *Omnia* $\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}sbR$, usque ad maximum $\frac{3}{4}AR^2 + \frac{3}{4}SR^2 + \frac{1}{4}SHR$, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) est ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis b β, momentum respectu $\tau\alpha$; (adeoque & aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu b β; propter altitudines & distantias reciprocatas, ut sæpius ante dictum est.)

Sunt autem *omnes a*, (arcus arithmetice proportionales,) usque ad A maximum, $\frac{1}{2}A^2$; per prop. 1. hujus. Ergo *Omn.* $\frac{3}{4}aR^2 := \frac{3}{8}A^2R^2$.

Item, *Omnes s*, (eorundem arcuum Sinus recti) sunt ipsum $\alpha\beta\nu$ Trilineum, hoc est VR, (per § O, Q, prop. 17.) Ergo, *Omn.* $\frac{3}{4}sR^2 := \frac{3}{4}VR^3$.

Et *Omnia sb*, sunt $VR^2 + \frac{1}{2}S^2R$, (ut ostensum est ad § A. prop. 18.) Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}sbR := \frac{1}{4}VR^3 + \frac{1}{8}S^2R^2$.

Ergo, *Omn.* $\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}sbR$: (hoc est, Ungulæ A b $\beta\alpha$ aciem habentis b β, momentum respectu $\tau\alpha$; vel aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu b β;) sunt $\frac{3}{8}A^2R^2 + VR^3 + \frac{1}{8}S^2R^2$; seu (restitutis minuscularum valoribus) $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$.

(Quod quidem, ex Prismatis respectu $\tau\alpha$ momento, modo reperto, $\frac{3}{4}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asbR = \frac{3}{4}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR$, subductum; relinquit Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis A α, momentum respectu $\tau\alpha$, (vel etiam aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu A α;) Nempe, $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$. Sed & idem (sine ope Prismatis) mox alio modo obtinebitur.)

Illud autem $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$ Momentum, per Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis b β, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R + vR^2$ (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R + \frac{2vR + s^2}{8vR + 4a^2}R$; adeoque à T A, $\frac{1}{4}R - \frac{2vR + s^2}{8vR + 4a^2}R$; ejusque respectu T A momentum, $\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$. Quod ipsum est aciem habentis TA, momentum respectu b β.

Idemque

Fig. 169, 170. Idemque $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$ momentum, per Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem, $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}sbR = \frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}svR$, (§ D. prop. 17. inventam,) diviſum; exhibet hujus Diſtantiam Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^2 - 5asR + s^2R + asv}{6aR + 10sR - 2sv}$; adeoque ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - 5asR + s^2R + asv}{6aR + 10sR - 2sv}$; ejuſque reſpectu A α, momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$: Idemque eſt momentum Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis A α, reſpectu $\tau\alpha$; prius exhibitum.

Quod quidem $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$ momentum, per Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis A α, magnitudinem, $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$ (per § H. prop. 17.) diviſum; exhibet hujus Diſtantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R - \frac{2vR^2 + s^2R + 2asv - 4asR}{4a^2 + 8as - 8vR}$; adeoque à TA, $\frac{1}{4}R + \frac{2vR^2 + s^2R + 2asv - 4asR}{4a^2 + 8as - 8vR}$; ejuſque, reſpectu TA, Momentum $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$: aciemve habentis T A, momentnm reſpectu A α.

Atque hoc demum $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$ momentum, per Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis T A, magnitudinem $\frac{1}{4}fR^2 - \frac{1}{4}sbR = \frac{1}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$ (§ D. prop. 17. inventam,) diviſum; exhibet hujus Diſtantiam Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - s^2R - 3asR - asv}{10aR + 6sR + 2sv}$; adeoque à b β; $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^2 - s^2R - 3asR - asv}{10aR + 6sR + 2sv}$: Ejuſque, reſpectu b β, momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; idem quod prius repertum eſt momentum aciem habentis b β, reſpectu T A.

G. Adeoque; Si totius A $\tau\alpha$ Ungulas ſpectemus; (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, $s = 0$;) Erit Ungulæ A $\tau\alpha$, aciem habentis T τ, magnitudo, $\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{32}R^2P^2 + 2R^4$; reſpectu T A, $\frac{1}{32}R^2P^2 + 2R^4$: Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R + \frac{4R^3}{P^2 + 16R^2}$; à TA, $\frac{1}{4}R - \frac{4R^3}{P^2 + 16R^2}$.

Aciemque habentis A α; Magnitudo, $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{32}R^2P^2 - 2R^4$; reſpectu T A, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$: Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R - \frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$ à T A, $\frac{1}{4}R + \frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{8}R^2P$; momentum reſpectu T τ; $\frac{3}{32}R^2P^2 + 2R^4$; reſpectu A α, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$: Diſtantia Centri gravitatis à T τ; $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{3P}$; ab A α, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{3P}$.

Aciemque habentis T A; Magnitudo $\frac{3}{8}R^2P$: Momentum reſpectu T τ, $\frac{3}{32}R^2P^2 + 2R^4$; reſpectu A α, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$: Diſtantia Centri gravitatis à T τ, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{5P}$; ab A α, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{5P}$.

Eademque per ſe poterant, eodem modo, calculo exquiri; quo Ungularum portionis A b $\beta\alpha$ momenta prius exquirebantur; quæque inde dependent.

H. Ex his item ſic traditis, Ungularum portionis b $\beta\tau$ momenta (quæque hinc dependent) haberi poterunt. Nempe; ex Momentis Ungularum totius Trilinei A $\tau\alpha$, ſubductis reſpectivis Ungularum portionis A b $\beta\alpha$, reſtant Momenta reſpectiva Ungularum b $\beta\tau$; ſive reſpectu ipſarum $\tau\alpha$, T A, ſive reſpectu ipſarum A α, T τ, &c. Atque ex cognitis aliquibus reliqua facile derivantur.

Sed & eadem poſſunt per ſe eodem modo exquiri, quo in ipſis A b $\beta\alpha$ factum eſt.

Eſt utique (per § E. prop. 17.) plani cujuſque b $\beta\tau$, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}sbR$; Adeoque *Omnia*, $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}sbR$, (hoc eſt, momenta planorum omnium Ungulam b $\beta\tau$, aciem habentem b β, complectium;) ſunt iſtius Ungulæ momentum.

Sed *Omnes* α, (arcus arithmetice proportionales, ab ipſo α, uſque ad maximum α ſeu $\tau\beta = \alpha$,) ſunt, (per prop. 1. hujus,) $\frac{1}{2}\alpha^2$. Ergo, *Omn.* $\frac{3}{4}\alpha R^2 := \frac{3}{8}\alpha^2R^2$.

Item

Item *Omnes* s, (eorundem arcuum Sinus recti,) sunt ipsum Trilineum $\tau\beta\nu$ $= bR$ (per § Q. prop. 17.) Ergo *Omn.* $-\frac{3}{4}sR^2 := -\frac{3}{4}bR^3$. Fig. 169, 170.

Item *Omnia* sb (ad b$\beta\tau$ spectantia) $\frac{1}{2}b^2R$, (per § A. prop. 18.) Ergo *Omn.* $-\frac{1}{4}sbR := -\frac{1}{8}b^2R^2$.

Ergo; *Omn.* $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}sbR$: (hoc est, Ungulæ b$\beta\tau$, aciem habentis bβ, momentum respectu $\tau\alpha$; seu aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu bβ;) $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}bR^3 - \frac{1}{8}b^2R^2 = \frac{3}{8}\alpha^2R^2 - bR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$; seu (propter $\alpha = \frac{1}{2}P - a$, & $b = 2R - v$,) $\frac{3}{32}R^2P^2 - \frac{3}{8}aR^2P + \frac{3}{8}a^2R^2 - 2R^4 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$.

Quod quidem, $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}bR^3 - \frac{1}{8}b^2R^2$ momentum, per Ungulæ b$\beta\tau$, aciem habentis bβ, magnitudinem $\frac{1}{2}\alpha^2R - bR^2$ (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem centri gravitatis distantiam à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R - \frac{b^2R}{4\alpha^2 - 8bR}$; adeoque à T A, $\frac{1}{4}R + \frac{b^2R}{4\alpha^2 - 8bR}$; ejusque respectu T A momentum, $\frac{1}{8}\alpha^2R^2 - \frac{1}{4}bR^3 + \frac{1}{8}b^2R^2$.

Idemque $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}bR^3 - \frac{1}{8}b^2R^2$ momentum, per Ungulæ b$\beta\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}sbR$ (per § E. prop. 17.) divisum; exhibet hujus distantiam centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{3\alpha sR + \alpha sb - 6bR^2 - b^2R}{6\alpha R - 6sR - 2sb}$; à T$\tau$, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{3\alpha sR + \alpha sb - 6bR^2 - b^2R}{6\alpha R - 6sR - 2sb}$.

Adeoque ejusdem Ungulæ b$\beta\tau$ (aciem habentis $\tau\alpha$) momentum respectu Tτ, $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}\alpha sR^2 - \frac{1}{4}\alpha sbR + \frac{3}{4}bR^3 + \frac{1}{8}b^2R^2$. Idemque est, aciem habentis Tτ, momentum respectu $\tau\alpha$.

Quod quidem $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}\alpha sR^2 - \frac{1}{4}\alpha sbR + \frac{3}{4}bR^3 + \frac{1}{8}b^2R^2$ momentum, per Ungulæ b$\beta\tau$, aciem habentis Tτ, magnitudinem, $\frac{1}{2}\alpha^2R - \alpha sR + bR^2$ (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R + \frac{b^2R - 2\alpha sb}{4\alpha^2 - 8\alpha s + 8bR}$; adeoque à T A, $\frac{1}{4}R - \frac{b^2R - 2\alpha sb}{4\alpha^2 - 8\alpha s + 8bR}$; ejusque, respectu T A, momentum, $\frac{1}{8}\alpha^2R^2 - \frac{1}{4}\alpha sR^2 + \frac{1}{4}bR^3 + \frac{1}{4}\alpha sbR - \frac{1}{8}b^2R^2$. Idemque est, aciem habentis T A, momentum respectu Tτ.

Atque hoc demum $\frac{1}{8}\alpha^2R^2 - \frac{1}{4}\alpha sR^2 + \frac{1}{4}bR^3 + \frac{1}{4}\alpha sbR - \frac{1}{8}b^2R^2$ momentum, per Ungulæ b$\beta\tau$ aciem habentis T A, magnitudinem, $\frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}sbR$ (per § E. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri gravitatis à Tτ, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{10bR^2 - b^2R - 5\alpha sR + \alpha sb}{10\alpha R - 10sR + 2sb}$; adeoque, à b$\beta$, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{10bR^2 - b^2R - 5\alpha sR + \alpha sb}{10\alpha R - 10sR + 2sb}$; ejusque, respectu b$\beta$, momentum, $\frac{1}{8}\alpha^2R^2 - \frac{1}{4}bR^3 + \frac{1}{8}b^2R^2$; idem quod aciem habentis bβ, momentum respectu T A, modo repertum.

Quæque de Ungulis b$\beta\tau$ hic dicta sunt; eadem omnino Ungulis A b K conveniunt; substitutis a pro α, v pro b, T A pro $\tau\alpha$, Aα pro Tτ, & vice versa. Quippe A b K portio, similiter adjacet rectis T A, Aα, atque τbβ rectis $\alpha\tau$, τT.

Solidorum autem, sive semisolidorum, respondentium magnitudo, ad magnitudinem Ungulæ correspondentis; eorumque momentum ad momentum hujus, (respectu ejusdem plani ad conversionis axem aciemque Ungulæ, recti;) est ut P vel $\frac{1}{2}P$, ad R. Distantiaque à planis ad conversionis axem, aciemve Ungulæ, rectis, utrobique eadem respective.

Deinde: Si ex Ungularum A b$\beta\alpha$ momentis, § F traditis; auferantur respectiva Ungularum B b$\beta\alpha$ momenta: habentur respectiva Momenta Ungularum A b B: & quæ hinc dependent. I.

Est autem Ungulæ B b$\beta\alpha$, aciem habentis bβ vel Aα, (propter magnitudinem $\frac{1}{2}a^2b$, per § I. prop. 17. Centrique gravitatis, in media longitudine positi, per prop. 2. distantiam à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}b$; adeoque à T A, $2R - \frac{1}{2}b$:) Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2b^2$; respectu T A, $a^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2$: Illudque $\frac{1}{4}a^2b^2$, (ob distantias & altitudines reciprocatas,) momentum etiam, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu bβ vel

Fig. 169, 170. Aα: Et $a^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2$, momentum etiam aciem habentis T A, reſpectu bβ vel Aα. Eſtque utriuſque horum, Diſtantia Centri gravitatis à bβ vel Aα, $\frac{1}{2}a$, per prop. 2. Magnitudo autem, aciem habentis $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ab^2$; aciemque habentis T A, $2abR - \frac{1}{2}ab^2$; (per § F. prop. 17.) Adeoque Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$; $\frac{2}{3}b$; à T A, $R - \frac{2}{3}b$.

Si itaque ex Ungulæ A b$\beta\alpha$, aciem habentis T A, momento reſpectu bβ; aciemve habentis bβ, momento reſpectu T A; $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$, (per § F.) Auferatur reſpectivum Ungulæ B b$\beta\alpha$ momentum, modo exhibitum, $a^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2 = a^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$: Relinquetur, Ungulæ A b B, aciem habentis T A, momentum reſpectu bβ; aciemve habentis bβ, momentum reſpectu T A; $-\frac{5}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$. Quod per Ungulæ A b B, aciem habentis T A, magnitudinem, $-\frac{3}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$, (per § F. prop. 17.) diviſum; exhibet ejuſdem diſtantiam Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - s^2R^2 - 3asR^2 - asvR}{-6eR^2 + 8avR + 2svR - 4as^2}$; ab A$\alpha$, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^3 - s^2R^2 - 3asR^2 - asvR}{-6eR^2 + 8avR + 2svR - 4as^2}$.

Item; ſi ex Ungulæ A b$\beta\alpha$, aciem habentis T A, momento reſpectu Aα; aciemve habentis Aα, momento reſpectu T A; $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$, (per § F.) Auferatur correſpondens momentum Ungulæ B b$\beta\alpha$, modo exhibitum, $a^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2 = a^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$: Relinquetur, Ungulæ A b B, aciem habentis T A, momentum reſpectu Aα; aciemve habentis Aα, momentum reſpectu T A; $-\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$.

Item; Si ex Ungulæ A b$\beta\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, momento reſpectu bβ; aciemve habentis bβ, momento reſpectu $\tau\alpha$; $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$, (per § F.) Auferatur correſpondens momentum Ungulæ B b$\beta\alpha$, modo exhibitum, $\frac{1}{4}a^2b^2 = a^2R^2 - a^2vR + \frac{1}{4}a^2v^2 = a^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$: Relinquitur, Ungulæ A b B, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu bβ; aciemve habentis bβ, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{5}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$. Quod, per Ungulæ A b B, aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}sbR - \frac{1}{2}ab^2 = -\frac{3}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 + avR - \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2$, (per § F. prop. 17.) diviſum; exhibet ejuſdem Diſtantiam Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - 5asR^2 + s^2R^2 + asvR}{-10eR^2 + 8avR - 2svR + 4as^2}$; ab A$\alpha$, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^3 - 5asR^2 + s^2R^2 + asvR}{-10eR^2 + 8avR - 2svR + 4as^2}$. Idemque, per ungulæ A b B, aciem habentis bβ, magnitudinem, $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$, (per § I. prop. 17.) diviſum; exhibet hujus Ungulæ diſtantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}$; à T A, $\frac{3}{4}R + \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}$: Adeoque, à b B, $\frac{3}{4}R - b(= v - \frac{3}{4}R) - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}$. Et propterea ejuſdem, reſpectu b B, momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}a^2s^2$. Idemque eſt Ungulæ A b B, aciem habentis b B, momentum reſpectu bβ. Quod itaque per hujus magnitudinem, $\frac{3}{4}aR^2 - \frac{3}{4}sR^2 + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$ (per § F. prop. 17.) diviſum; exhibet hujus Ungulæ A b B, aciem habentis b B, diſtantiam Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - 7s^2R^2 + 3asR^2 - 3asvR}{6eR^2 + 6svR - 4as^2}$; adeoque ab A$\alpha$, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^3 - 7s^2R^2 + 3asR^2 - 3asvR}{6eR^2 + 6svR - 4as^2}$; ejuſque reſpectu A$\alpha$ momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2 - vR^3 + \frac{7}{8}s^2R^2 - \frac{3}{4}asR^2 + \frac{3}{4}asvR - \frac{1}{4}a^2s^2$: quod etiam (propter altitudines & diſtantias reciprocatas) eſt Ungulæ A b B, aciem habentis Aα, momentum reſpectu b B.

Item; ſi ex Ungulæ A b$\beta\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, momento reſpectu Aα, aciemve habentis Aα, momento reſpectu $\tau\alpha$; $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$ (per § F.) Auferatur correſpondens Ungulæ B b$\beta\alpha$ momentum, modo exhibitum, $\frac{1}{4}a^2b^2 = a^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$: Relinquetur, Ungulæ A b B, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu Aα; aciemve habentis Aα, momentum reſpectu

respectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{3}{4}asR^2-vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2-\frac{1}{4}asvR+\frac{1}{2}a^2vR+\frac{1}{4}a^2s^2$. Fig.
Quod, per Ungulæ AbB, aciem habentis Aα, magnitudinem, $-\frac{1}{2}a^2R+asR$ 169,
$-vR^2+\frac{1}{2}a^2v$, (per § I. prop. 17.) divisum; exhibet hujus distantiam Centri 170.
gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R-\dfrac{2asvR+a^2vR-2vR^3+s^2R^2-2a^2s^2}{-4a^2R+8asR-8vR^2+4a^2v}$; à TA,
$\frac{5}{4}R+\dfrac{2asvR+a^2vR-2vR^3+s^2R^2-2a^2s^2}{-4a^2R+8asR-8vR^2+4a^2v}$: Adeoque à bB, $\frac{5}{4}R-b$
$(=v-\frac{3}{4}R)-\dfrac{2asvR+a^2vR-2vR^3+s^2R^2-2a^2s^2}{-4a^2R+8asR-8vR^2+4a^2v}$. Et propterea,
ejusdem respectu bB momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2-vR^3+\frac{3}{8}s^2R^2-\frac{3}{4}asR^2+\frac{3}{4}asvR$
$-\frac{1}{4}a^2s^2$; ut prius. Atque hinc etiam, regrediendo, reliqua quæ Ungulam AbB aciem habentem bB spectantia modo tradebantur, similiter derivari poterunt.

Sed & hæc omnia Momenta Ungularum AbB, (quæque hinc dependent,) similiter haberi possent, ex Ungulis AKbB, subductis respectivis Ungulis AbK. Habentur autem Ungularum AKbB momenta, reliquaque inde dependentia, eodem plane modo quo Ungularum Bb$\beta\alpha$: substitutis ubique v pro b, & TA pro $\tau\alpha$, & vice versa. Quæ monuisse sufficiat.

Restat, ut Ungularum acies habentium Aα, (aut huic parallelas,) momenta K.
respectu acierum suarum (rectarumque his parallelarum) ostendam; & Centrorum gravitatis inde distantias.

Si intelligatur portioni Ab$\beta\alpha$ semiquadrantalis Ungula insistere aciem habens bβ; quæ hanc complent plana ipsi A$\tau\alpha$ parallela, sunt ipsa Ax$\xi\chi$, Az$\zeta\alpha$, &c. usque ad Ab$\beta\alpha$; seu Omnia Ab$\beta\alpha$, eo spectantia, ut ad § F. ostensum est: Adeoque, & eorum omnium, respectu Aα, momenta; hoc est, (per § H. prop. 17.) *Omnia*, $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$, eo spectantia, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) est ipsum Ungulæ Ab$\beta\alpha$ aciem habentis bβ, momentum respectu Aα; aut etiam (propter altitudines & distantias reciprocatas) aciem habentis Aα, momentum respectu bβ.

Sunt autem *Omnia* a^2, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{3}a^3$; per prop. 1. hujus. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R$: $=\frac{1}{6}a^3R$.

Et *Omnia* as, (hoc est, momentum respectu Aα omnium $\beta\nu$, trilineum $\alpha\beta\nu$ complentium;) sunt, $-eR^2+avR$, per § Q. prop. 17. Adeoque, *Omn.* asR: $=-eR^3+avR^2$.

Item, *Omnes* v, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) hoc est, ipsum AbK trilineum, est eR; per § B. prop. 17. Adeoque *Omn.* $-vR^2$: $=-eR^3$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$; hoc est, momentum Ungulæ Ab$\beta\alpha$ aciem habentis bβ respectu Aα; aciemve habentis Aα momentum respectu bβ; est, $-2eR^3+avR^2+\frac{1}{6}a^3R$.

Hoc itaque momentum, per Ungulæ Ab$\beta\alpha$, aciem habentis bβ, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R+vR^2$, (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis ab Aα, $a-\dfrac{12eR^2+2a^3}{3a^2+6vR}$: Adeoque, à b$\beta$, $\dfrac{12eR^2+2a^3}{3a^2+6vR}$: Et propterea; ejusdem, respectu bβ, momentum, $2eR^3+\frac{1}{3}a^3R$.

Idemque $-2eR^3+avR^2+\frac{1}{6}a^3R$ momentum, divisum per Ungulæ Ab$\beta\alpha$ aciem habentis Aα, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$ (per § H. prop. 17.) exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis à bβ, $\dfrac{-12eR^2+6avR+a^3}{3a^2+6as-6vR}$; Adeoque ab A$\alpha$, $\dfrac{12eR^2-12avR+2a^3+6a^2s}{3a^2+6as-6vR}$; & propterea, ejusdem, respectu Aα, momentum (seu *Omnia* a^2b eo spectantia,) $2eR^3-2avR^2+\frac{1}{3}a^3R$ $+a^2sR$.

Et quidem si totius A$\tau\alpha$ Ungulam spectemus; erit (propter $a=\frac{1}{2}P$, $v=2R$, & $s=0$;) aciem habentis Tτ, momentum respectu Aα; aciemve habentis Aα momentum respectu Tτ, $\frac{1}{48}RP^3$. Adeoque (propter illius magnitudinem $\frac{1}{8}RP^2$ $+2R^3$; hujusque $\frac{1}{8}RP^2-2R^3$, per § G. prop. 17.) erit, Aciem habentis Tτ

Fig. 169, 170. Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{P^3}{6P^2+96R^2} = \frac{1}{2}P - \frac{8R^2P}{3P^2+48R^2}$; à T$\tau$, $\frac{1}{2}P + \frac{8R^2P}{3P^2+48R^2}$; ejusque, respectu T$\tau$, momentum, $\frac{1}{24}RP^3 + R^3P$.

Aciemque habentis Aα, Distantia Centri gravitatis à Tτ, $\frac{P^3}{6P^2-96R^2} = \frac{1}{2}P + \frac{8R^2P}{3P^2-48R^2}$; ab A$\alpha$, $\frac{1}{2}P - \frac{8R^2P}{3P^2-48R^2}$; hujusque, respectu A$\alpha$, momentum, $\frac{1}{24}RP^3 - R^3P$.

L. Si autem ex Ungularum parallelogrammi AK$\beta\alpha$ momentis, auferantur respectiva momenta Ungularum Ab$\beta\alpha$; habentur Ungularum AbK momenta respectiva.

Est autem Ungulæ AK$\beta\alpha$ aciem habentis Kβ, vel Aα, (utpote Prismatis, oppositarum basium triangularium,) magnitudo, $\frac{1}{2}a^2 \times 2R = a^2R$; ejusque ab acie sua Distantia Centri gravitatis, $\frac{2}{3}a$; à termino opposito, $\frac{1}{3}a$. Adeoque Aciem habentis bβ momentum respectu Aα, vel aciem habentis Aα momentum respectu bβ, est $\frac{1}{3}a^3R$: Aciemque habentis bβ momentum respectu ipsius bβ; aciemve habentis Aα, respectu ipsius Aα, momentum $\frac{2}{3}a^3R$.

Ex his itaque; si subducantur respectiva Ungularum Ab$\beta\alpha$ momenta, § K. tradita: Relinquuntur Ungularum AbK momenta respectiva.

Nempe; Ungulæ AbK aciem habentis βbK; momentum respectu Aα; aciemve habentis Aα, momentum respectu βbK; $2eR^3 - avR^2 + \frac{1}{3}a^3R$. Adeoque (propter illius magnitudinem, $\frac{1}{2}a^2R - vR^2$; hujus $\frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$; per § H. prop. 17.) Aciem habentis βbK, Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{12eR^2 - 6avR + a^3}{3a^2 - 6vR}$; adeoque à βbK, $\frac{-12eR^2 + 2a^3}{3a^2 - 6vR}$: Aciemque habentis A$\alpha$, Distantia Centri gravitatis à βbK, $\frac{12eR^2 - 6avR + a^3}{3a^2 - 6as + 6vR}$; adeoque ab A$\alpha$, $\frac{-12eR^2 + 12avR + 2a^3 - 6a^2s}{3a^2 - 6as + 6vR}$.

Aciemque habentis βbK, momentum respectu βbK, $-2eR^3 + \frac{2}{3}a^3R$; Aciemque habentis Aα momentum respectu Aα, $-2eR^3 + 2avR^2 + \frac{2}{3}a^3R - a^2sR$.

Quæque de Ungulis AbK dicta sunt; eadem Ungulis τbβ, accommodantur, substitutis α pro a, b pro v; & Tτ, pro Aα. Quippe similiter adjacet rectis τT, $\tau\alpha$, ipsum τbβ; atque ipsum AbK, rectis Aα, AT.

Nempe, Ungulæ τbβ, aciem habentis βbK, momentum respectu Tτ; aciemve habentis Tτ, momentum respectu βbK; $2\alpha R^3 - 2sR^3 - \alpha bR^2 + \frac{1}{3}\alpha^3R$: Aciem habentis βbK momentum respectu βbK, $-2\alpha R^3 + 2sR^3 + \frac{2}{3}\alpha^3R$: Aciemque habentis T$\tau$, respectu ipsius T$\tau$, $-2\alpha R^3 + 2sR^3 + 2\alpha bR^2 + \frac{2}{3}\alpha^3R - \alpha^2sR$: Et Aciem habentis βbK, Distantia Centri gravitatis à Tτ, $\frac{12\alpha R^2 - 12sR^2 - 6\alpha bR + \alpha^3}{3\alpha^2 - 6bR}$; à βbK, $\frac{-12\alpha R^2 + 12sR^2 + 2\alpha^3}{3\alpha^2 - 6bR}$; Aciemque habentis T$\tau$, distantia Centri gravitatis à βbK, $\frac{12\alpha R^2 - 12sR^2 - 6\alpha bR + \alpha^3}{3\alpha^2 - 6\alpha s + 6bR}$; à T$\tau$, $\frac{-12\alpha R^2 + 12sR^2 + 12\alpha bR + 2\alpha^3 - 6\alpha^2 s}{3\alpha^2 - 6\alpha s + 6bR}$.

Sed & earundem Ungularum τbβ momenta, haberi poterunt; ex Ungularum totius A$\tau\alpha$ momentis, subductis momentis respectivis Ungularum Ab$\beta\alpha$: Restabunt utique momenta respectiva Ungularum τbβ; quæ & ad alias, ut opus fuerit, rectas facile transferentur.

M. Ex momentis autem Ungularum Ab$\beta\alpha$; si subducantur respectiva Ungularum b$\beta\alpha$B momenta; habentur momenta respectiva Ungularum AbB.

Est autem Ungulæ b$\beta\alpha$B, aciem habentis bβ, vel Bα, (utpote Prismatis,) magnitudo, $\frac{1}{2}a^2 \times b = \frac{1}{2}a^2b$; ejusque ab acie sua Distantia Centri gravitatis, $\frac{2}{3}a$; à termino opposito, $\frac{1}{3}a$. Adeoque aciem habentis bβ momentum respectu Aα; aciemve

aciemve habentis A α, momentum respectu b β; $\frac{1}{6}a^3b = \frac{1}{3}a^3R - \frac{1}{6}a^3v$. Aciemque habentis b β, momentum respectu b β; aciemve habentis A α, respectu A α, momentum, $\frac{1}{3}a^3b = \frac{2}{3}a^3R - \frac{1}{3}a^3v$. Fig. 169, 170.

Hæc itaque, ex respectivis momentis Ungularum A b $\beta\alpha$ (§ K. inventis,) subducta; relinquunt respectiva Ungularum A b B momenta.

Nempe; Ungulæ A b B, aciem habentis b K, momentum respectu A α, aciemve habentis A α, momentum respectu b K; $-2eR^3 + avR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{6}a^3v$: Aciemque habentis b K momentum respectu b K, $2eR^3 - \frac{1}{3}a^3R + \frac{1}{3}a^3v$: Aciemque habentis A α, momentum respectu A α, (hoc est, *Omn.* $\frac{1}{3}a^3$, eo spectantia,) $2eR^3 - 2avR^2 - \frac{1}{3}a^3R + a^2sR + \frac{1}{3}a^3v$.

Adeoque, (propter illius magnitudinem, $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; hujusque $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; per § I. prop. 17.) Ungulæ A b B, aciem habentis b β, Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{-12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}$; à b$\beta$, $\frac{12eR^3 - 2a^3R + 2a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}$: Aciemq; habentis A$\alpha$. Distantia Centri gravit. à bK, $\frac{-12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R + 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}$; ab A$\alpha$, $\frac{12eR^3 - 12avR^2 - 2a^3R + 6a^2sR + 2a^3v}{-3a^2R + 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}$.

N. Atque his, in Figuræ Sinuum versorum A $\tau\alpha$, ejusve partium, Ungulis, sic expeditis: Eadem opera, eadem in Figuræ Sinuum Rectorum $\alpha\tau\kappa$ expediuntur. Est enim (ut § M. prop. 17. ostensum est,) Figura Sinuum Rectorum Unius quadrantis $\alpha\delta\kappa$, eadem plane figura atque d D A, figuræ Sinuum versorum portio. Adeoque ex magnitudine, Momentis, Ungulisque, figuræ d D A (quæ figuræ A $\tau\alpha$ pars est,) & partium ejusdem; facile erit figuræ $\alpha\delta\kappa$, adeoque & $\alpha\tau\kappa$, partiumque illius, Magnitudines, Momenta, Ungulasque, quæque hinc dependent, derivare.

Vel etiam, sine ope figuræ A$\tau\alpha$, ejusve portionis d D A; possunt ipsius $\alpha\tau\kappa$, partiumque hujus, Ungulæ, (ut § Q. prop. 17. ostensum est,) earumque momenta, facile obtineri.

Cum enim rectæ $\beta\nu$, trilineum $\alpha\beta\nu$ complentes, sint arcuum arithmetice proportionalium (ipsis $\alpha\beta$ respective æqualium) sinus Recti: Quæ Ungulam $\alpha\beta\nu$ aciem habentem $\alpha\beta$ seu $\alpha\tau$, plana complent; sunt eorundem sinuum rectorum Semiquadrata; hoc est, *Omnia*, $\frac{1}{2}s^2$, eo spectantia: Quorum Semiquadratorum summa, seu ipsa $\alpha\beta\nu$ ungula aciem habens $\alpha\tau$, seu plani momentum respectu rectæ $\alpha\tau$, est $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$, per § Q. prop. 17. Atque eorundem semiquadratorum $\frac{1}{2}s^2$, seu planorum Triangulorum momentum respectu ipsius $\alpha\tau$, (propter $\frac{2}{3}s$, Distantiam Centri gravitatis a $\tau\alpha$, per prop. 6. hujus) sunt, *Omnia*, $\frac{1}{3}s^3$; (propter $\frac{1}{2}s^2 \times \frac{2}{3}s = \frac{1}{3}s^3$.) Aut etiam (propter $s^2 = vb$,) *Omn.* $\frac{1}{3}svb$. Hoc est, *Omn.* $\frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}sv^2$: sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omn.* s^3; (sumptis a arithmetice proportionalibus,) idem atque *Omn.* v^2R: (per § V. prop. 13.) seu *Omn.* s^2R, sumptis v arithmetice proportionalibus: Hoc est, duplum momenti (respectu A α) segmenti semicirculi A B V fig. 169. in R ductum; (sunt enim *Omn.* $\frac{1}{2}s^2$: sumptis v arithmetice proportionalibus, momentum illud:) Hoc est, (per § R. prop. 15.) $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR = \frac{1}{3}v^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$. Ergo; *Omn.* $\frac{1}{3}s^3 := \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$, seu $\frac{1}{9}v^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$, est Ungulæ $\alpha\beta\nu$ aciem habentis $\alpha\tau$, momentum respectu $\alpha\tau$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$, per § Q. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, est $\frac{4v^2R + 4s^2v}{9eR + 9sv}$.

Vel sic etiam; Sunt *Omn.* $\frac{1}{3}s^3 :=$ *Omn.* $\frac{1}{3}svb$; (propter B V, mediam proportionalem inter A V & V α; hoc est, s, inter v & b;) seu (propter $b = 2R - v$,) *Omn.* $\frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}sv^2$.

Sunt autem *Omn.* sv: (sumptis a arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{2}v^2R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$ (per § I. prop. 18.) Adeoque *Omn.* $\frac{2}{3}svR := \frac{1}{3}v^2R^2 = \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2$.

Fig. 169, 170. Item; *Omn.* $\frac{1}{3}sv^2 := \frac{1}{6}v^3 R = \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$, (per § I. prop. 18.) Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{3}sv^2 := -\frac{1}{6}v^3R = -\frac{2}{3}vR^3 + \frac{2}{3}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR$.

Ergo, *Omn.* $\frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}sv^2$: ($=$ *Omn.* $\frac{1}{3}svb :=$ *Omn.* $\frac{1}{3}s^3$:) Hoc est, momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\alpha\tau$, respectu ipsius $\alpha\tau$ rectæ, est, $\frac{1}{3}v^2R^2 - \frac{1}{6}v^3R$, hoc est, $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{2}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR$. ut prius. Atque hinc Distantia Centri gravitatis ab $\alpha\tau$ colligitur, ut prius.

Et, speciatim; Ungulæ $\alpha\delta\kappa$ aciem habentis $\alpha\tau$ momentum respectu ipsius $\alpha\tau$, (propter $v = s = R$; & $a = \frac{1}{4}P$,) est $\frac{3}{2}R^4$; ejusque magnitudo $\frac{1}{16}R^2P$; Centrique gravitatis ab $\alpha\tau$ distantia, $\frac{32R^2}{9P}$.

Ungulæque totius $\alpha\tau\kappa$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}R^4$; (ipsius $\alpha\delta\kappa$ duplum, propter duplam magnitudinem:) Distantiaque Centri gravitatis à $\tau\alpha$ eadem, nempe $\frac{32R^2}{9P}$: Et quidem (per prop. 5.) super ipsa $\delta\kappa$ recta; hoc est, à T τ, vel A α, $\frac{1}{4}P$; & propterea ejusdem respectu A α, seu T τ momentum, (propter magnitudinem $\frac{1}{8}R^2P$,) est $\frac{1}{32}R^2P^2$: Quod itidem est aciem habentis T τ, vel A α, momentum respectu $\tau\alpha$; propter altitudines & distantias reciprocatas. Adeoque (propter hujus magnitudinem $\frac{1}{2}R^2P$) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}P$.

O. Similiter; Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\beta\upsilon$, momentum respectu A α; sunt omnium planorum $\alpha\xi\upsilon$, $\alpha\zeta\upsilon$, &c. usque ad $\alpha\beta\upsilon$, (ungulam illam complentium) momenta respectu A α; hoc est (per § Q. prop. 17.) *Omn.* $-eR^2 + avR$: seu *Omn.* $-aR^2 + sR^2 + avR$, eo spectantia; sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omnes* a, (arcus arithmetice proportionales, eo spectantes;) $\frac{1}{2}a^2$, (per prop. 1. hujus:) adeoque *Omn.* $-aR^2 := -\frac{1}{2}a^2R^2$.

Et *Omnes* s (eo spectantes) hoc est, ipsum $\alpha\beta\upsilon$ planum, est vR, (per § Q. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $sR^2 := vR^3$.

Item *Omn.* av (sumptis a arithmetice proportionalibus,) sunt ipsius A b K plani, momentum respectu A α; hoc est, $\frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$, (per § H. prop. 17.) Adeoque, *Omn.* $avR := \frac{1}{2}a^2R^2 - asR^2 + vR^3$.

Ergo; *Omn.* $-aR^2 + sR^2 + avR := 2vR^3 - asR^2$. Quod itaque est Momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\beta\upsilon$, respectu A α; aciemve habentis A α, momentum respectu $\beta\upsilon$.

Quod quidem momentum, divisum per Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\beta\upsilon$, magnitudinem eR^2 seu $aR^2 - sR^2$, (per § Q. prop. 17.) exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis ab A α, $\frac{2vR - as}{a - s = e}$; adeoque à $\beta\upsilon$, $a - \frac{2vR - as}{a - s} = \frac{a^2 - 2vR}{a - s = e}$; ejusque propterea respectu $\beta\upsilon$ momentum, $a^2R^2 - 2vR^3$.

Idemque $2vR^3 - asR^2$, per Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis A α, magnitudinem $-eR^2 + avR$ (per § Q. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri gravitatis à $\beta\upsilon$, $\frac{2vR^2 - asR}{-aR + sR + av}$; adeoque ab A α, $a - \frac{2vR^2 - asR}{-aR + sR + av}$ $= \frac{-a^2R + 2asR + a^2v - 2vR^2}{-aR + sR + av = -eR + av}$; hujusque propterea, respectu A α, momentum, $-a^2R^2 + 2asR^2 + a^2vR - 2vR^3$.

Et, speciatim; Ungulæ $\alpha\delta\kappa$, aciem habentis $\delta\kappa$, momentum respectu A α; aciemve habentis A α, momentum respectu $\delta\kappa$; $2R^4 - \frac{1}{4}R^3P$: Ungulæque $\alpha\delta\kappa$ aciem habentis $\delta\kappa$, momentum respectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{16}R^2P^2 - 2R^4$: Aciemque habentis A α, momentum respectu A α, $\frac{1}{4}R^3P - 2R^4$. Centrique gravitatis, Ungulæ $\alpha\delta\kappa$, aciem habentis $\delta\kappa$, distantia ab A α, $\frac{8R^2 - RP}{P - 4R}$; à $\delta\kappa$, $\frac{P^2 - 32R^2}{4P - 16R}$: Aciemque habentis A α, distantia Centri gravitatis à $\delta\kappa$, $2R - \frac{1}{4}P$; ab A α, $\frac{1}{4}P - 2R$.

Ungulæ autem totius $\alpha\tau\kappa$ figuræ sinuum rectorum totius semicirculi, aciem habentis sive A α, sive T τ, (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, $s = 0$,) Magnitudo, $\frac{1}{2}R^2P$:

Momentum

Momentum respectu aciei suæ, $\frac{1}{4}R^2P^2 - 4R^4$; respectu termini oppositi, $4R^4$: Distantiaque Centri gravitatis ab acie sua, $\frac{1}{2}P - \frac{8R^2}{P}$; ab opposito termino, $\frac{8R^2}{P}$. Fig. 169, 170.

Ungulæque $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\beta\upsilon$, momentum respectu $\tau\alpha$; idem est atque omnium $\alpha\beta\upsilon$ planorum, ipsam complentium, respectu ejusdem $\tau\alpha$: Hoc est, (per § Q. prop. 17.) *Omn.* $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$: seu *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$: eo spectantia: sumptis a arithmetice proportionalibus. P.

Sunt autem *Omnes* a: (arithmetice proportionales,) $= \frac{1}{2}a^2$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 := \frac{1}{8}a^2R^2$.

Et *Omn.* s: (ut modo ostensum,) $= vR$. Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{4}sR^2 := -\frac{1}{4}vR^3$.

Item *Omn.* sv: (per § A. prop. 18.) $= \frac{1}{2}v^2R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{4}svR = \frac{1}{8}v^2R^2 = \frac{1}{4}vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR := \frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{8}s^2R^2$, seu $\frac{1}{8}efR^2$. Quod itaque est momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\beta\upsilon$, respectu $\tau\alpha$; Idemque (propter distantias & altitudines reciprocatas,) etiam aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\beta\upsilon$.

Hoc itaque momentum, per Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\beta\upsilon$ magnitudinem (modo dictam) eR^2, divisum; exhibet hujus, à $\tau\alpha$, distantiam Centri gravitatis, $\frac{1}{8}f = \frac{1}{8}a + \frac{1}{8}s$.

Idemque momentum, divisum per magnitudinem Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$ (per § Q. prop. 17.) exhibet Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\tau\alpha$, Distantiam Centri gravitatis à $\beta\upsilon$, $\frac{a^2R - s^2R = efR}{2aR - 2sR + 2sv}$; adeoque ab A$\alpha$, $\frac{a^2R - 2asR + s^2R + 2asv}{2aR - 2sR + 2sv} = \frac{e^2R + 2asv}{2eR + 2sv}$; & propterea, ejusdem respectu Aα momentum, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR = \frac{1}{8}e^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$: Quod ipsum (propter distantias & altitudines reciprocatas) est etiam momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis Aα, respectu $\tau\alpha$. Atque hoc demum per hujus magnitudinem (modo dictam) $-eR^2 + avR$, divisum; exhibet Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis Aα, distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{a^2R - 2asR + s^2R + 2asv}{-8aR + 8sR + 8av} = \frac{e^2R + 2asv}{-8eR + 8av}$.

Et speciatim, Ungulæ $\alpha\delta\kappa$, aciem habentis $\delta\kappa$, momentum respectu $\tau\alpha$; aciemve habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\delta\kappa$; (propter $a = \frac{1}{4}P$, & $s = v = R$,) $\frac{1}{128}R^2P^2 - \frac{1}{8}R^4$. Aciemque habentis $\tau\alpha$, momentum respectu Aα; aciemve habentis Aα, momentum respectu $\tau\alpha$; $\frac{1}{128}R^2P^2 + \frac{1}{8}R^4$. Item Aciem habentis $\delta\kappa$, Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}P + \frac{1}{8}R$: Aciemque habentis A$\alpha$, Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{P^2 + 16R^2}{128R} = \frac{1}{8}R + \frac{P^2}{128R}$: Aciemque habentis $\tau\alpha$, Distantia Centri gravitatis à $\delta\kappa$, $\frac{P^2 - 16R^2}{8P} = \frac{1}{8}P - \frac{2R^2}{P}$; ab A$\alpha$, $\frac{P^2 + 16R^2}{8P} = \frac{1}{8}P + \frac{2R^2}{P}$.

In Ungulis igitur expositis, tum quæ figuram Sinuum Versorum, tum quæ figuram Sinuum Rectorum, eorumque partes spectant; determinavimus tum Magnitudines, tum Momenta; & Centri gravitatis distantias, tum à plano per aciem perpendiculari, tum à plano ad aciem recto; atque in quo tertio per aciem plano constitutum sit, constat ex prop. 12. nempe in eo quæ Ungulæ altitudinem bisecat. Adeoque (per prop. 26. cap. præced.) ipsum in singulis gravitatis Centrum determinavimus. Q.

Quæ autem de Ungulis traduntur, eadem & Solidis conversione factis, eorumve Semisolidis, aliisve imperfecta conversione factis, facile accommodantur: per prop. 12, & 14. hujus. Nempe Semisolidi conversione facti, magnitudo, est ad correspondentem Ungulam Semiquadrantalem, ut $\frac{1}{2}P$ ad R: Ejusque Centri gravitatis distantia à plano quod conversionis Axi rectum sit; eadem est quæ Ungulæ à Plano aciei suæ recto: Adeoque momenta illius ad respectiva momenta hujus, respectu istius plani, sunt ut ipsæ magnitudines, nempe ut $\frac{1}{2}P$ ad R: Centrique gravitatis

Fig. 169, 170. gravitatis Semisolidi distantia à conversionis axe, ad illam Ungulæ ab acie sua; ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$: Semisolidique momentum respectu axis sui, ad illud Ungulæ respectu aciei suæ, (in ratione quæ ex magnitudinum & distantiarum rationibus componitur,) ut 2 ad 1. Ut in suis locis passim ostensum est.

Quæque de expositis Ungulis (sive quæ figuram Sinuum Versorum, sive quæ figuram Sinuum Rectorum spectant, eorumve partes,) dicta sunt: eadem ad alias (calculo rite adhibito) facile accommodantur.

R. Si autem pro figuris jam expositis A $\tau\alpha$, $\alpha\tau\alpha$; Protractæ Contractæve considerandæ veniant: Quoties rectæ bB in Calculum veniunt; pro a, substituenda erit alia quantitas quæ ad illam sit, ut $\tau\alpha$, ad $\frac{1}{4}P$; ut ad Propositiones præcedentes monitum est.

Quæque de solidis figuram Sinuum Rectorum Unius Quadrantis traduntur; eadem etiam ad Solida figuram Chordarum in Semicirculo spectantia transferentur; uti ad propositiones præcedentes monitum est.

PROP. XX.

A. Semicyclois, est, correspondentis Semicirculi Generantis, *Tripla*: Et
Fig. 166. Partes, Partium (respective sumptarum,) *Triplæ*. Puta A$\tau\alpha$ = 3ADα; & b$\beta\alpha$A = 3BαA. Et sic ubique.

C. Illorum vero Momenta, ad Momenta horum, respectu ejusdem $\tau\alpha$ Tangentis, ut 5 ad 2; seu *Dupla-sesquialtera*.

Atque hinc eadem respective determinantur, tum quod ad Magnitudines, tum quod ad Momenta, & Centra gravitatis, in Semicycloide; quæ supra in Semicirculo (prop. 15.) & in Figura Sinuum versorum, (prop. 17.) determinantur.

Nempe (retentis Symbolis ut in propositionibus præcedentibus)

B. C. H. Semicycloidis A$\tau\alpha$; magnitudo, $\frac{3}{4}RP$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}R^2P$; respectu TA, $\frac{7}{8}R^2P$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R$; à TA, $\frac{7}{6}R$: Momentum respectu Aα, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; respectu T$\tau$, $\frac{3}{16}RP^2 + \frac{4}{3}R^3$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{9P}$; à T$\tau$, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{9P}$.

B. C. H. Complementi Semicycloidis, AτT; Magnitudo, $\frac{1}{4}RP$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^2P$; respectu TA, $\frac{1}{8}R^2P$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{2}R$; à TA $\frac{1}{2}R$: Momentum respectu Aα, $\frac{1}{16}RP^2 + \frac{4}{3}R^3$; respectu T$\tau$, $\frac{1}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{3P}$; à T$\tau$, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{3P}$.

B. D. I. Portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$A, magnitudo $\frac{3}{2}fR$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{5}{12}sbR$; respectu TA, $\frac{9}{4}fR^2 - \frac{5}{12}sbR$; distantia Centri gravitatis a $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}R + \frac{5sb}{18f}$; à TA, $\frac{3}{2}R - \frac{5sb}{18f}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}s - \frac{4vR + 2s^2}{9a + 9s} = \frac{1}{2}f - \frac{4vR + 2s^2}{9f}$.

B. E. Segmenti Semicycloidis b$\beta\tau$, Magnitudo $\frac{3}{2}\alpha R - \frac{3}{2}sR$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{5}{12}sbR$; & respectu TA. $\frac{9}{4}\alpha R^2 - \frac{9}{4}sR^2 + \frac{5}{12}sbR$;

$+\frac{5}{12}sbR$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R-\frac{5sb}{18\alpha-18s}$; à TA, Fig. 166.
$\frac{5}{8}R+\frac{5sb}{18\alpha-18s}$: à $T\tau$, $\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}s+\frac{2b^2}{9\alpha-9s}$; momentum respectu I.
$T\tau$, $\frac{3}{4}a^2R-\frac{3}{2}\alpha sR+\frac{3}{4}s^2R+\frac{1}{3}b^2R$.

Trapezii $b\beta\alpha V$; Magnitudo $ab+\frac{1}{2}sb$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ab^2$ B.
$+\frac{1}{3}sb^2$; respectu TA, $2abR+sbR-\frac{1}{2}ab^2-\frac{1}{3}sb^2$; distantia Centri F.
gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3a+2s}{6a+3s}b$; à TA, $2R-\frac{3a+2s}{6a+3s}b$: Momentum re- K.
spectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}fab+\frac{1}{6}s^2b$; distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,
$\frac{3fa+s^2}{6a+3s}$.

Segmenti Semicycloidis, bVA; Magnitudo, $-\frac{1}{2}eR+av+\frac{1}{2}sv$: Mo- B.
mentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2+\frac{1}{3}s^3$; respectu F.
TA, $-\frac{1}{4}eR^2+avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{3}s^3$; & respectu bV, $\frac{1}{4}eR^2$
$+\frac{1}{2}avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{6}s^3$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$,
$\frac{-9eR^2+12avR+3svR+6as^2+4s^3}{-6eR+12av+6sv}$; à TA, $\frac{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3}{-6eR+12av+6sv}$;
à bV, $\frac{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3}{-6eR+12av+6sv}$: Momentum respectu $A\alpha$, K. L.
$-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{2}asR+\frac{1}{12}s^2R-\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{2}a^2v+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{6}s^2v$; distantia Cen-
tri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^2-3asR-s^2R-3asv-2s^2v}{-6aR+6sR+12av+6sv}$.

Trilinei AbK; Magnitudo, $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$: Momentum respectu TA, B.
$\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{6}s^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}eR^2+\frac{3}{4}svR+\frac{1}{6}s^3$; respectu bV, G.
$-\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{2}avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{3}s^3$: distantia Centri gravitatis à TA,
$\frac{1}{2}R-\frac{s^3}{3eR+3sv}$; à $\tau\alpha$, $\frac{3}{2}R+\frac{s^3}{3eR+3sv}$; à bV, $v-\frac{1}{2}R+\frac{s^3}{3eR+3sv}$:
Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{2}asR-\frac{1}{12}s^2R+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{3}s^2v$; K.
distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{8vR^2+3a^2R-6asR-s^2R+6asv+4s^2v}{6eR+6sv}$.

Adeoque exhibentur tum totius Semicycloidis, tum ejusdem Partium expositarum, Magnitudines, & Momenta respectu rectarum expositarum, ipsaque Centra gravitatis. M.

Quæ autem de Momentis hic tradita sunt; ad Ungularum magnitudines, & Solidorum conversione factorum, facile transferuntur. Et planorum hic consideratorum momenta, (propter data ipsa Centra gravitatis,) respectu rectarum aliarum, quocunque situ positarum, facile haberi possunt.

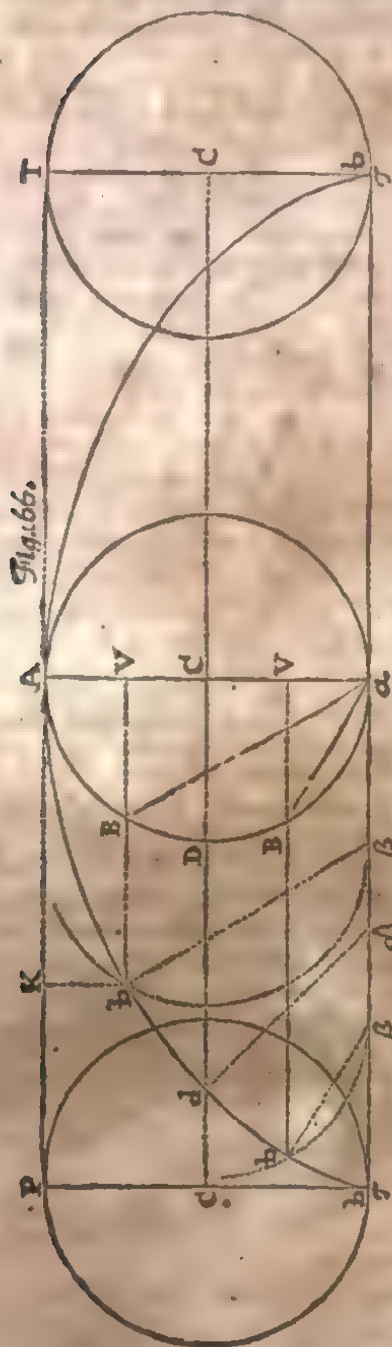
Eademque omnia quæ de his expositis Cycloidis portionibus traduntur; ad alias item, variis modis abscissas, facile erit accommodare; additionibus & subductionibus, prout res postulaverit, adhibitis.

Quæque de Cycloide primaria jam traduntur; Ad Cycloides Protractas & Contractas, facile transferuntur. N.

SI super $\tau\alpha$ recta, insistens Circulus (quem *Circulum Generantem*, seu *Genitorem* dicimus,) puncto sui b (quod *punctum lineans* appellabimus) rectam in A.
τ tangens; qui super eadem recta volvi intelligatur (motu continuo & æquabili) Fig. 166.

Fig. 166. peripheria sua (continua ad rectam applicatione) commensurans æqualem rectam $\tau\alpha\tau$, donec b punctum lineans, in sublime latum, (adeoque curvam suo motu describens b b,) circuitu facto, eandem $\tau\alpha\tau$ rectam, (in ejusdem altero extremo τ,) iterum contingat: (dum interim Centrum suum c, rectam c C c describat, ipsi $\tau\alpha\tau$ parallelam & æqualem :) Curvam b b descriptam, *Lineam Cycloidem* appellabimus : Rectam $\tau\alpha$, *Cycloidis Basin*: Figuram curva illa & Base comprehensam, $\tau\tau$ A, *Figuram Cycloidem* : Ejusque semissem $\tau\alpha$ A, *Semicycloidem* : Et bisecantem rectam (basi perpendicularem) α C A, *Cycloidis Axem*.

Cycloidis autem Nomen, quod spectat; Videtur (mihi saltem) *Cyclois* (hoc est, Græce Κυκλοὶς, Κυκλοΐδος,) potius quam *Cycloides* (hoc est, Κυκλοειδὴς, Κυκλοειδέος, contracte Κυκλοειδοῦς,) dicenda : utpote quæ non tam *Circulo similem*, quam *ex circulo oriundam*, lineam vel figuram indicat.



Manifestum autem est, (ex constructione Cycloidis,) non modo Peripheriam Circuli Generantis integram (propter continuam sui quæ supponitur ad rectam $\tau\alpha$ applicationem) ipsi $\tau\alpha$ æqualem esse; (adeoque semissem semissi, &c. puta curvam Semicirculi α B A, rectæ $\tau\alpha$, &c.) Sed &, particulatim, dum Circulus Genitor, Basin in β contingens, puncto suo lineante designat Cycloidis punctum b; rectam $\tau\beta$ (propter eandem continuam ἐφαρμογὴν) curvæ b β æqualem esse ; hoc est, (ducta recta b B V basi parallela, quæ occurrat in B Circulo Genitori circa Cycloidis Axem constituto, Axique in V,) curvæ α B : Adeoque, & reliquam reliquæ ; nempe rectam $\beta\alpha$, hoc est b B, ipsi B A curvæ. Et sic ubique.

Et propterea : Rectam b V, ubique æqualem esse, aggregato Arcus & Sinus recti, Sinui verso V A competentium; puta (retentis Symbolis propositionum præcedentium) $bV = BA + BV = a + s$. Atque hoc indifferenter, sive sit V punctum, supra C Centrum circuli Generantis, sive infra, sive denique in ipso C puncto.

Ductisque B α, b β, rectis ; sunt (per 33. El. 6. *Euclidis*) Anguli B α A, proportionales ipsis quibus insistunt Arcubus B A ; hoc est, rectis b B, seu $\beta\alpha$: Adeoque anguli B $\alpha\tau$, hoc est, b $\beta\tau$, arcubus B α, seu b β ; hoc est rectis $\beta\tau$. Nempe, (propter angulum in centro duplum Anguli in Peripheria, per 20. El. 3.) Ut $\tau\beta$ recta, hoc est arcus, β b, seu α B, ad Semiperipheriam α B A, vel huic æqualem rectam $\tau\alpha$; sic angulus b $\beta\tau$, hoc est B $\alpha\tau$, ad A $\alpha\tau$ rectum.

Fig. 167.

Divisa itaque $\tau\alpha$ in partes quotlibet æquales, in punctis φ, ι, δ, ζ, ξ, &c. ductisque, ab his punctis contactus ad punctum lineans, rectis φ f, ι e, δ d, ζ z, ξ x, &c. (quibus parallelæ sint in Semicirculo, α F, α E, α D, α Z, α X, &c. arcuum arithmetice proportionalium subtensæ) erunt, tum anguli f $\varphi\tau$, e $\iota\tau$, d $\delta\tau$, z $\zeta\tau$, x $\xi\tau$, &c. tum, his æquales, F $\alpha\tau$, E $\alpha\tau$, D $\alpha\tau$, Z $\alpha\tau$, X $\alpha\tau$, &c. arithmetice proportionales : Eorumque communis excessus, primo æqualis ; puta f $\varphi\tau$, vel F $\alpha\tau$. Nempe, ea pars anguli recti, quæ est $\tau\varphi$, totius $\tau\alpha$; seu arcus F α, semiperipheriæ α F A.

Divisis autem hoc modo, tum Semicycloide rectis f φ, e ι, d δ, &c. tum Semicirculo,

culo, rectis Fα, Eα, Dα, &c. in segmenta numero æqualia, singula singulis respective correspondentia: Ductisque insuper in Semicycloide, à punctis ξ, ζ, δ, &c. rectis ξπ, ζϱ, δσ, &c. quæ parallelæ sint rectis ζz, δd, εe, &c. Erunt anguli omnes xξπ, zζϱ, dδσ, &c. æquales, tum inter se, tum ipsi fφτ, tum cuilibet angulorum τα F, F α E, E α D, &c. qui item (propter æquales arcus α F, F E, E D, &c.) sunt inter se æquales. Fig. 167.

Ductis porro, tum in Semicycloide rectis xO, zp, dr, &c. tum in Semicirculo, XO, ZP, DR, &c. basi τα parallelis; inscribatur, tum Semicycloidi, figura ex Trapeziis; tum Semicirculo, Figura ex Triangulis correspondentibus constans.

Eruntque illa inscripta Trapezia, Triangulorum inscriptorum, singula singulorum respective sumptorum, (adeoque & omnia omnium,) plusquam Tripla.

Constat enim Trapeziorum illorum quodlibet, ex Triangulo simul & Parallelogrammo. Quorum illud est Triangulo sibi correspondenti in Semicirculo (fig. 167, seu 169.) ubique æquale; (quippe simili, & æque alto.) Hoc autem, illius plusquam duplum; utpote correspondenti in fig. 170. parallelogrammo æquale, (æque altum scilicet, & super æquali base;) quod respectivi Trianguli plusquam duplum esse, ad § A. prop. 17. ostensum est. Puta Triangulum πξp fig. 167, æquale Triangulo ZαP fig. 167 seu 169; & parallelogrammum zζξπ, fig. 167, æquale (utpote æque altum & super æquali base) Parallelogrammo correspondenti zζξπ fig. 170; quod Trianguli correspondentis ZαP plusquam duplum esse, ad § A. prop. 17. demonstratur: Adeoque Totum zζξp Trapezium, ejusdem πξp seu Zαp Trianguli plusquam Triplum. Et sic ubique.

Deinde continuatis rectis αX, αZ, αD, &c. ad Q, I, Y, &c. rectisque ξx, ζz, δd, &c. ad q, i, y, &c. rectisque ξπ, ζϱ, &c. ad ι, υ, &c. ductisque rectis tum AQq, XI, ZY, &c. tum xιi, zυy, &c. ipsi τα parallelis: Circumscribatur, tum Semicycloidi Figura ex Trapeziis, tum Semicirculo Figura ex Triangulis correspondentibus constans. Fig. 168.

Eruntque illa circumscripta Trapezia, circumscriptorum Triangulorum, singula singulorum respective sumptorum, (adeoque & omnia omnium,) minus quam Tripla.

Constat enim Trapeziorum horum quodlibet, ex Triangulo simul & parallelogrammo.

Fig. 168. grammo. Quorum quidem illud est Triangulo ad Semicirculum posito, ubique æquale, (utpote simili, & æque alto:) Hoc autem, illius minus quam duplum; utpote respectivo Parallelogrammo fig. 170. æquale, (cum æque altum sit, & super æquali base;) quod Trianguli respectivi minus quam duplum esse, ad § A. prop. 17. ostenditur. Puta, Triangulum ι ξ x fig. 168. æquale Triangulo I α X fig. 168, seu 169. Et Parallelogrammum i ζ ξ ι fig. 168. æquale Parallelogrammo i ζ ξ x fig. 170. adeoque minus quam Trianguli duplum, ut ad § A. prop. 17. ostenditur. Et propterea totum i ζ ξ x Trapezium, ejusdem I α X Trianguli minus quam Triplum. Ex sic ubique.

Fig. 166, 167, 168, 169. Cumque hæc ubique obtineant: Figura illa ex Trapeziis Inscripta sive toti Semicycloidi τ b A α, sive ipsius portioni, ut τ b β, aut β b A α, aut etiam β b d δ; (utrobique enim, sive de tota sive de parte, eodem modo procedit demonstratio;) Major est quam Tripla Figuræ ex Triangulis correspondentis, Inscriptæ, sive toti Semicirculo α B A, sive ipsius correspondenti portioni, ut α B α, aut α B A, aut etiam α B D α: Circumscripta vero, Circumscriptæ, Minor quam Tripla.

Cumque, multiplicatis Sectionibus, Inscriptæ & Circumscriptæ Differentia continue decrescat utrobique, donec tandem data quavis minor evadat: Nec tamen unquam Inscripta Inscriptæ Minor quam Tripla, nec Circumscripta Circumscriptæ Major quam Tripla, esse possit: Continuata in infinitum sectione, evanescet differentia; Inscriptis simul & Circumscriptis coincidentibus illic cum Semicycloide ejusve portione, hic cum Semicirculo hujusve portione correspondente: eritque propterea tum Semicyclois Semicirculi tripla, tum partes partium respective sumptarum.

Hoc est; tum Semicyclois τ b A α, Tripla Semicirculi α D A; tum istius Portio, b β α V A, sectoris hujus B α A; portioque reliqua τ b β, reliqui segmenti α β α; portioque β b d δ, sectoris B α D, Tripla. Et sic ubique. Quod erat primo loco probandum.

Fig. 166, 169, 170. Est utique *Semicyclois*, Figura ex *Semicirculo & Figura Sinuum Versorum* (*Arcuumve*) composita. Quippe Recta quælibet b B V fig. 166. æqualis duabus simul b B, B V, fig. 170, 169. Et quidem, si ex Semicycloidis Trapeziis singulis (fig. 167. vel 168.) eximi intelligantur sua respective Triangula; hoc est, ex Semicycloide quam constituunt illa numero infinita Trapezia, Semicirculus quem illa numero infinita Triangula, aut illis saltem æqualia, constituunt; (protrusis rectis b B, ad rectam A α; ut puncta B, V, congruant: Reliqua Parallelogramma (prius inclinata, jam exemptis Triangulis erecta,) eadem erunt cum parallelogrammis (fig. 170.) correspondentibus, figuram Sinuum Versorum Arcuumve complentibus. Quod itaque *Trilineum Restitutum* dicimus; propter parallelogramma, quæ in Semicycloide interpositis triangulis obliquabantur, in debitum situm restituta in Trilineo fig. 170. Quod quidem Trilineum aliud non est quam illud ipsum fig. 166, 167, 168. Trilineum A τ α D, (curva Cycloidis, & Semicirculi convexa, rectaque τ α, comprehensum,) in debitum situm, exempto Semicirculo, restitutum.

Atque in partibus similiter: Puta, ex Trapeziis Quadrilineum β b A α in Semicycloide constituentibus, exemptis Triangulis Sectorem Trilineum B α A constituentibus (vel his æqualibus;) reliqua Parallelogramma constituent Quadrilineum β b A α Trilinei restituti, aut huic æquale; Hoc est, in Semicycloide, Quinquilineum b β α B A (tribus rectis b β, β α, α B, & duabus curvis b A, B A, comprehensum;) vel Quadrilineum b β α D A fig. 166. (tribus curvis b β, b A, A D α, & recta β α, comprehensum;) Sectoris B α A duplum: Adeoque (quod ex utrisque componitur) Quadrilineum Cycloidis β b A α, (rectis A α, α β, β b, curvaque b A, comprehensum,) ejusdem Sectoris B α A, triplum. Et sic ubique. Similiter; Si ex Semicycloidis Segmento A b V, eximatur Segmentum Semicirculi A B V; relinquitur A b B fig. 166. = A b B fig. 170. Et sic ubique. Quod & de eorum Momentis respectu rectarum τ α, T A, aut aliarum hisce parallelarum, pariter intelligendum erit: Propter tum Magnitudines tum Distantias æquales. (Si vero ad A α, aliamve rectam quæ ipsis τ α, T A, parallela non sit, æstimentur momenta; secus erit: Quippe tum, æqualium Magnitudinum, Distantiæ inæquales erunt. Ut infra dicendum erit.)

Et quidem, ut, in Cycloide, recta b B V (aggregatum arcus & sinus recti) ea quantitas est quam dicimus $f = a + s$: Sic, in Trilineo restituto (seu Figura Arcuum)

cuum) si Diametro A α describatur circulus, quæ à b puncto ordinatim applicatur ad Axem A α, est a Arcus; quæ vero ad peripheriam ulteriorem continuetur est $a+s=f$; quæque peripheria propiore intercipitur est $a-s=e$, differentia arcus & sinus recti sinui verso A V convenientium. (Puta, fig. 186, b B $=a+s=f$; fig. 185, b B $=a-s=e$; utrobique b V $=a$, B V $=s$.) Adeoque si, exempto illo Semicirculo, protruderentur illæ interceptæ rectæ usque ad A α axem; quæ prodiret figura esset figura Differentiarum arcuum sinuumque rectorum: Sicut, ex Semicycloide, exempto Semicirculo, figura Arcuum formabatur.

His ita constitutis; (Nempe Semicycloidem Semicirculi Triplam esse, & partes partium respective sumptarum; vel quod eodem recidit, Semicycloidem Semicirculo & Figuræ Sinuum versorum Arcuumve (hoc est, Trilineo restituto,) simul sumptis æqualem, ejusque partes partibus horum respective sumptis:) ad calculum sic procedimus: Retentis Symbolis propositionum præcedentium. B. Fig. 166, 170.

Est Semicirculus A D $\alpha=\frac{1}{4}RP$, (per § D. prop. 15.) & Trilineum restitutum τ A D α (istius duplum) $\frac{1}{2}RP$; per § B. prop. 17. Ergo Semicyclois (ejusdem Triplum) τ A V $\alpha=\frac{3}{4}RP$. Adeoque Parallelogrammi residuum seu Semicycloidis complementum A τ T $=\frac{1}{4}RP$.

Item Sector B α A $=\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR=\frac{1}{2}fR$ (per § H. prop. 15.) Trilinei restituti portio b $\beta\alpha$ B A $=aR+sR=fR$, per § B. prop. 17. Ergo Portio Cycloidis b $\beta\alpha$ V A $=\frac{3}{2}aR+\frac{3}{2}sR=\frac{3}{2}fR$.

Item Segmentum Semicirculi residuum α B $\alpha=\frac{1}{4}RP-\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}sR=\frac{1}{2}\alpha R-\frac{1}{2}sR$, (per § G. prop. 15.) Ergo Segmentum Semicycloidis residuum b $\beta\tau=\frac{3}{4}RP-\frac{3}{2}aR-\frac{3}{2}sR=\frac{3}{2}\alpha R-\frac{3}{2}sR$.

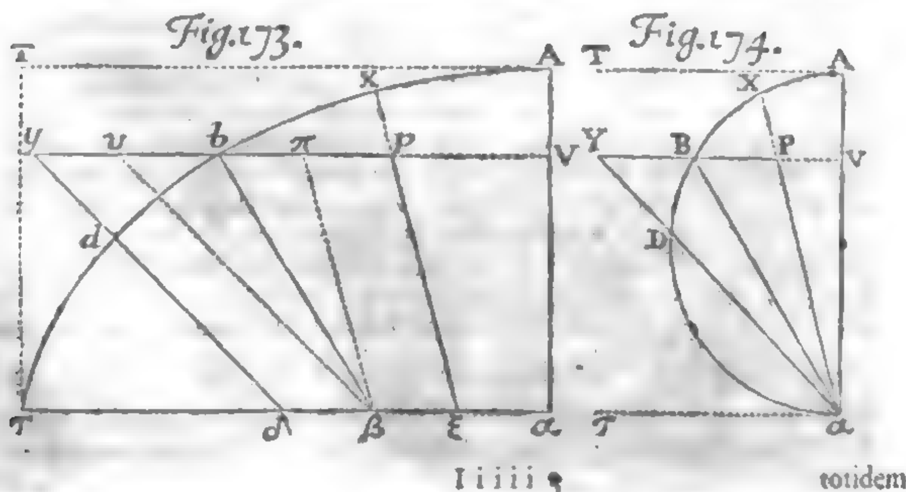
Item; Si, ex illa portione Semicycloidis b $\beta\alpha$ V A; auferatur tum parallelogrammum b $\beta\alpha$ B ($=$ b $\beta\alpha$ B fig. 170.) $=ab$, tum Triangulum α B V $=\frac{1}{2}sb$; hoc est Trapezium b $\beta\alpha$ V $=ab+\frac{1}{2}sb=2aR-av+sR-\frac{1}{2}sv$: Relinquitur Semicycloidis segmentum A b V $=-\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR+av+\frac{1}{2}sv=-\frac{1}{2}eR+av+\frac{1}{2}sv=\frac{3}{2}fR-ab-\frac{1}{2}sb$.

Vel etiam; propter A B V $=\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$ (per § F. prop. 15.) & A B b $=-eR+av$, (per § B. prop. 17.) erit A b V $=-\frac{1}{2}eR+av+\frac{1}{2}sv=-\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR+av+\frac{1}{2}sv$.

Et, speciatim, Segmentum A d C (propter $a=\frac{1}{4}P$, $s=v=R$,) $=R^2+\frac{1}{8}RP$.

Item, si ex Parallelogrammo A V b K $=fv$ (propter A V $=v$, & b V $=f$,) eximatur Segmentum illud A b V $=\frac{3}{2}fR-ab-\frac{1}{2}sb$: Relinquitur Trilineum A b K (seu segmenti A b V complementum) $fv-\frac{3}{2}fR+ab+\frac{1}{2}sb$; hoc est (reductione facta) $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$; Nempe, tantundem atque Semicirculi segmentum A B V, modo dictum. Fig. 166.

Porro, si intelligatur Semicirculus (juxta def. 1. cap. 4.) ex infinitis numero Sectoribus constitui, ut A α X, X α Z, &c. vel etiam (quod in partibus infinite exiguis, propter infinitam approximationem, tantundem valet) ex infinitis numero Triangulis figuram inscriptam complentibus, ut O α X, P α Z, &c. sive ex C. Fig. 167, 168.



 totidem

Fig. 167, totidem Triangulis figuram circumscriptam complentibus, ut Q α A, I α X, &c.
168, 173, aut etiam figuram inscriptæ & circumscriptæ intermediam (utpote partim inscrip-
174. tam, partim circumscriptam) complentibus, ut Y α P, &c. (quæ rectis α Z, &c. ut illorum axibus repræsententur:) Intelligenda erit similiter Semicyclois ex totidem constitui Quadrilineis A α ξ x, x ξ ζ z, &c. vel etiam (quod eodem recidit, sectione in infinitum continuata,) ex totidem Trapeziis figuram inscriptam complentibus, ut O x ξ α, p z ζ ξ, &c. aut circumscriptam complentibus, ut A q ξ α, x i ζ ξ, &c. aut quæ figuram partim inscriptam partim circumscriptam complent, ut p y δ ξ, &c. (quæ rectis z ζ, &c. ut eorum axibus repræsententur.)

Cumque hæc Trapezia singula, ex Triangulo simul & Parallelogrammo consistunt; quorum illud est respectivo Semicirculi Triangulo æquale, hoc autem respectivo Parallelogrammo Trilinei Restituti fig. 170. suntque in eisdem sive à τα sive à T A distantiis: Trapezii cujusque momentum sive respectu rectæ τα, sive respectu rectæ T A, (aliarumve hisce parallelarum,) æquabitur Momentis simul sumptis eorundem quibus æquantur Trianguli Parallelogrammique.

Fig. 166, Cumque hoc de singulis obtineat, obtinebit & de simul omnibus complentibus
167, 168, vel totam A τ α Semicycloidem, vel ipsius portionem aliquam, ut A b β α, b β τ,
170. b β δ d, &c. Puta Momentum Portionis Semicycloidis b β α V A, respectu rectæ τα vel T A, æquale erit momento Sectoris B α A, & Quadrilinei fig. 170. b β α B A, (respectu rectarum τα vel T A respective,) simul sumptis.

Et similiter ostendetur, Momentum Segmenti Semicycloidis A b V, æquale momentis Segmenti Semicirculi A B V, & Segmenti Trilinei fig. 170. A b B, (respectu rectarum τα, T A, vel hisce parallelarum, respective,) simul. Æqualia siquidem sunt, atque in eadem distantia.

Est autem Semicirculi A D α, respectu τα, momentum, $\frac{1}{4}R^2P$, (per § I. prop. 15.) Et momentum Trilinei Restituti, ejusdem sesquialterum seu ut 3 ad 2, hoc est $\frac{3}{8}R^2P$. per § C. prop. 17. Semicycloidis igitur, respectu ejusdem τα, momentum (utpote illis simul sumptis æquale) ad illud Sectoris, ut 5 ad 2, hoc est $\frac{5}{8}R^2P$. Cumque hujus magnitudo sit (per § B.) $\frac{3}{4}RP$; distantia centri gravitatis Semicycloidis à τα, erit $\frac{5}{6}R$. Adeoque à T A, $\frac{7}{6}R$. Ejusque respectu T A momentum (magnitudine in distantiam ducta) $\frac{7}{8}R^2P$. (Quod æquale est momentis Semicirculi Trilineique Restituti, prop. 15. & 17. inventis, simul sumptis) Ergo & Semiquadrantalis Ungula eidem insistens, aciem habens τα, est $\frac{5}{8}R^2P$; aciemque habens T A, $\frac{7}{8}R^2P$. Solidumque ejusdem conversione circa τα factum, $\frac{5}{8}RP^2$; & Semisolidum, $\frac{5}{16}RP^2$: Atque circa T A, Solidum $\frac{7}{8}RP^2$: & Semisolidum $\frac{7}{16}RP^2$.

Atque si ex Parallelogrammi A T τ α momento respectu τα vel T A, hoc est ex R^2P, (propter magnitudinem $\frac{1}{2}P \times 2R = RP$, distantiamque Centri gravitatis R;) auferatur Semicycloidis momentum jam inventum; habetur Complementi A τ T, momentum respectu τα, $\frac{3}{8}R^2P$; respectu TA, $\frac{1}{8}R^2P$. Adeoque (propter magnitudinem modo inventam, $\frac{1}{4}RP$,) Distantia Centri gravitatis ejusdem à τα, $\frac{3}{2}R$; atque à T A, $\frac{1}{2}R$. Item Semiquadrantalis Ungula eidem insistens, aciem habens τα, $\frac{3}{8}R^2P$; aciemque habens T A, $\frac{1}{8}R^2P$. Solidumque ejusdem conversione circa τα factum, $\frac{3}{8}RP^2$; & semisolidum, $\frac{3}{16}RP^2$: Atque circa T A, solidum $\frac{1}{8}RP^2$; semisolidum, $\frac{1}{16}RP^2$.

D. Item Sectoris B α A momentum respectu τα, est $\frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}sbR = \frac{1}{2}aR^2 + \frac{5}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$, per § M. prop. 15. Et Portionis Trilinei restituti b β α B A, momentum $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}sbR = \frac{3}{4}aR^2 + \frac{5}{4}sR^2 - \frac{1}{4}svR$, per § D. prop. 17. Ergo Portionis Semicycloidis b β α V A, momentum respectu τα (utpote ex illis aggregatum,) $\frac{5}{4}fR^2 + \frac{5}{12}sbR = \frac{5}{4}aR^2 + \frac{25}{12}sR^2 - \frac{5}{12}svR$. (Idemque est & Ungula Semiquadrantalis eidem insistens, aciem habens τα.) Adeoque (propter magnitudinem § B. inventam, $\frac{3}{2}fR = \frac{3}{2}aR + \frac{3}{2}sR$) Distantia Centri gravitatis à τα, est $\frac{5}{6}R + \frac{5sb}{18f} = \frac{15aR + 25sR - 5sv}{18a + 18s}$: Atque à T A, $\frac{7}{6}R - \frac{5sb}{18f} = \frac{21aR + 11sR + 5sv}{18a + 18s}$: Ejusque respectu T A momentum, (vel Semiquadrantalis Ungula eidem insistens, aciem habens TA,) $\frac{7}{4}fR^2 - \frac{5}{12}sbR = \frac{7}{4}aR^2 + \frac{11}{12}sR^2 + \frac{5}{12}svR$. Solidumque ejusdem conversione circa τα, $\frac{5}{4}aRP + \frac{25}{12}sRP - \frac{5}{12}svP$; & Semisolidum $\frac{5}{8}aRP + \frac{25}{24}sRP - \frac{5}{24}svP$: Atque circa TA, Solidum

lidum $\frac{1}{4} a RP + \frac{11}{12} s RP + \frac{5}{12} s v P$, & ſemiſolidum, $\frac{1}{8} a RP + \frac{11}{24} s RP + \frac{5}{24} s v P$. Fig. 169, 170.

Similiter, Segmenti Semicirculi $\alpha B \alpha$, Momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) reſpectu $\tau\alpha$, eſt $\frac{1}{2} \alpha R^2 - \frac{1}{3} s R^2 - \frac{1}{6} s b R$; & reſpectu TA, $\frac{1}{2} \alpha R^2 - \frac{1}{3} s R^2 + \frac{1}{6} s b R$; per § N. prop. 15. Eſtque ſegmenti Trilinei Reſtituti $b \beta \tau$; Momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4} \alpha R^2 - \frac{3}{4} s R^2 - \frac{1}{4} s b R$; & reſpectu TA, $\frac{1}{4} \alpha R^2 - \frac{3}{4} s R^2 + \frac{1}{4} s b R$; per § E. prop. 17. Ergo (quod ex utriſque aggregatum eſt) Segmenti Semicycloidis $b \beta \tau$, momentum (ſeu Semiquadrantalis Ungula) reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4} \alpha R^2 - \frac{13}{12} s R^2 - \frac{5}{12} s b R$; & reſpectu TA, $\frac{3}{4} \alpha R^2 - \frac{7}{4} s R^2 + \frac{5}{12} s b R$. Hoc eſt (propter $\alpha = \frac{1}{2} P - a$, & $b = 2R - v$,) reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8} R^2 P - \frac{3}{4} a R^2 - \frac{23}{12} s R^2 + \frac{5}{12} s v R$; & reſpectu TA, $\frac{3}{8} R^2 P - \frac{3}{4} a R^2 - \frac{11}{12} s R^2 - \frac{5}{12} s v R$. Adeoque (propter magnitudinem § B. inventam, $\frac{2}{3} \alpha R - \frac{2}{3} s R = \frac{1}{3} R P - \frac{2}{3} a R - \frac{2}{3} s R$,) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{8} R - \frac{5 s b}{18 \alpha - 18 s} = \frac{5}{8} R - \frac{10 s R - 5 s v}{9 P - 18 a - 18 s}$: à TA, $\frac{5}{8} R + \frac{5 s b}{18 \alpha - 18 s} = \frac{5}{8} R + \frac{10 s R - 5 s v}{9 P - 18 a - 18 s}$. Solidumque ejuſdem circa $\tau\alpha$ converſione factum $\frac{3}{4} \alpha R P - \frac{3}{4} s R P - \frac{5}{12} s b P = \frac{3}{8} R P^2 - \frac{3}{4} a R P - \frac{23}{12} s R P + \frac{5}{12} s v P$; & ſemiſolidum $\frac{3}{8} \alpha R P - \frac{3}{8} s R P - \frac{5}{24} s b R = \frac{3}{16} R P^2 - \frac{3}{8} a R P - \frac{23}{24} s R P + \frac{5}{24} s v P$: Atque, circa TA, Solidum $\frac{3}{4} \alpha R P - \frac{3}{4} s R P + \frac{5}{12} s b P = \frac{3}{8} R P^2 - \frac{3}{4} a R P - \frac{11}{12} s R P - \frac{5}{12} s v P$; & ſemiſolidum, $\frac{3}{8} \alpha R P - \frac{3}{8} s R P + \frac{5}{24} s b P = \frac{3}{16} R P^2 - \frac{3}{8} a R P - \frac{11}{24} s R P - \frac{5}{24} s v P$.

Item, Segmenti Semicirculi BVA, Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2} e R^2 + \frac{1}{2} s v R + \frac{1}{3} s^3$; & reſpectu TA, $\frac{1}{2} e R^2 + \frac{1}{2} s v R - \frac{1}{3} s^3$, & reſpectu bBV, $-\frac{1}{2} e R^2 + \frac{1}{2} a v R - \frac{1}{6} s^3$; per § L, R. prop. 15. Momentum autem Segmenti Trilinei bBA, reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{4} e R^2 + a v R - \frac{1}{4} s v R + \frac{1}{2} a s^2$; & reſpectu TA, $-\frac{3}{4} e R^2 + a v R + \frac{1}{4} s v R - \frac{1}{2} a s^2$; & reſpectu bBV, $\frac{3}{4} e R^2 + \frac{1}{4} s v R - \frac{1}{2} a s^2$; per § F. prop. 17. Momentum igitur Segmenti Semicycloidis bVA, (vel Semiquadrantalis Ungula correſpondens,) reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{1}{4} e R^2 + a v R + \frac{1}{4} s v R + \frac{1}{2} a s^2 + \frac{1}{3} s^3$; & reſpectu TA, $-\frac{1}{4} e R^2 + a v R + \frac{3}{4} s v R - \frac{1}{2} a s^2 - \frac{1}{3} s^3$; & reſpectu bBV, $\frac{1}{4} e R^2 + \frac{1}{2} a v R + \frac{3}{4} s v R - \frac{1}{2} a s^2 - \frac{1}{6} s^3$. Adeoque (propter magnitudinem § B. inventam, $-\frac{1}{2} e R + a v + \frac{1}{2} s v$;) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{-9 e R^2 + 12 a v R + 3 s v R + 6 a s^2 + 4 s^3}{-6 e R + 12 a v + 6 s v}$; à TA, $\frac{-3 e R^2 + 12 a v R + 9 s v R - 6 a s^2 - 4 s^3}{-6 e R + 12 a v + 6 s v}$; à bBV, $\frac{3 e R^2 + 6 a v R + 9 s v R - 6 a s^2 - 2 s^3}{-6 e R + 12 a v + 6 s v}$. Solidum ejuſdem converſione circa $\tau\alpha$ factum, $-\frac{3}{4} e R P + a v P + \frac{1}{4} s v P + \frac{a s^2 P}{2 R} + \frac{s^3 P}{3 R}$; & ſemiſolidum, $-\frac{3}{8} e R P + \frac{1}{2} a v P + \frac{1}{8} s v P + \frac{3 a s^2 P + 2 s^3 P}{12 R}$: Item circa TA, Solidum, $-\frac{1}{4} e R P + a v P + \frac{3}{4} s v P - \frac{a s^2 P}{2 R} - \frac{s^3 P}{3 R}$; & ſemiſolidum, $-\frac{1}{8} e R P + \frac{1}{2} a v P + \frac{3}{8} s v P - \frac{a s^2 P}{4 R} - \frac{s^3 P}{6 R}$: Denique circa bV, Solidum $\frac{1}{4} e R P + \frac{1}{2} a v P + \frac{3}{4} s v P - \frac{a s^2 P}{2 R} - \frac{s^3 P}{6 R}$; & ſemiſolidum, $\frac{1}{8} e R P + \frac{1}{4} a v P + \frac{3}{8} s v P - \frac{a s^2 P}{4 R} - \frac{s^3 P}{12 R}$. E.

F.

Eadem habentur ope Trapezii $b \beta \alpha V$. Quippe ſi ex quadrilinei $b \beta \alpha A$ fig. 166. auferatur Trapezium $b \beta \alpha V$, reſtabit Semicycloidis ſegmentum bVA: Ejuſque momentum ex momento Quadrilinei ſubductum, relinquit ſegmenti bVA momentum, ſive reſpectu rectæ TA, ſive $\tau\alpha$; unde & reliqua conſequentur.

Eſt

Fig. 166, 170. Est autem Trianguli B V α, magnitudo $\frac{1}{2}sb$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}sb^2$; respectu T A, $sbR - \frac{1}{3}sb^2$; per § M. prop. 15. Et parallelogrammi b$\beta\alpha$B, magnitudo ab; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ab^2$; respectu T A, $2abR - \frac{1}{2}ab^2$: per § F. prop. 17. Ergo Trapezii b$\beta\alpha$V, magnitudo, $ab + \frac{1}{2}sb$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{3}sb^2$; respectu T A, $2abR + sbR - \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{3}sb^2$. Quæ respective subducta ex Quadrilinei b$\beta\alpha$A, magnitudine & momentis § D. traditis: Relinquunt Segmenti b V A magnitudinem $\frac{3}{2}fR - ab - \frac{1}{2}sb = -\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR + av + \frac{1}{2}sv = -\frac{1}{2}eR + av + \frac{1}{2}sv$: Momentum respectu $\tau\alpha$, (vel correspondens Ungula,) $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{5}{12}sbR - \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{3}sb^2 = -\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + 2avR + \frac{11}{12}svR - \frac{1}{2}av^2 - \frac{1}{3}sv^2 = -\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{3}as^2 + \frac{1}{3}s^3$; respectu T A, $\frac{3}{4}fR^2 - \frac{5}{12}sbR - 2abR - sbR + \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{3}sb^2 = -\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{12}svR + \frac{1}{2}av^2 + \frac{1}{3}sv^2 = -\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$. Unde reliqua deducentur ut prius. Trapeziique Distantia Centri gravitatis (momento per magnitudinem diviso) à $\tau\alpha$, $\frac{3a + 2s}{6a + 3s}b$; à T A, $2R - \frac{3a + 2s}{6a + 3s}b$.

G. Si vero, ex Parallelogrammi A V b K momentis, eximantur momenta segmenti A b V; relinquentur Momenta respectiva Trilinei A b K.

Est autem, (propter A V $= v$, b V $= f$, Distantiamque Centri gravitatis ab Aα, vel b K, $\frac{1}{2}f$; ab A K, vel b V, $\frac{1}{2}v$; adeoque ab $\alpha\tau$, $\frac{1}{2}v + b = 2R - \frac{1}{2}v$;) Parallelogrammi magnitudo, fv; momentum respectu Aα vel b K, $\frac{1}{2}f^2v$; respectu A T vel b V, $\frac{1}{2}fv^2 = fvR - \frac{1}{2}fs^2$; respectu $\alpha\tau$, $2fvR - \frac{1}{2}fv^2 = \frac{1}{2}fv^2 + fvb = \frac{1}{2}fv^2 + fs^2 = fvR + \frac{1}{2}fs^2$.

Si itaque ex $\frac{1}{2}fv^2 = fvR - \frac{1}{2}fs^2 = avR + svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{2}s^3$, auferatur segmenti A b V momentum respectu T A (modo inventum) $-\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$; habetur $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{6}s^3$, momentum Trilinei AbK respectu T A. Ideoque, propter magnitudinem (§ B inventam) $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$, Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{3eR^2 + 3svR - 2s^3}{6eR + 6sv} = \frac{1}{2}R - \frac{s^3}{3eR + 3sv}$: Adeoque, à $\tau\alpha$, $\frac{3}{2}R + \frac{s^3}{3eR + 3sv}$; à b V, $\frac{3}{2}R - b (= v - \frac{1}{2}R) + \frac{s^3}{3eR + 3sv}$; & (restituendo magnitudinem) momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}eR^2 + \frac{3}{4}svR + \frac{1}{6}s^3$; & respectu b V, $\frac{1}{2}evR + \frac{1}{2}sv^2 - \frac{1}{4}eR^2 - \frac{1}{4}svR + \frac{1}{6}s^3 = -\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{3}s^3$ (propter $\frac{1}{2}evR = \frac{1}{2}avR - \frac{1}{2}svR$, & $\frac{1}{2}sv^2 = svR - \frac{1}{2}s^3$.) Vel etiam, ex momentis Parallelogrammi A V b K, $fvR + \frac{1}{2}fs^2$ & $fvR - \frac{1}{2}fs^2$ (modo traditis,) hoc est, ex $avR + svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{2}s^3$, & $avR + svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{2}s^3$; subductis momentis segmenti A b V, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{3}as^2 + \frac{1}{3}s^3$, & $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$, modo inventis; Habetur Momentum Trilinei A b K, respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}eR^2 + \frac{3}{4}svR + \frac{1}{6}s^3$; &, respectu b V, $-\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{3}s^3$; ut prius.

H. Atque hactenus Semicycloidis, partiumque illius, Momenta & Ungulas, consideravimus duntaxat prout ad rectas $\tau\alpha$, T A, aut huic parallelas respectum habent. Quæ quidem, (propter eandem à rectis illis distantiam Parallelogrammorum b$\beta\xi\sigma$, sive ut inclinata jacent in Semicycloide fig. 167, 168. sive ut erecta in Trilineo restituto fig. 170. Et Triangulorum similiter, ut $\tau\xi$p seu BαP, fig. 167, 168. eisque æqualium BαP, fig. 169.) alia non sunt quam aggregata partium correspondentium in Semicirculo, & Trilineo Restituto, fig. 169, 170. Et Momenta Ungulæque quæ Semicycloidem spectant, respectivorum Momentorum Ungularumque aggregata, Semicirculum Trilineumque illud respective spectantium.

Verum si ad rectam Aα, aliamve ipsis $\tau\alpha$, T A, non parallelam exigantur; sive ut Ungularum aciem sive ut librationis axem: Quoniam alia est inde distantia Parallelogrammorum in Semicycloide inclinatorum, atque erectorum in Trilineo Resti-

Restituto; altiore adhuc indagine opus erit, quo distantiarum variatarum justa ratio habeatur.

Intelligatur itaque, ut prius, tum Semicirculus in minuta Triangula, ut Y α P, tum Semicyclois in totidem Trapezia correspondentia, ut y δ ξ p, distribui; quæ figuram utrobique inscriptæ & circumscriptæ intermediam (utpote partim inscriptam partim circumscriptam) compleant. Quæ suis Axibus seu Diametris B α, b β repræsentari intelligantur. In quibus itaque rectis sua respective Centra gravitatis constituta fore, constat (ex prop. 5. hujus,) saltem inde distare distantia quæ data quavis minor sit; quæque sectione in infinitum continuata evanescet. Cumque ex præmonstratis (§ A,) Trapeziorum illorum quodvis ex Triangulo constat, respectivo Semicirculi Triangulo æquali, & Parallelogrammo ejusdem Trianguli duplo, (utpote æquali respectivo Trilinei restituti Parallelogrammo:) Intelligatur Trapezii Triangulum illud, ut ν β τ, (ipsi Y α P simile & æquale,) utrinque ad b β positum, (per cujus itaque Centrum gravitatis transire intelligatur b β recta;) adeoque Parallelogrammum (Trapezii reliquum) in duo Parallelogramma dimidia dirimere, ut ν β δ y, τ β ξ p. Per cujus itaque bipartiti Parallelogrammi, seu duorum Parallelogrammorum simul sumptorum, commune Centrum gravitatis non minus transibit b β recta, quam si, exempto Triangulo, (quod in Trilineo restituto fit,) utrinque eidem b β rectæ adjacerent dimidia illa Parallelogramma, utrinque jam æqualiter remota. Quanquam enim in sectione definita, major sit B Y quam B P, & b ν quam b τ; sectione tamen in infinitum continuata; differentia illa in æqualitatem sensim evanescit; ut ex præmonstratis patet. Fig. 166, 168, 173, 174.

Re sic constructa; Momentum Trapezii cujusvis, ut y δ ξ P, ad momentum correspondentis Trianguli, ut Y α P, respectu ejusdem A α, (adeoque & Ungula super illo, ad Ungulam super hoc, quæ communem Aciem habeant A α; Solidumque illius ad Solidum hujus conversione circa A α factum;) est in ratione quæ componitur ex magnitudinis ad magnitudinem ratione, (hoc est, sectione in infinitum continuata, ut 3 ad 1, per § A;) atque ex ratione Distantiæ Centri gravitatis illius, ad Distantiam Centri gravitatis hujus, ab eadem A α recta.

Est autem Centrum gravitatis Trianguli Y α P, in ipsa α B; ejusque ab α distantia est $\frac{2}{3}$ α B, (per § C. prop. 6. hujus;) adeoque ab A α distantia est $\frac{2}{3}$ B V $= \frac{2}{3} s$, & à τ α, $\frac{1}{3}$ V α $= \frac{1}{3} b$.

Trapezii vero y δ ξ p, Centrum gravitatis in b β positum, à β distat $\frac{5}{9}$ β b. Cum enim Trianguli ν β τ centrum, à β distet $\frac{2}{3}$ β b; & parallelogrammi bipartiti seu ex duobus compositi, β y, β p, centrum à β distet $\frac{1}{2}$ β b; per 6 hujus; sitque utrumque in β b recta, ut modo ostensum est: Horum ab invicem distantia erit $\frac{1}{6}$ β b $=$ $\frac{2}{3}$ β b $-$ $\frac{1}{2}$ β b: Hæc itaque centrorum ab invicem distantia, divisa in magnitudinum, quæ sunt ut 1 ad 2, ratione reciproca; pro communi utriusque, hoc est ipsius Trapezii centro gravitatis, superaddit distantiæ Centri Parallelogrammi à puncto β, trientem ipsius $\frac{1}{6}$ β b, hoc est $\frac{1}{18}$ β b; per 27. cap. præced. Nam, ut $3 = 2 + 1$, ad 1; sic $\frac{1}{6}$ β b, ad $\frac{1}{18}$ β b. Adeoque, propter $\frac{1}{2} + \frac{1}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$, Trapezii centrum gravitatis, in β b positum, à β distabit, $\frac{5}{9}$ β b.

Et propterea, ejusdem à τ α distantia erit $\frac{4}{9}$ V α $= \frac{4}{9} b$; & ab A α distantia b B ($=$ β α $=$ B A) $+ \frac{5}{9}$ B V, (ut ex Schematis inspectu facile constabit;) hoc est $a + \frac{5}{9} s$.

Ratio itaque distantiarum Centrorum gravitatis Trapezii y δ ξ p, & Trianguli Y α P, ab eadem A α; nempe b B $+ \frac{5}{9}$ B V ad $\frac{2}{3}$ B V, seu $a + \frac{5}{9} s$ ad $\frac{2}{3} s$; cum ratione magnitudinum 3 ad 1 (multiplicando) composita; exhibet rationem momentorum 3 b B $+ \frac{5}{3}$ B V ad $\frac{2}{3}$ B V, seu $3a + \frac{5}{3} s$ ad $\frac{2}{3} s$. Hoc est, Momentum Trapezii y δ ξ p, in suo situ, ad momentum Trianguli Y α P in suo, respectu ejusdem A α rectæ; est ut Trianguli illius in distantia 3 b B $+ \frac{5}{3}$ B V suspensi momentum, ad ejusdem suspensi in distantia $\frac{2}{3}$ B V, (hoc est, in suo situ,) momentum respectu ejusdem A α. Hoc est (propter eandem Trianguli magnitudinem) ut distantia 3 b B $+ \frac{5}{3}$ B V, ad distantiam $\frac{2}{3}$ B V. Hoc est, ut $\frac{5}{3}$ B V ad $\frac{2}{3}$ B V (seu ut 5 ad 2,) atque insuper ut 3 b B ad $\frac{2}{3}$ B V, seu 9 b B ad 2 B V. Hoc est; ut 5 ad 2, atque insuper ut $9a$ ad $2s$.

Quod quidem cum ubique fiat: Ratio momenti Trapeziorum simul omnium, sive quæ totam Semicycloidem, sive quæ ipsius Portionem ut b β α A, complent; (quippe de partibus perinde procedit demonstratio atque de totis;) ad momentum omnium Triangulorum complentium vel totum Semicirculum, vel ipsius Portio-

 nem,

Fig. 166, 168, 173, 174. nem, ut B α A, respective; ea est quam habent omnium illorum triangulorum ut Y α P, in distantiis respective $3\,bB + \frac{5}{3}BV$ suspensorum momenta, ad momenta eorundem in distantiis respective $\frac{2}{3}BV$ suspensorum; seu, ut omnia Y α P in $\frac{5}{3}BV$, ad eadem in $\frac{2}{3}BV$ respective ducta, atque insuper ut eadem omnia Y α P in $3\,bB$, ad eadem in $\frac{2}{3}BV$ respective.

Cumque sit eadem ubique ratio trianguli, ut Y α P, in $\frac{5}{3}BV$, ad idem in $\frac{2}{3}BV$; adeoque & omnium ad omnia; nempe ut 5 ad 2: Sed non eadem ubique ratio Trianguli, ut Y α P, in $3\,bB$; ad idem in $\frac{2}{3}BV$; propter tum Triangulorum super æquales bases inæqualem altitudinem, tum aliam atque aliam rationem b B ad B V, hoc est, arcus ad sinum: Propterea, rationi 5 ad 2; alia consocianda est; Quam nempe habeant omnia respective triangula ut Y α P in $3\,bB$, ad eadem in $\frac{2}{3}BV$; seu, quam habent omnia in $9\,bB$, ad eadem in $2\,BV$, respective: Hoc est, Quam habet *Noncuplum omnium* b B, seu β α, (hoc est B A arcuum arithmetice proportionalium,) aut his æqualium β ζ Triangulum α τ ι fig. 170. complentium, *in respectiva Triangula* Y α *P*, seu (propter æquales omnium bases) *Triangulorum altitudines* V α respectivas, (hoc est, sinus versos arcuum B α, qui cum B A complent Semicirculum,) seu in, ipsis æquales, b β, seu *minuta parallelogramma* his proportionalia figuram Sinuum Versorum seu Trilineum Restitutum fig. 170. complentia: Ad *Duplum omnium* B V (Sinuum Rectorum eorundem arcuum BA,) aut his æqualium β υ (complentium τ α υ figuram Sinuum rectorum totius Semicirculi fig. 170.) in *eadem respective Triangula* seu Triangulorum *Altitudines*, aut *minuta Parallelogramma* ipsis Proportionalia: Hoc est (in Trilineo Restituto fig. 170.) quam habet *Noncuplum* omnium b β in β ζ, ad *Duplum* eorundem b β in β υ, respective.

Fig. 170. At b β, in β ζ seu β α ducta, exhibet ipsius b β momentum respectu A α; adeoque omnes b β in respectivas β ζ seu β α, exhibent respectu ejusdem A α, momenta omnium b β, hoc est momentum Trilinei A τ α; Adeoque *Noncuplum* omnium b β in β ζ, est Noncuplum Momenti Trilinei A τ α respectu A α. Et similiter in portionibus: Puta, Noncuplum omnium b β portionem b β α B A complentium, in respectivas β ζ seu β α ductarum, (hoc est *omnia* 9 *a b*, portionem b β α B A spectantia,) est Noncuplum momenti portionis b β α B A, respectu ejusdem A α.

Fig. 168, 169, 170. Atque omnes eædem b β in β υ fig. 170. seu in B V fig. 168, 169. Exhibent *Triplum* Momenti Semicirculi A D α, aut ipsius Sectoris B α A, (prout de Triangulis totum Semicirculum, aut ipsius tantum Sectorem complentibus, intelligatur,) respectu Diametri A α; per § A. prop. 18.

Adeoque *Duplum* omnium b β in β υ, est *Sextuplum* momenti Semicirculi α D A respectu ipsius A α: Atque, in partibus similiter, respective sumptis.

Adeoque *Noncuplum* omnium b β in β ζ, ad *Duplum* earundem b β in β υ, est ut *Noncuplum* momenti Trilinei Restituti A τ α, (ejusve portionis b β α B A,) fig. 170. respectu rectæ A α; ad *Sextuplum* momentum Semicirculi A D α, (ejusve Sectoris respectivi B α A,) respectu Diametri A α: Vel, ut *Triplum* momenti illius, ad *Duplum* momenti hujus.

Est autem (per § G. prop. 17.) Trilinei Restituti A τ α fig. 170. momentum respectu A α, $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$; adeoque hujus Triplum $\frac{3}{8}RP^2 - 6R^3$: Et momentum Semicirculi, respectu A α, per § Q. prop. 15. $\frac{2}{3}R^3$; hujusque Duplum $\frac{4}{3}R^3$. Est ergo Triplum illud ad Duplum hoc; ut $\frac{3}{8}RP^2 - 6R^3$, ad $\frac{4}{3}R^3$; hoc est, $9RP^2 - 144R^3$, ad $32R^3$: Seu ut $9P^2 - 144R^2$ ad $32R^2$. Atque hæc demum ratio (ut supra ostensum est) rationi 5 ad 2, hoc est $80R^2$ ad $32R^2$ conjuncta; exhibet rationem momenti Semicycloidis A τ α, ad momentum Semicirculi A D α, respectu ejusdem A α rectæ; nempe, ut $9P^2 - 64R^2$ ad $32R^2$. Cum itaque momentum illud Semicirculi sit $\frac{2}{3}R^3$: Erit Semicycloidis momentum respectu A α (seu correspondens Ungula Semiquadrantalis,) $\frac{9P^2 - 64R^2}{48}R = \frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$.

Atque hoc Momentum per Semicycloidis magnitudinem $\frac{3}{4}RP$ (§ B.) divisum; exhibet ejusdem ab A α Centri gravitatis distantiam, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{9P}$; adeoque, à τ T, $\frac{3}{4}P + \frac{16R^2}{9P}$; & (restituendo magnitudinem,) ejusdem respectu τ T momentum $\frac{3}{16}RP^2$.

$\frac{3}{16}RP^2+\frac{4}{3}R^3$. Solidumque conversione factum (utpote ad Ungulam ut P ad R,) circa Aα, $\frac{3}{16}P^3-\frac{4}{3}R^2P$; & circa τT, $\frac{3}{16}P^3+\frac{4}{3}R^2P$: Semisolidaque horum dimidia. Fig. 168, 169, 170.

Eademque Momenta, ex respectivis Parallelogrammi A$\alpha\tau$T momentis, hoc est, (propter $\tau\alpha=\frac{1}{2}P$, & A$\alpha=2R$, distantiamque Centri gravitatis sive à τT sive ab Aα, $\frac{1}{2}\tau\alpha=\frac{1}{4}P$,) ex $\frac{1}{4}RP^2$, subducta; relinquunt Complementi Semicycloidis AτT, momentum respectu Aα (seu correspondentem Ungulam Semiquadrantalem) $\frac{1}{16}RP^2+\frac{4}{3}R^3$; & respectu τT, $\frac{1}{16}RP^2-\frac{4}{3}R^3$: (Et Solida Semisolidaque correspondentia, ad hæc Momenta Ungulasve, ut P seu $\frac{1}{2}P$, ad R:) Eademque momenta Complementi Semicycloidis per magnitudinem $\frac{1}{4}RP$ (per § B.) divisa; exhibent ejusdem ab Aα distantiam Centri gravitatis $\frac{1}{4}P+\frac{16R^2}{3P}$; & à τT, $\frac{1}{4}P-\frac{16R^2}{3P}$.

Similiter, in Semicycloidis portione b$\beta\alpha$VA. Momentum hujus, ad momentum Sectoris in Semicirculo correspondentis, BαA, respectu ipsius Aα, (ut modo ostensum est,) est ut 5 ad 2; atque insuper, ut *Triplum* momenti correspondentis Portionis Trilinei restituti, b$\beta\alpha$BA, ad *Duplum* momenti Sectoris Semicirculi BαA; respectu Aα. I.

Est autem Momentum Portionis Trilinei Restituti b$\beta\alpha$BA, respectu Aα, $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$, (per § H. prop. 17.) adeoque ejusdem Triplum $\frac{3}{2}a^2R+3asR-3vR^2$; & momentum Sectoris B$\alpha$A, respectu A$\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R$, (per § S. prop. 15.) hujusque Duplum $\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{3}s^2R$. Ratio itaque quam habet Triplum illud ad hoc Duplum, hoc est $\frac{3}{2}a^2R+3asR-3vR^2$ ad $\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{3}s^2R$; seu $9a^2+18as-18vR$, ad $4vR+2s^2$; rationi 5 ad 2, seu $10vR+5s^2$ ad $4vR+2s^2$ (addendo) consociata; exhibet Momenti Portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$VA, ad momentum correspondentis Sectoris BαA, respectu Aα, rationem, $9a^2+18as-8vR+5s^2$ ad $4vR+2s^2$. Cum itaque Sectoris momentum illud sit, $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R$ (ut modo dictum;) erit Portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$VA, momentum respectu Aα, (seu correspondens Ungula Semiquadrantalis) $\frac{3}{4}a^2R+\frac{3}{2}asR-\frac{2}{3}vR^2+\frac{5}{12}s^2R$.

Atque hoc momentum, per Portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$VA magnitudinem $\frac{3}{2}fR=\frac{3}{2}aR+\frac{3}{2}sR$, (per § B.) divisum; exhibet distantiam Centri gravitatis ab Aα, $\frac{9a^2+18as-8vR+5s^2}{18a+18s}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}s-\frac{4vR+2s^2}{9a+9s}=\frac{1}{2}f-\frac{4vR+2s^2}{9f}$. Unde etiam ejusdem à τT & bK distantia facile colligitur; & momentum respectu illarum. Item Solidum ejusdem circa Aα conversione factum, $\frac{3}{4}a^2P+\frac{3}{2}asP-\frac{2}{3}vRP+\frac{5}{12}s^2P$; & semisolidum, hujus dimidium.

Si autem ex totius Semicycloidis respectu Aα momento, $\frac{3}{16}RP^2-\frac{4}{3}R^3$, subducatur hoc portionis b$\beta\alpha$VA momentum $\frac{3}{4}a^2R+\frac{3}{2}asR-\frac{2}{3}vR^2+\frac{5}{12}s^2R$: Relinquitur Segmenti b$\beta\tau$ momentum respectu ejusdem Aα, $\frac{3}{16}RP^2-\frac{4}{3}R^3-\frac{3}{4}a^2R-\frac{3}{2}asR+\frac{2}{3}vR^2-\frac{5}{12}s^2R$; seu (propter $\alpha=\frac{1}{2}P-a$, & $b=2R-v$,) $\frac{3}{4}\alpha RP-\frac{3}{4}sRP-\frac{3}{4}\alpha^2R+\frac{3}{2}\alpha sR-\frac{2}{3}bR^2-\frac{5}{12}s^2R$: Quod per magnitudinem $\frac{3}{2}\alpha R-\frac{3}{2}sR$, (§ B.) divisum: Exhibet Centri gravitatis ab Aα distantiam, $\frac{1}{2}P-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}s-\frac{4bR-2s^2}{9\alpha-9s}=\frac{1}{2}P-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}s-\frac{2b^2}{9\alpha-9s}$: Adeoque à T$\tau$, $\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}s+\frac{2b^2}{9\alpha-9s}$: Ejusque, respectu T$\tau$, momentum $\frac{3}{4}\alpha^2R-\frac{3}{2}\alpha sR+\frac{3}{4}s^2R+\frac{1}{3}b^2R$.

Ex illo autem Portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$VA Momento (Ungulave) respectu Aα; si subducatur Trapezii b$\beta\alpha$V, respectu ejusdem Aα, Momentum Ungulave: Relinquitur, respectu ejusdem Aα, Momentum Ungulave Segmenti Semicycloidis AbV. K.

Componitur autem hoc Trapezium, ex Parallelogrammo b$\beta\alpha$B, & Triangulo αBV. Parallelogrammi magnitudo (propter basin bB $=a$, & altitudinem V$\alpha=b$, est ab; Centrique gravitatis (utpote in sui medio positi) ab Aα di-

 stantia,

Fig. 168, 169, 170. stantia, bB + ½ BV = ½ a + ½ s = ½ f: Adeoque momentum ½ f a b. Trianguli magnitudo (propter BV = s, & Vα = b,) ½ s b; Centrique gravitatis ab Aα distantia ⅔ × ½ BV = ⅓ s: Adeoque momentum respectu Aα, ⅙ $s^2 b$. Momentum itaque Trapezii bβαV respectu Aα, est, ½ f a b + ⅙ s^2 b = $a^2 R$ + a s R − ½ $a^2 v$ − ½ a s v + ⅓ $s^2 R$ − ⅙ $s^2 v$. (Magnitudo autem, a b + ½ s b: Adeoque Centri gravitatis ab Aα Distantia, $\frac{3fa+s^2}{6a+3s} = \frac{1}{2}a + \frac{3a+2s}{12a+6s}s$.)

Illud autem Trapezii Momentum, ex Portionis bβαVA momento (modo reperto) ¾ $a^2 R$ + ½ a s R − ⅔ v R^2 + $\frac{1}{12}$ $s^2 R$ subductum; relinquit, − ¼ $a^2 R$ + ½ a s R + $\frac{1}{12}$ s^2 R − ⅔ v R^2 + ½ $a^2 v$ + ½ a s v + ⅙ $s^2 v$, Momentum Segmenti Semicycloidis bVA respectu Aα; Ungulamve correspondentem. (Solidumque & Semisolidum ejusdem circa Aα conversione factum, ad Ungulam illam, ut *P*, & ½ *P*, ad *R*.)

Quod quidem momentum, per magnitudinem (§ B. inventam) − ½ e R (= − ½ a R + ½ s R) + a v + ½ s v, divisum; exhibet Centri gravitatis ab Aα distantiam $\frac{-3a^2R+6asR+s^2R-8vR^2+6a^2v+6asv+2s^2v}{-6aR+6sR+12av+6sv}$; hoc est ½ a + $\frac{3asR+s^2R-8vR^2+3asv+2s^2v}{-6eR+12av+6sv}$, seu ½ a − $\frac{8vR^2-3asR-s^2R-3asv-2s^2v}{-6eR+12av+6sv}$. Unde habetur etiam ejusdem à τT vel bK distantia; ejusque respectu hujus Momentum, Ungulave: Solidumque & Semisolidum ejusdem circa τT vel bK conversione factum.

Si autem ex Parallelogrammi AVbK momento respectu Aα (§ G. tradito) ½ $f^2 v$; hoc est, ex ½ $a^2 v$ + a s v + ½ $s^2 v$; auferatur momentum segmenti AbV respectu ejusdem Aα, jam inventum, − ¼ $a^2 R$ + ½ a s R + $\frac{1}{12}$ $s^2 R$ − ⅔ v R^2 + ½ $a^2 v$ + ½ a s v + ⅙ $s^2 v$: Relinquitur Trilinei AbK respectu ejusdem Aα, momentum ⅔ v R^2 + ¼ $a^2 R$ − ½ a s R − $\frac{1}{12}$ $s^2 R$ + ½ a s v + ⅓ $s^2 v$: Adeoque, propter magnitudinem (§ B. traditam) ½ e R + ½ s v; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{8vR^2+3a^2R-6asR-s^2R+6asv+4s^2v}{6eR+6sv}$.

L. Hæc eadem Momenta & Solida, alia adhuc methodo sic investigantur.

Fig. 166, 168. Omnia momenta rectarum bV, æqualibus intervallis sumptarum, (sive totam Semicycloidem, sive ipsius segmentum ut bVA complentium,) respectu rectæ Aα; momentum integrum complentia: Vel omnia Triangula rectangula Isoscelia eisdem insistentia, Semiquadrantalem Ungulam, aciem habentem Aα, complentia: Sunt totidem Semiquadrata earundem bV rectarum: Hoc est, semisumma quadratorum rectarum omnium bV = bB + BV = a + s: Hoc est, semisumma omnium a^2 + 2 a s + s^2; seu summa *Omnium*, ½ a^2 + a s + ½ s^2; sumptis v arithmetice proportionalibus.

Fig. 170. Sunt autem *Omn.* ½ a^2, seu semisumma quadratorum omnium bB rectarum: Idem atque momentum Trilinei restituti Aτα, (quam figuram *Arcuum*, non minus quam Sinuum versorum figuram esse, ostendimus § A. prop. 17.) ejusve segmenti bBA, respectu Aα. (Est enim magnitudo cujusque bB = a, quæ itaque in sui semissem, seu Centri gravitatis distantiam, ½ a, ducta; exhibet ejusdem respectu Aα momentum, ½ a^2.) Nempe Trilinei Aτα momentum, ½ R P^2 − 2 R^3: Et Segmenti bBA, momentum, − ½ $a^2 R$ + a s R − v R^2 + ½ $a^2 v$, per § G, I. prop. 17.

Fig. 168, 169. Item *Omnia* ½ s^2; seu semisumma Quadratorum rectarum BV (æqualibus intervallis sumptarum) Semicirculum ADα, ejusve segmentum ABV complentium; est ejusdem ADα Semicirculi, ejusve Segmenti ABV, momentum respectu diametri suæ Aα. Nempe Semicirculi momentum, ⅔ R^3; & segmenti ABV momentum (respectu ejusdem Aα) ⅓ v R^2 − ⅙ $s^2 R$ + ⅙ s^2 v; per § Q. R. prop. 15.

His autem jam inventis *Omn.* ½ a^2 + ½ s^2; si addantur *Omn.* a s, (ut modo ostensum est) habentur *Omn.* ½ a^2 + a s + ½ s^2: Momentum Semicycloidis, ejusve Segmenti bVA, respectu Aα.

Adeoque

Adeoque si admittamus Momentum illud Semicycloidis Segmentive sui, per præcedentem methodum, jam inventum: Inde colligitur summa omnium $a s$; hoc est, factum ex omnibus ordinatis in Semicirculo, ductis in respectivos arcus ipsis & vertice interceptos.

Quippe, si ex Momento Semicycloidis, respectu rectæ A α, (§ H. invento,) $\frac{3}{16} RP^2 - \frac{4}{3} R^3$; auferamus tum $\frac{1}{8} RP^2 - 2 R^3$, tum $\frac{2}{3} R^3$, (hoc est, summam *Omn*: $\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} s^2$;) Quod restat, $\frac{1}{16} RP^2$, est summa *Omn.* $a s$.

Similiter; Si ex Momento Segmenti Semicycloidis b V A, respectu A α, (§ K. invento,) $-\frac{1}{4} a^2 R + \frac{1}{2} a s R + \frac{1}{12} s^2 R - \frac{2}{3} v R^2 + \frac{1}{2} a^2 v + \frac{1}{2} a s v + \frac{1}{6} s^2 v$; auferamus, tum $-\frac{1}{2} a^2 R + a s R - v R^2 + \frac{1}{2} a^2 v$; tum $\frac{1}{3} v R^2 - \frac{1}{6} s^2 R + \frac{1}{6} s^2 v$; (hoc est summam *Omn.* $\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} s^2$, eo spectantium;) Quod restat, $\frac{1}{4} a^2 R - \frac{1}{2} a s R + \frac{1}{4} s^2 R + \frac{1}{2} a s v$, est summa *Omn.* $a s$, eo spectantium.

Si vero Momentum illud integrum sive Semicycloidis, sive Segmenti ejus b V A, nondum ut inventum assumatur: Eadem summa *Omn.* $a s$, per se habetur, per § K, L. prop. 18. (Completur utique Solidum A b B V, ibidem descriptum, ex ductu rectarum b B $= a$, in B V $= s$, respective.) Nempe, quæ totam Semicycloidem spectant $\frac{1}{16} RP^2$; Quæque ipsius Segmentum b V A, $\frac{1}{4} a^2 R - \frac{1}{2} a s R + \frac{1}{4} s^2 R + \frac{1}{2} a s v$.

Additis igitur, pro tota Semicycloide, tum $\frac{1}{8} RP^2 - 2 R^3 =$ *Omn.* $\frac{1}{2} a^2$; tum $\frac{2}{3} R^3 =$ *Omn.* $\frac{1}{2} s^2$; tum $\frac{1}{16} RP^2 =$ *Omn.* $a s$: Habentur, quatenus totam Semicycloidem spectant, *Omn.* $\frac{1}{2} a^2 + a s + \frac{1}{2} s^2$: Hoc est Momentum Semicycloidis respectu A α, $\frac{3}{16} RP^2 - \frac{4}{3} R^3$. Ut supra § K. Fig. 166, 168.

Additisque, pro Semicycloidis Segmento b V A, tum $-\frac{1}{2} a^2 R + a s R - v R^2 + \frac{1}{2} a^2 v =$ *Omn.* $\frac{1}{2} a^2$; tum $\frac{1}{3} v R^2 - \frac{1}{6} s^2 R + \frac{1}{6} s^2 v =$ *Omn.* $\frac{1}{2} s^2$; tum $\frac{1}{4} a^2 R - \frac{1}{2} a s R + \frac{1}{4} s^2 R + \frac{1}{2} a s v =$ *Omn.* $a s$: Habentur *Omn.* $\frac{1}{2} a^2 + a s + \frac{1}{2} s^2$, eo spectantia; Hoc est, Momentum Segmenti Semicycloidis b V A, respectu A α, $-\frac{1}{4} a^2 R + \frac{1}{2} a s R + \frac{1}{12} s^2 R - \frac{2}{3} v R^2 + \frac{1}{2} a^2 v + \frac{1}{2} a s v + \frac{1}{6} s^2 v$; ut prius § K. Unde Centra gravitatis, Solidaque conversione facta, eodem modo quo prius elicientur.

Item, Si Momento Segmenti b V A respectu A α, sic invento; addatur Momentum Trapezii b β α V (§ K. traditum,) Habebitur portionis b β α V A Momentum respectu A α; idem nempe quod alia methodo prius exhibitum est § I. Unde ejusdem Centrum gravitatis, Solidaque conversione facta, eodem modo quo prius elicientur.

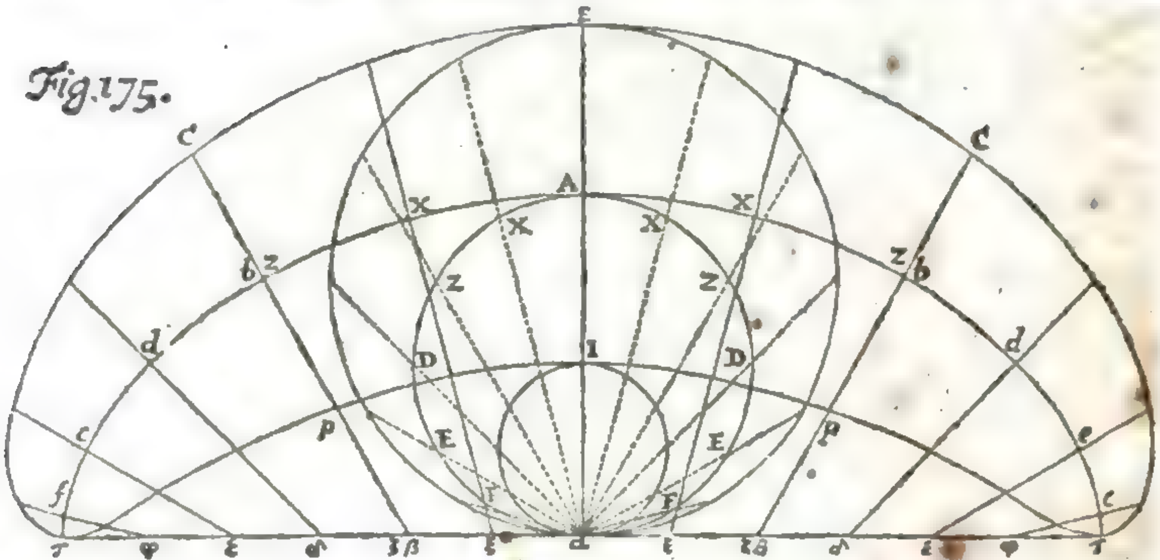
Exhibuimus itaque tum ipsius Semicycloidis (adeoque & Cycloidis totius) ejusque partium expositarum, tum Magnitudines, tum Momenta respectu rectarum aliquot expositarum; earumque Centrorum gravitatis ab illis rectis distantias: Et propterea ipsa earundem Centra gravitatis. Datis enim Centri gravitatis distantiis à duabus in eodem plano rectis (non invicem parallelis;) datur ipsum gravitatis Centrum, per prop. 26. cap. præced. M.

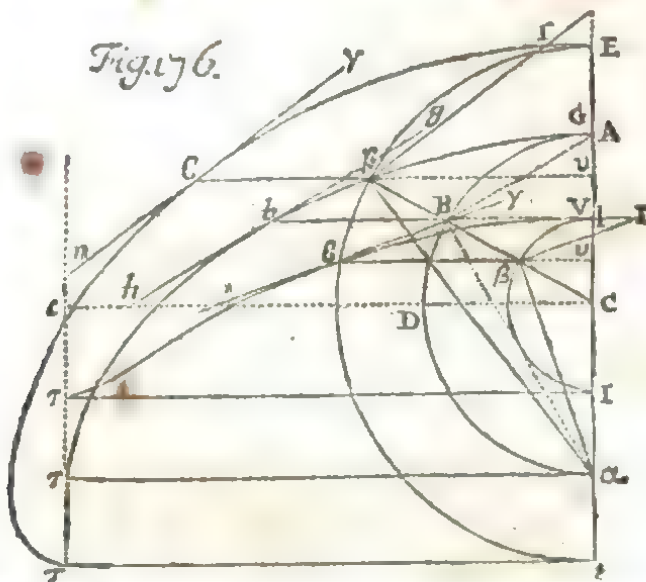
Atque his quidem ita traditis; non erit difficile in aliis item Cycloidis Segmentis, variis modis abscissis, tum Magnitudines, tum Momenta, adeoque & Centra gravitatis determinare: Additionibus scilicet, & Subductionibus factis prout res postulaverit.

Eademque Segmenta quæ nos ad aliquot rectas comparavimus, eorundem respectu illarum Momenta determinando, ipsaque Centra gravitatis (per distantias suas à duabus saltem non parallelis rectis) designando: Poterit quilibet ad alias quasvis datas rectas (propter tum Magnitudines tum distantias Centrorum datas) similiter comparare: Idemque & in aliis Segmentis (horum ope) præstare.

Ex Momentis autem; Ungularum Magnitudines, & Solidorum conversione (perfecta aut imperfecta) descriptorum, obtineri posse; in præcedentibus sæpe dictum est. Sunt utique Ungulæ Semiquadrantales, ipsis Momentis (ut à nobis designatis) æquales; (aliæque Ungulæ, ad has, in altitudinum ratione:) Solidaque integra conversione facta, ad correspondentes Ungulas Semiquadrantales, ut P, ad R; & semisolida, eorum dimidia: Et similiter de aliis imperfectis conversionibus, servata ratione, judicandum. Ut ad hanc aliasque propositiones sæpius insinuatum est.

N. Denique; quæ de Cycloide primaria jam tradidimus omnia, eadem ad Secundarias facile transferuntur, quas *Protractas Contractasque* appellant.





Cycloidem vero *Primariam* illam dicunt quam hactenus descripsimus; Quam scilicet volventis circuli Punctum aliquod in peripheria, describit, dum ipsa sibi Peripheria commensurat in subjecto plano æqualem rectam τατ; Ejusve Centrum rectam describit cCc, peripheriæ æqualem. Puta τAτ, fig. 166, 175, 176.

Si vero recta cCc, quam Centrum describit dum circulus unam conversionem facit, seu quæ huic subest in plano τατ, quam Cycloidis Basem dicimus, Major fuerit quam Circuli Genitoris Peripheria, *Protractam* dicimus Cycloidem; ut τIτ fig.175. si Minor, *Contractam*, ut τEτ.

Dumque Circulus ADα, aliquo peripheriæ suæ puncto, describit Cycloidem *primariam*, ut τA; Fig. 166, 176. eodem tempore, Circuli Concentrici cujusque Minoris correspondens punctum describit Cycloidem *Protractam* ut τI, fig. 176. Concentrici vero *Majoris* cujusque punctum correspondens, *Contractam* describit ut τE. Quarum quidem Cycloidum *Protractæ Contractæque* Genitores, sunt illi *Minor*, *Majorque* Circulus.

Quæ autem de Cycloide Primaria traduntur omnia; eadem Secundariis accommodantur; cum hoc discrimine, Quod, cum in *Primaria* rectæ bB sint ipsis Genitoris sui arcubus BA Æquales; in *Protractis*, Majores sunt; in *Contractis* Minores; quam suorum respective Genitorum Correspondentes arcus BA; & quidem

dem in ea ratione Majores Minoresve, qua recta $\tau\alpha$, major est vel minor quam $\frac{1}{2}P$, Genitoris Circuli sui Semicircumferentia. Adeoque, quoties in calculum veniunt rectæ b B; pro α, substituenda erit quantitas quæ ad hanc sit in ea ratione qua est $\tau\alpha$, ad $\frac{1}{2}P$. Et similiter, mutatis mutandis, in earundem Quadratis, Cubis, reliquisque potestatibus: Ut in præcedentibus aliquot propositionibus monitum fuit.

PROP. XXI.

Ungula Semicycloidi $A\tau\alpha$ insistens aciem habens $\tau\alpha$, est *Dupla-sesquialtera*, correspondentis Ungulæ Semicirculo $AD\alpha$ insistentis; seu ut 5 ad 2. A. Fig. 166

Ejusque *Momentum* respectu aciei suæ, est *Duplum-sesquitertium* Momenti Ungulæ respectivæ Semicirculo $AD\alpha$ insistentis, eandem aciem habentis, respectu aciei suæ; seu ut 7 ad 3.

Idemque in respectivis portionibus obtinet: Puta *Ungula* Quadrilineo $b\beta\alpha A$ in Semicycloide insistens, aciem habens $\tau\alpha$, est *Dupla-sesquialtera* respectivæ Ungulæ Sectori $B\alpha A$ insistentis; seu ut 5 ad 2.

Ejusque *Momentum* est *Duplum-sesquitertium* momenti respectivæ Ungulæ insistentis Sectori $B\alpha A$; respectu aciei suæ $\tau\alpha$; seu ut 7 ad 3.

Atque hinc eadem respective determinantur, tum quoad Momenta, & Centra gravitatis, in Ungulis Semicycloidi, ejusve portionibus, insistentibus; atque in illis quæ Semicirculo, ejusque portionibus respectivis insistunt.

Nempe (retentis Symbolis ut in propositionibus præcedentibus,)

Semiquadrantalis Ungulæ, Semicycloidis $A\tau\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo est $\frac{5}{8}R^2P$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{25}{48}R^3P$; respectu TA, $\frac{35}{48}R^3P$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R$; à TA, $\frac{7}{6}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2-\frac{16}{9}R^4$; distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P-\frac{128R^2}{45P}$. B. H.

Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{7}{8}R^2P$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{25}{48}R^3P$; respectu TA, $\frac{49}{48}R^3P$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{25}{42}R$; à TA, $\frac{49}{42}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{7}{32}R^2P^2-\frac{8}{9}R^4$; distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$; $\frac{1}{4}P-\frac{64R^2}{63P}$. B. H.

Aciemque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{3}{16}RP^2-\frac{4}{3}R^3$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{32}R^2P^2-\frac{16}{9}R^4$; respectu TA, $\frac{3}{32}R^2P^2-\frac{8}{9}R^4$; distantia Centri Gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}R-\frac{32R^3}{9P^2-64R^2}$; à TA, $\frac{1}{2}R+\frac{32R^3}{9P^2-64R^2}$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{16}RP^3-\frac{35}{48}R^3P$; distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3P^3-35R^2P}{9P^2-64R^2}$. H. M.

Ungulæ (Semiquadrantalem intellige) Portionis Semicycloidis $b\beta\alpha VA$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo, $\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{12}sbR$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{11}{16}fR^3+\frac{1}{6}sbR^2-\frac{1}{36}s^3R$; respectu TA, $\frac{25}{24}fR^3-\frac{1}{24}sbR^2+\frac{1}{36}s^3R$; distantia C.

Fig. 166. distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R+\frac{14sbR-7s^3}{45fR+15sb}$; à TA, $\frac{5}{8}R$

G. $-\frac{14sbR-7s^3}{45fR+15sb}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{3}{4}a^2R^2+\frac{25}{12}asR^2-\frac{5}{12}asvR-\frac{8}{9}vR^3+\frac{41}{72}s^2R^2-\frac{7}{36}s^2vR$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $a-\frac{45a^2R+64vR^2-41s^2R+14s^2v}{90aR+150sR-30sv}$.

C. Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{3}{4}fR^2-\frac{1}{12}sbR$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{21}{24}fR^3-\frac{1}{24}sbR^2+\frac{7}{36}s^3R$; respectu TA, $\frac{52}{24}fR^3-\frac{19}{24}sbR^2-\frac{7}{36}s^3R$; distantia Centri gravitatis, à $\tau\alpha$, $\frac{21}{42}R+\frac{52sbR+49s^3}{441fR-105sb}$; à TA,

G. $\frac{21}{42}R-\frac{52sbR+49s^3}{441fR-105sb}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{7}{8}a^2R^2+\frac{11}{12}asR^2-\frac{4}{9}vR^3+\frac{19}{72}s^2R^2+\frac{5}{12}asvR+\frac{7}{36}s^2vR$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $a-\frac{32vR^2+63a^2R-19s^2R-14s^2v}{126aR+66sR+30sv}$.

G. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $\frac{3}{4}a^2R+\frac{5}{4}asR-\frac{2}{3}vR^2+\frac{5}{12}s^2R$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{25}{12}asR^2-\frac{5}{12}asvR-\frac{8}{9}vR^3+\frac{41}{72}s^2R^2-\frac{7}{36}s^2vR$; respectu TA, $\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{11}{12}asR^2-\frac{4}{9}vR^3+\frac{19}{72}s^2R^2+\frac{5}{12}asvR+\frac{7}{36}s^2vR$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}R-\frac{12vR^2-30asR-8s^2R+15asv+7s^2v}{27a^2+54as-24vR+15s^2}$;

M. à TA, $\frac{3}{8}R+\frac{12vR^2-30asR-8s^2R+15asv+7s^2v}{27a^2+54as-24vR+15s^2}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{29}{24}eR^3-\frac{4}{3}avR^2-\frac{5}{8}svR^2+\frac{3}{4}a^3R+\frac{3}{2}a^2sR+\frac{5}{6}as^2R+\frac{7}{36}s^3R$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{87eR^2-96avR-9svR+36a^3+108a^2s+60as^2+14s^3}{54a^2+108as-48vR+30s^2}$.

D. Ungulæ portionis Semicycloidis b$\beta\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{3}{4}\alpha R^2-\frac{3}{4}sR^2-\frac{5}{12}sbR$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{21}{24}\alpha R^3-\frac{21}{24}sR^3-\frac{3}{8}sbR^2+\frac{7}{36}s^3R$; respectu TA, $\frac{21}{24}\alpha R^3-\frac{25}{24}sR^3+\frac{1}{24}sbR^2-\frac{7}{36}s^3R$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{7}{8}R-\frac{7sb^2}{45\alpha R-45sR-15sb}$; à

I. TA, $\frac{1}{8}R+\frac{7sb^2}{45\alpha R-45sR-15sb}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{3}{32}R^2\mathcal{P}^2-\frac{16}{9}R^4-\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{8}{9}vR^3-\frac{25}{12}asR^2-\frac{41}{72}s^2R^2+\frac{5}{12}asvR+\frac{7}{36}s^2vR$; distantia Centri gravitatis ab Aα; $a+\frac{45R\mathcal{P}^2-180aR\mathcal{P}+180a^2R-512R^3+256vR^2-164s^2R+56s^2v}{180R\mathcal{P}-360aR-600sR+120sv}$.

D. Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{3}{4}\alpha R^2-\frac{3}{4}sR^2+\frac{1}{12}sbR$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{21}{24}\alpha R^3-\frac{21}{24}sR^3+\frac{1}{24}sbR^2-\frac{7}{36}s^3R$; respectu TA, $\frac{52}{24}\alpha R^3-\frac{52}{24}sR^3+\frac{19}{24}sbR^2+\frac{7}{36}s^3R$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{21}{42}R$

I. $-\frac{52sbR+49s^3}{441\alpha R-441sR+105sb}$; à TA, $\frac{21}{42}R+\frac{52sbR+49s^3}{441\alpha R-441sR+105sb}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{3}{32}R^2\mathcal{P}^2-\frac{8}{9}R^4+\frac{4}{9}vR^3-\frac{7}{8}a^2R^2-\frac{11}{12}asR^2-\frac{19}{72}s^2R^2-\frac{5}{12}asvR-\frac{7}{36}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $a+\frac{63R\mathcal{P}^2-252aR\mathcal{P}-256R^3+128vR^2+252a^2R-76s^2R-56s^2v}{252R\mathcal{P}-504aR-264sR-120sv}$,

I. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $\frac{3}{16}R\mathcal{P}^2-\frac{4}{3}R^3+\frac{2}{3}vR^2-\frac{3}{4}a^2R-\frac{5}{2}asR-\frac{5}{12}s^2R$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{32}R^2\mathcal{P}^2-\frac{16}{9}R^4+\frac{8}{9}vR^3-\frac{3}{8}a^2R^2-\frac{25}{12}asR^2-\frac{41}{72}s^2R^2+\frac{5}{12}asvR+\frac{7}{36}s^2vR$; respectu TA, $\frac{3}{32}R^2\mathcal{P}^2-\frac{8}{9}R^4+\frac{4}{9}vR^3-$

$\frac{3}{8}a^2R^2$

$-\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{11}{12}asR^2 - \frac{19}{72}s^2R^2 - \frac{1}{12}asvR - \frac{1}{36}s^2vR$; distantia Centri gravitatis à Fig. 166.
$\tau\alpha$, $\frac{2}{3}R - \frac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR + 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54P^2 - 384R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2}$; à TA,
$\frac{2}{3}R + \frac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR + 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54P^2 - 384R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{1}{16}RP^3 - \frac{35}{48}R^3P - \frac{29}{32}cR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{2}a^3R - \frac{3}{2}a^2sR - \frac{5}{6}as^2R - \frac{7}{36}s^3R$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{9P^3 - 105R^2P - 174cR^2 + 192avR + 18svR - 72a^3 - 216a^2s - 120as^2 - 28s^3}{27P^2 - 192R^2 + 96vR - 108a^2 - 216as - 60s^2}$. N.

Ungulæ Trapezii b$\beta\alpha$V, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{3}sb^2$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ab^3 + \frac{1}{4}sb^3$; respectu TA, $ab^2R + \frac{2}{3}sb^2R - \frac{1}{3}ab^3 - \frac{1}{4}sb^3$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4a+3s}{6a+4s}b$; à TA, $2R - \frac{4a+3s}{6a+4s}b$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{3}asb^2 + \frac{1}{8}s^2b^2$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a + \frac{4as+3s^2}{12a+8s} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}s + \frac{s^2}{36a+24s}$. F. K.

Aciemque habentis TA; Magnitudo, $2abR + sbR - \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{3}sb^2$; momentum respectu $\tau\alpha$, $ab^2R + \frac{2}{3}sb^2R - \frac{1}{3}ab^3 - \frac{1}{4}sb^3$; respectu TA, $4abR^2 + 2sbR^2 - 2ab^2R - \frac{4}{3}sb^2R + \frac{1}{3}ab^3 + \frac{1}{4}sb^3$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}b + \frac{2sbR - fb^2}{24aR + 12sR - 6ab - 4sb}$; à TA, $2R - \frac{2}{3}b - \frac{2sbR - fb^2}{24aR + 12sR - 6ab - 4sb}$: Momentum respectu A$\alpha$, $fabR + \frac{1}{3}s^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2 - \frac{1}{3}asb^2 - \frac{1}{8}s^2b^2$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}s + \frac{2s^2R - fsb}{48aR + 24sR - 12ab - 8sb}$. F. K.

Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $\frac{1}{2}fab + \frac{1}{6}s^2b$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{3}asb^2 + \frac{1}{8}s^2b^2$; respectu TA, $fabR + \frac{1}{3}s^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2 - \frac{1}{3}asb^2 - \frac{1}{8}s^2b^2$; distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}b + \frac{2asb + s^2b}{12fa + 4s^2}$; à TA, $2R - \frac{1}{2}b - \frac{2asb + s^2b}{12fa + 4s^2}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{1}{3}a^3b + \frac{1}{2}a^2sb + \frac{1}{3}as^2b + \frac{1}{12}s^3b$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{4a^3 + 6a^2s + 4as^2 + s^3}{6fa + 2s^2}$. K. O.

Ungulæ Segmenti Semicycloidis bVA, aciem habentis TA; Magnitudo, $-\frac{1}{4}cR^2 + avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$; momentum respectu TA, $-\frac{5}{24}cR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{7}{8}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{19}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$; respectu $\tau\alpha$, $-\frac{1}{24}cR^3 + \frac{2}{3}avR^2 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$; respectu bV, $\frac{1}{24}cR^3 + \frac{1}{12}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{2}{9}s^3R - \frac{1}{6}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; distantia Centri gravitatis a TA, $\frac{2}{3}R + \frac{6fvR^2 - 3fs^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3cR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}$; à $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}R - \frac{6fvR^2 - 3fs^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3cR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}$; à bV, $v - \frac{1}{3}R$ $(= \frac{2}{3}R - b) - \frac{6fvR^2 - 3fs^2R(= 3fv^2R) - 4as^2v - 3s^3v}{-3cR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}$: Momentum respectu A$\alpha$, $-\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{12}s^2R^2 - \frac{1}{8}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{3}{4}asvR + \frac{1}{18}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{3}as^3 - \frac{1}{8}s^4$; distantia Centri gravitatis ab E. K.

Fig. 166. Aα, $\frac{1}{2}a + \frac{9asR^2 + 7s^2R^2 - 32vR^3 + 27asvR + 20s^2vR - 12as^3 - 9s^4}{-18eR^2 + 72avR + 54svR - 36as^2 - 24s^3}$.

E. Aciemque habentis τα; Magnitudo, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$; momentum respectu TA, $-\frac{7}{24}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 + \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$; respectu τα, $-\frac{29}{24}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{6}svR^2 + \frac{4}{3}as^2R + \frac{29}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$; respectu bV, $\frac{7}{18}eR^3 + \frac{7}{12}avR^2 + \frac{7}{8}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{6}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$; distantia Centri gravitatis à TA,

$$\frac{-21eR^3 + 48avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R - 10s^3R + 24as^2v + 18s^3v}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3};$$

à τα, $\frac{-87eR^3 + 96avR^2 + 9svR^2 + 96as^2R + 58s^3R - 24as^2v - 18s^3v}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}$;

à bV, $\frac{21eR^3 + 42avR^2 + 63svR^2 - 48as^2R - 8s^3R + 12as^2v + 6s^3v}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}$;

K. Momentum respectu Aα, $-\frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{3}{4}asvR + \frac{5}{18}s^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2 + \frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{8}s^4$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a + \frac{27asR^2 + 5s^2R^2 - 64vR^3 + 9asvR + 4s^2vR + 12as^3 + 9s^4}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}$.

K. Aciemque habentis bV; Magnitudo, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$; momentum respectu TA, $\frac{1}{24}eR^3 + \frac{1}{12}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}as^2R - \frac{2}{9}s^3R - \frac{1}{6}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; respectu τα, $\frac{1}{24}eR^3 + \frac{1}{12}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{6}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$; respectu bV, $-\frac{1}{24}eR^3 + \frac{1}{6}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{6}as^2R - \frac{13}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{1}{2}R - \frac{2as^2v + s^3v - es^2R}{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}$; à τα, $\frac{1}{2}R + \frac{2as^2v + s^3v - es^2R}{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}$: à

K. L. bV, $\frac{1}{2}R - b (= v - \frac{1}{2}R) + \frac{2as^2v + s^3v - es^2R}{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}$: Momentum respectu Aα, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{41}{36}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{4}a^2vR + \frac{3}{4}asvR + \frac{5}{18}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{6}as^3 - \frac{1}{24}s^4$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a + \frac{41s^2R^2 - 9asR^2 - 64vR^3 + 27asvR + 10s^2vR - 6as^3 - 3s^4}{18eR^2 + 36avR + 54svR - 36as^2 - 12s^3}$.

K. L. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $-\frac{1}{2}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$; momentum respectu τα, $-\frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{1}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{3}{4}asvR + \frac{11}{18}s^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2 + \frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{8}s^4$; respectu TA, $-\frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{72}s^2R^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{7}{18}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{3}as^3 - \frac{1}{8}s^4$; respectu bV, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{3}{4}asvR + \frac{5}{36}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{6}as^3 - \frac{1}{24}s^4$; distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{1}{2}R -$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v};$$

à TA, $\frac{1}{2}R + \frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$;

à bV, $\frac{1}{2}R - b - \frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$;

O. P. Momentum respectu Aα, $\frac{29}{24}eR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{2}a^2sR + \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{36}s^3R + \frac{1}{3}a^3v + \frac{1}{2}a^2sv + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$; distantia Centri gravitatis ab Aα,

$$\frac{87eR^3 - 96avR^2 - 9svR^2 - 12a^3R + 36a^2sR + 12as^2R + 2s^3R + 24a^3v + 36a^2sv + 24as^2v + 6s^3v}{-48vR^2 - 18a^2R + 36asR + 6s^2R + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}.$$

Adeoque

Adeoque exhibuimus, in expositis Ungulis, tum Magnitudines & Momenta, tum & ipsa Gravitatis Centra. Quæque de Ungulis tradita sunt; ad Solida conversione facta facile transferentur. Quæque de expositis dicta sunt; facile est ad alia, calculo rite adhibito, accommodare: Puta, Ungulas Trilinei A b K; aliasve ejusmodi. Q.

Quæque de Ungulis Solidisque Semicycloidem Primariam spectantibus tradita sunt; eadem omnia ad Ungulas Solidaque, Semicycloides Secundarias (sive Protractas sive Contractas) spectantia facile transferentur. R.

DIstributis, (ut ad propositionem præcedentem) Tum Semicirculo A D α, in minuta Triangula, numero infinita: Tum Semicycloide A τ α, in totidem Trapezia correspondentia: Intelligatur utrique insistere Semiquadrantalis Ungula, aciem habens τ α. A. Fig. 166, 168, 170, 173, 174.

Quæ autem vel toti Semicirculo, vel ipsius Sectori, ut B α A, insistit Ungula; componi intelligatur ex infinitis numero Ungulis, seu Pyramidulis, minutis illis Triangulis (ut α B, seu Y α P,) incumbentibus: Quarum communis vertex sit α punctum; Basisque super Triangulorum illorum Basibus (ut Y P, &c.) erectæ, altitudines habeant ipsis V α respectivis æquales.

Quæque Semicycloidi sive toti, sive ipsius Portioni, ut b β α V A (quæ Sectori B α A respondet,) insistit; ex totidem Ungulis, quæ respectivis Trapeziis β b, seu y δ ξ p, &c. incumbant; acies habentibus in τ α recta continue jacentes, altitudines vero super ipsis y b p Trapeziorum basibus (pro Semiquadrantalis Ungulæ ratione) ipsis V α (respective) earundem à τ α distantiis, æquales.

Quæ quidem Minutis illis Trapeziis insistentes Ungulæ (propter Trapezia illa æqualia, respectivis tum Semicirculi Triangulis, tum Trilinei Restituti fig. 170. Parallelogrammis simul sumptis,) æquales erunt respectivis Pyramidulis Cuneisque simul sumptis, quæ respectivis Semicirculi Triangulis Trilineique restituti Parallelogrammis, incumbunt; adeoque ad pyramidulas illas, ut 5 ad 2; (ut ad prop. præced. ostensum est.) Suntque in eisdem respective sive à τ α, sive T A, (aut hisce parallelis,) distantiis (ut patet.) Adeoque & Momenta Momentis æqualia habebunt, sive respectu rectæ τ α, sive T A, sive cujusvis hisce parallelæ rectæ.

Cumque hoc in singulis respective obtineat, (adeoque in simul omnibus:) Illius, quæ ex Ungulis hisce, minutis Trapeziis incumbentibus, componitur, (sive toti A τ α Semicycloidi, sive ipsius portioni, ut b β α A, vel b β δ d, vel b β τ, &c. fig. 166. insistentis,) Ungulæ Momentum; æquale est Momentis, simul sumptis, tum illius quæ ex Pyramidulis componitur Ungulæ, (sive toti Semicirculo A D α, sive ipsius portioni respectivæ, ut B α A, B α D, B α B, &c. insistentis,) tum illius quæ ex Cuneis componitur, (sive toti Trilineo restituto, sive ipsius portioni respectivæ, ut b β α A, b β δ d, b β τ, &c. fig. 170. insistentis,) simul sumptis.

Est autem illius quæ ex Cuneis, ad illius quæ ex Pyramidulis componitur, Ungulæ momentum, respectu rectæ τ α; ut 4, ad 3, (per § A. prop. 19.) Est itaque illius quæ ex Ungulis Trapeziorum componitur (sive toti Semicycloidi A τ α, sive ipsius Portioni, ut b β α A, b β δ d, b β τ, &c. insistentis) momentum (utpote utrisque illis æquale) ad momentum illius quæ ex pyramidulis componitur (sive toti Semicirculo A D α, sive ipsius respectivæ portioni B α A, B α D, B α B, &c. insistentis;) ut 7 ad 3.

Et quidem, ea quæ Trilineo restituto A τ α, fig. 170. insistit Ungula sive aciem habeat τ α, sive T A, sive aliam quamvis rectam hisce parallelam; alia non est quam quæ Trilineo distorto A τ α D (Cycloidis curvæ, & Semicirculi convexæ interjecto) insistit, in situm debitum restituta: Et Ungularum Momenta, respectu rectarum τ α, T A, aut hisce parallelarum, (propter tum Magnitudines tum Distantias æquales,) sunt æqualia. Quod & in partibus respective comparatis, perinde obtinet: Puta, quæ curvæ rectæque A b, A B, fig. 170. & quæ curvis A b, A B, fig. 166. interjacet; item quæ rectis B α, b β, fig. 170. quæque duabus sive rectis sive curvis B α, b β, fig. 166. interjacet; (& similiter alibi;) propter

Fig. 166, 170. tum Magnitudines tum Diſtantias utrobique æquales. (Si vero vel Ungularum acies, vel rectæ ad quas momenta æſtimantur, ſint A α; aliave quæ ipſis $\tau\alpha$, TA, parallela non ſit; ſecus erit: Propter vel Magnitudines, vel Diſtantias, vel utraſque variatas. Ut poſt dicendum erit.)

B. Eſt autem, toti Semicirculo inſiſtentis Semiquadrantalis Ungulæ, aciem habentis $\tau\alpha$, Momentum reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$ rectæ, $\frac{1}{16} R^3 P$; & reſpectu rectæ TA, $\frac{3}{16} R^3 P$; per § T. prop. 16. Totique Trilineo inſiſtentis, aciem item habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$, eſt, $\frac{5}{12} R^3 P$; reſpectu TA, $\frac{1}{3} R^3 P$; per § B. prop. 19.

Ergo Semicycloidi inſiſtentis Ungulæ, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{23}{48} R^3 P$; & reſpectu TA, $\frac{25}{48} R^3 P$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{3}{4} R^2 P$, per § C. prop. præced.) Diſtantia Centri gravitatis Ungulæ à $\tau\alpha$, $\frac{23}{36} R$; a TA, $\frac{25}{36} R$. Semiſolidique circa $\tau\alpha$, Magnitudo (quippe ad illam Ungulæ, ut $\frac{1}{2} P$ ad R, ſeu P ad $2R$,) $\frac{3}{8} R P^2$; Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$ (quippe ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2} P$, ſeu $4R$ ad P,) $\frac{14 R^2}{3 P}$; Semiſolidique momentum reſpectu axis ſui $\tau\alpha$, ad illud Ungulæ ut 2 ad 1; (propter magnitudinem ut P ad $2R$; & diſtantiam ut $4R$ ad P; per prop. 12. & 14. eſtque $\frac{P}{2R} \times \frac{4R}{P} = \frac{2}{1}$:) hoc eſt, $\frac{23}{24} R^3 P$.

Similiter; Semicirculo inſiſtentis Ungulæ, aciem habentis TA, Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{16} R^3 P$; & reſpectu TA, $\frac{1}{16} R^3 P$; (per § T. prop. 16.) Trilineoque Reſtituto inſiſtentis, aciem habentis TA, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3} R^3 P$, (idem utique atque aciem habentis $\tau\alpha$, Momentum reſpectu TA, propter magnitudines & diſtantias reciprocatas,) & reſpectu TA, $\frac{11}{12} R^3 P$; per § B. prop. 19.

Ergo, Semicycloidi inſiſtentis, aciem habentis TA, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{25}{48} R^3 P$; & reſpectu TA, $\frac{23}{48} R^3 P$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{3}{4} R^2 P$, per § C. prop. præced.) Diſtantia Centri à $\tau\alpha$, $\frac{25}{36} R$; & à TA, $\frac{23}{36} R$. Semiſolidique circa TA, magnitudo, $\frac{7}{16} R P^2$; Diſtantia Centri gravitatis ab axe converſionis TA, $\frac{118 R^2}{21 P}$; Momentum reſpectu ejuſdem TA, $\frac{23}{24} R^3 P$.

C. Item Ungulæ Sectoris B α A, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8} f R^3 + \frac{1}{8} s b R^2 - \frac{1}{12} s^3 R$; reſpectu TA, $\frac{1}{8} f R^3 - \frac{1}{24} s b R^2 + \frac{1}{12} s^3 R$; per § W. prop. 16. Ungulaque portionis Trilinei reſtituti b $\beta\alpha$ BA, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3} f R^3 + \frac{1}{2} s b R^2 - \frac{1}{5} s^3 R$; reſpectu TA, $\frac{2}{3} f R^3 + \frac{1}{9} s^3 R$; per § C. prop. 19.

Ergo Ungulæ Portionis Semicycloidis b $\beta\alpha$ V A, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{11}{24} f R^3 + \frac{5}{8} s b R^2 - \frac{1}{36} s^3 R = \frac{11}{24} a R^3 + \frac{11}{24} s R^3 - \frac{5}{8} s v R^2 - \frac{1}{36} s^3 R$; reſpectu TA, $\frac{23}{24} f R^3 - \frac{1}{24} s b R^2 + \frac{7}{36} s^3 R = \frac{23}{24} a R^3 + \frac{23}{24} s R^3 + \frac{1}{24} s v R^2 + \frac{7}{36} s^3 R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{3}{4} f R^2 + \frac{1}{12} s b R$, per § D. prop. præced.) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6} R + \frac{14 s b R - 7 s^3}{45 f R + 15 s b}$; & à TA, $\frac{1}{6} R - \frac{14 s b R - 7 s^3}{45 f R + 15 s b}$. Semiſolidique circa $\tau\alpha$, magnitudo $\frac{3}{8} f R P + \frac{1}{24} s b P$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{11}{12} f R^3 + \frac{5}{4} s b R^2 - \frac{1}{18} s^3 R$; Centri gravitatis à $\tau\alpha$ diſtantia, $\frac{14 R^2}{3 P} + \frac{56 s b R^2 - 28 s^3 R}{45 f R P + 15 s b P}$.

Similiter, Ungulæ Sectoris B α A, aciem habentis TA; Momentum reſpectu TA, eſt $\frac{1}{8} f R^3 - \frac{1}{24} s b R^2 - \frac{1}{12} s^3 R$; per § W. prop. 16. Ungulæque in Trilineo correſpondentis b $\beta\alpha$ BA, $\frac{11}{6} f R^3 - \frac{1}{2} s b R^2 - \frac{1}{9} s^3 R$, per § C. prop. 19.

Ergo Ungulæ portionis Semicycloidis b $\beta\alpha$ V A, aciem habentis TA, momentum reſpectu ipſius TA, $\frac{23}{24} f R^3 - \frac{13}{24} s b R^2 - \frac{7}{36} s^3 R = \frac{23}{24} a R^3 + \frac{1}{6} s R^3 + \frac{13}{24} s v R^2 - \frac{7}{36} s^3 R$; & reſpectu $\tau\alpha$ (idem quod aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu TA; propter magnitudines & diſtantias reciprocatas,) $\frac{23}{24} f R^3 - \frac{1}{24} s b R^2 + \frac{7}{36} s^3 R = \frac{23}{24} a R^3 + \frac{23}{24} s R^3 + \frac{1}{24} s v R^2 + \frac{7}{36} s^3 R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{3}{4} f R^2 - \frac{1}{12} s b R$, per § D. prop. præced.) Diſtantia Centri gravitatis à TA, $\frac{23}{36} R -$

52 s b R

$\frac{52sbR + 49s^3}{441fR - 105sb}$; & à $\tau\alpha$, $\frac{23}{42}R + \frac{52sbR + 49s^3}{441fR - 105sb}$. Semisolidique circa TA, Fig. 166, 170.
magnitudo $\frac{1}{6}fRP - \frac{5}{24}sbP$; momentum respectu TA, $\frac{23}{72}fR^3 - \frac{13}{18}sbR^2 - \frac{7}{18}s^3R$;

Centrique gravitatis inde distantia $\frac{118R^2}{21P} - \frac{208sbR + 196s^3}{441fRP - 105sbP}R$.

Item, Ungulæ Segmenti $\alpha B \alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$; momentum respectu $\tau\alpha$, est D.
$\frac{2}{3}\alpha R^3 - \frac{1}{3}sR^3 - \frac{1}{2}sbR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, & respectu TA, $\frac{1}{3}\alpha R^3 - \frac{1}{3}sR^3 + \frac{1}{24}sbR^2 - \frac{1}{18}s^3R$; per § Y. prop. 16. Ungulæque respectivæ in Trilineo Restituto $b\beta\tau$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}\alpha R^3 - \frac{1}{3}sR^3 - \frac{1}{2}sbR^2 + \frac{1}{9}s^3R$; & respectu TA, $\frac{2}{3}\alpha R^3 - \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{9}s^3R$; per § D. prop. 19.

Ergo, Ungulæ portionis Semicycloidis $b\beta\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{23}{24}\alpha R^3 - \frac{23}{24}sR^3 - \frac{1}{6}sbR^2 + \frac{1}{36}s^3R = \frac{11}{16}R^3P - \frac{23}{24}aR^3 + \frac{23}{24}sR^3 + \frac{1}{6}svR^2 + \frac{1}{36}s^3R$; respectu TA, $\frac{23}{24}\alpha R^3 - $ [illegible] $sR^3 + \frac{1}{24}sbR^2 - \frac{7}{36}s^3R = \frac{11}{16}R^3P - \frac{23}{24}aR^3 - \frac{23}{24}sR^3 - \frac{1}{24}svR^2 - \frac{7}{36}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{12}sbR$, per § E. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{105\alpha R^2 - 105sR^2 - 63sbR + 14s^3}{90\alpha R - 90sR - 30sb} = \frac{7}{6}R - \frac{14sbR - 7s^3}{45\alpha R - 45sR - 15sb}$
$= \frac{7}{6}R - \frac{14sbR - 7sbv}{45\alpha R - 45sR - 15sb} = \frac{7}{6}R - \frac{7sb^2}{45\alpha R - 45sR - 15sb}$; à TA,
$\frac{75\alpha R^2 - 75sR^2 + 3sbR - 14s^3}{90\alpha R - 90sR - 30sb} = \frac{5}{6}R + \frac{7sb^2}{45\alpha R - 45sR - 15sb}$. Semisolidique correspondentis circa $\tau\alpha$, magnitudo, $\frac{3}{4}\alpha RP - \frac{3}{4}sRP - \frac{1}{24}sbP$; ejusque respectu $\tau\alpha$ momentum $\frac{23}{12}\alpha R^3 - \frac{23}{12}sR^3 - \frac{1}{3}sbR^2 + \frac{1}{18}s^3R$; indeque Distantia Centri gravitatis, $\frac{14R^2}{3P} - \frac{28sb^2R}{45\alpha RP - 45sRP - 15sbP}$.

Similiter; Ungulæ segmenti $\alpha B \alpha$, aciem habentis TA; momentum respectu TA, est $\frac{1}{3}\alpha R^3 - \frac{1}{3}sR^3 + \frac{1}{24}sbR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; per § Y. prop. 16. Ungulæque correspondentis in Trilineo Restituto $b\beta\tau$, $\frac{11}{6}\alpha R^3 - \frac{11}{6}sR^3 + \frac{1}{2}sbR^2 + \frac{1}{9}s^3R$; per § D. prop. 19.

Ergo, Ungulæ $b\beta\tau$ in Semicycloide, aciem habentis TA, momentum respectu TA, $\frac{23}{24}\alpha R^3 - \frac{23}{24}sR^3 + \frac{13}{24}sbR^2 + \frac{7}{36}s^3R$; & respectu $\tau\alpha$ (idem quod aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu TA,) $\frac{23}{24}\alpha R^3 - \frac{23}{24}sR^3 + \frac{1}{24}sbR^2 - \frac{7}{36}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 + \frac{5}{12}sbR$, per § E. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{177\alpha R^2 - 177sR^2 + 57sbR + 14s^3}{126\alpha R - 126sR + 30sb}$
$= \frac{19}{42}R + \frac{52sbR + 49s^3}{441\alpha R - 441sR + 105sb}$; à $\tau\alpha$, $\frac{75\alpha R^2 - 75sR^2 + 3sbR - 14s^3}{126\alpha R - 126sR + 30sb}$
$= \frac{25}{42}R - \frac{52sbR + 49s^3}{441\alpha R - 441sR + 105sb}$. Semisolidique correspondentis circa TA, magnitudo $\frac{3}{4}\alpha RP - \frac{3}{4}sRP + \frac{5}{24}sbP$: Momentum respectu TA, $\frac{23}{12}\alpha R^3 - \frac{23}{12}sR^3 + \frac{13}{18}sbR^2 + \frac{7}{18}s^3R$: Centrique gravitatis à TA distantia, $\frac{118R^2}{21P} + \frac{208sbR^2 + 196s^3R}{441\alpha RP - 441sRP + 105sbP}$.

Item, Ungulæ Segmenti Semicirculi, B V A, aciem habentis TA; momentum E.
respectu TA, est, $\frac{1}{3}cR^3 + \frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{3}s^3v$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}cR^3 + \frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$; & respectu bBV, $-\frac{1}{3}cR^3 + \frac{1}{2}\alpha vR^2 - \frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{18}s^3v$; per § T. prop. 16.

Et Ungulæ Trilinei bBA aciem item habentis TA, momentum respectu TA, est $-\frac{1}{3}cR^3 + \frac{1}{2}\alpha vR^2 + \frac{1}{3}svR^2 - \frac{2}{3}\alpha s^2R - \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{3}\alpha s^2v$; & respectu $\tau\alpha$,

 $-\frac{1}{3}cR^3$

Fig. 166, 170. $-\frac{2}{3}eR^3+\frac{2}{3}avR^2-\frac{1}{3}as^2R+\frac{1}{6}s^3R+\frac{1}{3}as^2v$; & respectu bBV, $\frac{1}{6}eR^3-\frac{1}{12}avR^2+\frac{3}{4}svR^2-\frac{1}{6}as^2R-\frac{1}{36}s^3R-\frac{1}{6}as^2v$; per § E. prop. 19.

Ergo Ungulæ Segmenti Semicycloidis bVA, aciem habentis TA, momentum respectu TA, est $-\frac{5}{24}eR^3+\frac{4}{3}avR^2+\frac{9}{8}svR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{19}{36}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$; & respectu $\tau\alpha$, $-\frac{7}{24}eR^3+\frac{2}{3}avR^2+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$; & respectu bBV, $\frac{5}{24}eR^3+\frac{5}{12}avR^2+\frac{5}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{2}{9}s^3R-\frac{1}{6}as^2v-\frac{1}{12}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem, $-\frac{1}{4}eR^2+avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{3}s^3$; per § F, G. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à TA,

$$\frac{-15eR^3+96avR^2+81svR^2-48as^2R-38s^3R-24as^2v-18s^3v}{-18eR^2+72avR+54svR-36as^2-24s^3};$$

$$=\frac{5}{6}R+\frac{6fvR^2-3fs^2R\,(=3fv^2R)-4as^2v-3s^3v}{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3};\ \text{à}\ \tau\alpha,$$

$$\frac{-21eR^3+48avR^2+27svR^2-24as^2R-10s^3R+24as^2v+18s^3v}{-18eR^2+72avR+54svR-36as^2-24s^3}$$

$$=\frac{1}{6}R-\frac{3fv^2R-4as^2v-3s^3v}{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3};\ \text{à bBV},$$

$$\frac{15eR^3+30avR^2+45svR^2-24as^2R-16s^3R-12as^2v-6s^3v}{-18eR^2+72avR+54svR-36as^2-24s^3}$$

$$=v-\frac{1}{6}R-\frac{3fv^2R-4as^2v-3s^3v}{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3}=\frac{5}{6}R-b-$$

$$\frac{3fv^2R-4as^2v-3s^3v}{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3}.$$ Semisolidique correspondentis circa TA, magnitudo ad illud Ungulæ aciem habentis TA, ut $\frac{1}{2}P$ ad R. Momentum Semisolidi ad Momentum Ungulæ, ut 2 ad 1; Centrique gravitatis distantia in semisolido, ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$.

Similiter, Ungulæ Segmenti Semicirculi BVA, aciem habentis $\tau\alpha$; momentum respectu $\tau\alpha$, est, $\frac{2}{3}eR^3+\frac{3}{8}svR^2+\frac{11}{12}s^3R-\frac{1}{8}s^3v$; & respectu bBV, $-\frac{1}{6}eR^3+\frac{1}{2}avR^2+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$; per § T. prop. 16.

Ungulæque Trilinei bBA, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}fR^3+\frac{1}{2}shR^2-\frac{1}{6}s^3R-\frac{1}{3}ab^3=-\frac{11}{6}eR^3+\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{2}svR^2+\frac{1}{3}as^2R-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{3}as^2v$; & respectu bBV, $\frac{2}{3}fR^3-\frac{3}{4}ahR^2-\frac{1}{4}sbR^2-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{4}sb^2R+\frac{1}{6}ab^3=\frac{2}{3}eR^3+\frac{1}{12}avR^2+\frac{3}{4}svR^2-\frac{2}{3}as^2R+\frac{1}{36}s^3R+\frac{1}{6}as^2v$; per § E. prop. 19.

Adeoque Ungulæ Segmenti Semicycloidis bVA, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{29}{24}eR^3+\frac{4}{3}avR^2+\frac{1}{8}svR^2+\frac{4}{3}as^2R+\frac{29}{36}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$; & respectu bBV, $\frac{7}{24}eR^3+\frac{7}{12}avR^2+\frac{7}{8}svR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{9}s^3R+\frac{1}{6}as^2v+\frac{1}{12}s^3v$; & respectu TA, (idem quod aciem habentis TA, momentum respectu $\tau\alpha$,) $-\frac{7}{24}eR^3+\frac{2}{3}avR^2+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2+\frac{1}{3}s^3$; per § F, G. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis, à $\tau\alpha$,

$$\frac{-87eR^3+96avR^2+9svR^2+96as^2R+58s^3R-24as^2v-18s^3v}{-54eR^2+72avR+18svR+36as^2+24s^3};$$

à bBV, $$\frac{21eR^3+42avR^2+63svR^2-48as^2R-8s^3R+12as^2v+6s^3v}{-54eR^2+72avR+18svR+36as^2+24s^3};$$

à TA, $$\frac{-21eR^3+48avR^2+27svR^2-24as^2R-10s^3R+24as^2v+18s^3v}{-54eR^2+72avR+18svR+36as^2+24s^3}.$$

Semisolidique correspondentis circa $\tau\alpha$, Magnitudo ad illud Ungulæ, ut $\frac{1}{2}P$ ad R; Momentum respectu axis sui $\tau\alpha$, ad illud Ungulæ, ut 2 ad 1; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$.

Similiter, Ungulæ Segmenti Semicirculi BVA, aciem habentis bBV, momentum

tum respectu bBV, est, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{2}as^2R+\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; per § V. prop. 16. Et Ungulæ Trilinei bBA, aciem habentis bBV, respectu bBV, est $-\frac{5}{6}eR^3+\frac{2}{3}avR^2+\frac{1}{3}as^2R-\frac{11}{18}s^3R-\frac{1}{3}as^2v$; per § E. prop. 19. Fig. 166. 170.

Ergo, Ungulæ Segmenti Semicycloidis bVA, aciem habentis bBV, momentum respectu bBV, est $-\frac{5}{24}eR^3+\frac{5}{6}avR^2+\frac{5}{8}svR^2-\frac{1}{6}as^2R-\frac{19}{36}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{12}s^3v$: Ejusque momentum respectu TA (idem atque aciem habentis TA, respectu bBV,) $\frac{5}{24}eR^3+\frac{5}{12}avR^2+\frac{5}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{2}{9}s^3R-\frac{1}{6}as^2v-\frac{1}{12}s^3v$; & respectu $\tau\alpha$ (idem atque aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu bBV,) $\frac{7}{24}eR^3+\frac{7}{12}avR^2+\frac{7}{8}svR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{9}s^3R+\frac{1}{6}as^2v+\frac{1}{12}s^3v$. Ergo (propter magnitudinem $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{2}avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{6}s^3$; per § F. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à bBV,

$$\frac{-15eR^3+60avR^2+45svR^2-12as^2R-38s^3R-24as^2v-6s^3v}{18eR^2+36avR+54svR-36as^2-12s^3}$$

$$=\frac{1}{2}R-b(=v-\frac{1}{2}R)+\frac{2as^2v+s^3v-es^2R}{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3};$$ à TA,

$$\frac{15eR^3+30avR^2+45svR^2-24as^2R-16s^3R-12as^2v-6s^3v}{18eR^2+36avR+54svR-36as^2-12s^3}$$

$$=\frac{5}{6}R-\frac{2as^2v+s^3v-es^2R}{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3};$$ à $\tau\alpha$,

$$\frac{21eR^3+42avR^2+63svR^2-48as^2R-8s^3R+12as^2v+6s^3v}{18eR^2+36avR+54svR-36as^2-12s^3}$$

$$=\frac{7}{6}R+\frac{2as^2v+s^3v-es^2R}{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3}.$$ Semisolidique correspondentis circa bV; magnitudo, ad illam Ungulæ, ut $\frac{2}{3}P$ ad R, nempe $\frac{1}{6}eRP+\frac{1}{3}avP+\frac{1}{2}svP-\frac{as^2P}{4R}-\frac{s^3P}{12R}$: Momentum, ad illud Ungulæ, ut 2 ad 1, adeoque $-\frac{5}{12}eR^3+\frac{5}{3}avR^2+\frac{5}{4}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{19}{18}s^3R-\frac{2}{3}as^2v-\frac{1}{6}s^3v$: Distantia Centri gravitatis à bV (utpote ad illam Ungulæ ut $2R$ ad $\frac{2}{3}P$,)

$$\frac{-30eR^4+120avR^3+90svR^3-24as^2R^2-76s^3R^2-48as^2vR-12s^3vR}{9eR^2P+18avRP+27svRP-18as^2P-6s^3P}.$$

Eademque habentur ope Trapezii $b\beta\alpha$V, & Ungularum huic insistentium. Quippe subductis Ungulis Trapezii $b\beta\alpha$V, ex respectivis Ungulis portionis $b\beta\alpha$A; restant Ungulæ Segmenti bVA. Et de momentis similiter. F.

Est autem Ungulæ Trianguli BαV aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}sb^3$; respectu TA, $\frac{1}{3}sb^2R-\frac{1}{4}sb^3$; per § W. prop. 16. Ungulæque correspondentis Parallelogrammi $b\beta\alpha$B, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ab^3$; respectu TA, $ab^2R-\frac{1}{3}ab^3$; per § E. prop. 19.

Ergo Ungulæ Trapezii $b\beta\alpha$V, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ab^3+\frac{1}{4}sb^3=\frac{8}{3}aR^3+2sR^3-\frac{8}{3}avR^2-svR^2-\frac{4}{3}as^2R-s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$; respectu TA, $ab^2R+\frac{1}{3}sb^2R-\frac{1}{3}ab^3-\frac{1}{4}sb^3=\frac{4}{3}aR^3+\frac{2}{3}sR^3-\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}as^2R+\frac{1}{3}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}ab^2+\frac{1}{3}sb^2$, per § G. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4a+3s}{6a+4s}b$; atque à TA, $2R-\frac{4a+3s}{6a+4s}b$.

Eademque momenta, ex respectivis correspondentis Ungulæ portionis $b\beta\alpha$VA momentis, $\frac{3}{16}aR^3+\frac{11}{24}sR^3-\frac{1}{6}svR^2-\frac{1}{18}s^3R$, & $\frac{21}{32}aR^3+\frac{13}{24}sR^3+\frac{1}{24}svR^2+\frac{7}{18}s^3R$, (§ C. traditis,) subducta; relinquunt Ungulæ Segmenti bVA aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{29}{24}aR^3+\frac{29}{24}sR^3(=-\frac{29}{24}eR^3)+\frac{5}{6}avR^2+\frac{5}{8}svR^2+\frac{4}{3}as^2R+\frac{29}{36}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$; & respectu TA, $-\frac{7}{24}aR^3+\frac{7}{24}sR^3(=-\frac{7}{24}eR^3)+\frac{2}{3}avR^2+\frac{5}{8}svR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{5}{18}s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$; ut supra § E. Unde reliqua deducentur ut prius.

Similiter;

Fig. 166, 170. Similiter; Ungulæ Trianguli BαV, aciem habentis T A; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, (idem atque aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu T A,) $\frac{2}{3}sb^2R-\frac{1}{4}sb^3=\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu T A, $2sbR^2-\frac{4}{3}sb^2R+\frac{1}{4}sb^3=\frac{1}{3}sbR^2+\frac{1}{6}s^3R-\frac{1}{4}s^3b=\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; per § W. prop. 16. Ungulæque correſpondentis Parallelogrammi b$\beta\alpha$B, aciem habentis T A, momentum reſpectu $\tau\alpha$ (idem atque aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu T A,) $ab^2R-\frac{1}{3}ab^3=\frac{4}{3}aR^3-\frac{2}{3}avR^2+\frac{1}{3}as^2R-\frac{1}{3}as^2v$; reſpectu T A, $\frac{8}{3}aR^3-\frac{1}{3}av^3=\frac{4}{3}abR^2+\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{3}as^2b=\frac{8}{3}aR^3-\frac{4}{3}avR^2+\frac{2}{3}as^2R+\frac{1}{3}as^2v$; per § E. prop. 19.

Ergo Ungulæ Trapezii b$\beta\alpha$V, aciem habentis T A, momentum reſpectu $\tau\alpha$ (idem atque aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu T A,) $ab^2R+\frac{2}{3}sb^2R-\frac{1}{3}ab^3-\frac{1}{4}sb^3=\frac{4}{3}aR^3+\frac{2}{3}sR^3-\frac{2}{3}avR^2-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}as^2R+\frac{1}{3}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$; & reſpectu T A, $\frac{8}{3}aR^3+2sbR^2-\frac{4}{3}sb^2R-\frac{1}{3}av^3+\frac{1}{4}sb^3=\frac{4}{3}abR^2+\frac{1}{3}sbR^2+\frac{2}{3}as^2R+\frac{1}{6}s^3R-\frac{1}{3}as^2b-\frac{1}{4}s^3b=4abR^2+2sbR^2-2ab^2R-\frac{4}{3}sb^2R+\frac{1}{3}ab^3+\frac{1}{4}sb^3=\frac{8}{3}aR^3+\frac{2}{3}sR^3-\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{3}svR^2+\frac{2}{3}as^2R+\frac{1}{3}s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem $2abR+sbR-\frac{1}{2}ab^2-\frac{1}{3}sb^2=2aR^2+\frac{2}{3}sR^2-avR-\frac{1}{3}svR+\frac{1}{2}as^2+\frac{1}{3}s^3$; per § G. prop. præced.) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{12aR+8sR-4ab-3sb}{24aR+12sR-6ab-4sb}b=\frac{1}{2}b+\frac{2sR-fb}{24aR+12sR-6ab-4sb}b$; à T A, $2R-\frac{1}{2}b-\frac{2sR-fb}{24aR+12sR-6ab-4sb}b$.

Eademque Momenta, ex reſpectivis Momentis correſpondentis Ungulæ portionis b$\beta\alpha$V A, $\frac{23}{24}aR^3+\frac{23}{24}sR^3+\frac{1}{24}svR^2+\frac{1}{36}s^3R$, & $\frac{22}{24}aR^3+\frac{1}{6}sR^3+\frac{19}{24}svR^2-\frac{1}{36}s^3R$, (§ C. traditis,) ſubducta; Relinquunt Ungulæ Segmenti b V A, aciem habentis T A, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{2}{24}aR^3+\frac{2}{24}sR^3(=-\frac{2}{24}eR^3)+\frac{2}{3}avR^2+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{2}{36}s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$; & reſpectu T A, $-\frac{2}{24}aR^3+\frac{2}{24}sR^3(=-\frac{2}{24}eR^3)+\frac{4}{3}avR^2+\frac{3}{8}svR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{13}{36}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$. Ut ſupra § E. Unde reliqua deducentur ut prius.

G. Fig. 166, 168, 170, 173, 174. Accedimus ad conſiderationem Momenti Ungularum Semicycloidis, ejuſque partium, aciem habentium $\tau\alpha$ vel huic parallelam, reſpectu rectæ Aα, aut parallelæ huic: Adeoque & (propter diſtantias & altitudines reciprocatas,) aciem habentium Aα aut huic parallelam, momenti reſpectu $\tau\alpha$, aut parallelæ huic: Eorumque quæ hinc dependent.

Diſtributis itaque (ut ad § H. prop. præced. & alibi,) tum Semicirculo in ſua minuta Triangula αB, ſeu YαP; tum Semicycloide in reſpectiva Trapezia βb, ſeu y$\delta\xi$p, fig. 168. quæ reſpective æqualia ſint ipſis YαP Triangulis, & parallelogrammis y$\delta\xi$p fig. 170. ſimul ſumptis: Erigi intelligantur, ut prius, Ungulæ Semiquadrantales aciem habentes $\tau\alpha$; quas compleant iiſdem Triangulis, Trapeziiſque minutis, inſiſtentes minutæ Ungulæ. Quæ itaque Trapeziorum Ungulæ, æquales erunt reſpectivis Triangulorum & Parallelogrammorum Ungulis ſimul ſumptis: Ut ad § C. jam oſtenſum eſt.

Ungulæ Trianguli YαP (Pyramis cum ſit) adeoque & huic æquales ſimiliterque poſitæ Trianguli (in Trapezio intermedii) $\nu\beta\pi$, Centrum gravitatis (illic in αB, hic in βb, poſitis,) à $\tau\alpha$ diſtabit Dodrante altitudinis, (per prop. 6. hujus,) hoc eſt, $\frac{3}{4}$V$\alpha=\frac{3}{4}b$. Adeoque ipſius YαP pyramidis (ſed non & ipſius $\nu\beta\pi$) diſtantia ab Aα, $\frac{3}{4}$B V$=\frac{3}{4}s$.

Ungulæque parallelogrammi y$\delta\xi$p fig. 170. (utpote Priſmatis, duabus baſibus Triangularibus interjecti,) centrum gravitatis à $\tau\alpha$ diſtat, altitudinis Beſſe, (quantum ſcilicet inde diſtat Trianguli centrum,) per prop. 5, 6. hujus; hoc eſt, $\frac{2}{3}$V$\alpha=\frac{2}{3}b$. Atque tantundem inde diſtat bipartitæ Ungulæ, parallelogrammis $\nu\delta$, $\pi\xi$, (utrinque à bβ æqualiter remotis,) fig. 168. Centrum gravitatis, in ipſa bβ poſitum. Ejuſque Centri, à Centro Ungulæ $\nu\beta\pi$ modo indicati in eadem bβ, diſtantia, (altitudinem quod ſpectat, ſeu diſtantiam à $\tau\alpha$,) eſt $\frac{3}{4}b-\frac{2}{3}b=\frac{1}{12}b$. Adeoque, propter Priſmatis magnitudinem ad magnitudinem Pyramidis, ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, ſeu 3 ad 2, (eſt utique Priſma dimidium correſpondentis Parallelepipedi,

&

& Pyramis ejusdem Triens,) altitudini centri Prismatis additis duabus quintis differentiæ altitudinum, hoc est $\frac{2}{5} \times \frac{1}{12} b = \frac{1}{30} b$, habetur Ungulæ Trapezii y δ ξ p (ex utrisque constantis) altitudo Centri gravitatis, seu distantia à $\tau\alpha$, $\frac{2}{3} b + \frac{1}{30} b = \frac{7}{10} b$. Adeoque ejusdem ab A α distantia, b B $+ \frac{7}{10}$ B V $= a + \frac{7}{10} s$. Fig. 166, 168, 170.

Cum itaque Ungula Trapezii cujusque y δ ξ p, ad respectivam Trianguli Y α P Ungulam sit, magnitudine, ut 5 ad 2, (ut ad § A. ostensum est:) Sitque illius Distantia Centri gravitatis ab A α, ad hujus distantiam, ut $a + \frac{7}{10} s$ ad $\frac{3}{4} s$; erit Ungulæ Trapezii cujusque y δ ξ p momentum ad momentum correspondentis Ungulæ Trianguli Y α P, respectu ejusdem A α, ut $5a + \frac{7}{2} s$ ad $\frac{3}{2} s$.

Cumque hoc ubique obtineat; (sitque eadem ubique magnitudinis Ungulæ Trapezii ad magnitudinem Ungulæ Trianguli ratio, ut 5 ad 2:) Erit momentum Ungulæ Totius Semicycloidis, ejusve portionis A b β α, aut b β δ d, aut b β τ, &c. (nam in partibus perinde procedit demonstratio atque in totis,) ad correspondens Momentum Ungulæ Semicirculi, ejusve sectoris B α A, aut B α D, aut α D α segmenti, &c. (quarum acies sint $\tau\alpha$,) respectu rectæ A α: Ut omnes illæ Trianguli Ungulæ, Pyramidesve, eo spectantes, in distantias respective $5a + \frac{7}{2} s$; ad easdem in $\frac{3}{2} s$, ductas; seu ut omnia quadrata V α (quibus, propter Y P ubique æquales, proportionales sunt illæ pyramides) in $5a + \frac{7}{2} s$, ad eadem quadrata V α in $\frac{3}{2} s$: Hoc est, ut *Omnia* $5ab^2 + \frac{7}{2} sb^2$ eo spectantia, ad *Omnia* $\frac{3}{2} sb^2$ respectiva; seu, ut *Omnia* $10ab^2 + 7sb^2$, ad *Omnia* $3sb^2$, eo spectantia: Hoc est, ut 7 ad 3, atque insuper ut *Omnia* $10ab^2$, ad *Omnia* $3sb^2$, eo spectantia; sumptis a arcubus arithmetice proportionalibus.

Sunt autem (pro A b β α portione) *Omnia* ab^2 (sumptis a arithmetice proportionalibus;) hoc est, *Omnes* a arcus arithmetice proportionales, in quadrata Sinuum versorum, arcuum ad Semicirculum residuorum; idem atque *Duplum* Momenti correspondentis Ungulæ A b β α fig. 170. aciem habentis $\tau\alpha$, respectu rectæ A α; (propter Triangula singulis b β rectis ibidem insistentia, $\frac{1}{2} b^2$; eorumque ab A α distantiam, a; adeoque momenta, $\frac{1}{2} ab^2$:) Hoc est, Duplum ipsius $\frac{3}{8} a^2 R^2 + \frac{5}{4} asR^2 - \frac{1}{4} asvR - vR^3 - \frac{1}{8} s^2 R^2$; per § F. prop. 19. Adeoque eorundem Decuplum, seu *Omn.* $10ab^2$; est hujus Momenti Vigecuplum; hoc est, $\frac{15}{2} a^2 R^2 + 25 asR^2 - 5asvR - 20vR^3 - \frac{5}{2} s^2 R^2$.

Suntque *Omnia* sb^2, eo spectantia; hoc est, eorundem arcuum arithmetice proportionalium Sinus recti, in Sinuum versorum, arcuum ad semicirculum residuorum, quadrata: Idem atque Duplum Momenti Solidi, quadrilineo A b β α fig. 170. incumbentis, ex ductu rectarum b β, in β υ facti, respectu rectæ $\tau\alpha$: Hoc est, Duplum ipsius, $\frac{2}{3} vR^3 + \frac{2}{3} s^2 R^2 - \frac{1}{6} s^2 vR$ per § E. prop. 18. Adeoque eorundem Triplum, seu *Omn.* $3sb^2$; est hujus momenti sextuplum, hoc est, $4vR^3 + 4s^2R^2 - s^2vR$.

Ergo *Omn.* $10ab^2$: ad *Omn.* $3sb^2$: (portionem A b β α spectantia;) sunt, ut $\frac{15}{2} a^2R^2 + 25asR^2 - 5asvR - 20vR^3 - \frac{5}{2} s^2R^2$, ad $4vR^3 + 4s^2R^2 - s^2vR$: Cui si adjungatur, prius memorata, ratio 7 ad 3; seu $\frac{28}{3} vR^3 + \frac{28}{3} s^2R^2 - \frac{7}{3} s^2vR$, ad $4vR^3 + 4s^2R^2 - s^2vR$: Habetur ratio momenti ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, ad momentum Ungulæ Sectoris B α A, (quarum acies $\tau\alpha$,) respectu ipsius A α; $\frac{15}{2} a^2R^2 + 25asR^2 - 5asvR - \frac{32}{3} vR^3 + \frac{41}{6} s^2R^2 - \frac{7}{3} s^2vR$, ad $4vR^3 + 4s^2R^2 - s^2vR$.

Cum itaque momentum illud Ungulæ Sectoris B α A sit (consequentis subduodecuplum) $\frac{1}{3} vR^3 + \frac{1}{3} s^2R^2 - \frac{1}{12} s^2v$, (per § L. prop. 16.) erit, Ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, aciem habentis $\tau\alpha$, Momentum respectu A α, (subduodecuplum antecedentis,) $\frac{5}{8} a^2R^2 + \frac{25}{12} asR^2 - \frac{5}{12} asvR - \frac{8}{9} vR^3 + \frac{41}{72} s^2R^2 - \frac{7}{36} s^2vR$. Idemque est, Ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, aciem habentis A α, momentum respectu $\tau\alpha$.

Quod quidem Momentum, divisum per Ungulæ illius A b β α, aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem, $\frac{3}{4} fR^2 + \frac{5}{12} sbR = \frac{3}{4} aR^2 + \frac{25}{12} sR^2 - \frac{5}{12} svR$, (per § D. prop. præced.) exhibet Distantiam Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2} a -$

$$\frac{64vR^2 - 75asR - 41s^2R + 15asv + 14s^2v}{90aR + 150sR - 30sv} = a - \frac{45a^2R + 64vR^2 - 41s^2R + 14s^2v}{90aR + 150sR - 30sv}.$$

Idemque Momentum, divisum per Ungulæ ejusdem A b β α portionis Semicycloidis, aciem habentis A α, magnitudinem $\frac{3}{4} a^2R + \frac{3}{2} asR - \frac{2}{3} vR^2 + \frac{5}{12} s^2R$, per § I. prop. præced. exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis

tis

Fig. 166, 168, 170. tis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}R - \frac{12vR^2 - 30asR - 8s^2R + 15asv + 7s^2v}{27a^2 + 54as - 24vR + 15s^2}$; à TA, $\frac{1}{2}R + \frac{12vR^2 - 30asR - 8s^2R + 15asv + 7s^2v}{27a^2 + 54as - 24vR + 15s^2}$. Adeoque ejusdem respectu TA, momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{11}{12}asR^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{19}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{1}{36}s^2vR$.

Quod ipsum, est etiam Momentum Ungulæ portionis Semicycloidis A b $\beta\alpha$, aciem habentis TA, respectu A α. Adeoque, si per hujus Ungulæ magnitudinem $\frac{3}{4}fR^2 - \frac{5}{12}sbR = \frac{3}{4}aR^2 + \frac{11}{12}sR^2 + \frac{5}{12}svR$ (per § D. prop. præced.) dividatur: Habetur ejusdem Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a + \frac{33asR + 19s^2R - 32vR^2 + 15asv + 14s^2v}{126aR + 66sR + 30sv} = a - \frac{63a^2R - 19s^2R + 32vR^2 - 14s^2v}{126aR + 66sR + 30sv}$.

H. Si igitur totius Semicycloidis A $\tau\alpha$, Ungulas spectemus: Quoniam hoc casu est $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, & $s = 0$; erit Ungulæ A $\tau\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu A α, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; Magnitudo, $\frac{3}{8}R^2P$; Centrique gravitatis ab A α distantia, $\frac{5}{12}P - \frac{128R^2}{45P}$.

Aciemque habentis A α, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; Magnitudo, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; Centrique gravitatis distantia à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}R - \frac{32R^3}{9P^2 - 64R^2}$; à TA, $\frac{1}{2}R + \frac{32R^3}{9P^2 - 64R^2}$; Momentum respectu TA, $\frac{3}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$.

Aciemque habentis TA, momentum respectu A α, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$; Magnitudo, $\frac{3}{8}R^2P$; Distantia Centri gravitatis, ab A α, $\frac{7}{12}P - \frac{64R^2}{63P}$.

I. Si autem ex Ungularum Totius Semicycloidis A $\tau\alpha$ Magnitudinibus & Momentis; auferantur respective Magnitudines & Momenta Ungularum A b $\beta\alpha$: Habentur Ungularum b $\beta\tau$, Magnitudines & Momenta.

Puta, si ex Ungulæ A $\tau\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudine $\frac{3}{8}R^2P$; & Momento respectu A α, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; modo exhibitis: Auferantur respectivæ Ungulæ A b $\beta\alpha$, magnitudo, $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{5}{12}sbR = \frac{3}{4}aR^2 + \frac{25}{12}sR^2 - \frac{5}{12}svR$; & momentum respectu A α, $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{25}{12}asR^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{1}{36}s^2vR$; supra tradita § G. Habetur Ungulæ portionis Semicycloidis b $\beta\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo, $\frac{3}{8}R^2P - \frac{3}{4}aR^2 - \frac{25}{12}sR^2 + \frac{5}{12}svR$, seu (propter $\alpha = \frac{1}{2}P - a$, & $b = 2R - v$,) $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{5}{4}sR^2 - \frac{5}{12}sbR$; ejusque, respectu A α, momentum, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{3}{8}a^2R^2 - \frac{16}{9}R^4 + \frac{8}{9}vR^3 - \frac{25}{12}asR^2 + \frac{5}{12}asvR - \frac{41}{72}s^2R^2 + \frac{1}{36}s^2vR$: Adeoque Centri gravitatis ab A α distantia, $a + \frac{45RP^2 - 180aRP + 180a^2R - 512R^3 + 256vR^2 - 164s^2R + 56s^2v}{180RP - 360aR - 600sR + 120sv}$.

Si ex Ungulæ A $\tau\alpha$, aciem habentis TA, magnitudine, $\frac{3}{8}R^2P$; & momento respectu A α, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$, modo traditis: Auferantur respectivæ Ungulæ A b $\beta\alpha$, magnitudo, $\frac{3}{4}fR^2 - \frac{5}{12}sbR = \frac{3}{4}aR^2 + \frac{11}{12}sR^2 + \frac{5}{12}svR$; & momentum respectu A α, $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{11}{12}asR^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{19}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{1}{36}s^2vR$; supra tradita § G. Habetur Ungulæ b $\beta\tau$, aciem habentis TA, magnitudo, $\frac{3}{8}R^2P - \frac{3}{4}aR^2 - \frac{11}{12}sR^2 - \frac{5}{12}svR = \frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{7}{4}sR^2 + \frac{5}{12}sbR$; ejusque momentum respectu A α, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4 - \frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{4}{9}vR^3 - \frac{11}{12}asR^2 - \frac{19}{72}s^2R^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{1}{36}s^2vR$: Adeoque Centri gravitatis ab A α distantia, $a + \frac{63RP^2 - 252aRP - 256R^3 + 128vR^2 + 252a^2R - 76s^2R - 56s^2v}{252RP - 504aR - 264sR - 120sv}$.

Si ex Ungulæ A $\tau\alpha$, aciem habentis A α, magnitudine, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; Momento respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; & respectu TA, $\frac{3}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$; modo traditis:

traditis: Auferantur respectivæ Ungulæ A bβα, Magnitudo $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$; momentum respectu τα, $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{21}{12}asR^2 - \frac{1}{12}asvR - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{7}{36}s^2vR$; & respectu T A, $\frac{7}{8}a^2R^2 + \frac{11}{12}asR^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{19}{72}s^2R^2 + \frac{1}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$: Habetur Ungulæ bβτ, aciem habentis A α magnitudo, $\frac{3}{16}R\mathcal{P}^2 - \frac{4}{3}R^3 - \frac{3}{4}a^2R - \frac{3}{2}asR + \frac{2}{3}vR^2 - \frac{5}{12}s^2R$; Momentum respectu τα, $\frac{5}{32}R^2\mathcal{P}^2 - \frac{16}{9}R^4 - \frac{3}{8}a^2R^2 - \frac{21}{12}asR^2 + \frac{8}{9}vR^3 - \frac{41}{72}s^2R^2 + \frac{1}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$; respectu T A, $\frac{7}{32}R^2\mathcal{P}^2 - \frac{8}{9}R^4 - \frac{7}{8}a^2R^2 - \frac{11}{12}asR^2 + \frac{4}{9}vR^3 - \frac{19}{72}s^2R^2 - \frac{1}{12}asvR - \frac{7}{36}s^2vR$: Adeoque Distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{5}{6}R - \frac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR + 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54\mathcal{P}^2 - 384R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2}$; Fig. 166, 170.

à T A, $\frac{7}{6}R + \frac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR + 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54\mathcal{P}^2 - 384R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2}$.

Atque hinc facile derivabitur, Ungulæ bβτ aciem habentis Tτ, Momentum respectu τα, vel T A, Centrique gravitatis inde distantia.

Sed & hæc omnia quæ Ungulas bβτ in Semicycloide (fig. 166.) spectant, possunt etiam per se exquiri, sine ope Ungularum A bβα. Nam & hic etiam perinde valet, quod § G. demonstratur: Nempe Momentum Ungulæ bβτ, aciem habentis τα, respectu Aα; ad momentum respectivæ Ungulæ segmenti αBα, aciem habentis τα, respectu Aα; esse ut 7 ad 3, atque insuper ut *Omn.* $10ab^2$, ad *Omn.* $3sb^2$; seu, ut 7 ad 3, atque insuper ut *Vigecuplum* Momenti Ungulæ bβτ in figura Sinuum versorum fig. 170. aciem habentis τα, respectu Aα; ad *Sextuplum* Momenti Ungulæ Segmenti circularis αBα fig. 169. aciem habentis τα, respectu Aα. Idemque erit, Ungulæ bβτ fig. 166, 168. aciem habentis Aα, momentum respectu τα. Unde & cætera eo spectantia derivari poterunt; eadem quæ prius.

Deinde; Si ex Momentis Ungularum A bβα, auferantur respectiva Momenta Ungularum Trapezii bβαV; restabunt respectiva Ungularum A b V Momenta. K.

Constat autem Ungula Trapezii bβαV, fig. 166: aciem habentis τα; ex duabus Ungulis; Nempe Trianguli BαV, & Parallelogrammi bβαB.

Est autem Ungulæ Trianguli BαV, aciem habentis τα; Momentum respectu Aα, $\frac{1}{8}s^2b^2$, per § M. prop. 16.

Ungulæque Parallelogrammi bβαB, magnitudo (quippe eadem quæ respectivæ Ungulæ bβαB fig. 170.) $\frac{1}{2}ab^2$, per § F. prop. 17. Centrique gravitatis à τα distantia, $\frac{2}{3}b$, (per § C. prop. 5.) adeoque ab Aα, $\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}s$, (ut ex schematis aspectu facile colligitur:) Et propterea, ejusdem respectu Aα, momentum, $\frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{3}asb^2$.

Ergo; Ungulæ Totius Trapezii bβαV, aciem habentis τα, momentum respectu Aα, est $\frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{3}asb^2 + \frac{1}{8}s^2b^2$, seu (propter $b = 2R - v$, adeoque $b^2 = 4R^2 - 4vR + v^2 = 4R^2 - 2vR - s^2$,) $a^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 + \frac{4}{3}asR^2 - \frac{2}{3}asvR - \frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$. Idemque est Ungulæ bβαV, aciem habentis Aα, momentum respectu τα; propter Distantias & Altitudines reciprocatas.

Quod itaque momentum, per Ungulæ aciem habentis τα magnitudinem $\frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{3}sb^2$ (ut § F. ostensum est) divisum, exhibet ejusdem Centri gravitatis ab Aα distantiam, $\frac{1}{2}a + \frac{4as + 3s^2}{12a + 8s} = \frac{1}{2}a + \frac{4a + 3s}{12a + 8s}s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}s + \frac{s^2}{36a + 24s}$.

Idemque momentum, per Ungulæ aciem habentis Aα, magnitudinem $\frac{1}{2}fab + \frac{1}{6}s^2b = \frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{2}asb + \frac{1}{6}s^2b$ (per § K. prop. præced.) divisum, exhibet hujus Ungulæ Distantiam Centri gravitatis à τα, $\frac{6a^2 + 8as + 3s^2}{12a^2 + 12as + 4s^2}b = \frac{1}{2}b + \frac{2as + s^2}{12fa + 4s^2}b$: Adeoque à TA, $2R - \frac{1}{2}b (= R + \frac{1}{2}v) - \frac{2a + s}{12fa + 4s^2}sb$. Et propterea ejusdem respectu T A, momentum, $fabR + \frac{1}{3}s^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2 - \frac{1}{3}asb^2 - \frac{1}{8}s^2b^2$. Quod etiam (propter altitudines & distantias reciprocatas) est momentum Ungulæ bβαV, aciem habentis T A, respectu Aα: Adeoque per Ungulæ bβαV aciem habentis T A, magnitudinem $2abR + sbR - \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{3}sb^2$

Mmmmm 2 (per

(per § G. prop. præced.) divisum, exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis ab

$$A\alpha, \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{6}s + \frac{2s^2R - fsb}{48aR + 24sR - 12ab - 8sb} = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{6}s + \frac{fsv - 2asR}{24aR + 8sR + 12av + 8sv}.$$

Fig. 166. Si itaque ex Ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, aciem habentis $\tau\alpha$, Momento respectu A α; seu, aciem habentis A α, momento respectu $\tau\alpha$; $\tfrac{5}{8}a^2R^2 + \tfrac{25}{12}asR^2 + \tfrac{41}{72}s^2R^2 - \tfrac{8}{9}vR^3 - \tfrac{5}{12}asvR - \tfrac{7}{36}s^2vR$ (per § G.) auferatur respectivum Ungulæ b β α V, momentum modo traditum, $a^2R^2 + \tfrac{4}{3}asR^2 + \tfrac{1}{2}s^2R^2 - \tfrac{1}{2}a^2vR - \tfrac{2}{3}asvR - \tfrac{1}{4}s^2vR - \tfrac{1}{4}a^2s^2 - \tfrac{1}{3}as^3 - \tfrac{1}{8}s^4$: Habetur Ungulæ A b V, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu A α; aciemve habentis A α, momentum respectu $\tau\alpha$; $-\tfrac{3}{8}a^2R^2 + \tfrac{3}{4}asR^2 + \tfrac{5}{72}s^2R^2 - \tfrac{8}{9}vR^3 + \tfrac{1}{2}a^2vR + \tfrac{1}{4}asvR + \tfrac{1}{18}s^2vR + \tfrac{1}{4}a^2s^2 + \tfrac{1}{3}as^3 + \tfrac{1}{8}s^4$.

Quod per Ungulæ A b V, aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem, $-\tfrac{3}{4}aR^2 + \tfrac{3}{4}sR^2 + avR + \tfrac{1}{4}svR + \tfrac{1}{2}as^2 + \tfrac{1}{3}s^3$, (per § F, G. prop. præced.) divisum; exhibet ejusdem distantiam centri gravitatis ab A α, $\tfrac{1}{2}a +$

$$\frac{27asR^2 + 5s^2R^2 - 64vR^3 + 9asvR + 4s^2vR + 12as^3 + 9s^4}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}.$$

Idemque momentum per Ungulæ A b V, aciem habentis A α, magnitudinem, $-\tfrac{1}{4}a^2R + \tfrac{1}{2}asR + \tfrac{1}{12}s^2R - \tfrac{2}{3}vR^2 + \tfrac{1}{2}a^2v + \tfrac{1}{2}asv + \tfrac{1}{6}s^2v$, (per § K, L. prop. præced.) divisum; exhibet ejusdem distantiam centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\tfrac{3}{2}R -$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}:$$

Adeoque à T A, $\tfrac{1}{2}R +$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v};$$

à b V, $\tfrac{3}{2}R - b\ (= v - \tfrac{1}{2}R) -$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}.$$

Ejusque propterea respectu T A, momentum, $-\tfrac{3}{8}a^2R^2 + \tfrac{1}{4}asR^2 + \tfrac{7}{72}s^2R^2 - \tfrac{4}{9}vR^3 + \tfrac{1}{8}a^2vR + \tfrac{3}{4}asvR + \tfrac{5}{18}s^2vR - \tfrac{1}{4}a^2s^2 - \tfrac{1}{3}as^3 - \tfrac{1}{8}s^4$: Et respectu b V, (factum ex v in magnitudinem, dempto momento respectu T A,) $\tfrac{1}{8}a^2R^2 - \tfrac{1}{4}asR^2 - \tfrac{7}{72}s^2R^2 + \tfrac{4}{9}vR^3 - \tfrac{3}{4}a^2vR - \tfrac{1}{4}asvR - \tfrac{7}{36}s^2vR + \tfrac{1}{4}a^2s^2 + \tfrac{1}{3}as^3 + \tfrac{1}{8}s^4 - \tfrac{2}{3}v^2R^2 + \tfrac{1}{2}a^2v^2 + \tfrac{1}{2}asv^2 + \tfrac{1}{6}s^2v^2$; seu (propter $v^2 = 2vR - s^2$,) $\tfrac{1}{8}a^2R^2 - \tfrac{1}{4}asR^2 + \tfrac{41}{72}s^2R^2 - \tfrac{8}{9}vR^3 + \tfrac{1}{4}a^2vR + \tfrac{3}{4}asvR + \tfrac{5}{36}s^2vR - \tfrac{1}{4}a^2s^2 - \tfrac{1}{6}as^3 - \tfrac{1}{24}s^4$. Quæ duo, sunt etiam (propter altitudines & distantias reciprocatas) momenta, respectu A α, Ungularum A b V, acies habentium T A, & b V: Adeoque per harum respective magnitudines, $-\tfrac{1}{4}eR^2\ (= -\tfrac{1}{4}aR^2 + \tfrac{1}{4}sR^2) + avR + \tfrac{3}{4}svR - \tfrac{1}{2}as^2 - \tfrac{1}{3}s^3$, & $\tfrac{1}{4}eR^2\ (= \tfrac{1}{4}aR^2 - \tfrac{1}{4}sR^2) + \tfrac{1}{2}avR + \tfrac{3}{4}svR - \tfrac{1}{2}as^2 - \tfrac{1}{6}s^3$, (per § F, G. prop præced.) divisa; exhibent earum distantiam centri gravitatis ab A α: Nempe, Ungulæ A b V, aciem habentis T A, distantiam ab

$$A\alpha, \tfrac{1}{2}a + \frac{9asR^2 + 7s^2R^2 - 32vR^3 + 27asvR + 20s^2vR - 12as^3 - 9s^4}{-18eR^2 + 72avR + 54svR - 36as^2 - 24s^3};$$

aciemque habentis b V, ab eadem A α distantiam $\tfrac{1}{2}a +$

$$\frac{41s^2R^2 - 9asR^2 - 64vR^3 + 27asvR + 10s^2vR - 6as^3 - 3s^4}{18eR^2 + 36avR + 54svR - 36as^2 - 12s^3}.$$

L. Eadem Momenta, Ungulas A b V spectantia (& quæ hinc dependent,) sic adhuc alias investigantur, absque ope Ungularum A b β α.

Ungulam A b V, aciem habentem b V, (si planis ipsi A b V plano parallelis, æqualibus ab invicem distantiis remotis, sectam intelligamus,) constituent, omnia A b V plana, eo spectantia; sumptis A V, hoc est v, arithmetice proportionalibus, usque ad A V, seu V, maximum. Adeoque eorum momenta respectu A α; hoc est (per § K, L. prop. præced.) *Omn.* $-\tfrac{1}{4}a^2R + \tfrac{1}{2}asR + \tfrac{1}{12}s^2R - \tfrac{2}{3}vR^2 + \tfrac{1}{2}a^2v$

$\frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$: (sumptis v arithmetice proportionalibus;) complent ejusdem A b V Ungulæ, aciem habentis b V, momentum respectu A α; seu (propter altitudines & distantias reciprocatas) aciem habentis A α, momentum respectu b V. Fig. 166.

Sunt autem, *Omnia* $\frac{1}{2}a^2$ eo spectantia, (sumptis v arithmetice proportionalibus;) hoc est, momentum ipsius A b B fig. 170. plani, respectu A α; (per § I. prop. 17.) $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$. Adeoque, *Omn.* $-\frac{1}{4}a^2R := \frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{3}asR^2 + \frac{1}{2}vR^3 - \frac{1}{4}a^2vR$.

Item, *Omnia* as, eo spectantia; hoc est Solidum A b B fig. 170. ex ductu rectarum b B, in B V (fig. 169.) respective; (per § L. prop. 18.) $\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asv$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}asR := \frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asvR$.

Item *Omnia* $\frac{1}{2}s^2$, eo spectantia; hoc est, Momentum Segmenti Semicirculi A B V fig. 169. respectu A α; (per § R. prop. 15.) $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{12}s^2R^2 := \frac{1}{18}vR^3 - \frac{1}{36}s^2R^2 + \frac{1}{36}s^2vR$.

Item, *Omn.* v (arithmetice proportionales,) $\frac{1}{2}v^2$, (per prop. 1. hujus.) Adeoque *Omn.* $-\frac{2}{3}vR^2 := -\frac{1}{3}v^2R^2 = -\frac{2}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2$.

Item, *Omn.* $\frac{1}{2}a^2v$; hoc est, Momentum Ungulæ A b B fig. 170. aciem habentis A α, respectu T A; (per § I. prop. 19.) $-\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$.

Item, *Omn.* $\frac{1}{2}asv$; hoc est, Semimomentum, respectu T A, Solidi A b B fig. 170. ex ductu rectarum b B, in b V fig. 169. (per § M. prop. 18.) $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{5}{72}s^2R^2 + \frac{1}{9}vR^3 + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{18}s^2vR - \frac{1}{6}as^3$.

Item, *Omn.* $\frac{1}{2}s^2v$; hoc est, Momentum Ungulæ A B V fig. 169. aciem habentis A α, respectu T A: (per § E. prop. 16.) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{6}s^2v := \frac{1}{9}vR^3 - \frac{1}{18}s^2R^2 + \frac{1}{18}s^2vR - \frac{1}{24}s^4$.

Ergo, *Omn.* $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$: Hoc est, Ungulæ A b V, aciem habentis b V, momentum respectu A α; aciemve habentis A α, momentum respectu b V; $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{4}a^2vR + \frac{3}{4}asvR + \frac{5}{36}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{6}as^3 - \frac{1}{24}s^4$. Idem quod prius.

Atque hoc momentum divisum per Ungulæ aciem habentis b V magnitudinem: Exhibet distantiam centri gravitatis ab A α.

Idemque per Ungulæ aciem habentis A α magnitudinem divisum; exhibet hujus distantiam Centri gravitatis à b V; & consequenter, à TA, & τ α; ejusque propterea momentum respectu TA, & τ α: Quæ eadem etiam sunt Momenta, respectu A α, aciem habentium T A, & τ α: Quæ per magnitudines divisa, exhibebunt & harum distantias centri gravitatis ab A α. Eadem quæ prius.

Atque, his demum Momentis, si addantur respectiva Ungularum b β α B momenta: Habentur Ungularum A b β α momenta respectiva; eadem quæ superius alia methodo inventa sunt. Atque hinc, distantiæ centrorum gravitatis; ut prius.

Superest tandem, ut Ungularum aciem habentium A α, momenta respectu ejusdem A α, investigemus; & quæ hinc dependent. M.

Distributis igitur, ut prius, tum Semicirculo in minuta Triangula Y α P, tum Semicycloide in Minuta Trapezia y δ ξ p: Semiquadrantalem Ungulam, Semicycloidi insistentem, aciem habentem A α, complebunt Solida his Minutis Trapeziis insistentia; sicut & Ungulam Semicirculo insistentem, eandem aciem habentem, complent Solida Triangulis illis insistentia. Fig. 166, 168, 173, 174.

Triangulo Y α P insistens solidum, Pyramis est, cujus centrum gravitatis in α B positum, abscindit inde, versus α, $\frac{1}{4}$ α B, (per prop. 6. hujus;) adeoque ipsius ab A α distantia erit $\frac{3}{4}$ B V $= \frac{3}{4}s$.

Trapezio y δ ξ p insistens solidum; Componitur ex Truncato Cuneo, seu Prismate duobus similibus Trapeziis y d ξ p interjecto, altitudinem habente ipsi $\alpha\beta = a$ æqualem: Atque, ex Cuneo ei superimposito altitudinem habente, in β, nullam; sed, in b, ipsi B V $= s$ æqualem; tantam scilicet quanto altius est solidum illud in b, quam in β, hoc est, quanto longior est b V, quam β α.

Fig. 166, 168, 173, 174. (Nec quemquam interim morari debeat, quod (propter aciem A α;) altitudo in Y, y, δ, major sit; atque in P, p, ξ, minor, quam in B, b, β, respective. Quamquam enim illud omnino verum sit; atque, in sectione determinata, alicujus sit Momenti: Continuata tamen in infinitum sectione, (quod supponimus,) differentia evanescit in data quavis minorem: Quæ non modo in methodo indivisibilium, sed in omni per figurarum inscriptionem & circumscriptionem demonstrandi methodo, negligenda erit. Neque enim aliud producit, quam quod centrum gravitatis quod in B α, b β, rectis supponimus; promovendum erit ultra illas, intervallo quod dato quovis minus sit. Quod autem ab alio, differentia quæ data quavis minor sit, differre demonstratur; pro æquali habendum erit. Dumque easdem supponimus, tum in Y, y, δ, tum in P, p, ξ, altitudines quæ in B, b, β: Solidum ex minutis adscriptum (partim inscriptum, partim circumscriptum,) pro vero Solido substituimus, quod ab illo differat, non nisi differentia quæ data minor sit.)

Cuneus autem Truncatus ille, quem diximus; seu Prisma parallelis Trapeziis interjectum: Constat ex Cuneo intermedio, seu Prismate Triangulo $\upsilon\beta\pi$ insistente; & bipartito Parallelepipedo, parallelogrammis $\upsilon\beta\delta$ y & $\pi\beta\xi$ p insistente.

Qui quidem Cuneus intermedius, propter formam, est, ad Pyramidem æque altam ejusdem baseos, ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, seu 3 ad 2, (est utique Cuneus illæ parallelepipedi illius Semis, cujus Pyramis Triens est:) Cumque porro altitudo Cunei, in β vel b, sit ad altitudinem baseos Pyramidis in B; ut $\beta\alpha$ seu b B, ad B V; hoc est, ut a ad s: Erit Cunei Triangulo $\upsilon\beta\pi$ insistentis, ad Pyramidem simili & æquali Triangulo Y α P incumbentem, ratio, (ex illis composita) ut $3a$ ad $2s$. Cumque Cunei centrum gravitatis sit in β b, abscindens, versus β, $\frac{2}{3}\beta$ b, (per prop. 5, 6.) adeoque ipsius ab A α distantia sit, b B $+\frac{2}{3}$ B V, seu $a+\frac{2}{3}s$, (ut ex schematis inspectu facile colligitur;) Centrique gravitatis Pyramidis Y α P (ut dictum est) inde distantia sit $\frac{3}{4}s$: Adeoque distantiarum ratio, ut $a+\frac{2}{3}s$, ad $\frac{3}{4}s$: Ratio hæc, cum ratione magnitudinum ($3a$ ad $2s$) composita; exhibet rationem Momenti Cunei illius, ad Momentum Pyramidis (respectu ejusdem A α,) ut $3a^2+2as$, ad $\frac{3}{2}s^2$, seu $6a^2+4as$ ad $3s^2$.

Et parallelepipedum (bipartitum) cum sit, propter formam, ad Pyramidem æquealtam, ejusdem basis, ut 3 ad 1: Sitque baseos in β vel b altitudo, ad altitudinem in B, ut a ad s: Erit Parallelepipedi ad Pyramidem ratio $3a$ ad s. Cumque Parallelepipedi (utut bipartiti) commune centrum gravitatis sit in medio β b: Adeoque ejusdem ab A α distantia, $a+\frac{1}{2}s$: (Sitque centri gravitatis Pyramidis, ut dictum est, distantia $\frac{3}{4}s$:) Distantiarum ratio, $a+\frac{1}{2}s$ ad $\frac{3}{4}s$; cum ratione magnitudinum, $3a$ ad s, composita; exhibet rationem Momentorum, $3a^2+\frac{3}{2}as$ ad $\frac{3}{4}s^2$, seu $12a^2+6as$ ad $3s^2$.

Cuneusque, Truncato illi Cuneo superimpositus; Componitur ex Pyramide intermedia, triangulo $\upsilon\beta\pi$ supereminente, (Pyramidi in Y α P simili & æquali;) & Cuneo bipartito, parallelogrammis $\upsilon\beta\delta$ y, $\pi\beta\xi$ p, supereminente.

Pyramidisque Trianguli $\upsilon\beta\pi$ centrum gravitatis, cum intelligatur in b β situm, (saltem in plano super hanc erecto,) abscindens, versus β, $\frac{3}{4}\beta$ b; adeoque ipsius ab A α distantia (ut ex schematis inspectu facile colligitur,) $a+\frac{3}{4}s$: Erit (propter magnitudines æquales) momenti ejus ratio, ad momentum Pyramidis Y α P, (respectu ejusdem A α,) eadem quæ distantiarum; hoc est, ut $a+\frac{3}{4}s$ ad $\frac{3}{4}s$; seu ut $4a+3s$, ad $3s$; hoc est, ut $4as+3s^2$, ad $3s^2$.

Cuneique bipartiti, cum (propter æquales bases & altitudines,) sit ad Pyramidem, ut 3 ad 2; Centrique distantia illius, ad centri hujus distantiam, ut $a+\frac{2}{3}s$ ad $\frac{3}{4}s$: Erit momentum bipartiti Cunei, ad momentum Pyramidis Y α P, (respectu ejusdem A α,) ut $3a+2s$ ad $\frac{3}{2}s$, seu $6as+4s^2$ ad $3s^2$.

Ergo, Solidi totius, minuto Trapezio y $\delta\xi$ p incumbentis, (quod ex partibus jam expositis componitur,) ad momentum Pyramidis correspondentis, incumbentis Triangulo Y α P, (respectu ejusdem A α,) est ut $6a^2+4as$ plus $12a^2+6as$ plus $4as+3s^2$ plus $6as+4s^2$, ad $3s^2$: Hoc est, ut $18a^2+20as+7s^2$, ad $3s^2$. Vel (ductis omnibus in communem altitudinem V $\alpha=b$,) ut $18a^2b+20asb+7s^2b$, ad $3s^2b$. Et sic ubique. Adeoque momentum Solidi ex illis conflati (sive quod totam A $\tau\alpha$, sive quod ipsius partem ut A b $\beta\alpha$, spectat;) ad momentum correspondentis solidi ex his conflati, (quod vel totum A D α, vel ipsius

ipsius partem B α A, spectat;) ut *Omnia*, $18a^2b + 20asb + 7s^2b$: ad *Omnia*, $3s^2b$: eo spectantia. Fig. 166, 168.

Eademque ratio, sic alias colligitur: ad methodum nostræ *Arithmeticæ Infinitorum.*

Sunto rectæ complentes Y α P Triangulum (utpote arithmetice proportionales,) $b, 2b, 3b$, &c. usque ad maximum $YP = B$. Quarum puncta media, seu gravitatis Centra, in α B posita, habebunt (in Ungula Semiquadrantali aciem habente A α), altitudines distantiis suis ab A α æquales, puta $s, 2s, 3s$, &c. usque ad maximam $BV = S$. Quæ distantiæ, in rectas illas respective ductæ, exhibent seriem magnitudinum rectis illis insistentium (ungulam complentium,) $bs, 4bs, 9bs$, &c. usque ad maximum BS. Quæ quidem series Magnitudinum, Pyramidem Y α P complentium, (utpote Series Secundanorum;) erit ad Seriem totidem maximæ æqualium, (hoc est, ad Parallelepipedum ejusdem basis & altitudinis,) ut 1 ad $2+1$; (per prop. 1. hujus:) Hoc est ut 1 ad 3. Puta, $\frac{1}{3}bBS$.

$$\begin{array}{l} b \;.\; 2b \;.\; 3b \;.\; \&c. \text{ usque ad } B \\ s \;.\; 2s \;.\; 3s \;.\; \&c. \text{ usque ad } S. \\ \hline bs \;.\; 4bs \;.\; 9bs \;.\; \&c. \text{ usque ad } BS. = \frac{1}{3}bBS. \end{array}$$

Eademque Series magnitudinum (quarum omnium Centra gravitatis sunt in α B, planove super hanc erecto; saltem inde distant intervallo quod dato quovis minus sit;) in suas iterum distantias, $s, 2s, 3s$, &c. ductæ; exhibent momentorum earundem, respectu ipsius A α, seriem $bs^2, 8bs^2, 27bs^2$, &c. usque ad BS^2 maximum. Quæ quidem series, (utpote Tertianorum,) est ad seriem totidem maximo æqualium; puta bBS^2: (Hoc est, ad Parallelepipedi Momentum in B suspensi;) ut 1 ad $3+1$; hoc est, ut 1 ad 4: (per prop. 1. hujus.) Adeoque $\frac{1}{4}bBS^2$.

$$\begin{array}{l} bs \;.\; 4bs. \;\; 9bs \;.\; \&c. \text{ usque ad } BS. \\ s \;.\; 2s \;.\; 3s \;.\; \&c. \text{ usque ad } S. \\ \hline bs^2 .\; 8bs^2 .\; 27bs^2 .\; \&c. \text{ usque ad } BS^2. = \frac{1}{4}bBS^2 \end{array}$$

Trapezium vero complentes rectæ, (quarum minima $\delta\xi = YP = B$,) erunt $B+b$, $B+2b$, $B+3b$, &c. usque ad $P+B$, seu $2B$. Quarum itaque summa, æquabit $bB + \frac{1}{2}bB = \frac{3}{2}bB$, per prop. 1.

$$\left.\begin{array}{lr} \quad B. \;\; B. \;\; B. \;\; \&c. & = bB \\ \text{plus } b \;\; 2b. \;\; 3b. \;\; \&c. \text{ usque ad } B. & = \frac{1}{2}bB \end{array}\right\} = \frac{3}{2}bB.$$

Eademque series in distantias suas ab A α ductæ; hoc est (propter gravitatis centra singulorum in β b,) in $A+s$, $A+2s$, $A+3s$, &c. usque ad $A+S$: Exhibent Seriem Magnitudinum eisdem insistentium (solidum complentium) $BA + bA + sB + sb$, $BA + 2bA + 2sB + 4sb$, $BA + 3bA + 3sB + 9sB$, &c. Quorum omnium Aggregatum (per eandem prop. 1.) est $bBA + \frac{1}{2}bBA + \frac{1}{2}bSB + \frac{1}{3}bSB$, seu $\frac{3}{2}bBA + \frac{5}{6}bSB$.

$$\begin{array}{l} B+\;b, \text{ in } A+\;s, = BA+\;bA+\;sB+\;sb. \\ B+2b, \text{ in } A+2s, = BA+2bA+2sB+4sb. \\ B+3b, \text{ in } A+3s, = BA+3bA+3sB+9sb. \\ \qquad\qquad \&c. \text{ usque ad,} \\ \hline B+\;B, \text{ in } A+\;S, = BA+\;BA+\;SB+\;SB. \\ \qquad\qquad bBA + \frac{1}{2}bBA + \frac{1}{2}bSB + \frac{1}{3}bSB. \\ \qquad\quad \text{seu } \;\; \frac{3}{2}bBA \quad + \;\; \frac{5}{6}bSB. \end{array}$$

Eademque Magnitudinum series, in distantias iterum ducta; hoc est, in $A+s$, $A+2s$, $A+3s$, &c. exhibet seriem Momentorum, (respectu ejusdem A α.)

Quorum

Fig. 166, 168. Quorum omnium Aggregatum (per eandem prop. 1.) est $bBA^2 + \frac{1}{2}bBA^2 + bSBA + \frac{2}{3}bSBA + \frac{1}{3}bS^2B + \frac{1}{4}bS^2B$, seu $\frac{3}{2}bBA^2 + \frac{5}{3}bSBA + \frac{7}{12}bS^2B$.

$$BA^2 + bA^2 + 2sBA + 2sbA + s^2B + s^2b.$$
$$BA^2 + 2bA^2 + 4sBA + 8sbA + 4s^2B + 8s^2b.$$
$$BA^2 + 3bA^2 + 6sBA + 18sbA + 9s^2B + 27s^2b.$$

&c. usque ad,

$$\frac{BA^2 + BA^2 + SBA + SBA + S^2B + S^2B.}{bBA^2 + \frac{1}{2}bBA^2 + \frac{2}{3}bSBA + \frac{2}{3}bSBA + \frac{1}{3}bS^2B + \frac{1}{4}bS^2B.}$$

seu $\frac{3}{2}bBA^2 + \frac{5}{3}bSBA + \frac{7}{12}bS^2B$.

Adeoque Solidi Trapezio y δ ξ p incumbentis magnitudo, ad magnitudinem Pyramidis Triangulo Y α P incumbentis, est ut, $\frac{3}{2}bBA + \frac{5}{6}bSB$, ad $\frac{1}{3}bBS$. Atque momentum illius, ad momentum hujus, (respectu ejusdem A α,) ut $\frac{3}{2}bBA^2 + \frac{5}{3}bSBA + \frac{7}{12}bS^2B$, ad $\frac{1}{4}bS^2B$. Seu, extrito B ubique, (utpote infinite exiguo, & ubique æquali;) ductisque omnibus in 6 (pro magnitudinibus,) seu (pro momentis) in 12, (quo fractiones tollantur:) Magnitudo ad magnitudinem erit, ut $9bA + 5bS$, ad $2bS$: Et momentum illius, ad Momentum hujus, ut $18bA^2 + 20bAS + 7bS^2$, ad $3bS^2$. Seu (restitutis minuscularum valoribus) Magnitudo ad Magnitudinem, ut $9ab + 5sb$, ad $2sb$: Et momentum ad momentum, ut $18a^2b + 20asb + 7s^2b$, ad $3s^2b$.

Cumque hoc ubique obtineat; erit Solidorum omnium Trapeziis y δ ξ p insistentium, (sive quæ totam Semicycloidem spectant, sive quæ spectant ipsius portionem, A b β α, b β τ, b β δ d, &c.) magnitudo; ad magnitudinem omnium Triangulis Y α P insistentium, (sive quæ totum spectant Semicirculum, sive ipsius respectivam portionem, ut B α A, α B τ, B α D, &c.) ut *Omnia* $9ab + 5sb$: ad *Omn.* $2sb$: eo spectantia. (De quo non ultra soliciti sumus, utpote quod in capite præcedente tractavimus.) Eorumque omnium Momentum, ad Momentum horum; ut *Omn.* $18a^2b + 20asb + 7s^2b$: ad *Omn.* $3s^2b$: eo spectantia. (Quod & supra inventum erat.)

Hoc est, ut *Omn.* $7s^2b$: ad *Omn.* $3s^2b$: (seu 7 ad 3:) atque insuper ut *Omn.* $18a^2b + 20asb$: ad *Omn.* $3s^2b$. Sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omn.* a^2b: (puta, quæ portionem A b β α spectant,) hoc est, Ungulæ A b β α fig. 170. aciem habentis A α, momentum respectu A α, (per § K. prop. 19.) $2eR^3 - 2avR^2 + \frac{1}{3}a^3R + a^2sR$. Adeoque *Omn.* $18a^2b: = 36eR^3 - 36avR^2 + 6a^3R + 18a^2sR$.

Item, *Omn.* asb: eo spectantia; hoc est, Solidi A b β α fig. 170. ex ductu rectarum b β in b υ facti, momentum respectu A α, (per § H. prop. 18.) $-\frac{5}{4}eR^3 + avR^2 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{2}as^2R$. Adeoque *Omn.* $20asb: = -25eR^3 + 20avR^2 - 5svR^2 + 10as^2R$.

Ergo, *Omn.* $18a^2b + 20asb: = 11eR^3 - 16avR^2 - 5svR^2 + 6a^3R + 18a^2sR + 10as^2R$.

Similiter; *Omn.* $\frac{1}{2}s^2b$: hoc est; Solidi A b β α, fig. 170. ex ductu rectarum b β in β υ facti, momentum respectu plani A τ α, (per § C. prop. 18.) $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$. Adeoque *Omn.* $3s^2b = \frac{3}{2}eR^3 + \frac{3}{2}svR^2 + s^3R$.

Momentum igitur Ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, aciem habentis A α, respectu ejusdem A α; est ad Momentum respectivæ Ungulæ portionis Semicirculi B α A, aciem habentis A α, respectu ejusdem A α: ut $11eR^3 - 16avR^2 - 5svR^2 + 6a^3R + 18a^2sR + 10as^2R$ ad $\frac{3}{2}eR^3 + \frac{3}{2}svR^2 + s^3R$; atque insuper (ut modo dictum) ut 7 ad 3; hoc est, ut $\frac{7}{2}eR^3 + \frac{7}{2}svR^2 + \frac{7}{3}s^3R$, ad $\frac{3}{2}eR^3 + \frac{3}{2}svR^2 + s^3R$: Adeoque omnino, ut $\frac{29}{2}eR^3 - 16avR^2 - \frac{3}{2}svR^2 + 6a^3R + 18a^2sR + 10as^2R + \frac{7}{3}s^3R$, ad $\frac{3}{2}eR^3 + \frac{3}{2}svR^2 + s^3R$. Cumque hoc posterius sit (per § R prop. 16.) duodecuplum Momenti Ungulæ B α A, aciem habentis A α, respectu ipsius A α: Erit & prius illud, duodecuplum momenti

menti Ungulæ A b β α (portionis Semicycloidis) aciem habentis A α, respectu ejusdem A α: Adeoque ipsum illius momentum, $\frac{29}{24}eR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{2}a^3R + \frac{3}{2}a^2sR + \frac{5}{6}as^2R + \frac{7}{36}s^3R$: (Hujusque Duplum, est Semisolidi circa A α conversione facti, Momentum respectu ipsius axis A α: ut supra sæpius ostensum est.) Fig. 166, 168.

Illudque Ungulæ Momentum, per magnitudinem suam, $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$, (per § I. prop. 20.) divisum; exhibet ipsius A b β α Ungulæ, aciem habentis A α, distantiam centri gravitatis ab A α,

$$\frac{87eR^2 - 96avR - 9svR + 36a^3 + 108a^2s + 60as^2 + 14s^3}{54a^2 + 108as - 48vR + 30s^2}.$$

(Semisolidique correspondentis, distantia centri gravitatis ab axe A α, est ad hanc Ungulæ; ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$.)

Speciatim vero, Ungulæ totius Semicycloidis A τ α, aciem habentis A α, Momentum respectu A α, (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, & $s = 0$,) $\frac{1}{16}RP^3 - \frac{35}{48}R^3P$. Centrique gravitatis ab A α distantia, est $\frac{3P^3 - 35R^2P}{9P^2 - 64R^2}$.

Similiter ostendetur, Ungulæ Segmenti Semicycloidis b β τ, aciem habentis A α, Momentum respectu A α; ad momentum Ungulæ segmenti semicirculi α B α, aciem habentis A α, respectu ejusdem A α; esse, ut 7 ad 3; atque insuper, ut *Omn.* $18a^2b + 20asb$: ad *Omn.* $3s^2b$: eo spectantia; sumptis a arithmetice proportionalibus. Quæ similiter, mutatis mutandis, ad calculum reducentur. Cumque Ungulæ Segmenti Semicirculi Momentum illud per § S. prop. 16. innotescat: Habebitur & correspondens Ungulæ Segmenti Semicycloidis Momentum; & quæ hinc dependent. N.

Vel etiam; ex totius A τ α Ungulæ momento, (modo tradito,) si auferatur (modo traditum) momentum Ungulæ A b β α: Restabit $\frac{1}{16}RP^3 - \frac{35}{48}R^3P - \frac{29}{24}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{2}a^3R - \frac{3}{2}a^2sR - \frac{5}{6}as^2R - \frac{7}{36}s^3R$, Momentum Ungulæ b β τ aciem habentis A α, respectu ipsius A α.

Atque hoc, per ipsius magnitudinem (§ I. traditam) $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3 + \frac{2}{3}vR^2 - \frac{3}{4}a^2R - \frac{3}{2}asR - \frac{5}{12}s^2R$, divisum; exhibet ejusdem, ab A α, distantiam centri gravitatis,

$$\frac{9P^3 - 105R^2P - 174eR^2 + 192avR + 18svR - 72a^3 - 216a^2s - 120as^2 - 28s^3}{27P^2 - 192R^2 + 96vR - 108a^2 - 216as - 60s^2}.$$

Si vero ex Ungulæ A b β α (portionis Semicycloidis) momento illo, modo reperto; auferatur Momentum Ungulæ b β α V, (aciem habentis A α,) respectu A α: Relinquitur Ungulæ A b V (aciem habentis A α,) momentum respectu A α. O.

Componitur autem Ungula illa b β α V, ex Pyramide Triangulo B α V incumbente, & solido incumbente Parallelogrammo b β α B.

Pyramidis istius momentum (per § R. prop. 16.) est, $\frac{1}{12}s^3b = \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$.

Solidum Parallelogrammo b β α B incumbens; altitudinem habet, in α, nullam; in β, $\alpha\beta = a$; in B, $BV = s$; in b, $bV = s + a$. Adeoque componitur ex prismate, triangulares bases habente, α β, vel B b, $= \frac{1}{2}a^2$; (quarum itaque centra gravitatis à B, & α, sunt $\frac{2}{3}a$; &, propter altitudinem $V\alpha = b$, magnitudo prismatis $\frac{1}{2}a^2b$; centrique gravitatis ab A α distantia $\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}s$, propter centrum prismatis in medio rectæ centra basium conjungente; adeoque momentum ejus respectu A α, $\frac{1}{3}a^3b + \frac{1}{4}a^2sb$:) Atque ex cuneo, altitudinem habente in α β, nullam; in b B, æqualem ipsi $BV = s$: Adeoque (propter $bB = a$, & $V\alpha = b$,) magnitudinem habebit $\frac{1}{2}asb$, (semissem Prismatis, ejusdem basis & altitudinis:) Centrique gravitatis ab A α distantiam, $\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}s$: Ejusque propterea respectu A α momentum, $\frac{1}{4}a^2sb + \frac{1}{3}as^2b$. Solidique propterea totius parallelogrammo incumbentis momentum, respectu A α, $\frac{1}{3}a^3b + \frac{1}{2}a^2sb + \frac{1}{3}as^2b$.

Adeoque Solidi Trapezio b β α V incumbentis, momentum respectu A α, $\frac{1}{3}a^3b + \frac{1}{2}a^2sb + \frac{1}{3}as^2b + \frac{1}{12}s^3b$. Atque hoc per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{2}fab + \frac{1}{6}s^2b$ (per § K. prop. 20.) divisum; exhibet ipsius b β α V Ungulæ, aciem habentis A α, distantiam centri gravitatis ab A α, $\frac{4a^3 + 6a^2s + 4as^2 + s^3}{6fa + 2s^2}$.

Nnnnn Vel

Fig. 166, 168. Vel etiam sic colligitur, ejusdem b $\beta\alpha$ V Ungulæ, aciem habentis A α, respectu ipsius A α, Momentum.

Rectæ Trapezium complentes, ab $\alpha\beta$ incipiendo, usque ad b V; sunt A, $A+s$, $A+2s$, $A+3s$, &c. usque ad $A+S$. Earumque puncta media, seu gravitatis centra, distantias habent, $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}s$, $\frac{1}{2}A+\frac{2}{2}s$, $\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}s$, &c. usque ad $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}S$. Quæ in rectas illas ductæ, exhibent earundem momenta, seu Triangula rectis illis insistentia Ungulam complentia, $\frac{1}{2}A^2$, $\frac{1}{2}A^2+sA+\frac{1}{2}s^2$, $\frac{1}{2}A^2+2sA+\frac{4}{2}s^2$, $\frac{1}{2}A^2+3sA+\frac{9}{2}s^2$, &c. usque ad $\frac{1}{2}A^2+SA+\frac{1}{2}S^2$. Eademque Triangula, ducta in earundem respective distantiam centri gravitatis ab A α, nempe $\frac{2}{3}A$, $\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}s$, $\frac{2}{3}A+\frac{4}{3}s$, $\frac{2}{3}A+\frac{6}{3}s$, &c. usque ad $\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}S$; exhibent seriem Momentorum, eorundem Triangulorum, respectu A α; $\frac{1}{3}A^3$, $\frac{1}{3}A^3+sA^2+s^2A+\frac{1}{3}s^3$, $\frac{1}{3}A^3+2sA^2+4s^2A+\frac{8}{3}s^3$, $\frac{1}{3}A^3+3sA^2+9s^2A+\frac{27}{3}s^3$, &c. usque ad $\frac{1}{3}A^3+SA^2+S^2A+\frac{1}{3}S^3$. Quarum omnium aggregatum (per prop. 1.) propter V $\alpha=b$, est, $\frac{1}{3}bA^3+\frac{1}{2}bSA^2+\frac{1}{3}bS^2A+\frac{1}{12}bS^3$. Seu (restituto valore minuscularum,) $\frac{1}{3}a^3b+\frac{1}{2}a^2sb+\frac{1}{3}as^2b+\frac{1}{12}s^3b$. Ut prius.

$$A+s, \text{ in } \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}s, =\tfrac{1}{2}A^2+sA+\tfrac{1}{2}s^2.$$
$$A+2s, \text{ in } \tfrac{1}{2}A+\tfrac{2}{2}s, =\tfrac{1}{2}A^2+2sA+\tfrac{4}{2}s^2.$$
$$A+3s, \text{ in } \tfrac{1}{2}A+\tfrac{3}{2}s, =\tfrac{1}{2}A^2+3sA+\tfrac{9}{2}s^2.$$
&c. usque ad
$$\underline{A+S, \text{ in } \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}S, =\tfrac{1}{2}A^2+SA+\tfrac{1}{2}S^2}$$
$$\tfrac{1}{2}bA^2+\tfrac{1}{2}bSA+\tfrac{1}{6}bS^2.$$

$$\tfrac{2}{3}A+\tfrac{2}{3}s, \text{ in } \tfrac{1}{2}A^2+sA+\tfrac{1}{2}s^2, =\tfrac{1}{3}A^3+sA^2+s^2A+\tfrac{1}{3}s^3.$$
$$\tfrac{2}{3}A+\tfrac{4}{3}s, \text{ in } \tfrac{1}{2}A^2+2sA+\tfrac{4}{2}s^2, =\tfrac{1}{3}A^3+2sA^2+4s^2A+\tfrac{8}{3}s^3.$$
$$\tfrac{2}{3}A+\tfrac{6}{3}s, \text{ in } \tfrac{1}{2}A^2+3sA+\tfrac{9}{2}s^2, =\tfrac{1}{3}A^3+3sA^2+9s^2A+\tfrac{27}{3}s^3.$$
&c. usque ad
$$\underline{\tfrac{2}{3}A+\tfrac{2}{3}S, \text{ in } \tfrac{1}{2}A^2+SA+\tfrac{1}{2}S^2, =\tfrac{1}{3}A^3+SA^2+S^2A+\tfrac{1}{3}S^3.}$$
$$\tfrac{1}{3}bA^3+\tfrac{1}{2}bSA^2+\tfrac{1}{3}bS^2A+\tfrac{1}{12}bS^3.$$

Quod quidem Ungulæ b $\beta\alpha$ V momentum, $\frac{1}{3}a^3b+\frac{1}{2}a^2sb+\frac{1}{3}as^2b+\frac{1}{12}s^3b$, seu (propter $b=2R-v$,) $\frac{2}{3}a^3R-\frac{1}{3}a^3v+a^2sR-\frac{1}{2}a^2sv+\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{6}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; ex Ungulæ A b $\beta\alpha$ momento, $\frac{29}{24}eR^3-\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{2}a^3R+\frac{3}{2}a^2sR+\frac{1}{6}as^2R+\frac{7}{36}s^3R$, (modo tradito,) subductum; Relinquit Ungulæ A b V, aciem habentis A α, momentum respectu A α, $\frac{29}{24}eR^3-\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{6}a^3R+\frac{1}{2}a^2sR+\frac{1}{6}as^2R+\frac{1}{36}s^3R+\frac{1}{3}a^3v+\frac{1}{2}a^2sv+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{12}s^3v$.

Atque hoc, per hujus Ungulæ magnitudinem, $-\frac{2}{3}vR^2-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{2}asR+\frac{1}{12}s^2R+\frac{1}{2}a^2v+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{6}s^2v$, (per § K, L. prop. præced.) divisum; exhibet Ungulæ A b V, aciem habentis A α, distantiam centri gravitatis ab A α,

$$\frac{87eR^3-96avR^2-9svR^2-12a^3R+36a^2sR+12as^2R+2s^3R+24a^3v+36a^2sv+24as^2v+6s^3v}{-48vR^2-18a^2R+36asR+6s^2R+36a^2v+36asv+12s^2v}:$$

Semisolidique correspondentis Momentum respectu axis conversionis suæ, duplum est Momenti Ungulæ respectu aciei suæ: Illiusque distantia centri gravitatis ab axe, ad hujus distantiam ab acie; ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$. Ut sæpius ostensum est.

P. Eademque Momenta & Distantiæ, sic adhuc alias investigantur. Nempe, Momento Ungulæ A b V per se invento, sine ope Ungulæ A b $\beta\alpha$: Hinc ipsius A b $\beta\alpha$ Ungulæ Momentum, reliquaque deducuntur.

Divisa recta A α in partes infinite exiguas, invicem æquales, in punctis S, C, Σ, &c. hoc est, sumptis v arithmetice proportionalibus: Quæ Semicycloidem A $\tau\alpha$, ejusve segmentum A b V, complent rectæ b V; sunt *Omnes* $a+s$, eo spectantes.

Quæque

Quæque Semiquadrantalem Ungulam eidem insistentem, aciem habentem A α, complent plana, eisdem rectis insistentia; sunt Triangula Isoscelia, earundem rectarum semiquadrata: hoc est, *Omn.* $\frac{1}{2}a^2 + as + \frac{1}{2}s^2$: eo spectantia. Horumque Triangulorum centra gravitatis, ab A α distant earundem rectarum b V besse, hoc est $\frac{2}{3}$ b V $= \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}s$. Adeoque Triangulorum illorum Momenta, (ductis magnitudinibus in respectivas distantias,) sunt *Omn.* $\frac{1}{3}a^3 + a^2 s + as^2 + \frac{1}{3}s^3$: (seu, Triens cuborum omnium b V,) sumptis v arithmetice proportionalibus. Fig. 166. 168.

Sunt autem, *Omn.* $\frac{1}{3}a^3$: (sumptis v arithmetice proportionalibus,) hoc est, Ungulæ A b B fig. 170. aciem habentis A α, momentum respectu A α, (per § M. prop. 19.) $2cR^3 - 2avR^2 - \frac{1}{3}a^3R + a^2sR + \frac{1}{3}a^3v$.

Et *Omn.* a^2s: (eo spectantia,) hoc est, Duplum Momenti respectu A α, Solidi A b B fig. 170. ex ductu rectarum b B in b V respective, (per § N. prop. 18.) $-\frac{1}{6}cR^3 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}a^3R - \frac{1}{2}a^2sR + \frac{1}{2}as^2R + \frac{1}{3}a^2sv$.

Item *Omn.* as^2: (eo spectantia,) hoc est, Duplum Momenti ejusdem A b B Solidi, respectu plani A τ α, (per § O. prop. 18.) $-\frac{2}{3}cR^3 + \frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{3}as^2v$.

Et *Omn.* $\frac{1}{3}s^3$; (eo spectantia,) hoc est, Momentum Ungulæ A B V aciem habentis A α, respectu A α; $\frac{1}{8}cR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$: per § Q. prop. 16.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{3}a^3 + a^2s + as^2 + \frac{1}{3}s^3 := \frac{29}{24}cR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{2}a^2sR + \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{36}s^3R + \frac{1}{3}a^3v + \frac{1}{2}a^2sv + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$. Quod igitur est Momentum Ungulæ segmenti semicycloidis A b V, aciem habentis A α, respectu ipsius A α. (Idem quod prius inventum erat.) Quod itaque per magnitudinem divisum, exhibebit distantiam centri gravitatis ab A α: ut prius.

Atque huic quidem Momento, si addatur Momentum Ungulæ b β α V, (modo traditum,) habebitur Ungulæ A b β α, aciem habentis A α, Momentum respectu A α: ut prius.

Q. Exhibuimus igitur in expositis Ungulis Semicycloidis, ejusque partium, tum Magnitudines, & Momenta; tum Centri gravitatis in singulis distantias à duobus saltem planis non sibi invicem parallelis; atque in quo tertio per aciem plano constitutum sit, ex § G. prop. 12. constat, (eo nempe quod Ungulæ altitudinem bisecat;) Adeoque (per prop. 26. cap. præced.) ipsa gravitatis centra determinavimus.

Quæque de Ungulis dicta sunt; eadem ad solida conversione facta facile transferuntur, ope prop. 12. & 14. ut suis locis sæpius ostensum.

Quæque de expositis dicta sunt; ad alia, calculo rite administrato, facile applicantur: Ut ad præcedentes aliquot propositiones admonuimus.

R. Quæque de Ungulis Solidisque Semicycloidem Primariam (hactenus traditam) dicta sunt; eadem omnia ad Ungulas, Solidaque, Secundarias (sive Protractas sive Contractas) similiter spectantia, facile transferentur. Nempe, quoties rectæ b B in calculum veniunt; pro a, substituenda erit alia quantitas, quæ, ad illam, eam habet rationem, quam habet recta τ α, ad $\frac{1}{2}P$, semiperipheriam circuli generantis. Et similiter, mutatis mutandis, de earundem Quadratis, Cubis, cæterisque potestatibus; ut ad calcem propositionis præcedentis ostensum est. Fig. 175, 176.

PROP. XXII.

Fig. 177. A. Quæ Cycloidem contingit recta, est correspondenti Circuli genitoris (circa cycloidis axem positi) Chordæ, ad verticem terminatæ, parallela.

B. Curvaque Semicycloidis, est Dupla Diametri circuli Genitoris.

C. Ejusque portio quævis (ad verticem terminata) Dupla subtensæ correspondentis Arcus circuli genitoris.

Adeoque secabitur Cycloidis curva, in ratione data.

Atque hinc Momenta & Magnitudines, ipsaque gravitatis Centra, exhibentur; Tum Curvæ Cycloidis, partiumque ejusdem; tum superficierum, earundem conversione, factarum.

Nempe (retentis symbolis ut in propositionibus præcedentibus, positoque $\chi = \sqrt{:4R^2 - c^2:} = \alpha$ B.)

B. Curvæ Semicycloidis A τ, magnitudo $4R$: Momentum respectu T A,
D. F. $\frac{8}{3}R^2$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{16}{3}R^2$; distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{2}{3}R$; à $\tau\alpha$,
G. K. $\frac{4}{3}R$: Momentum respectu Aα, $2RP - \frac{16}{3}R^2$; respectu Tτ, $\frac{16}{3}R^2$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}P - \frac{4}{3}R$; à T$\tau$, $\frac{4}{3}R$.

C. Curvæ A b; magnitudo, $2c$: Momentum respectu T A, $\frac{2}{3}cv$; respectu
D. F. b V, $\frac{4}{3}cv$; respectu $\tau\alpha$, $2cb + \frac{4}{3}cv = 4cR - \frac{2}{3}cv$; distantia Centri
G. K. gravitatis à T A, $\frac{1}{3}v$; à b V, $\frac{2}{3}v$; à $\tau\alpha$, $b + \frac{2}{3}v = 2R - \frac{1}{3}v$: Momentum respectu A$\alpha$, $2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{2}{3}b\chi$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $a - \frac{8R^2 + b\chi - 6\chi R}{3c}$.

D. F. Ungulæ Superficialis (Semiquadrantalis) ipsi Aτ curvæ insistentis, aci-
E. F. em habentis T A, Magnitudo, $\frac{8}{3}R^2$: Momentum respectu T A, $\frac{16}{5}R^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{32}{15}R^3$; distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{6}{5}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{4}{5}R$:
H. L. Momentum respectu Aα, $\frac{4}{3}R^2P - \frac{64}{45}R^3$; respectu T$\tau$, $\frac{64}{45}R^3$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}P - \frac{8}{15}R$; à T$\tau$, $\frac{8}{15}R$.

D, F. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{16}{3}R^2$: Momentum respectu TA, $\frac{32}{15}R^3$;
E, F. respectu $\tau\alpha$, $\frac{128}{15}R^3$; distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{2}{5}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{8}{5}R$: à
H, L. Tτ, $\frac{26}{15}R$; ab Aα, $\frac{1}{2}P - \frac{26}{15}R$; momentum respectu T$\tau$, $\frac{416}{45}R^3$; respectu Aα, $\frac{8}{3}R^2P - \frac{416}{45}R^3$.

G, K. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $2RP - \frac{16}{3}R^2$: Momentum respe-
H, L. ctu T A, $\frac{4}{3}R^2P - \frac{64}{45}R^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{8}{3}R^2P - \frac{416}{45}R^3$; distantia Centri
I, M. gravitatis à T A, $\frac{30P - 32R}{45P - 120R}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{60P - 208R}{45P - 120R}R$: Momentum respectu A$\alpha$, $RP^2 - \frac{1024}{45}R^3$; respectu T$\tau$, $\frac{1024}{45}R^3 - \frac{8}{3}R^2P$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{45P^2 - 1024R^2}{90P - 240R}$, à T$\tau$, $\frac{1024R^2 - 120RP}{90P - 240R} = \frac{512R - 60P}{45P - 120R}R$.

G, K. Aciemque habentis Tτ; Magnitudo; $\frac{16}{3}R^2$: Momentum respectu T A,
H, L. $\frac{64}{45}R^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{416}{45}R^3$; distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{4}{15}R$; à $\tau\alpha$,
I, M. $\frac{26}{15}R$: Momentum respectu Aα, $\frac{1024}{45}R^3 - \frac{8}{3}R^2P$; respectu T$\tau$, $\frac{16}{3}R^2P - \frac{1024}{45}R^3$; distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{64}{15}R - \frac{1}{2}P$; à T$\tau$, $P - \frac{64}{15}R$.

D, F. Ungulæ Superficialis A b, aciem habentis T A; Magnitudo $\frac{8}{3}cv$: Mo-
E, F. mentum respectu T A, $\frac{2}{3}cv^2$; respectu b V, $\frac{14}{15}cv^2$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}cvR - \frac{2}{5}cv^2$

$-\frac{2}{5}cv^2$; distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{3}{5}v$; à b V, $\frac{2}{5}v$; à $\tau\alpha$, $b+\frac{8}{5}v=$ Fig. 177.
$2R+\frac{4}{5}v$: Momentum respectu $A\alpha$, H. L.
$\frac{30ac^3R-128R^5+64\chi R^4+8c^2\chi R^2+9c^4\chi}{90R^2}$; distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{30ac^3R-128R^5+64\chi R^4+8c^2\chi R^2+9c^4\chi}{60cvR^2=30c^3R}$.

Aciemque habentis bV; Magnitudo, $\frac{4}{3}cv$, Momentum respectu T A, $\frac{8}{15}cv^2$; D, F.
respectu bV, $\frac{16}{15}cv^2$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{8}{3}cvR-\frac{16}{15}cv^2$; distantia Centri gravitatis E, F.
à T A, $\frac{2}{5}v$; à b V, $\frac{4}{5}v$; à $\tau\alpha$, $b+\frac{4}{5}v=2R-\frac{1}{5}v$: Momentum respectu $A\alpha$, H, L.
$\frac{60ac^3R-240c^2R^3+112c^2\chi R^2+6c^4\chi-64\chi R^4+128R^5}{90R^2}$. distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,
$\frac{60ac^3R-240c^2R^3+112c^2\chi R^2+6c^4\chi-64\chi R^4+128R^5}{120cvR^2=60c^3R}$.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $2cb+\frac{4}{3}cv=4cR-\frac{2}{3}cv$: Momentum respectu T A, $\frac{4}{3}cvR-\frac{2}{5}cv^2$; respectu $\tau\alpha$, $8cR^2-\frac{8}{3}cvR+\frac{2}{5}cv^2$; D, F. E, F.
respectu b V, $\frac{8}{3}cvR-\frac{4}{15}cv^2$; distantia Centri gravitatis à T A,
$\frac{10vR-3v^2}{30R-5v}$; à $\tau\alpha$, $\frac{60R^2-20vR+3v^2}{30R-5v}$; à b V, $\frac{20vR-2v^2}{30R-5v}$: Momentum respectu $A\alpha$, H, L.
$\frac{360acR^3-30ac^3R-832R^5+416\chi R^4+52c^2\chi R^2-9c^4\chi}{90R^2}$; distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,
$\frac{360acR^3-30ac^3R-832R^5+416\chi R^4+52c^2\chi R^2-9c^4\chi}{360cR^3-(60cvR^2=)30c^3R}$.

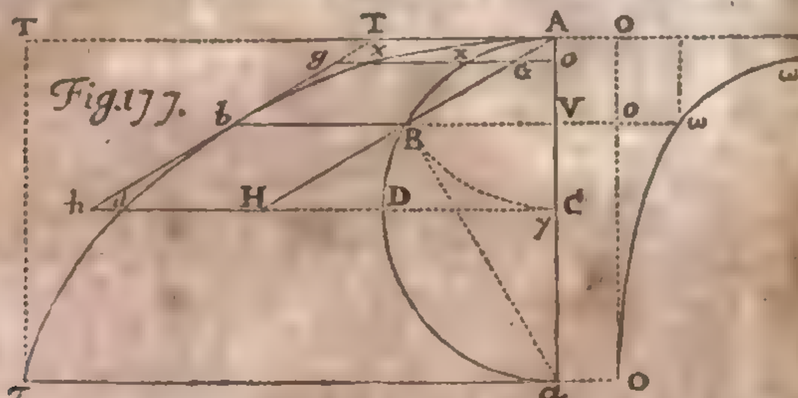
Aciemque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $2ac-\frac{16}{3}R^2+(4\chi R-\frac{2}{3}b\chi=)\frac{8}{3}\chi R+$ G, K.
$\frac{2}{3}v\chi$: Momentum respectu TA, $\frac{30ac^3R-128R^5+64\chi R^4+8c^2\chi R^2+9c^4\chi}{90R^2}$; re- H, L.
spectu $\tau\alpha$, $\frac{360acR^3-30ac^3R-832R^5+416\chi R^4+52c^2\chi R^2-9c^4\chi}{90R^2}$; respectu bV, $\frac{60ac^3R-240c^2R^3+112c^2\chi R^2+6c^4\chi-64\chi R^4+128R^5}{90R^2}$; distantia Centri gravitatis à T A,
$\frac{30ac^3R-128R^5+64\chi R^4+8c^2\chi R^2+9c^4\chi}{180acR^2-480R^4+240\chi R^3+(60v\chi R^2=)30c^2\chi R}$;
à $\tau\alpha$, $\frac{360acR^3-30ac^3R-832R^5+416\chi R^4+52c^2\chi R^2-9c^4\chi}{180acR^2-480R^4+240\chi R^3+30c^2\chi R}$;
à b V, $\frac{60ac^3R-240c^2R^3+112c^2\chi R^2+6c^4\chi-64\chi R^4+128R^5}{180acR^2-480R^4+240\chi R^3+30c^2\chi R}$: Momentum I, M.
respectu $A\alpha$, $2a^2c+\frac{2}{3}c^3-\frac{112}{9}cR^2+\frac{4}{9}c\chi^2+8a\chi R-\frac{2a\chi^3}{3R}-\frac{c^5}{10R^2}$;
distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,
$\frac{180a^2cR^2+60c^3R^2-1120cR^4+40c\chi^2R^2+720a\chi R^3-60a\chi^3R-9c^5}{180acR^2-480R^4+240\chi R^3+30c^2\chi R}$.

Adeoque exhibuimus, tum rectas Cycloidem (Primariam) tangentes; N.
tum ipsius curvæ, partiumque ejusdem, longitudines, & Centra gravitatis; earumque Momenta respectu expositarum rectarum; Ungularum item superficialium, (adeoque & superficierum conversione factarum,) magnitudines, momenta, & Centra gravitatis.
Quæque de expositis dicta sunt, ad alia facile transferentur.

 Possunt

O. Possunt etiam & Cycloidum Secundariarum (Contractarum scilicet & Protractarum) Tangentes exhiberi; earumque Curvis Semiellipses æquales; & partes partibus respective sumptis.

A. Fig. 177. SUmpto, in Semicycloidis curva A τ, puncto quovis b; duci intelligatur basi τ α, parallela b B; Circulo genitori, circa Cycloidis axem A α constituto, occurrens in B: Junctaque Chorda A B; ducatur huic parallela, per punctum b, recta g b h. Dico rectam g b h, Semicycloidem in b contingere.



Sumptis in recta g b h, supra b, puncto g; &, infra, puncto h: ducantur, ipsi b B parallelæ, rectæ g x X G, h d H D, Semicycloidi occurrentes in x, d; Semicirculo in X, D; chordæque A B (productæ) in G, H.

Ostensum est (§ A. prop. 20.) arcui B A, æqualem esse rectam b B; adeoque & (propter parallelas) g G, & h H. Item arcui X A, rectam x X; & arcui D A, rectam d D.

Cumque ibidem demonstratum sit rectas B P, (fig. 167, 168, 169.) arcubus B X, ubique minores esse; rectasque B Y, arcubus B D majores: Similiter ostendetur, (fig. 177.) rectam X G minorem arcu B X; rectamque H D, majorem esse arcu B D. (Nam similiter, hic, ducitur A B, ab A; atque illic, α B, ab α.)

Adeoque; propter totam g G rectam, toti B A curvæ æqualem; & ablatam X G, ablata X B minorem: Erit reliqua X g recta, major quam reliqua X A curva, seu recta x X. Et propterea, punctum g, extra Cycloidem cadet.

Item; propter h H rectam, ipsi B A curvæ æqualem; & H D adjectam, majorem adjecta B D: Erit tota D h recta, major quam tota curva D A, seu D d recta. Et, propterea, punctum h est extra Cycloidem.

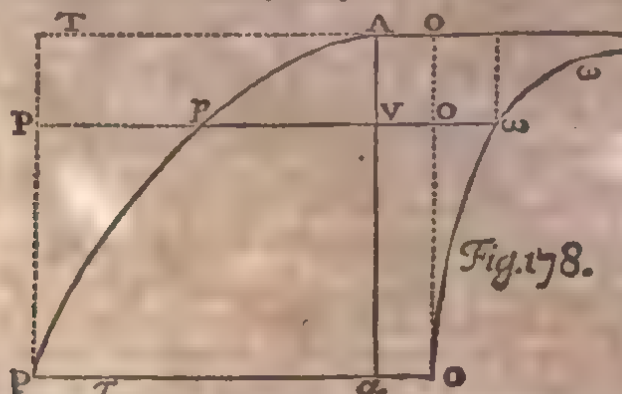
Cum itaque, tum g (punctum quodvis supra b,) tum h (punctum quodvis infra b,) sit extra Cycloidem; (adeoque unicum b punctum Cycloidi commune;) recta g b h Cycloidem in b tangit.

B. Estque (propter parallelas) $bg = BG$, $bh = BH$, $gh = GH$; & (producta b g, donec tangenti verticis A T occurrat in T,) $bT = BA = c = \sqrt{2vR}$; (propter A V, A B, A α, hoc est, $v \cdot c \cdot 2R$. continue proportionales; ut sæpe dictum est.) Item, (ductis g X O, b B V, h D C, ipsi T A parallelis, Axi A α occurrentibus in O, V, C, rectam V O, vel C O, intercipientibus; quam dicamus B;) erit, ut $AV = v$, ad $AB = \sqrt{2vR}$; sic V O, vel $CO, = B$; ad B G, vel H G; hoc est, ad b g, vel h g, $= \frac{B\sqrt{2vR}}{v} = B\sqrt{\frac{2R}{v}}$.

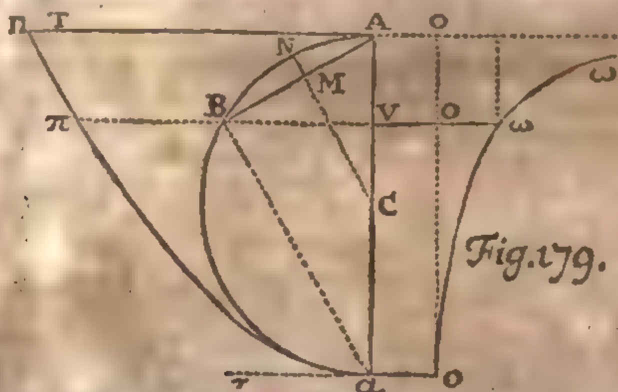
Fig. 177, 178. Si itaque intelligatur recta $A\alpha = 2R$, in partes æquales numero infinitas, divisa, quarum una intelligatur V O, vel O C; adeoque omnes A V, hoc est omnes v, eo spectantes, arithmetice proportionales: Quæ his respondent subtensæ totidem A B, hoc est, totidem $\sqrt{2vR}$ correspondentes; (series utique subsecundanorum;) sunt ut totidem rectæ V p semiparabolam A p P α (fig. 178.) complentes; cujus tum Axis A α, tum basis α P, (adeoque & latus rectum,) sit $= 2R$.

Rectæque b g, seu g h, tangentes; hoc est, (in partibus infinite exiguis) ipsæ b x,

b x, seu x d, curvæ; sunt totidem $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, seu $\frac{B\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}$, correspondentes; (hoc est, series seriei subsecundanorum reciproca.) Fig. 177, 178.



Adeoque; si rectæ V O, vel O C, singulæ; hoc est, totidem B; intelligantur ipsis α O seu V O totidem, fig. 177, 178. rectangulum A α O O complentibus: æquales; & sumantur ubique, ut Vp, ad α P, seu V P; sic α O, seu VO, ad V ω, hoc est, ut $\sqrt{2vR}$, ad $2R$; sic B, ad $\frac{2BR}{\sqrt{2vR}} = \frac{B\sqrt{2R}}{\sqrt{v}} =$ V ω: Erunt omnes illæ b g, seu g h; hoc est, (in partibus infinite exiguis,) omnes illæ b x, seu x d, curvam A τ complentes; ad omnes illas V O, seu O C, complentes rectam A α; hoc est, ipsa A τ curva, ad rectam A α: ut omnes illæ V ω figuram interminabilem A α O ω complentes, ad omnes illas V O complentes Rectangulum A α O O; Hoc est, ut figura illa interminabilis, ad inscriptum parallelogrammum; Hoc est, ut Reciproca Secundanorum Series, cujus index est $-\frac{1}{2}$; ad congruam Æqualium seriem, cujus Index est ± 0, (per def. 1, 2. hujus.) hoc est (per prop. 1. hujus.) ut 1 ad $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$, seu ut 2 ad 1. Adeoque A τ curva, est dupla rectæ A α.



Vel etiam; eadem Parabola inverso situ posita, ut α τ Π, fig. 179. ductoque ad eandem diametrum Semicirculo A B α: Si sumatur, ubique, ut V B ad V τ, sic V O seu α O ad V ω; (hoc est, ut $s=\sqrt{vb}$ ad $\sqrt{2bR}$, sic B ad $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$:) habebitur eadem quæ prius figura interminabilis A α O ω: Reliquaque consequentur ut prius.

Similiter ostendetur (in partibus,) curvam A b, ad A V rectam; esse, ut est figura A V ω ω interminabilis ad A V O O rectangulum C. Fig. 177, 178, 179.

Et, consequenter, si intelligatur A α O ω (figura interminabilis) recta V ω secari in ratione data: in eadem ratione secabitur, in b, curva A τ.

Quo autem secetur A α O ω in ratione data; secanda erit A α recta in ejusdem ratione duplicata. Intellige, si ratio data sit r ad R; sitque A V ad A α, ut r^2 ad R^2; erit A V ω ω, ad A α O ω, (adeoque A b curva, ad curvam A τ,) in data ratione r ad R. Esto enim A V $(=v) = \frac{2r^2}{R}$, (hoc est, ad A α $= 2R$, in ratione

Fig. 177, 178, 179. tione r^2 ad R^2:) Erit propterea V p $(= AB = \sqrt{2vR}) = \sqrt{4r^2} = 2r$: Et V ω $(= B\sqrt{\frac{2R}{v}}) = B\sqrt{\frac{R^2}{r^2}} = \frac{BR}{r}$. Adeoque Rectangulum A V ω $(= vB\sqrt{\frac{2R}{v}}) = 2rB$. Hujus itaque duplum $4rB$, erit ipsa A V ω ω interminabilis. (Nam, qua ratione A α O ω est dupla inscripti parallelogrammi A α O O; eadem est A V ω ω interminabilis, dupla huic inscripti parallelogrammi A V ω; nempe per prop. 1. hujus.) Est autem (propter $A\alpha = 2R$, & $\alpha O = B$,) Rectangulum $A\alpha OO = 2RB$; hujusque propterea duplum $A\alpha O\omega = 4RB$. Ergo A V ω ω, ad A α O ω, (adeoque & A b, ad A τ,) ut $4rB$, ad $4RB$; hoc est, ut r ad R.

Cum itaque Sinus versi A V ad A α, (hoc est v ad $2R$;) sint in duplicata ratione subtensarum A B ad A α; (hoc est, $\sqrt{2vR}$ ad $2R$ seu $\sqrt{4R^2}$; vel $\sqrt{v}$ ad $\sqrt{2R}$:) sintque item eædem A V ad A α in duplicata ratione curvarum A b ad A τ, (ut modo demonstratum est:) Eadem erit ratio A b curvæ ad curvam A τ, quæ est rectæ A B ad A α rectam. Adeoque, ut A τ curva ad rectam A α, sic curva A b ad A B rectam. Est autem (uti jam demonstravimus) curva A τ dupla rectæ A α; ergo & A b curva, dupla est rectæ A B. Et sic ubique. Hoc est, $A\tau, = 2A\alpha = 4R$; & $Ab = 2AB = 2c = 2\sqrt{2vR} = \sqrt{8vR}$.

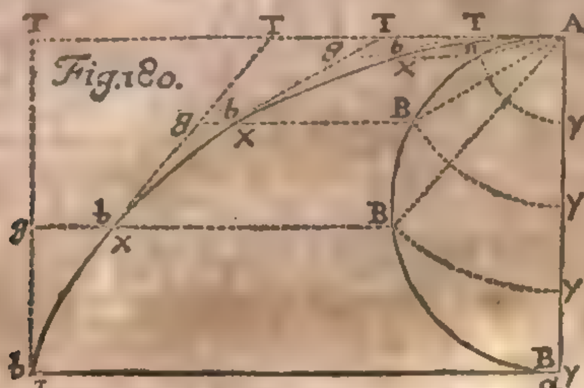


Fig. 177, 180. Vel etiam; sic habetur, curvæ A τ divisio in ratione data. Divisa scilicet A α in ratione data, in γ; aptetur A B = A γ: Ductaque B b rectæ A T parallela, in eadem ratione dividetur A τ in b. Ut ex dictis patet. Nempe $R . r :: A\alpha . A\gamma = AB :: A\tau . Ab$.

D. Fig. 177. Porro; rectarum V ω, hoc est, B G, b g, vel G H, g h, hoc est, (in partibus infinite exiguis) b x, vel x d; à Tangente verticis T A, distantiæ, sunt ipsæ $AV = v$, respectivæ. Quæ itaque in magnitudines $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$ (modo inventas) ductæ; exhibent earundem respectu T A momenta, $B\sqrt{2vR}$ (seu cB.) Adeoque (sumptis v arithmetice proportionalibus) curvæ A τ, vel A b, momentum respectu A T; vel Semiquadrantalis Ungula superficialis ipsi A τ vel A b curvæ insistens, aciem habens T A; est aggregatum omnium $B\sqrt{2vR}$ eo spectantium; vel (omissis B) omnium $\sqrt{2vR}$, hoc est, omnium V p rectarum, Semiparabolam A α P, vel A V p, fig. 178. complentium: (est enim B, ut ex ipsius origine patet, nihil aliud quam ipsius A α vel A V pars infinitesima; quæ omnes simul sumptæ ipsam A α vel A V conficiunt; atque hic nihil innuit aliud quam, rectarum illarum, planum complentium, crassitiem.) Et propterea, superficialis Ungula ipsi A τ vel A b curvæ insistens, (aciem habens A T,) æquatur ipsi A α P, vel A V p, semiparabolæ; hoc est (propter latus rectum $2R$, axemque $A\alpha = 2R$, vel $AV = v$,) erit Ungula $A\tau, = A\alpha P = \frac{8}{3}R^2$; & Ungula $Ab, = AVp = \frac{2}{3}v\sqrt{2vR} = \frac{2}{3}vc$. per prop. 1, vel 6. hujus. Adeoque quæ conversione curvæ A τ vel A b circa T A, describitur superficies; est $\frac{8}{3}RP$, vel $\frac{2P}{3R}v\sqrt{2vR} = \frac{2vcP}{3R}$; & semiconversione, $\frac{4}{3}RP$, vel $\frac{P}{3R}v\sqrt{2vR} = \frac{vcP}{3R}$.

Illudque

Illudque momentum, $\frac{8}{3}R^2$, vel $\frac{2}{3}v\sqrt{2vR}=\frac{2}{3}cv$, per ipsius curvæ A$\tau$ vel Ab magnitudinem, $4R$ vel $2\sqrt{2vR}=2c$ (modo inventam,) divisum; exhibet, centri gravitatis à TA, distantiam; nempe, ipsius Aτ, $\frac{2}{3}R$; ipsiusque Ab, $\frac{1}{3}v$. Fig. 177.

Adeoque; ipsius Aτ distantia centri gravitatis à $\tau\alpha$, erit $\frac{4}{3}R$; ejusque propterea respectu $\tau\alpha$ momentum, seu semiquadrantalis Ungula, $\frac{16}{3}R^2$: Ipsiusque Ab, Distantia Centri gravitatis à bV, $\frac{2}{3}v$; & à $\tau\alpha$, $b+\frac{2}{3}v=2R-\frac{1}{3}v$; adeoque ejusdem momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) respectu bV, $\frac{4}{3}v\sqrt{2vR}=\frac{4}{3}vc$; & respectu $\tau\alpha$, $2b\sqrt{2vR}+\frac{4}{3}v\sqrt{2vR}=2bc+\frac{4}{3}vc$, vel $4R\sqrt{2vR}-\frac{2}{3}v\sqrt{2vR}=4cR-\frac{2}{3}cv$. Et superficies conversione vel semiconversione factæ, ad hæc momenta; ut $\mathcal{P}$ vel $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad R.

Deinde: Eorundem omnium $\sqrt{2vR}$ (Ungulam Aτ vel Ab, aciem habentem TA, complentium,) distantiæ à TA, sunt AV$=v$ respective: Adeoque eorundem respectu TA momenta, sunt omnia $v\sqrt{2vR}$ seu $\sqrt{2v^3R}$ (vel vc;) hoc est, ipsa rectarum Vp semiparabolam AαP vel AVp constituentium momenta respectu TA. Hoc est, (per prop. 1. vel 6. hujus,) Semiquadrantalis Ungulæ superficialis, ipsi Aτ, vel Ab, insistentis, aciem habentis TA, respectu ejusdem TA, momentum, est $\frac{16}{5}R^3$, vel $\frac{2}{5}v^2\sqrt{2vR}=\frac{2}{5}cv^2$. Adeoque, superficiei semiconversione circa TA factæ momentum respectu ipsius TA, (quippe duplum momenti correspondentis Ungulæ Semiquadrantalis, propter magnitudinum rationem, ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}$ ad R, seu $\mathcal{P}$ ad $2R$, & distantiarum ut $2R$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}$, seu $4R$ ad $\mathcal{P}$; ut sæpe ostensum est;) $\frac{32}{5}R^3$, vel $\frac{4}{5}cv^2=\frac{4}{5}v^2\sqrt{2vR}$; prout de tota A$\tau$, parteve Ab, intelligitur. E.

Illudque Ungulæ Momentum $\frac{16}{5}R^3$ vel $\frac{2}{5}cv^2$, per magnitudinem $\frac{8}{3}R^2$ vel $\frac{2}{3}cv$ divisum; exhibet distantiam centri gravitatis istius Aτ vel Ab superficialis Ungulæ (aciem habentis TA) ab ipsa TA, $\frac{6}{5}R$ vel $\frac{3}{5}v$; (adeoque correspondentis Superficiei Semiconversione factæ, centri inde distantiam, $\frac{24R^2}{5\mathcal{P}}$, vel $\frac{12vR}{5\mathcal{P}}$; nempe, ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}$, seu $4R$ ad $\mathcal{P}$.) Et propterea, distantiam centri gravitatis ejusdem Ungulæ Aτ (aciem habentis TA) à $\tau\alpha$, $\frac{4}{5}R$ (ejusque igitur respectu $\tau\alpha$ momentum $\frac{32}{15}R^3$;) Ungulæque Ab (aciem item habentis TA) distantiam centri gravitatis à bV, $\frac{2}{5}v$; à $\tau\alpha$, $b+\frac{2}{5}v=2R-\frac{3}{5}v$; adeoque ipsius, respectu bV, momentum, $\frac{4}{15}v^2\sqrt{2vR}=\frac{4}{15}cv^2$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}vb\sqrt{2vR}+\frac{4}{15}v^2\sqrt{2vR}=\frac{2}{3}s^2c+\frac{4}{15}v^2c$, vel $\frac{4}{3}vR\sqrt{2vR}-\frac{2}{5}v^2\sqrt{2vR}=\frac{4}{3}cvR-\frac{2}{5}cv^2$.

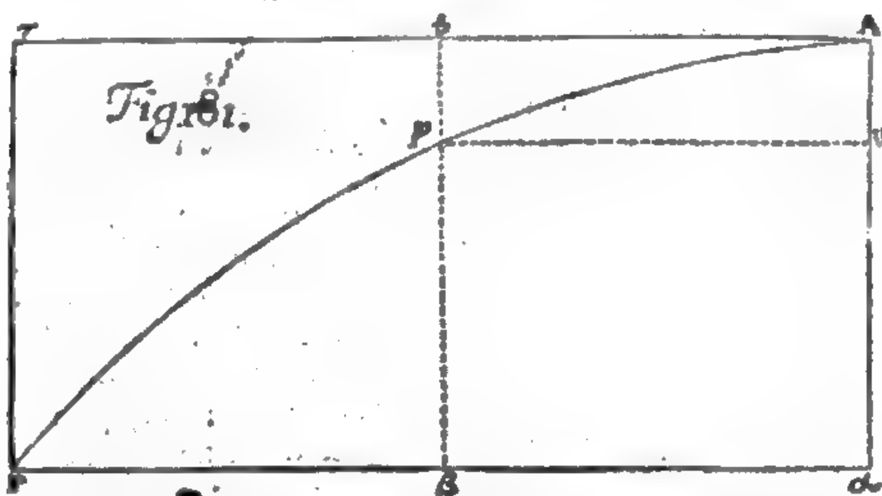
Sed & idem $\frac{32}{15}R^3$ (propter magnitudinum & distantiarum reciprocationem) est etiam Ungulæ superficialis Aτ, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu TA; quod itaque per magnitudinem $\frac{16}{3}R^2$ (modo inventam) divisum, exhibet distantiam centri gravitatis à TA, $\frac{2}{5}R$; adeoque, à $\tau\alpha$, $\frac{8}{5}R$, ejusque propterea respectu aciei suæ $\tau\alpha$ momentum, $\frac{128}{15}R^3$: Superficiei vero semiconversione circa $\tau\alpha$ descriptæ, respectu ipsius $\tau\alpha$, Momentum, (utpote Momenti Ungulæ duplum,) $\frac{256}{15}R^3$; Centrique gravitatis à $\tau\alpha$ distantiam, (utpote ad illam Ungulæ ut $4R$ ad $\mathcal{P}$,) $\frac{32R^2}{5\mathcal{P}}$.

Item (propter eandem magnitudinum & distantiarum reciprocationem) $\frac{4}{15}v^2\sqrt{2vR}=\frac{4}{15}cv^2$, momentum etiam erit Ungulæ Ab aciem habentis bV, respectu ipsius TA: Quod itaque per magnitudinem modo inventam $\frac{4}{3}v\sqrt{2vR}=\frac{4}{3}cv$ divisum, exhibet distantiam centri gravitatis à TA, $\frac{1}{5}v$; adeoque à bV, $\frac{4}{5}v$; à $\tau\alpha$, $b+\frac{4}{5}v=2R-\frac{1}{5}v$; ejusque propterea respectu ipsius bV (aciei suæ) momentum $\frac{16}{15}v^2\sqrt{2vR}=\frac{16}{15}cv^2$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}cbv+\frac{16}{15}cv^2=\frac{8}{3}cvR-\frac{4}{15}cv^2$: Superficiei vero semiconversione circa bV factæ, momentum respectu ipsius bV, $\frac{32}{15}cv^2$; ejusque inde distantiam centri gravitatis $\frac{16vR}{5\mathcal{P}}$.

Itemque (ob eandem causam) $\frac{4}{3}cvR-\frac{2}{5}cv^2$, est etiam Momentum Ungulæ superficialis Ab, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu TA: Quod itaque per magnitudinem modo inventam $4cR-\frac{2}{3}cv$ divisum, exhibet illius à TA distantiam centri

 gravitatis

Fig. 177. gravitatis $\frac{10R - 3v}{30R - 5v}v$: Adeóque, à $\tau\alpha$, $\frac{60R^2 - 20vR + 3v^2}{30R - 5v}$; à bV, $\frac{20vR - 2v^2}{30R - 5v}$: Ejusque propterea momentum respectu $\tau\alpha$, [illegible] $cR^2 - \frac{8}{3}cvR + \frac{2}{5}cv^2$; & respectu bV, $\frac{8}{3}cvR - \frac{4}{15}cv^2$: Superficiei vero semiconversione ipsius A b circa $\tau\alpha$ descriptæ, momentum respectu ipsius $\tau\alpha$, $16cR^2 - \frac{16}{3}cvR + \frac{4}{5}cv^2$; centrique gravitatis inde distantiam $\frac{240R^3 - 80vR^2 + 12v^2R}{30RP - 5P}$.



F. Fig. 177, 181. Eadem etiam sic habentur. Sumptis Subtensis A B $= c$, (adeoque & curvis A b $= 2c$) arithmetice proportionalibus; adeoque (per § C.) divisa A τ curva in partes æquales; erit singulorum b punctorum à T A distantiæ A V ($= v$) $= \frac{c^2}{2R}$; (hoc est, ut series secundanorum, seu ordinatim-applicatæ in semiparabolæ complemento;) eorumque à $\tau\alpha$ distantiæ V$\alpha = 2R - \frac{c^2}{2R}$. Adeoque si intelligatur A b τ curva fig. 177. in rectam expandi, vel huic æqualem rectam sumi A b τ, vel $\alpha\beta$P, fig. 181; Ejusque b punctis, æqualiter ab invicem distantibus, insistentes rectæ b p ipsis A V respectivis æquales, figuram A P τ complentes: Exhibebunt hæ rectæ singulorum b punctorum, seu particularum minutarum, momenta respectu ipsius T A fig. 177. (sicut & residuæ pβ, earundem momenta respectu $\tau\alpha$; nam propter b p $=$ A V, erit p$\beta =$ Vα:) Et propterea, tum planum A τ P, totius A τ curvæ; tum planum A b p, curvæ A b, momentum respectu T A: Et similiter planum A P α, curvæ A τ; & A p $\beta\alpha$, curvæ A b, momentum exhibebit, respectu $\tau\alpha$; & A p V, ejusdem A b momentum respectu b V. Est autem, (propter ordinatas b p $= \frac{c^2}{2R}$, in duplicata ratione diametrorum A b $= 2c$,) Trilineum A P τ semiparabolæ complementum; ipsumque A P α, Parabola: Adeoque (propter A $\tau = 4R$, & τP $= 2R$,) A P $\tau = \frac{8}{3}R^2$; & A P $\alpha = \frac{16}{3}R^2$; (per prop. 6. hujus:) Quæ itaque sunt curvæ A τ momenta respectu T A & $\tau\alpha$. Similiter; propter A b $= 2c$, & b p $= \frac{c^2}{2R}$; erit curvæ A b momentum respectu T A, $\frac{c^3}{3R}$; & respectu b V, $\frac{2c^3}{3R}$; & A p $\beta\alpha$ ($=$ A b $\beta\alpha$ — A p b) $= 4cR - \frac{c^3}{3R}$ ejusdem, respectu $\tau\alpha$, momentum. Hoc est, (propter $c^2 = 2vR$) $\frac{2}{3}cv$, & $\frac{4}{3}cv$, & $4cR - \frac{2}{3}cv$. Ut prius. Quæ quidem momenta, eadem sunt atque correspondentes Ungulæ; ut sæpius dictum est.

Cumque quæ has superficiales Ungulas constituunt rectæ, sunt ipsarum ab aciebus suis distantiis æquales; adeoque momenta, ut ipsarum quadrata: Erit superficialis Ungulæ A τ aciem habentis TA, momentum respectu TA, omnia rectarum b p quadrata, hoc est omnia $\frac{c^4}{4R^2}$ usque ad eorum maximum, hoc est quadratum

τP

$\tau P = \frac{16 R^4}{4 R^2} = 4 R^2$; adeoque ad maximum toties sumptum, ut 1 ad 5: hoc Fig. 177, 181.
est (propter $A\tau = 4R$,) $\frac{1}{5} \times 4R \times 4R^2 = \frac{16}{5} R^3$ per prop. 1. hujus.

Et similiter, Superficialis Ungulæ A b, aciem item habentis T A, (fig. 177.) respectu ejusdem T A momentum; erunt omnia $\frac{c^4}{4R^2}$ usque ad eorum maximum, puta $\frac{C^4}{4R^2}$; adeoque (propter $Ab = 2C$,) momentum illud erit $\frac{1}{5} \times 2C \times \frac{C^4}{4R^2} = \frac{C^5}{10 R^2}$; vel (restituendo c minusculam) $\frac{c^5}{10 R^2}$; hoc est, propter $c^2 = 2vR$, adeoque $c^4 = 4v^2R^2$,) $\frac{2}{5} c v^2$.

Similiter, Superficialis Ungulæ A b, aciem habentis b V, fig. 177. momentum respectu ejusdem b V; erunt omnia quadrata rectarum, ipsi A V parallelarum, semiparabolam A p V complentium; hoc est, quadrata rectarum $\frac{C^2}{2R} - \frac{c^2}{2R}$; hoc est, omnia $\frac{C^4 - 2c^2C^2 + c^4}{4R^2}$; hoc est, per prop. 1. hujus, (propter $Ab = 2C$, & quadratum b p, $= \frac{C^4}{4R^2}$,) $\frac{2C^5 - \frac{4}{3}C^5 + \frac{2}{5}C^5}{4R^2} = \frac{\frac{16}{15}C^5}{4R^2}$; vel (restituto valore c minusculæ) $\frac{4c^5}{15R^2}$; hoc est, (propter $c^4 = 4v^2R^2$,) $\frac{16cv^2}{15}$; ut prius.

Item; Superficialis Ungulæ A b aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, sunt omnia quadrata $p\beta$ eo spectantia; hoc est, quadrata rectarum $p\beta$, parabolæ portionem $A p \beta \alpha$ complentium; hoc est, omnium $b\beta - bp$; hoc est, omnia $2R - \frac{c^2}{2R}$, seu $\frac{4R^2 - c^2}{2R}$; hoc est omnia $\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{4R^2}$; hoc est, per prop. 1. hujus (propter $Ab = \alpha\beta = 2C$,) $\frac{32CR^4 - \frac{16}{3}C^3R^2 + \frac{2}{5}C^5}{4R^2}$; hoc est, (propter $c^2 = 2vR$, & $c^4 = 4v^2R^2$; item, restituta c minuscula;) $8cR^2 - \frac{8}{3}cvR + \frac{2}{5}cv^2$: Ut prius.

Atque hinc, centrorum gravitatis à T A, b V, $\tau\alpha$, distantiæ; reliquaque deducentur; eadem quæ prius.

Porro; si intelligatur curva $A\tau$ fig. 177, in minutas partes æquales (ut prius) G.
dividi; Erit singulorum b punctorum, seu partium minutarum, ab $A\alpha$, distantia Fig. 177,
$bV = bB + BV = c + s$: Sumptis $AB = c$, (adeoque & $Ab = 2c$) arithmetice 182, 183.
proportionalibus.

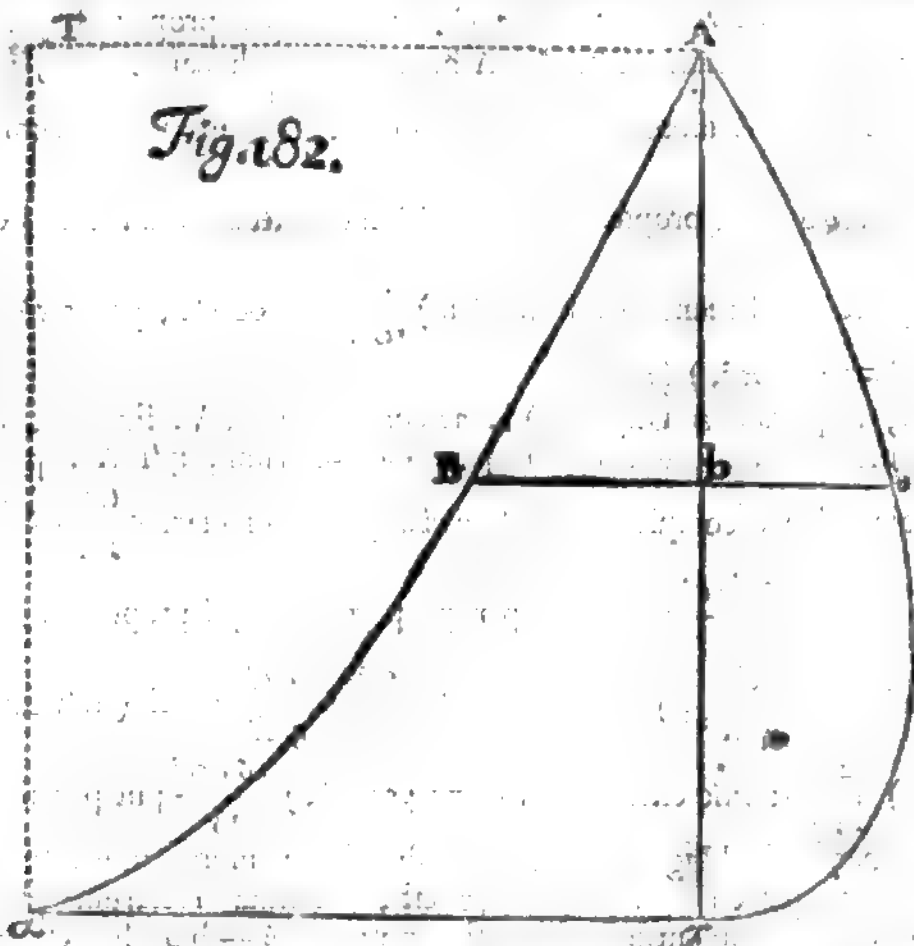
Adeoque; si intelligatur curva $A\tau$ fig. 177. in rectam $A\tau$ fig. 182. expandi; cui ordinatim-applicentur, (in singulis b punctis,) ex una parte, rectæ b B (trilineum $A\tau\alpha$ fig. 182. complentes) ipsis b B fig. 177. æquales; &, ex altera parte, rectæ, $b\nu$ (complentes bilineum $A\tau\nu$) æquales ipsis B V fig. 177. singulæ Rectæ $B b \nu$ fig. 182. singulorum b punctorum, seu minutarum partium, momenta respectu rectæ $A\alpha$ fig. 177. exhibebunt; adeoque & omnes omnium; sive quæ totam $A\tau$, sive quæ ipsius partem A b spectant. Hoc est, Tota $A\alpha\tau\nu$, totius $A\tau$ curvæ; ejusque pars $A B b \nu$, partis A b; momentum respectu rectæ $A\alpha$ fig. 177. exhibebunt; vel correspondentem Ungulam Semiquadrantalem.

Sunt utique rectæ B b, trilineum $A\alpha\tau$ fig. 182. complentes; hoc est, rectæ B b 177. ut arcus chordarum in semicirculo, vel sinuum rectorum in Quadrante, arithmetice proportionalium; hoc est, ut rectæ γo fig. 170, complentes trilineum $\alpha\kappa\Gamma$; (quod est, figuræ sinuum rectorum unius quadrantis $\alpha\kappa\delta$, complementum ad parallelogrammum.)

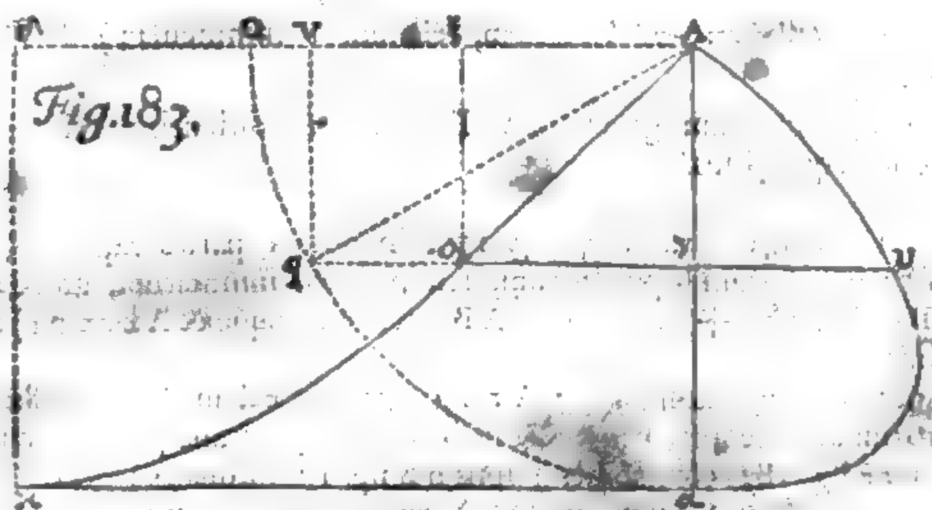
Quippe sumptis $\alpha\gamma$; seu ξo, sinibus rectis arithmetice proportionalibus; erunt, quæ his respondent, γo, seu $\alpha\xi$, eorundem arcubus æquales: quorum duplis, æquantur, chordarum in semicirculo respondentium arcus; seu rectæ B b, fig. 182. Puta, rectis γo complentibus $A\kappa\alpha$ trilineum fig. 183. ipsi $\alpha\kappa\Gamma$ fig. 170. simile. Neque aliter differt trilineum $A\tau\alpha$ fig. 182. ab $A\alpha\kappa$ fig. 183. quam quod (retentis

 eisdem

Fig. 177, 182, 183. eisdem latitudinibus $bB = \gamma o$) altitudinem duplam habeat, nempe $A\tau = 2A\alpha$. Adeoque cum trilineo $\alpha\kappa\Gamma$, fig. 170. comparatum, latitudinem habet duplam



($bB = 2\gamma o$) altitudinem quadruplam, $A\tau = 4\alpha\Gamma$. Cum itaque Latitudo Dupla sit, & Altitudo Quadrupla; Figura figuræ est Octupla: Nempe $A\tau\alpha$ fig. 182. $= 8\alpha\Gamma\kappa$ fig. 170. Et $ABb = 8\alpha o\gamma$; similiter divisis $A\tau$ in b, & $\alpha\Gamma$ in γ.



Est autem $\alpha\delta\kappa\Gamma = \frac{1}{4}RP$ (propter $\alpha\delta = \frac{1}{4}P$, & $\alpha\Gamma = R$;) & $\alpha\kappa\delta = R^2$, (per § Q. prop. 17.) ergo $\alpha\kappa\Gamma = \frac{1}{4}RP - R^2$. Adeoque $A\alpha\tau$ (fig. 182.) $= 2RP - 8R^2$.

Similiter, (in partibus,) $\alpha\xi o\gamma = as$, (positis $\alpha\xi = a$; & $\xi o = s$;) & $\alpha o\xi = vR$ (per § Q. prop. 17.) ergo $\alpha o\gamma = as - vR$. Adeoque ABb (fig. 182.) $= 8as - 8vR$, Hoc est, Octuplum facti ex s semisubtensa, seu sinu semiarcus, in ejusdem sinus arcum, seu semiarcum subtensæ; minus, Octuplo sinus versi ejusdem semiarcus, in Radium ducti. Hoc est (fig. 179.) $8AN \times AM - 8MN \times NC$: Hoc est, $2ANB \times AMB - 8MN \times NC$: Hoc est (propter $MN = CN - \frac{1}{2}\alpha B$) $2ANB \times AMB - 8NC \times NC + 4\alpha B \times NC$: Hoc est (positis $ANB = a$, $AMB = c$, $\alpha B = \chi$, & $NC = R$,) $2ac - 8R^2 + 4\chi R$.

Deinde; rectæ $b\upsilon$ fig. 182. (Bilineum $A\tau\upsilon$ complentes,) hoc est BV fig. 177. (sumptis $AB = c$, adeoque & $Ab = 2c$, arithmetice proportionalibus,) sunt sinus recti Arcuum quorum subtensæ sunt arithmetice proportionales. Est autem (propter similia Triangula fig. 177.) ut $A\alpha = 2R$ ad $AB = c$; sic $\alpha B = \sqrt{:4R^2 - c^2:}$

$= \chi$,

$=\chi$, ad BV $= s = \frac{c\sqrt{:4R^2-c^2}}{2R} = \frac{c\chi}{2R}$. Adeoque Omnes $b\upsilon$ complentes vel totam $A\tau\upsilon$, vel ipsius partem $Ab\upsilon$, sunt Omnia $\frac{c\sqrt{:4R^2-c^2}}{2R}$ vel $\frac{c\chi}{2R}$, eo spectantia; sumptis c arithmetice proportionalibus. Quarum aggregatum sic colligitur. Fig. 177, 182, 183.

Si intelligatur $A\alpha Q$ (fig. 183.) Circuli quadrans; qui Radium habeat $A\alpha = 2R$ æqualem circuli genitoris Diametro; in quo sumantur $A\gamma = c$ arithmetice proportionales; rectæque γq, ipsi AQ parallelæ. Erit ubique $\gamma q = \sqrt{:4R^2-c^2:} = \chi$. (Nam quadratum qA, hoc est $A\alpha$, dempto quadrato $A\gamma$, æquatur quadrato γq.) Adeoque Omnes γq, sive quæ totam $A\alpha Q$ quadrantem, sive quæ ipsius partem $A\gamma qQ$ complent, sunt Omnes $\sqrt{:4R^2-c^2:}$ (seu omnes χ) eo spectantes. Cumque harum ab AQ distantiæ sint $A\gamma = c$ respective: Erunt Omnia $c\sqrt{:4R^2-c^2:}$ (seu Omnia $c\chi$,) idem atque illius $A\alpha Q$ quadrantis, ejusve $A\gamma qQ$ segmenti, momentum respectu AQ rectæ.

Quadrantis autem $A\alpha Q$, si poneretur radius $= R$, momentum respectu AQ, esset $\frac{1}{3}R^3$ (per § Q. prop. 15.) ergo, posito radio $A\alpha = 2R$, erit $\frac{8}{3}R^3$: Quod itaque est aggregatum omnium $c\sqrt{:4R^2-c^2:}$ eo spectantium. Adeoque $\frac{4}{3}R^2 = Omn.\ \frac{c\sqrt{:4R^2-c^2:}}{2R}$ ipsum $A\alpha\upsilon$ Bilineum fig. 183. (sumptis ubique, ut $A\alpha$ ad $A\gamma$, sic γq ad $\gamma\upsilon$.) Ejusque duplum (propter duplam altitudinem) $\frac{8}{3}R^2$, est Bilineum $A\tau\upsilon$ fig. 182. Quod ab $A\alpha\upsilon$ fig. 183. non aliter differt, quam quod (retentis eisdem latitudinibus respectivis $b\upsilon = \gamma\upsilon$) altitudinem duplam habeat, $A\tau = 2A\alpha$.

Item, Sectoris qAQ, momentum respectu AQ, posito Radio $= R$, esset (per § Q. prop. 15.) $\frac{1}{3}vR^2$; hoc est, Triens facti ex arcus sinu verso in quadratum Radii; hoc est, in præsenti casu, ex $QV = AQ - \gamma q = 2R - \sqrt{:4R^2-c^2:} = 2R - \chi$, in quadratum $A\alpha$, $= 4R^2$: Hoc est, $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}R^2\sqrt{:4R^2-c^2:} = \frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}\chi R^2$. Cui si addatur Momentum (respectu ejusdem AQ) Trianguli $Aq\gamma$; hoc est (propter $\gamma q = \sqrt{:4R^2-c^2:} = \chi$, & $A\gamma = c$; centrique gravitatis ab AQ distantiam $\frac{1}{3}c$;) $\frac{1}{6}c^2\sqrt{:4R^2-c^2:} = \frac{1}{6}c^2\chi$. Habetur totius $A\gamma qQ$ momentum respectu AQ, $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}R^2\sqrt{:4R^2-c^2:} + \frac{1}{6}c^2\sqrt{:4R^2-c^2:}$ vel $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}\chi R^2 + \frac{1}{6}\chi c^2$: Hoc est (propter $4R^2 - c^2 = \chi^2$,) $\frac{8}{3}R^3 - \frac{1}{6}\chi^3$. Quod itaque itaque est Omnium $c\sqrt{:4R^2-c^2:}$ eo spectantium aggregatum: Adeoque $\frac{4}{3}R^2 - \frac{\chi^3}{6R} = Omn.\ \frac{c\sqrt{:4R^2-c^2:}}{2R}$ est ipsum $A\gamma\upsilon$ fig. 183. Ejusque duplum $\frac{8}{3}R^2 - \frac{\chi^3}{3R}$, (propter duplam altitudinem) est ipsum $Ab\upsilon$ fig. 182.

Est itaque (propter $A\alpha\tau = 2RP - 8R^2$, & $A\tau\upsilon = \frac{8}{3}R^2$,) totum $A\alpha\tau\upsilon$ fig. 182. $= 2RP - \frac{16}{3}R^2$. Quod itaque est curvæ Semicycloidis $A\tau$ fig. 177. momentum respectu rectæ $A\alpha$; vel Semiquadrantalis Ungula eidem insistens aciem habens $A\alpha$. (Adeoque superficies curva ejusdem circa $A\alpha$ conversione descripta, $2P^2 - \frac{16}{3}RP$; &, semiconversione, $P^2 - \frac{8}{3}RP$.) Illudque curvæ $A\tau$ momentum, per magnitudinem $(4R)$ divisum; exhibet ejusdem $A\tau$ curvæ distantiam centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}P - \frac{4}{3}R$: Adeoque à $T\tau$, $\frac{4}{3}R$, tantundem scilicet quantum à $\tau\alpha$ (§ D.) atque tantundem est ejusdem respectu utriusvis Momentum, nempe $\frac{16}{3}R^2$; & æquales utrobique superficies conversione exhibitæ, $\frac{16}{3}RP$; & semiconversione $\frac{8}{3}RP$.

Item (propter $AbB = 2ac - 8R^2 + 4\chi R$; & $Ab\upsilon = \frac{8}{3}R^2 - \frac{\chi^3}{3R}$,) totum $ABb\upsilon$ fig. 182. $= 2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{\chi^3}{3R}$; vel (propter $\chi^2 = 2bR$; cum sint αA, αB, αV; hoc est, $2R$, χ, b, continue proportionales;) $2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{2}{3}b\chi = 2ac - \frac{16}{3}R^2 + \frac{8}{3}\chi R + \frac{2}{3}v\chi$. Quod itaque, est ipsius Ab curvæ momentum respectu $A\alpha$; vel Semiquadrantalis Ungula eidem insistens, aciem habens

Fig. 177, 182, 183. bens A α. (Adeoque superficies curva ejusdem circa A α conversione facta, $\frac{2ac\mathcal{P}}{R} - \frac{16}{3}R\mathcal{P} + (\frac{8}{3}\chi\mathcal{P} + \frac{2v\chi\mathcal{P}}{3\mathcal{P}} =) \frac{8}{3}\chi\mathcal{P} - \frac{2b\chi\mathcal{P}}{3R}$: Et, semiconversione facta, hujus semissis) Illudque momentum, per magnitudinem ($2c$) divisum; exhibet, ejusdem A b curvæ, distantiam centri gravitatis ab A α, $a - \frac{8R^2}{3c} + \frac{2\chi R}{c} - \frac{b\chi}{3c} = a - \frac{8R^2 + b\chi - 6\chi R}{3c}$.

H. Deinde; (Divisa ut prius A τ, curva fig. 177, 180. in minutas partes æquales:) Cum quæ singulis b punctis (seu minutis particulis) insistunt, semiquadrantalem ungulam, cujus acies T A, complentes, sint (per § F.) $\frac{c^2}{2R}$; sintque illarum ab A α distantiæ (per § G.) $a+s$; erunt singularum momenta $\frac{a+s}{2R}c^2 = \frac{f}{2R}c^2$, (sumptis c arithmetice proportionalibus.) Adeoque momentum simul omnium, (sive quæ totam A τ, sive quæ partem A b spectant,) est Aggregatum omnium $\frac{fc^2}{2R}$ eo spectantium; hoc est, *Omnia* $\frac{ac^2}{2R} + \frac{sc^2}{2R}$.

Fig. 170, 182, 183. Sunt autem *Omnes* a (sumptis c arithmetice proportionalibus) æquales respectivis rectis b B fig. 182. vel γo fig. 183. (ut § G. ostensum est) harumque ab A δ distantiæ sunt ipsæ A $\gamma = c$ respectivæ; adeoque quæ illis insistunt plana Ungulam Semiquadrantalem complentia (aciem habentem A δ) sunt *Omn.* ac: Horumque planorum ab A δ distantiæ sunt itidem A $\gamma = c$: Ergo eorum omnium momenta sunt *Omn.* ac^2.

Sunt itaque *Omnia* ac^2 eo spectantia, idem atque Momentum Ungulæ Semiquadrantalis A $\kappa\alpha$, vel A $o\gamma$, (aciem habentis A δ,) respectu ipsius A δ. Hoc est, *Sexdecuplum* momenti similis Ungulæ $\alpha\kappa\Gamma$, vel $\alpha o\gamma$, fig. 170. (aciem habentis $\alpha\delta$,) respectu ipsius $\alpha\delta$. Nempe in ratione *Quadruplicata* laterum homologorum, A α ad $\alpha\Gamma$, (quæ dupla est;) propter tum singulas trium solidi dimensionum, tum distantiam ab axe conversionis; Duplas in A $\kappa\alpha$, earum quæ in $\alpha\kappa\Gamma$.

Est autem Momentum Ungulæ $\alpha\kappa\Gamma$ fig. 170. respectu aciei suæ $\alpha\delta$, idem atque Momentum Ungulæ $\alpha\delta\kappa\Gamma$, dempto momento Ungulæ $\alpha\kappa\delta$ respectu communis aciei $\alpha\delta$. Hoc est, $\frac{1}{12}R^3\mathcal{P}$ (propter $\alpha\Gamma = R$, & $\alpha\delta = \frac{1}{4}\mathcal{P}$,) dempto $\frac{2}{9}R^4$ (per § N. prop. 19.) Hoc est, $\frac{1}{12}R^3\mathcal{P} - \frac{2}{9}R^4$. Adeoque Momentum similis Ungulæ A $\kappa\alpha$ fig. 183. respectu aciei A δ, (utpote illius Sedecuplum) $\frac{4}{3}R^3\mathcal{P} - \frac{32}{9}R^4$. Quod itaque est aggregatum omnium ac^2 totam A α fig. 183. spectantium. Adeoque [illegible] $\mathcal{P} - \frac{16}{9}R^3$, aggregatum *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, eo spectantium. Et (propter A τ fig 182. $= 2$ A α. fig. 183.) ejusdem duplum $\frac{4}{3}R^2\mathcal{P} - \frac{32}{9}R^3$ est aggregatum *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, spectantium A τ rectam fig. 182. curvamve A τ fig. 177.

Item Momentum Ungulæ $\alpha o\gamma$ fig. 170. respectu aciei suæ $\alpha\xi$, idem est atque Momentum Ungulæ $\alpha\xi o\gamma$, dempto momento Ungulæ $\alpha o\xi$, respectu communis aciei $\alpha\xi$. Hoc est, $\frac{1}{3}as^3$ (positis $\alpha\xi = a$, & $\alpha\gamma = \xi o = s$,) dempto $\frac{2}{9}v^3R^2 + \frac{2}{9}s^2vR$ (per § N. prop 19.) Hoc est, $\frac{1}{3}as^3 - \frac{2}{9}v^3R^2 - \frac{2}{9}s^2vR$; sumptis s, pro semisubtensa, seu sinu dimidii arcus; & a, v, pro illo arcu dimidio ejusque sinu verso; hoc est, $a = $ A N, $s = $ A M, $v = $ M N, fig. 179. Adeoque Momentum similis Ungulæ A $o\gamma$ fig. 183. (utpote illius sexdecuplum,) $\frac{16}{3}as^3 - \frac{16}{9}v^3R^2 - \frac{16}{9}s^2vR$ (sumptis a, s, v, eodem sensu;) Hoc est (sumptis $a = $ A N B, $c = 2s = $ A M B, $v = $ M N $=$ C N $-$ C M $=$ C N $- \frac{1}{2}\alpha$B $= R - \frac{1}{2}\chi$, adeoque & $v^2 = R^2 - \chi R + \frac{1}{4}\chi^2 = R^2 - \chi R + R^2 - \frac{1}{4}c^2 = 2R^2 - \chi R - \frac{1}{4}c^2$;) $\frac{2}{3}ac^3 - \frac{32}{9}R^4 + \frac{16}{9}\chi R^3 + \frac{4}{9}c^2R^2 - \frac{4}{9}c^2R^2 + \frac{2}{9}c^2\chi R, = \frac{2}{3}ac^3 - \frac{32}{9}R^4 + \frac{16}{9}\chi R^3 + \frac{2}{9}c^2\chi R$.

Quod itaque est aggregatum *Omnium* ac^2 rectam A γ spectantium. Adeoque $\frac{ac^2}{6R} -$

$\frac{16}{9}R^3$

$\frac{16}{9}R^3+\frac{8}{9}\chi R^2+\frac{1}{9}c^2\chi$, aggregatum *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, eo spectantium. Et (propter A τ fig. 182. figuræ altitudinem, duplam altitudinis A α fig. 183.) ejusdem duplum, nempe $\frac{ac^3}{3R}-\frac{32}{9}R^3+\frac{16}{9}\chi R^2+\frac{2}{9}c^2\chi$, est aggregatum *Omnium* $\frac{ac^2}{2R}$, rectam A b fig. 182, curvamque A b fig. 177. spectantium. Fig. 177, 180, 182. 183.

Insuper *Omnes s* (sumptis *c* arithmetice proportionalibus,) sunt idem atque omnes b υ fig. 182. seu duplum *Omnium s* $=$ γ υ fig. 183. (ut § G. ostensum est.) Sed Omn. *s* ($=$ *Omn.* γ υ) sunt Omn. $\frac{c\sqrt{:4R^2-c^2}}{2R}$: seu Omn. $\frac{c\chi}{2R}$. Adeoque Omn. *s c*, (seu ipsius A α υ, vel A γ υ, momentum respectu A Q, vel correspondens Ungula) sunt Omn. $\frac{c^2\sqrt{:4R^2-c^2}}{2R}$: (Idem atque Ungulæ A Q q α vel A Q q γ, aciem habentis A Q, momentum respectu A Q, per 2 *R* divisum:) Et Omn. sc^2; (hoc est, momentum Ungulæ A α υ, vel A γ υ, fig. 183. aciem habentis A Q, respectu ejusdem A Q,) sunt Omn. $\frac{c^3\sqrt{:4R^2-c^2}}{2R}$: seu Omn. $\frac{c^3\chi}{2R}$. Et propterea, Omn. $\frac{sc^2}{2R}$, sunt Omn. $\frac{c^3\sqrt{:4R^2-c^2}}{4R^2}$: seu Omn. $\frac{c^3\chi}{4R^2}$.

Sunt autem Omnes $\sqrt{:4R^2-c^2}$: seu Omnes χ; (sumptis *c* arithmetice proportionalibus,) sigillatim æquales rectis γ q, complentibus quadrantem A α Q fig. 183. (per § G.) Quibus æquales intelligantur rectæ γ q quadrantem A α Q fig. 184. similiter complentes. Cui adjacere intelligatur Semiparaboloeidis Cubicalis complementum A P α, quadrato A α P D inscriptum; verticem habens A. Cujus itaque Paraboloeidcos Latus rectum erit $4R^2$ (quod utique in diametrum A D $=2R$, ductum, efficiat $8R^3$ Cubum ordinatim in Paraboloeide applicatæ D P $=2R$;) per quod itaque $4R^2$, si dividatur rectæ D P $=$ A α $=2R$, cubus $8R^3$; habebitur Diameter in Paraboloeide, vel Ordinatim in Complemento applicata, A D $=$ α P $=\frac{8R^3}{4R^2}=2R$: Et similiter, si per idem $4R^2$, dividatur, rectæ p d $=$ A γ $=c$, Cubus c^3; habebitur diameter in Paraboloeide, vel ordinatim applicata, in complemento, A d $=$ γ p $=\frac{c^3}{4R^2}$; & sic ubique. (Sunt utique Ordinatim-applicatæ in Semiparaboloeidis hujus complemento, in diametrorum interceptarum complementi ratione triplicata, seu ut earum Cubi.) Fig. 183, 184.

Cum itaque quæ quadrantem A α Q fig. 184. complent rectæ γ q, sint ipsæ, $\chi=\sqrt{:4R^2-c^2}$: quæque Semiparaboloeideos Cubicalis complementum A α P, complent rectæ γ p, sint ipsæ $\frac{c^3}{4R^2}$; quæ ex his fiunt rectangula sunt ipsa $\frac{c^3\sqrt{:4R^2-c^2}}{4R^2}$: seu $\frac{c^3\chi}{4R^2}$.

Si

Fig. 177, 184. Si itaque intelligatur ex hujusmodi rectangulis compleri Solidum, ipsi AαQ quadranti incumbens, altitudinem habens, in singulis γq rectis, æqualem respectivis rectis γp; Solidum hoc integrum AαQ, ejusve segmentum Aγq; erit aggregatum omnium $\frac{c^3\sqrt{:4R^2-c^2:}}{4R^2}$ quæ vel totam Aα, vel ipsius partem Aγ, spectant. Vel etiam (quod eodem recidet) si intelligatur AαP complementi Semiparaboloeidis planum, super circuli plano, in Aα, ad angulos rectos erectum, moveri (invariato angulo) ab Aα ad Qτ, motu suo describens solidum Prismaticum seu columnare, circuli plano incumbens, duobus Trilineis ipsi AαP similibus & æqualibus interjectum; quod secet Cylindri recti superficies arcui Qqα insistens, solidum inde abscindens AQqα: Solidum sic abscissum, complebunt istiusmodi rectangula. Quippe γp recta, sic mota, super γq rectam describet qγp rectangulum. Et sic ubique.

Idemque Solidum, alia adhuc complebunt plana, rectis κq, (ipsi Aα parallelis, & æqualiter ab invicem dissitis,) insistentia; ipsis Aχp respectivis similia & æqualia. Quippe, dum AαP, motu jam dicto latum, ad κq pervenit; ejusdem pars Aχp, eidem κq, insistens, plano solidi sic descripti, eidem κq insistenti, congruit. Et sic ubique. Adeoque, Omnia Aχp plana, totidem κq rectis insistentia totum AQqα solidum complent.

Sumptis autem in AQ $(=2R,)$ rectis Aκ $(=c)$ arithmetice proportionalibus; quæ his respondent κq, sunt totidem $\sqrt{:4R^2-c^2:}$ hoc est, totidem χ. Ductisque qχp (ipsi QA parallelis,) rectæ in complemento Paraboloeidis eisdem κq, seu Aχ, respondentes χp, sunt totidem $\frac{\chi^3}{4R^2}$; (sunt utique in Paraboloeidis cubicalis complemento, Ordinatim-applicatæ, in triplicata ratione diametrorum: puta, χp recta, ad rectam αP, ut cubus Aχ ad cubum Aα; & sic ubique.) Adeoque Aχpd. rectangulum, (utpote factum ex $A\chi = \kappa q = \chi$, in $\chi p = \frac{\chi^3}{4R^2}$,) est $\frac{\chi^4}{4R^2}$; hoc est (propter $\chi = \sqrt{:4R^2-c^2:}$) $\frac{16R^4-8c^2R^2+c^4}{4R^2}$. Adeoque Aχp paraboloeidis Cubicalis complementum (utpote ad circumscriptum parallelogrammum ut 1 ad 4, per prop. 6. hujus;) est $\frac{\chi^4}{16R^2} = \frac{16R^4-8c^2R^2+c^4}{16R^2}$. Et sic ubique. Adeoque omnia Aχp Trilinea, hoc est, Omnia κq plana, solidum complentia, sunt Omnia $\frac{16R^4-8c^2R^2+c^4}{16R^4}$ eo spectantia; sive totum AQqα solidum spectemus, sive ipsius portionem aliquam ut AVqα.

Sunt autem (per prop. 1. hujus) si totum AQqα spectemus, (propter $AQ=2R$,) *Omn.* $c^2, = \frac{8}{3}R^3$; & *Omn.* $c^4, = \frac{32}{5}R^5$. Adeoque *Omn.* $16R^4 - 8c^2R^2 + c^4 := 32R^5 - \frac{64}{3}R^5 + \frac{32}{5}R^5 = \frac{256}{15}R^5$, & *Omn.* $\frac{16R^4-8c^2R^2+c^4}{16R^2} := \frac{16}{15}R^3$. Hoc est, Omnia $\frac{c^3\sqrt{:4R^2-c^2:}}{4R^2}$ seu Omnia $\frac{5c^2}{2R}$, rectam Aα fig. 184. vel planum Aκυ fig. 183. spectantia. Adeoque (propter Aτ fig. 182. $=2$ Aα fig. 183.) hujus duplum, $\frac{32}{15}R^3$, erit Aggregatum Omnium $\frac{5c^2}{2R}$ spectantium planum Aτυ, vel rectam Aτ fig. 182. vel curvam Aτ fig. 177.

Si vero solidi portionem AVqα spectemus; ut sit rectarum $A\kappa = c$, maxima $AV = \gamma q = x$; erunt (per eandem prop. 1. hujus) *Omn.* $c^2, = \frac{1}{3}x^3$; & *Omn.* $c^4, = \frac{1}{5}x^5$: Adeoque *Omn.* $16R^4 - 8c^2R^2 + c^4 := 16xR^4 - \frac{8}{3}x^3R^2 + \frac{1}{5}x^5$, & *Omn.* $\frac{16R^4-8c^2R^2+c^4}{16R^2} := xR^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{x^5}{80R^2}$.

Hoc autem AVqα solidum, ex solido $AQq\alpha = \frac{16}{15}R^3$ (modo reperto) subductum; relinquit solidum VqQ, $= \frac{16}{15}R^3 - xR^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{x^5}{80R^2}$.

Huic vero VqQ solido; si addatur solidum AVqγ; hoc est (propter planum

num $Vq = A\gamma p = \frac{C^4}{16R^2}$, & $AV = x$,) $\frac{xC^4}{16R^2}$ (posito $A\gamma = C$:) Habetur Fig. 177, 184.
solidum $A\gamma qQ = \frac{16}{15}R^3 - xR^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{xC^4}{16R^2} - \frac{x^5}{80R^2}$: Hoc est, (propter $x^2 = 4R^2 - C^2$, adeoque $x^4 = 16R^4 - 8C^2R^2 + C^4$;) $\frac{16}{15}R^3 - xR^2 + \frac{2}{3}xR^2 - \frac{1}{6}xC^2 + \frac{xC^4}{16R^2} - \frac{1}{5}xR^2 + \frac{1}{10}xC^2 - \frac{xC^4}{80R^2} = \frac{16}{15}R^3 - \frac{8}{15}xR^2 - \frac{1}{15}xC^2 + \frac{xC^4}{20R^2}$: Vel (restituto valore minuscularum, $A\gamma = c$, & $AV = \gamma q = \chi = \sqrt{:4R^2 - c^2:}$) $\frac{16}{15}R^3 - \frac{8}{15}\chi R^2 - \frac{1}{15}c^2\chi + \frac{c^4\chi}{20R^2}$. Quod itaque est aggregatum Omnium $\frac{c^3\sqrt{:4R^2 - c^2:}}{4R^2}$ seu Omnium $\frac{sc^2}{2R}$, rectam $A\gamma$ fig. 184. vel planum $A\gamma\nu$ fig. 183. spectantium. Adeoque (propter $A\tau$ fig. 182. $= 2A\alpha$ fig. 183. & consequenter $Ab = 2A\gamma$;) hujus duplum, $\frac{32}{15}R^3 - \frac{16}{15}\chi R^2 - \frac{2}{15}c^2\chi + \frac{c^4\chi}{10R^2}$ aggregatum Omnium $\frac{sc^2}{2R}$, spectantium planum $Ab\nu$, vel rectam Ab fig. 182. vel curvam Ab fig. 177. vel (propter $c^2 = 4R^2 - \chi^2$,) $\frac{32}{15}R^3 - \frac{2}{3}\chi^3 + \frac{\chi^5}{10R^2}$.

Cum itaque sint, quæ totam $A\tau$ spectant, *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}, = \frac{4}{3}R^2P - \frac{32}{9}R^3$, Fig. 177.
(ut modo ostensum erat;) & *Omn.* $\frac{sc^2}{2R}, = \frac{32}{15}R^3$, (ut jam ostensum est:) Erunt *Omn.* $\frac{a+s}{2R}c^2 := \frac{4}{3}R^2P - \frac{64}{45}R^3$. Quod itaque (per modo demonstrata) est semiquadrantalis Ungulæ superficialis, toti $A\tau$ fig. 177. insistentis, aciem habentis AT, momentum respectu $A\alpha$; Aut etiam (propter Altitudinum & Distantiarum reciprocationem,) aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu TA.

Hoc itaque Momentum, per Ungulæ $A\tau$, aciem habentis TA, magnitudinem $\frac{8}{3}R^2$ (§ D, F. ostensam,) divisum; exhibet ejusdem Centri gravitatis ab $A\alpha$ distantiam, $\frac{1}{2}P - \frac{8}{15}R$. (Eademque erit inde distantia centri gravitatis correspondentis superficiei conversione vel semiconversione circa TA factæ; eadem utique quæ superficialis Ungulæ: Momentorum vero ratio, eadem quæ magnitudinum; nempe ad illud Ungulæ, ut P vel $\frac{1}{2}P$ ad R. Et sic alibi; nempe quoties axis libræ est, ad axem conversionis ad angulos rectos: Ut sæpius insinuatum est:) Adeoque ejusdem à $T\tau$ distantia, est $\frac{8}{15}R$; Ejusque propterea, respectu $T\tau$, momentum, $\frac{64}{45}R^3$.

Quod itidem est Ungulæ $A\tau$, aciem habentis $T\tau$, momentum respectu TA. Hoc itaque per magnitudinem (§ G. traditam) $\frac{16}{3}R^2$, divisum; exhibet hujus, à TA, distantiam centri gravitatis $\frac{4}{15}R$: Adeoque à $\tau\alpha$, $\frac{26}{15}R$; ipsiusque respectu $\tau\alpha$ momentum, $\frac{416}{45}R^3$. Atque hoc itidem est Ungulæ $A\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$ momentum, respectu $T\tau$. Quod itaque per hujus magnitudinem $\frac{16}{3}R^2$, divisum; exhibet centri gravitatis à $T\tau$ distantiam, item $\frac{26}{15}R$: Adeoque ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}P - \frac{26}{15}R$; ejusque respectu $A\alpha$ momentum $\frac{8}{3}R^2P - \frac{416}{45}R^3$.

Idemque (quod modo dictum est) momentum $\frac{4}{3}R^2P - \frac{64}{45}R^3$, per Ungulæ $A\tau$ aciem habentis $A\alpha$, magnitudinem, $2RP - \frac{16}{3}R^2$, (§ G. ostensum,) divisum; exhibet ejusdem distantiam centri gravitatis à TA, $\frac{30P - 32R}{45P - 120R}R$: Adeoque à $\tau\alpha$, $\frac{60P - 208R}{45P - 120R}R$. Et propterea ejusdem respectu $\tau\alpha$ Momentum $\frac{8}{3}R^2P - \frac{416}{45}R^3$.

Sed & hoc ipsum (propter Altitudinum & Distantiarum reciprocationem) est etiam Ungulæ $A\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$. Per hujus ita-

Fig. 177. que magnitudinem $\frac{16}{3}R^2$ (§ D, F. inventam) divisum; exhibet hujus distantiam centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}P - \frac{26}{15}R$. Ut modo dictum est.

Similiter; Cum quæ portionem A b spectant, sint *Omn.* $\frac{ac^2}{2R} := \frac{ac^3}{3R} - \frac{32}{9}R^3 + \frac{16}{9}\chi R^2 + \frac{2}{9}c^2\chi$; & *Omn.* $\frac{sc^2}{2R} := \frac{32}{15}R^3 - \frac{16}{15}\chi R^2 - \frac{2}{15}c^2\chi + \frac{c^4\chi}{10R^2}$; (ut modo ostensum est:) Erunt *Omn.* $\frac{a+s}{2R}c^2 := \frac{ac^3}{3R} - \frac{64}{45}R^3 + \frac{32}{45}\chi R^2 + \frac{4}{45}c^2\chi + \frac{c^4\chi}{10R^2} = \frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{90R}$. Quod itaque est Momentum Ungulæ A b, aciem habentis T A, respectu A α; vel etiam (ob altitudinum & distantiarum reciprocationem) aciem habentis A α, Momentum respectu T A.

Hoc itaque Momentum; per Ungulæ A b, aciem habentis T A, magnitudinem $\frac{2}{3}cv$ (§ D, F. inventam) divisum; exhibet ejusdem ab A α distantiam centri gravitatis $\frac{ac^2}{2vR} - \frac{32R^3}{15cv} + \frac{16\chi R^2}{15cv} + \frac{2c\chi}{15v} + \frac{3c^3\chi}{20vR^2}$; vel (propter $2vR = c^2$,) $a - \frac{32R^3}{15cv} + \frac{16\chi R^2}{15cv} + \frac{2c\chi}{15v} + \frac{3c\chi}{10R}$: Hoc est, $\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{60cvR^2 = 30c^3R}$.

Idemque Momentum, per Ungulæ A b, aciem habentis A α, magnitudinem, $2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{2}{3}b\chi = 2ac - \frac{16}{3}R^2 + \frac{8}{3}\chi R + \frac{2}{3}v\chi$ (§ G. inventam) divisum; exhibet hujus distantiam centri gravitatis à T A,

$$\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + (60v\chi R^2 =)\ 30c^2\chi R}.$$

Adeoque à $\tau\alpha$, $\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R}$. Et à b V (subducendo ex A V $= v$ ejusdem à T A distantiam,)

$$\frac{180acvR^2 - 480vR^4 + 240v\chi R^3 + 30c^2v\chi R - 30ac^3R + 128R^5 - 64\chi R^4 - 8c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R},$$

vel (propter $2vR = c^2$,) $\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R}$.

Et consequenter, ejusdem momentum respectu $\tau\alpha$, (magnitudine in distantiam ducta) erit $\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{90R^2}$. Quod etiam (propter altitudinum & distantiarum reciprocationem) est momentum Ungulæ A b aciem habentis $\tau\alpha$, respectu A α: Adeoque (momentum illud per hujus magnitudinem dividendo; hoc est, per $4cR - \frac{2}{3}cv$, ut § D, F. ostenditur,) hujus distantia centri gravitatis ab A α, est

$$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{360cR^3 - (60cvR^2 =)\ 30c^3R}.$$

Similiter, ejusdem Ungulæ A b aciem habentis A α, momentum respectu b V, (magnitudine in distantiam ducta) erit

$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{90R^2}$. Quod itaque (propter altitudinum & distantiarum reciprocationem) est etiam Momentum Ungulæ A b aciem habentis b V, respectu A α. Adeoque (per magnitudinem $\frac{2}{3}cv$, § D, F. inventam, dividendo;) erit hujus distantia centri gravitatis ab A α,

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{120cvR^2 = 60c^3R}.$$

Supereſt

Supereſt tandem, ut ſuperficialis Ungulæ $A\tau$ vel A b, aciem habentis $A\alpha$, momentum reſpectu $A\alpha$ inveſtigemus. I. Fig. 177, 182, 183, 170.

Diviſa itaque, ut prius, $A\tau$ in minutas partes æquales: Adeoque ſumptis A b $=2c$ fig. 177, 182. arithmetice proportionalibus: Erit cujuſque b puncti, ſeu partis minutæ, ab $A\alpha$ diſtantia, b B V fig. 177. hoc eſt $Bb\nu$ fig. 182. Adeoque omnes rectæ punctis b inſiſtentes, Ungulam complentes, ſunt totidem $Bb\nu$ rectæ, trilineum $A\alpha\tau\nu$ fig. 182. complentes; hoc eſt, bis Omnes $o\gamma\nu$ fig. 183. hoc eſt, totidem $a+s$, ſubtenſis c arithmetice proportionalibus reſpondentes. Quæ itidem in $a+s$ diſtantiam ductæ, exhibent earum reſpectu $A\alpha$ momenta, totidem $a^2+2as+s^2$.

Sunt autem, Omnia a^2; ſeu omnia quadrata γo fig. 183. *Duplum* Semiquadrantalis Ungulæ, ſeu momenti trilinei $A\kappa\alpha$, ſeu $Ao\gamma$, (prout vel totum vel pars conſideratur,) reſpectu $A\alpha$ fig. 183. Hoc eſt (propter figuras ſimiles $A\kappa\alpha$ fig. 183. & $\alpha\kappa\Gamma$ fig. 170.) *Sexdecuplum* momenti trilinei $\alpha\kappa\Gamma$ vel $\alpha o\gamma$, fig. 170. reſpectu rectæ $\alpha\Gamma$, (nempe in triplicata ratione laterum Homologorum, $A\alpha=2R$, ad $\alpha\Gamma=R$.)

Eſt autem, Momentum Trilinei $\alpha o\gamma$, fig. 170. hoc eſt, $\alpha\xi o\gamma-\xi o\alpha$, (reſpectu $\alpha\Gamma$,) $\frac{1}{2}a^2s$, minus, $-eR^2+avR$; (per § O. prop. 19.) ſeu $\frac{1}{2}a^2s+eR^2-avR$, hoc eſt $\frac{1}{2}a^2s+aR^2-sR^2-avR$, (poſito $a=\alpha\xi$ fig. 170. pro arcu AN fig. 179. ſemiſſe arcus A B; adeoque $s=AM$, & $v=MN=CN-\frac{1}{2}\alpha B=R-\frac{1}{2}\chi$:) Adeoque Momentum trilinei $Ao\gamma$ fig. 183. (utpote iſtius Octuplum,) $4a^2s+8aR^2-8sR^2-8avR$, (ſumptis a, s, v, eodem ſenſu:) Hoc eſt, (poſito $a=AB,=2AN$; & $c=2s$; & $R-\frac{1}{2}\chi=v$;) $\frac{1}{2}a^2c+4aR^2-4cR^2-4aR^2+2a\chi R=\frac{1}{2}a^2c-4cR^2+2a\chi R$: Adeoque Omnia a^2 eo ſpectantia (utpote momenti duplum) $a^2c-8cR^2+4a\chi R$; hoc eſt Omnia quadrata γo fig. 183. Adeoque (propter $A\tau$ fig. 182. $=2A\alpha$ fig. 183.) Omnia quadrata B b fig. 182. ſeu *Omnia* a^2, (eo ſpectantia) $=2a^2c-16cR^2+8a\chi R$. Et propterea, ſi totam $A\tau$ ſpectemus; (propter $a=\frac{1}{2}\mathcal{P}$, $c=2R$, & $\chi=0$,) erit $R\mathcal{P}^2-32R^3=$ *Omn.* a^2.

Item, omnia s^2, hoc eſt, omnia quadrata $b\nu$ fig. 182. ſeu, his Omnia quadrata $\gamma\nu$ fig. 183. Idem ſunt (propter $\gamma\nu=b\nu=\frac{c\sqrt{:4R^2-c^2:}}{2R}$) atque totidem $\frac{4c^2R^2-c^4}{4R^2}$. Sunt autem (ſumptis c arithmetice proportionalibus, uſque ad maximam $C=AB$,) *Omn.* $c^2:=\frac{1}{3}C^3$; & *Omn.* $c^4:=\frac{1}{5}C^5$ (per prop. 1. hujus.) Ergo *Omn.* $\frac{4c^2R^2-c^4}{4R^2}:=$ *Omn.* $c^2-\frac{c^4}{4R^2}:=\frac{1}{3}C^3-\frac{C^5}{20R^2}$: Nempe Omnia quadrata $\gamma\nu$, ſeu Omn. s^2: fig. 183. Ergo (propter $A\tau=2A\alpha$,) Omnia quadrata $b\nu$ fig. 182. *Omn.* $s^2=\frac{2}{3}C^3-\frac{C^5}{10R^2}$. Et propterea, ſi totam $A\tau$ ſpectemus, propter $C=2R$,) *Omn.* $s^2:=\frac{16}{3}R^3-\frac{16}{5}R^3=\frac{32}{15}R^3$.

Item, (propter $s=\frac{c\sqrt{:4R^2-c^2}}{2R}$,) Omnia as, ſunt totidem $\frac{ac\sqrt{:4R^2-c^2:}}{2R}$: Adeoque (propter $o\gamma=a$, & $q\gamma=\sqrt{:4R^2-c^2}$: & $A\gamma=c$:) *Omnia* as; hoc eſt, Omnia Rectangula $o\gamma\nu$ fig. 183. ſunt Momentum, reſpectu $A\delta$, omnium $q\gamma o$ rectangulorum, (ſolidive ex his conflati,) per $2R$ diviſum. Hoc eſt (propter figuras ſimiles $A\kappa\alpha$ fig. 183. & $\alpha\kappa\Gamma$ ſeu $d\tau\delta$, fig. 170. item $AQq\alpha$ fig. 183. & $CDE\alpha$ fig. 169. rationemque laterum homologorum $A\alpha$ ad $\alpha\Gamma$, ut 2 ad 1;) *Sexdecuplum* Momenti (per $2R$ diviſi) ſolidi $\alpha o\gamma$ vel deg fig. 170. altitudines habentis reſpectivis $E\Sigma$ fig. 169. æquales, reſpectu rectarum $\alpha\delta$ vel dc.

Eſt autem portio ſolidi hujuſmodi $b\tau\beta$, ſeu $e\tau\iota$, fig. 170. $=\frac{1}{4}\alpha^2R-\frac{1}{4}s^2R$, per § K. prop. 18. (poſito $\tau\iota=\alpha$;) Hoc eſt (poſito eg ſeu $\iota\delta=\xi$, adeoque $\alpha=\frac{1}{2}\mathcal{P}-\xi$;) $\frac{1}{16}\mathcal{P}^2R-\frac{1}{4}\xi\mathcal{P}R+\frac{1}{4}\xi^2R-\frac{1}{4}s^2R$: Adeoque $d\tau\delta$ (propter $\xi=0$, & $s=R$,) $=\frac{1}{16}\mathcal{P}^2R-\frac{1}{4}R^3$. Et propterea $de\iota\delta$ ($d\tau\delta-e\tau\iota$) $=\frac{1}{4}\xi\mathcal{P}R-\frac{1}{4}\xi^2R+$

 $\frac{1}{4}s^2R-$

Fig. 177, 182, 183, 170. $\frac{1}{4}s^2R - \frac{1}{4}R^3$. Unde si subducatur portio $e\iota\delta g$; hoc est, factum ex $eg = \xi$, in $E\Sigma\alpha$ (fig. 169.) hoc est, (per § F. prop. 15.) in $\frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sb$ (posito $\alpha = \tau\iota = \alpha E$ arcui, & $b = \alpha\Sigma = e\iota$;) hoc est (posito $\alpha = \frac{1}{4}\mathcal{P} - \xi$, & $b = R - x$;) in $\frac{1}{8}\mathcal{P}R - \frac{1}{2}\xi R - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sR - \frac{1}{2}sx$; hoc est, in $\frac{1}{8}\mathcal{P}R - \frac{1}{2}\xi R - \frac{1}{2}sx$; Nempe, $\frac{1}{8}\xi\mathcal{P}R - \frac{1}{2}\xi^2R - \frac{1}{2}\xi sx$: Relinquitur portio $deg = \frac{1}{4}\xi^2R + \frac{1}{2}\xi sx + \frac{1}{4}s^2R - \frac{1}{4}R^3$.

Et portionis solidi $b\tau\beta$ seu $e\tau\iota$, respectu $\tau\alpha$, momentum est, $\frac{1}{4}\alpha^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}bR^3 - \frac{1}{9}s^2bR$, per § Q. prop. 18. (posito $\tau\iota = \alpha$, & $\alpha\Sigma = b$;) Hoc est, (positis $\alpha = \frac{1}{4}\mathcal{P} - \xi$, & $b = R - x$,) $\frac{1}{64}\mathcal{P}^2R^2 - \frac{1}{8}\xi\mathcal{P}R^2 + \frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}R^4 + \frac{2}{9}xR^3 - \frac{1}{9}s^2R^2 + \frac{1}{9}s^2xR$; seu $\frac{1}{64}\mathcal{P}^2R^2 - \frac{1}{8}\xi\mathcal{P}R^2 + \frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{1}{4}s^2R^2 - \frac{2}{9}R^4 + \frac{2}{9}xR^3 + \frac{1}{9}s^2xR$. Adeoque momentum solidi $d\tau\delta$ (propter $\xi = 0$, & $x = 0$, & $s = R$,) $\frac{1}{64}\mathcal{P}^2R^2 - \frac{1}{4}R^4 - \frac{2}{9}R^4$, seu $\frac{1}{64}R^2\mathcal{P}^2 - \frac{17}{36}R^4$. Et propterea, Momentum portionis $de\iota\delta$ (respectu ejusdem $\tau\alpha$) est $\frac{1}{8}\xi\mathcal{P}R^2 - \frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{1}{4}R^4 + \frac{1}{4}s^2R^2 - \frac{2}{9}xR^3 - \frac{1}{9}s^2xR$. Unde si auferatur momentum portionis $e\iota\delta g$; hoc est, factum ex $eg = \xi$, in momentum segmenti semicirculi $E\Sigma\alpha$ (fig. 169.) respectu ipsius $\tau\alpha$; hoc est (per § L. prop. 15.) in $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}sbR - \frac{1}{3}s^3$ (posito $\tau\iota = \alpha$, & $\alpha\Sigma = b$;) hoc est, (posito $\alpha = \frac{1}{4}\mathcal{P} - \xi$, & $b = R - x$,) in $\frac{1}{8}\mathcal{P}R^2 - \frac{1}{2}\xi R^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{2}sxR - \frac{1}{3}s^3$, seu, in $\frac{1}{8}\mathcal{P}R^2 - \frac{1}{2}\xi R^2 - \frac{1}{2}sxR - \frac{1}{3}s^3$; Nempe $\frac{1}{8}\xi R^2\mathcal{P} - \frac{1}{2}\xi^2R^2 - \frac{1}{2}\xi sxR - \frac{1}{3}\xi s^3$: Relinquitur portionis deg, Momentum (respectu ejusdem $\tau\alpha$) $\frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{1}{4}R^4 + \frac{1}{4}s^2R^2 - \frac{2}{9}xR^3 - \frac{1}{9}s^2xR + \frac{1}{2}\xi sxR + \frac{1}{3}\xi s^3$.

Fig. 170. Hoc itaque, per magnitudinem, (modo inventam,) divisum; exhibet ipsius deg (portionis solidi) distantiam centri gravitatis à $\tau\alpha$,

$$\frac{9\xi^2R^2 - 9R^4 + 9s^2R^2 - 8xR^3 - 4s^2xR + 18\xi sxR + 12\xi s^3}{9\xi^2R + 18\xi sx + 9s^2R - 9R^3} = R - \frac{8xR^3 + 4s^2xR - 12\xi s^3}{9\xi^2R + 18\xi sx + 9s^2R - 9R^3}.$$

Adeoque à cd, $\frac{8xR^3 + 4s^2xR - 12\xi s^3}{9\xi^2R + 18\xi sx + 9s^2R - 9R^3}$. Quod in magnitudinem ductum, exhibet solidi deg momentum respectu cd, $\frac{2}{9}xR^3 + \frac{1}{9}s^2xR - \frac{1}{3}\xi s^3$ (positis, $\xi = DE$ fig. 169. $= eg = \omicron\gamma = \alpha\xi$ fig. 170. & $x = C\Sigma = \xi\omicron = \alpha\gamma$; & $s = E\Sigma$;) Vel (substituto σ pro s, qui sit sinus arcus $B\alpha$ fig. 169. $= \xi\delta$ fig. 170.) momentum similis solidi $\alpha\omicron\gamma$ respectu $\alpha\delta$, $\frac{2}{9}xR^3 + \frac{1}{9}\sigma^2xR - \frac{1}{3}\xi\sigma^3$.

Fig. 182, 183. Et consequenter; similis solidi $A\omicron\gamma$ fig. 183. (ex ductu rectarum $\omicron\gamma$ in γq respective) momentum respectu $A\delta$, (utpote prioris sexdecuplum, propter tum singulas dimensiones, tum distantiam, ut 2 ad 1,) $\frac{32}{9}xR^3 + \frac{16}{9}\sigma^2xR - \frac{16}{3}\xi\sigma^3$: Hoc est (posito $a = 2\xi$, propter arcum semicirculi duplum respectivi arcus in quadrante; & $c = 2x$, propter chordam arcus a, duplam sinus recti dimidii arcus; & $\chi = 2\sigma$, propter subtensam complementi arcus a ad semicirculum, duplum sinus complementi dimidii arcus ad quadrantem;) $\frac{16}{9}cR^3 + \frac{2}{9}\chi^2cR - \frac{1}{3}a\chi^3$: Hoc itaque per $2R$ divisum; hoc est, $\frac{8}{9}cR^2 + \frac{1}{9}c\chi^2 - \frac{a\chi^3}{6R}$; exhibet (ut jam ostensum est) aggregatum omnium as, seu rectangulorum $\omicron\gamma\nu$ fig. 183. adeoque (propter $A\tau = 2A\alpha$) hujus duplum, est aggregatum omnium as, seu rectangulorum $Bb\nu$ fig. 182. Et propterea hujus duplum, seu illius quadruplum, $\frac{32}{9}cR^2 + \frac{4}{9}c\chi^2 - \frac{2a\chi^3}{3R} = Omn.\ 2as$: fig. 182. Adeoque, si totam $A\tau$ spectemus (propter $c = 2R$, & $\chi = 0$) erunt (quæ eo spectant) $Omn.\ 2as$: $= \frac{64}{9}R^3$.

Fig. 177. Ergo (propter $Omn.\ a^2 := 2a^2c - 16cR^2 + 8a\chi R$; & $Omn.\ s^2 := \frac{2}{3}c^3 - \frac{c^5}{10R^2}$; & $Omn.\ 2as := \frac{32}{9}cR^2 + \frac{4}{9}c\chi^2 - \frac{2a\chi^3}{3R}$; ut jam ostensum est:) $Omn.\ a^2 + 2as + s^2 := 2a^2c + \frac{2}{3}c^3 - \frac{112}{9}cR^2 + \frac{4}{9}c\chi^2 + 8a\chi R$
$- 2a\chi^3$

$-\frac{2a\chi^3}{3R}-\frac{c^5}{10R^2}$. Quod itaque est Momentum Ungulæ A b fig. 177. aciem habentis Aα, respectu Aα: Hujusque Duplum (ut sæpius dictum) Superficiei semiconversione factæ momentum respectu axis conversionis Aα. Adeoque, si totam Aτ spectemus, (propter $a=\frac{1}{2}\mathcal{P}$, & $c=2R$, & $\chi=0$,) erunt *Omn.* $a^2+s^2+2as:=\mathcal{P}^2R+\frac{16}{3}R^3-\frac{224}{9}R^3-\frac{16}{5}R^3=\mathcal{P}^2R-\frac{1024}{45}R^3$. Quod itaque est Ungulæ Aτ, aciem habentis Aα, momentum respectu Aα: Hujusque Duplum, est correspondentis superficiei semiconversione circa Aα descriptæ momentum respectu ejusdem Aα. Fig. 177.

Momento itaque per magnitudinem (§ G. inventam,) diviso; habetur Ungulæ A b, aciem habentis Aα, distantia centri gravitatis ab ipsa Aα,

$$\frac{180a^2cR^2+60c^3R^2-1120cR^4+40c\chi^2R^2+720a\chi R^3-60a\chi^3R-9c^5}{180acR^2-480R^4+240\chi R^3+(60v\chi R^2=)\,30c^2\chi R};$$

& superficiei semiconversione circa Aα factæ, distantia centri gravitatis à conversionis axe Aα, erit ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}\mathcal{P}$, seu $4R$ ad $\mathcal{P}$; ut alibi: Nempe quoties idem est Axis Conversionis & Axis Libræ.

Totiusque Aτ Ungulæ, aciem eandem Aα habentis, distantia ab Aα, similiter habebitur, $\frac{45\mathcal{P}^2-1024R^2}{90\mathcal{P}-240R}$; (& superficiei semiconversione factæ, ad hanc Ungulæ, ut $4R$ ad $\mathcal{P}$;) Ungulæque propterea distantia centri gravitatis à Tτ, $\frac{1}{2}\mathcal{P}-\frac{45\mathcal{P}^2-1024R^2}{90\mathcal{P}-240R}=\frac{1024R^2-120R\mathcal{P}}{90\mathcal{P}-240R}=\frac{512R-60\mathcal{P}}{45\mathcal{P}-120R}R$. Et propterea, ejusdem respectu Tτ momentum $\frac{1024R^3-120R^2\mathcal{P}}{45}=\frac{1024}{45}R^3-\frac{8}{3}R^2\mathcal{P}$. Quod itidem est (propter altitudinum & distantiarum reciprocationem) Momentum Ungulæ Aτ, aciem habentis Tτ, respectu Aα. Adeoque, per hujus magnitudinem $\frac{16}{3}R^2$ (per § G.) divisum; exhibet hujus, ab Aα, distantiam centri gravitatis, $\frac{64}{15}R-\frac{1}{2}\mathcal{P}$: &, ab acie sua Tτ, $\mathcal{P}-\frac{64}{15}R$: & propterea momentum respectu aciei suæ Tτ, $\frac{16}{3}R^2\mathcal{P}-\frac{1024}{45}R^3$.

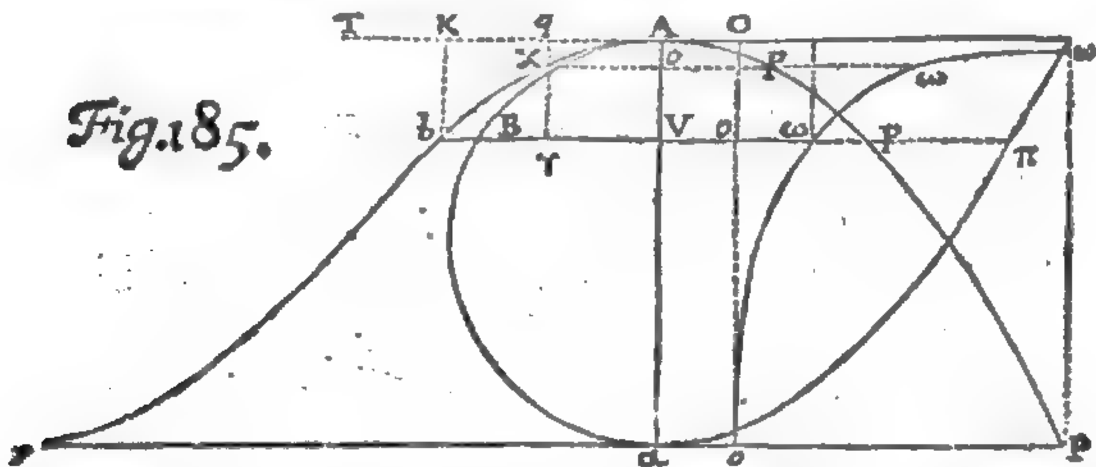
His ita peractis; ea quæ jam exhibuimus (§ G, H, I.) divisa Aτ curva in partes æquales; adeoque sumptis subtensis $AB=c$, arithmetice proportionalibus; non erit inutile, aliquatenus prosequi secundum alteram methodum (qua § B, C, D, E, usi sumus,) divisa Aα in partes æquales; adeoque sumptis sinibus versis $AV=v$ arithmetice proportionalibus. K. Fig. 177.

Si itaque intelligatur recta Aα fig. 177. in exiguas partes æquales numero infinitas dividi; quarum una intelligatur $VO=B$: Quæ his respondent bg tangentes, seu (quod in partibus infinite exiguis pro eodem reputabitur) bx curvæ, sunt ut totidem $V\omega=B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, seu $\frac{B\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}$, (per § B, C.) Harumque ab Aα distantiæ, sunt $bV=a+s$, (sinibus versis arithmetice proportionalibus respondentes,) ipsam Aτα semicycloidem complentes, (vel etiam, tum figuram Arcuum Aτα fig. 170, 185. tum semicirculum ABα fig. 169, 185. complentes; quippe illam complent *omnes a*; semicirculum, *omnes s.*) Adeoque particularum curvæ Aτ fig. 177. momenta respectu Aα; sunt ut totidem rectangula bVω fig. 177. hoc est totidem $\frac{a+s}{\sqrt{v}}B\sqrt{2R}$; seu totidem bVω + BVω fig. 185. hoc est, totidem $\frac{aB\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}+\frac{sB\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}$; vel (omissa B, quæ nonnisi infinitesimam partem ipsius Aα significat, seu rectarum crassitiem planum complentium,) totidem $\frac{a}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}+\frac{s}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$.

Et quidem, Aggregatum *omnium* $\frac{s}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$ facile habetur: Cum enim sit $s^2=vb$, adeoque $s=\sqrt{vb}$, erit $\frac{s}{\sqrt{v}}=\sqrt{b}$; & *Omnes* $\frac{s}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$, idem atque

Fig. 177. *Omnes* $\sqrt{2bR}$, hoc est ipsæ π V, fig. 179. Adeoque *Omn.* $s\sqrt{\frac{2R}{v}}$ curvam A b fig. 177. spectantes æquantur ipsi portioni parabolæ A Π π V fig. 179. hoc est, $\frac{8}{3}R^2 - \frac{4}{3}b\sqrt{2bR}$, per prop. 6. hujus. Quod (propter $2bR = \chi^2$, & $b = \frac{\chi^2}{2R}$,) tantundem est atque $\frac{8}{3}R^2 - \frac{\chi^3}{3R}$, in § G. repertum; seu *Omnes*, s, (vel *Omn.* $\frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2}}{2R}$,) sumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus. Nempe Π A V π fig. 179. = A b υ fig. 182. (similiter divisis A τ, A τ, fig. 177, 182. in punctis b ;) Hoc est, *Omn.* s, sumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus; idem atque *Omn.* $s\sqrt{\frac{2R}{v}}$, sumptis A V $= v$ arithmetice proportionalibus. Utrumvis enim est ipsius A b momentum, quantum ad distantias B V.

At, *Omnia* $\frac{a}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$, seu *Omn.* $a\sqrt{\frac{2R}{v}}$, sumptis v arithmetice proportionalibus; puta solidum A b V ω fig. 185. (ex rectangulis b V ω conflatum) per B, hoc est α O, vel V O, divisum; tantundem est atque planum A b B fig. 182. seu *Omn.* a, sumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus: (Utrumvis utique est momentum A b fig. 177. quantum ad distantias b B.) Adeoque cum horum aggregatum deprehensum est (§ G.) $= 2ac - 8R^2 + 4\chi R$; tantundem erit & Aggregatum *Omn.* $a\sqrt{\frac{2R}{v}}$ sumptis A b $= v$, arithmetice proportionalibus. Quod quum ibidem deprehensum sit, non opus erit ut hic solicite investigemus. Atque hinc reliqua deducentur, ut ad § G.



Sed & idem solidum A b V ω fig. 185. (quod complent omnia b V ω rectangula, seu Omnia $aB\sqrt{\frac{2R}{v}}$, sumptis v arithmetice proportionalibus ;) complent etiam alia plana rectis x r (æqualiter ab invicem distantibus) trilineum A b V complentibus insistentia, hoc est, totidem rectis, q r — q x. Sunt autem quæ singulis bK, seu q r insistunt plana solidum complentia, respectivis A V ω ω æqualia ; (ut ex constructione figuræ patet, si intelligatur A α O ω planum, super plano A τ α ad angulos rectos erectum, motu suo versus τ, solidum describere.) Adeoque omnia q r plana ; tantundem sunt atque, b V $= a$, in planum A V ω ω ; hoc est, in duplum rectanguli A V ω ; hoc est (per § B, C.) in $2v \times B\sqrt{\frac{2R}{v}} = 2B\sqrt{2vR}$; hoc est $2AV \times B\sqrt{\frac{2R}{V}}$ (posito A K $= A$, & A V $= V$;) seu $2A \times B\sqrt{2VR}$; seu b V p rectangulum, in altitudinem $2B$ ductum ; vel Duplum rectanguli bVp, in B ductum. Et, eadem ratione, Omnia x q plana ; sunt totidem A o ω planis æqualia ; hoc est, totidem $2v \times B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, seu $2B\sqrt{2vR}$, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) usque ad maximum $V =$ b K. Adeoque $2AB\sqrt{2VR}$, demptis

demptis *Omn.* $2 B \sqrt{2 v R}$, sumptis a arithmetice proportionalibus; idem est atque *Omn.* $a B \sqrt{\frac{2 R}{v}}$; sumptis v arithmetice proportionalibus. (Nempe idem solidum A b V.) Et (dividendo per B,) $2 A \sqrt{2 V R} -$ *Omn.* $2 \sqrt{2 v R}$: sumptis a arithmetice proportionalibus; idem atque *Omn.* $a \sqrt{\frac{2 R}{v}}$, sumptis v arithmetice proportionalibus; seu *Omn.* a, sumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus; hoc est, Trilineum A b B fig. 182. Fig. 177, 185.

Potestque idem (si opus est) solidum considerari tanquam ex planis ipsi A b V parallelis conflatum. Et sic alibi.

Similiter; Divisa, ut prius, A α in minutas partes æquales; cum quæ his respondent particularum b x momenta respectu A α, fig. 177. seu Ungulæ (aciem habentis A α) particulæ, sint (ut dictum est) ut totidem $\frac{a+s}{\sqrt{v}} \sqrt{2 R}$, seu $a \sqrt{\frac{2 R}{v}} + s \sqrt{\frac{2 R}{v}}$; sintque ipsarum à T A distantiæ, A V $= v$ respectivæ; erit omnium respectu T A momentum, totidem $a \sqrt{2 v R} + s \sqrt{2 v R}$; sumptis a arithmetice proportionalibus. L.

Et quidem aggregatum *Omn.* $s \sqrt{2 v R}$, (hoc est, omnium rectangulorum B V p fig. 185.) facile habetur. Cum enim sint *Omn.* $s \sqrt{\frac{2 R}{v}}$, idem atque totidem π V fig. 179. erunt *Omn.* $s \sqrt{2 v R}$, hoc est *Omn.* $v s \sqrt{\frac{2 R}{v}}$; vel etiam (propter $s = \sqrt{v b}$,) *Omn.* $v \sqrt{2 b R}$; idem atque earundem π V momenta respectu Π A rectæ. Est autem (per prop. 6. hujus,) semiparabolæ α Π A distantia centri gravitatis ab $\alpha \tau$, $\frac{3}{5} \alpha$ A $= \frac{6}{5} R$; adeoque ab A T, $\frac{4}{5} R$; & (propter magnitudinem $\frac{8}{3} R^2$) momentum ejus respectu A T, $\frac{32}{15} R^3$. Et semiparabolæ $\alpha \pi$ V, distantia centri gravitatis ab $\alpha \tau$, $\frac{3}{5} \alpha$ V $= \frac{3}{5} b$; adeoque ab A T, $2 R - \frac{3}{5} b$; & (propter magnitudinem $\frac{2}{3} b \sqrt{2 b R}$,) momentum respectu A T, $\frac{4}{3} b R \sqrt{2 b R} - \frac{2}{5} b^2 \sqrt{2 b R}$. Ergo (subductione facta) Momentum portionis Π A V π respectu T A, est $\frac{32}{15} R^3 - \frac{4}{3} b R \sqrt{2 b R} + \frac{2}{5} b^2 \sqrt{2 b R}$. Hoc est (propter $2 b R = \chi^2$, & $\sqrt{2 b R} = \chi$, & $b = \frac{\chi}{2 R}$,) $\frac{32}{15} R^3 - \frac{2}{3} \chi^3 + \frac{\chi^5}{10 R^2}$. Tantundem scilicet atque *Omn.* $\frac{s c^2}{2 R}$, sumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus; ut § H. ostensum est. Fig. 179.

Suntque *Omn.* $a \sqrt{2 v R}$, sumptis v arithmetice proportionalibus; (hoc est, omnia rectangula b V p fig. 185.) idem atque *Omn.* $\frac{a c^2}{2 R}$, sumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus. (Utrumvis utique est Ungulæ A b fig. 177. quantum ad altitudines b B, momentum respectu T A; ungulæve A b aciem habentis T A momentum quantum ad distantias b B.) Quod § H. deprehendimus $\frac{a c^3}{3 R} - \frac{32}{15} R^3 + \frac{16}{5} \chi R^2 + \frac{2}{5} c^2 \chi$. Atque hinc reliqua deducentur ut ad § H. Fig. 177, 185.

Sed & idem solidum A b V p fig. 185. (quod complent omnia b V p rectangula, seu omnia $a \sqrt{2 v R}$, sumptis v arithmetice proportionalibus;) complent etiam alia plana rectis x r insistentia; hoc est (ut ex constructione patebit, si intelligatur A α P semiparabola, ad angulos rectos erecta, & super A $\alpha \tau$ plano mota, solidum describere,) totidem semiparabolæ A V p, demptis omnibus A o p, quarum altitudines A o $=$ q x sint sinus versi arcuum arithmetice proportionalium: Hoc est (posito A K $=$ b V $= A$, & A V $= V$,) $\frac{2}{5} A \sqrt{2 V^3 R}$ demptis *omnibus* $\frac{2}{5} a \sqrt{2 v^3 R}$, sumptis a arithmetice proportionalibus. Quod itaque tantundem etiam valet atque *Omn.* $\frac{a c^2}{2 R}$, sumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus.

Potestque idem solidum (si opus est) considerari tanquam ex planis ipsi A b V parallelis conflatum: Ut ante monitum est.

Similiter;

M. Similiter; cum, divisa ut prius $A\alpha$ in minutas partes æquales, sint, quæ his
Fig. 177, 185. respondent, curvæ $A\tau$ particulæ bx, ut totidem $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ut ostensum est; erit Ungulæ aciem habentis $A\alpha$ momentum respectu $A\alpha$, ut Omnia $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, in respectiva quadrata bV, hoc est, in respectiva $a^2 + 2as + s^2$, sumptis v arithmetice proportionalibus. Hoc est (omisso B, ut prius,) *Omn.* $a^2\sqrt{\frac{2R}{v}} + 2as\sqrt{\frac{2R}{v}} + s^2\sqrt{\frac{2R}{v}}$; sumptis v arithmetice proportionalibus.

Et quidem Aggregatum *Omnium* $s^2\sqrt{\frac{2R}{v}}$, hoc est (propter $s^2 = vb$,) *Omn.* $s\sqrt{2bR}$; vel *Omn.* $vb\sqrt{\frac{2R}{v}}$, seu *Omn.* $b\sqrt{2vR}$; facile habetur. Est utique Semiparabolæ ApV fig. 178. Momentum respectu $P\alpha$ seu $\tau\alpha$. Hoc est (propter distantiam centri gravitatis à TA, $\frac{3}{5}AV = \frac{3}{5}v$; adeoque à $\tau\alpha$, $2R - \frac{3}{5}v$; & magnitudinem $\frac{2}{3}v\sqrt{2vR}$; per prop. 6. hujus;) $\frac{4}{3}vR\sqrt{2vR} - \frac{2}{5}v^2\sqrt{2vR}$. Hoc est (propter $2vR = c^2$, & $\sqrt{2vR} = c$, & $v = \frac{c^2}{2R}$,) $\frac{2}{3}c^3 - \frac{c^5}{10R^2}$. Tantundem scilicet atque Omn. s^2, sumptis $Ab = 2c$ arithmetice proportionalibus; quod § I. repertum est.

Suntque *Omn.* $as\sqrt{\frac{2R}{v}}$; hoc est (propter $s = \sqrt{vb}$;) *Omn.* $a\sqrt{2bR}$, idem atque solidum ex ductu rectarum bV fig. 185. (figuram Arcuum complentium) in respectivas πV fig. 179, 185. Adeoque *Omn.* $2as\sqrt{\frac{2R}{v}}$; est istiusmodi solidi Duplum. Estque tantundem atque *Omn.* $2as$, sumptis $Ab = 2c$ arithmetice proportionalibus. Quod § I. repertum est.

Potestque idem (si opus est) solidum considerari tanquam ex planis quæ rectis xr insistant conflatum: Aut etiam ex planis ipsi AbV parallelis; ut in præcedentibus monitum est, atque alibi etiam intelligendum erit.

Et *Omn.* $a^2\sqrt{\frac{2R}{v}}$, (sumptis v arithmetice proportionalibus,) tantundem est atque *Omn.* a^2, sumptis $Ab = 2c$ arithmetice proportionalibus; quod § I. itidem repertum est. (Est autem, idem atque solidum ex ductu quadratorum rectarum bV fig. 185. in respectivas $V\omega$, per VO divisas.) Atque hinc reliqua habentur quæ § I. traduntur.

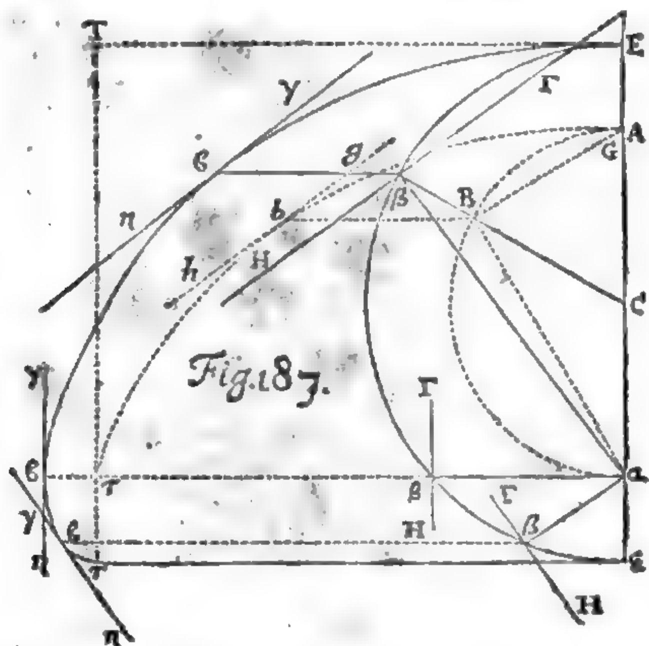
Quodque, de eodem solido aliis adhuc planis (puta quæ rectis xr insistant, vel ipsi AbV sint parallela,) conflando, in præcedentibus monitum est; etiam hic locum habet.

Exhibuimus itaque non modo rectas Cycloidem (Primariam intellige) tangentes; sed & ipsius Curvæ Semicycloidis, ejusque partium longitudinem, (exhibendo scilicet curvis illis æquales rectas,) ejusque in data ratione divisionem: Sed & curvæ semicycloidis, partiumque ipsius, centra gravitatis, (per horum scilicet à duabus saltem in eodem plano rectis, non invicem parallelis, distantiam;) earumque momenta respectu expositarum aliquot rectarum, (quæ ad alias item rectas facile transferentur:) Ungularum item Superficialium, & Superficierum conversione factarum, momentis illis respondentium, tum magnitudines, tum momenta, ipsaque Centra gravitatis; exhibitis scilicet horum distantiis à duobus saltem planis, plano Cycloidis ad angulos rectos, non invicem parallelis; dummodo etiam in quo tertio per Ungulæ aciem, seu axem conversionis plano situm sit, per § G. prop. 12. constet; eo nempe, per conversionis axem quod conversionis arcum bisecat; eoque per aciem Ungulæ, quod bisecat Ungulæ altitudinem; unde (per prop. 26. cap. præced.) ipsa gravitatis Centra determinantur. Quæque de expositis dicta sunt, ad alia transferentur; ut ad propositiones præcedentes aliquot ostensum est.

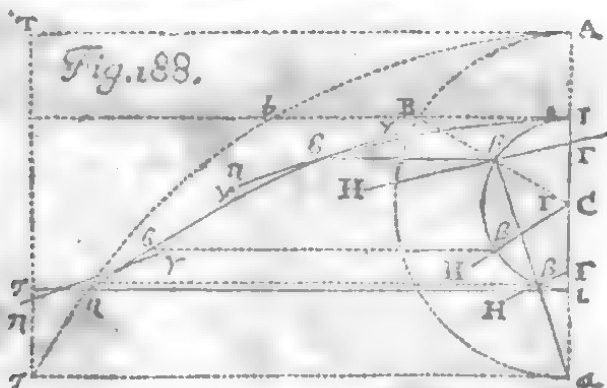
Atque de Cycloide primaria, hactenus.

Cycloides

Cycloides vero Secundarias quod attinet; *Protractam* scilicet & *Contractam*; O.
(quarum illa quidem basin habet *Majorem*, Hæc *Minorem*, quam est Peripheria Fig. 176. 187. 188.



Circuli Generantis:) Differunt quidem illæ, à Primaria, in hoc potissimum; quod recta ϛβ (curvis Semicycloidis, & Semicirculi Generantis circa Cycloidis



axem constituti, interjectæ,) sint respectivis Arcubus βI (in protracta,) seu βE (in contracta) non quidem Æquales, (ut, in primaria, b B rectæ Arcubus B A,) sed Proportionales; (Majores quidem in Protracta, Minores in Contracta, & in ea utrobique ratione, quam habet Cycloidis illius vel Semicycloidis Basis, ad Peripheriam vel Semiperipheriam Circuli generantis;) Æquales autem respectivis arcubus istius Circuli, cujus Peripheria vel Semiperipheria sit hujus Cycloidis vel Semicycloidis Basi æqualis. Puta, recta ϛβ (fig. 176.) sive quæ Protractam τϛI; sive quæ Contractam τϛE, spectat; æqualis rectæ b B, hoc est arcui B A, circuli A B α Genitoris primariæ τ b A; cujus utique Semiperipheria A B α, æquatur Semicycloidis suæ Basi τα, (adeoque & ipsis τι, τι,) seu promotioni Centri c C. Sunt enim rectæ b B, ϛβ, fig. 176. (seu b B, βα fig. 166.) mensura distantiæ centri circuli Genitoris ab axe A α, dum respectiva puncta b (in Cycloide primaria,) seu ϛ (in secundariis) motu circuli generantis designantur: (ut ex constructione patet.) Adeoque, dummodo æquales sint τα, τι, τι, seu c C in omnibus eadem; æquales item erunt b B, ϛβ, utpote æqualium eædem partes vel proportionales.

Quæ autem Cycloides secundarias (τϛI protractam, vel contractam τϛE,) in dato quovis puncto ϛ, contingunt rectæ γϛα, sic habentur: Semicirculo Genitori

Fig. 176, 187, 188. $I\beta\iota$ vel $E\beta\varepsilon$, circa axem $I\iota$, $E\varepsilon$, constituto; Concentricus fiat (circa idem C centrum) $AB\alpha$, semiperipheriam habens $AB\alpha$ æqualem expositæ Semicycloidis basi $\tau\iota$, $\tau\varepsilon$. Ductaque $\varsigma\beta$ basi parallela (circulo genitori circa axem constituto occurrens in β, & semicycloidi suæ in ς,) jungatur βC, peripheriæ $AB\alpha$ occurrens in B; (arcum BA, ipsi βI, vel βE, similem abscindens.) Atque à peripheriæ $AB\alpha$ puncto axis infimo α, ad peripheriæ genitoris punctum β, ducatur $\alpha\beta$ recta; & huic ad angulos rectos $\beta\Gamma$. Quæ huic parallela (per assignatum Semicycloidis punctum ς) recta ducitur $\gamma\varsigma\kappa$, Semicycloidem illam in ς contingit. (Excepto casu, de quo mox dicetur.)

Et quidem si intelligatur β punctum, in ipsis E, ε, I, ι; rectæ $\gamma\varsigma\kappa$ tangentes erunt ipsi cC, vel $\tau\alpha$ (Cycloidis primariæ Genitori $Ab\alpha$ correspondentis basi) parallelæ.

In Cycloide autem Contracta $E\beta\tau$, si β intelligatur in ipsa $\alpha\tau$, (ubi scilicet hæc peripheriam $E\beta\varepsilon$ secat,) quæ huic respondet tangens $\gamma\varsigma\kappa$ est axi $E\varepsilon$ parallela; si vero β sit alibi supra $\alpha\tau$, tangens $\gamma\varsigma\kappa$ (sicut & $\beta\Gamma$ recta) axi $E\varepsilon$, occurret supra E; sed infra ε, si β sit alibi infra $\alpha\tau$.

In Cycloide vero Protracta $I\varsigma\tau$, si ita sumi intelligatur, in $I\beta\iota$ peripheria, punctum β, ut $\alpha\beta$ recta peripheriam illam in β tangat; quod huic respondet punctum ς, (cum illud ipsum sit in quo Cyclois illa recurvari incipit,) tangentem nullam habet, (sed quæ ipsam Tangere deberet, illam ibidem Secat;) quæ vero supra hoc punctum sunt tangentes, exterius tangunt; quæ infra, interius: Axique $I\iota$ (continuato) occurrunt, illæ quidem supra I; hæ vero, supra ι; (saltem non infra:) Rectæque $\beta\Gamma$ correspondentes, ipsi $I\iota$ axi occurrunt; illic quidem supra C centrum; hic, infra.

Fig. 175. Ipsæ autem Cycloidum harum Curvæ, Curvis semiellipsium æquantur: Et partes partibus respective sumptis. Puta, Cycloidis Contractæ Curva $\tau E\tau$, Fig. 175. Semiellipseos curvæ æquatur, cujus Axium alter, quem quidem (sed, propter curvaturam, contractum,) repræsentat $\tau A\tau$ curva, sit $= 2A\alpha + AE$, (cujus ordinatim-applicatæ sint ipsæ bc;) alter vero $= 2AE$; quippe cujus semissis sit ipsa AE recta.

Cycloidis vero Protractæ curva $\tau I\tau$ fig. 175. æquatur Curvæ Semiellipseos, axium habentis alterum (quem, propter curvaturam, protractum repræsentat $\tau A\tau$ curva,) æqualem $2A\alpha - AI$; (cujus ordinatim-applicatæ sunt ipsæ bp;) alterum, $= 2AI$.

Et quidem tota $\tau E\tau I\tau$ figura (sumptis $AE = AI$,) alia non est quam ellipsis quædam distorta; cujus quidem, si axium alter intelligatur $\tau A\tau$, suam retinens longitudinem, semiellipsis superior, (propter curvaturam,) protrahitur; inferior, contrahitur: eique Axi ordinatim-applicatæ sunt c b p rectæ.

De his autem, quæ Cycloides Secundarias spectant, (quarum considerationem ultra non prosequimur,) videatur Appendix ad nostrum de Cycloide Tractatum, una cum Epistola eidem subjuncta (circa finem:) Ubi hæc fusius explicantur & demonstrantur.

SCHOLIUM.

IN propositionibus aliquot præcedentibus, quæ Cycloidem spectant ejusque solida, vel eo viam struunt; aliquanto fusior fui: ea præsertim de causa, quod in meo *De Cycloide* Tractatu, (Anno 1659. edito,) calculum non ad omnes casus perduxeram; Sed ad eum saltem (aliosque qui ad hunc erant necessarii) quem, ex reliquis selectum, Anonymus Problematum Propositor præ cæteris designabat tanquam difficillimum, atque ad quem nisi cæteris intellectis non perveniri posse putabatur. Contentus, in reliquis, (ob rationes ibidem traditas,) saltem fontes tradidisse unde Calculi Geometrici beneficio omnia deducenda erant.

Quanquam enim mihi in animo fuerat, dum ea quæ prodierunt sub prelo forent, reliquum etiam calculum absolvisse, & simul edidisse: Cum tamen interea temporis (eodem anno) inexpectato prodierit D. *Paschalii*, seu *Dettonvillii*, (Propositoris Problematum,) de eadem re tractatus: Potius ducebam; rem totam, prout tunc erat, edere, (calculo ad reliqua nondum absoluto,) ne viderer ex tractatu suo (quod insinuaturos nonnullos præsentiebam) mea deduxisse. Et propterea, ipsa schediasmata sic edenda placuit, prout ea jam ante cum nostratibus communicaveram;

nicaveram; quæque nominatim Honoratissimus D. Vicecomes *Brounkerus* subducto calculo examinaverat (ne forte, in multiplici calculo, quod sæpe contingit, alicubi error calculi obrepsisset,) & comprobaverat, (ne uno quidem calculi lapsu per totum illud opus deprehenso, jam tum per plures menses antequam *Dettonvilii* opus prodierit. Sed & totius Methodi summam, jam ante per annum integrum, ad D. *Carcavium* suum (prout *Dettonvilius* ipse, tum Anonymus, jusserat,) *Parisios* miseram; ubi & ea viderat *Paschalius* ipse; prout ejus ad *Wrennium* nostrum literæ, diserte indicant: Ut nullus iniquæ de meis suspicioni locus sit.

Et quanquam fieri non possit, quin, eandem rem tractantibus, nonnulla mihi cum illo fuerint communia: Methodum meam ab illius diversam esse, qui utramque comparaverit, non poterit non videre. Quanto autem mea sit quam illius expeditior, magisque directe ad scopum tendat; aliorum esto judicium, siqui fuerint qui volent tum juxta mea, tum juxta illius principia, vel calculum universum, vel illius saltem casus quem ex reliquis selegit ille, (de Centro gravitatis Semisolidi, ex Semicycloidis circa basin suam Semiconversione facti, determinando,) calculum instituere.

Et, speciatim, illam Cycloidis in Segmenta distributionem, ubi ostenditur, non modo Semicycloidem Semicirculi triplam esse, (quod pridem innotuit,) sed & illius Portiones (rectis debito modo abscissas) Portionum hujus respective triplas esse; (puta in fig. 166. $b\beta\tau = 3\,B\alpha B$, $A\alpha\beta b = 3\,A\alpha B$, $d\delta\beta b = 3\,D\alpha B$, & sic ubique;) quam ego totius processus mei originem facio; cæteraque hinc deduco: Ille ne uspiam advertit. Et quidem nescisse plane videtur, donec ex scriptis meis id resciverit. Quippe rem tanti in hoc negotio momenti, non putandus est, modo sciverit, reticuisse velle. Neque illud prius adverterunt, credo, ex Gallis ulli; quamquam jam tum per annos plus quam quadraginta in rem illam Cycloidis, intenti fuerant ex illis summi viri, quam ego tum primum (ad illud provocatus) considerandam suscepi; nescius alia jam tum ab aliis inventa fuisse, quam quod apud *Torricellium* & *Schotenium* traditum noverim, Cycloidis planum circuli triplum esse; Methodumque ibidem tradi, pro Tangentibus ducendis. Fig. 166.

Atque hinc esse judico; quod ille *Figuram Sinuum Versorum*, nusquam in auxilium advocat; sed ea longis ambagibus ex *Sinuum Rectorum* doctrina petitum it, quæ ex Sinibus Versis multo promptius fuissent depromenda.

Curvamque figuræ isti adjacentem $A\,d\,\tau$, fig. 170. (quam *Ellipsin Expansam* dicimus) non omnino considerasse videtur: Quamquam enim quæ ipsi est *Cycloidis Socia*, non alia sit quam hujus Curvæ pars dimidia, ut $d\,A$; (quod in subjunctis tractatui *de Cycloide*, pag. 557. demonstro;) illam tamen ex alia plane origine deducit, unde hæc tota non deducetur. Quam enim ille *Dimidiam*, ductu Circini in superficie Cylindri, (ea apertura quæ diametro Basis Cylindri æqualis sit,) descriptam vult: Hoc est, (quippe hoc tantundem valet) communi *Sphæræ atque Cylindri* sectione; (posito Sphæræ Centro in Cylindri superficie; ejusque Radio, hujus Basis Diametro æquali:) Nos, *Totam*, ex communi *Cylindri & Plani* sectione deducimus: (Utrique interim absumptam Cylindri superficiem in Planum expandentes.) Quod illum minime advertisse existimo.

Hinc est, quod, in propositis suis, selegit ille casum illum, ut difficillimum, qui Semisolidum circa Semicycloidis Basin spectat; (quem, nisi perspectis quæ Semisolidum circa Axem spectant, solutum iri posse non putaverat; nec quidem, per ejus methodum, absque illis solvi potest:) Qui tamen (utut ille hoc nesciverit) longe facilior est, quam casus similis de Semisolido circa Axem. Quod ex traditis nostris, propter illam quam diximus Semicycloidis in sua Segmenta, Segmentis Semicirculi respondentia, distributionem, satis liquet. Verum cum ille hanc distributionem nesciverit; non poterat eo pervenire, nisi ope Semisolidi circa Axem. Adeoque, longo circuitu & perplexo admodum calculo eo tandem tendere necesse habet, quo nos recta pervenimus.

Hinc etiam est (ni fallor) quod in Problematis primitus propositis, illud Semicycloidis Segmentum (cum suis Solidis) expendendum proponat, quod recta Basi parallela absciditur, (ut $b\,V\,A$, fig. 166.) potius quam quod recta abscindatur quæ parallela sit Axi. Utut enim, distributionem hanc intelligentibus, posterioris hujus consideratio fuisset non minus intricata, nedum magis; illi tamen, qui distributionem eam nondum perspectam habuit, prior illa habita est intricatior; & quidem, per methodum ab illo traditam, difficilius absolvetur.

Quæ omnia, quidem, manifesta sunt indicia, distributionem hanc (& quidem pulcherrimam) ipsi minime fuisse perspectam.

Quod quidem eousque verum est, ut siquis velit, secundum ipsius methodi leges, (quod nos in nostra fecimus,) casuum omnino omnium calculum aggredi, eorum præsertim qui Semisolidi circa τα (semicycloidis basin,) vel (huic parallelam) bV, centra gravitatis spectant; (expertus loquor;) rem adeo perplexam reperiet, ut mirum sit ni, laboris pertæsus, in medio itinere lassus desistat. Quod in causa fuisse suspicor, cur ille (utut id pollicitus videretur) ad calculum non revocaverit casus omnes à se propositos; sed, unius tantum numeros exhibuisse contentus (suppressis interim quibus huc pervenerat vestigiis) de reliquis altum habet silentium.

Sed neque noverat ille (neque ex suis alii) Cycloidis curvæ æqualem rectam exhibere, aut in data ratione curvam illam secare; antequam id ex Anglia rescivevit. Unde factum erat quod Posteriora Quæsita, quæ Cycloidis Curvam hujusque segmenta spectant; & Superficies illius, vel segmentorum suorum, conversione factas; harumque omnium Centra gravitatis; non fuerint una cum Prioribus proposita; sed tum demum postea quam ex *Wrenni* nostri literis indicatum fuerat, quo pacto possint huic curvæ, suisque partibus, æquales Rectæ exhiberi. Quod ex illius ad *Wrennium* literis abunde liquet.

Quæ omnia non eo animo dicta sunt, ut inventis suis derogatum eam: Sed ut nobis quæ nostra sunt asseram, & reapse ostendam, etiam omnia illa non minus esse (ne dicam *magis*) methodis nostris pervia, quam suis; nequis superesse possit iniquis suspicionibus locus, nedum malignis insinuationibus.

Quod autem hac in re, præter ea quæ pridem edidimus, jam superadditum habetur: Non aliud est (rem ipsam quod spectat) quam calculi, pridem inchoati, continuatio. Non enim alia hic adhibemus principia, vel methodi leges alias, quam quæ in illo *de Cycloide* Tractatu passim adhibemus. Sed & quæ illic habentur, fere deprompta sunt ex principiis meis, in *Arithmetica Infinitorum* pridem traditis, Anno 1656. editis; quæ & in *Commercio Epistolico*, Anno 1658. edito (Epist. 15, & 16, hujusque appendice,) ad Centra gravitatis accommodaveram. Quippe hæc omnia vix aliud sunt, quam istius Methodi Universalis, ad particulares casus accommodatio.

Postquam vero ea quæ præcesserunt omnia, ad calculum uti hic habentur perduxeram; eaque per complures menses Prelo subjecta fuerant; & magna pars impressa: incidi in *Lalouveræ* de Cycloide tractatum; ante aliquot annos Tolosæ editum, sed (uti audio) nonnisi nuperrime in Angliam allatum. Qui varios de Cycloide ejusque Solidis, & horum Centris gravitatis, Casus, ad calculum redegit, sua methodo. Hanc ego, quamvis eam hactenus totam examinare nondum vacaverit; eaque, prima saltem fronte, non parum intricata mihi videatur: Sanam tamen esse, saltem quod summam rei spectat, existimo. Eo potissimum, quod calculi sui numeros (saltem in plerisque quos contuli casibus,) cum nostris consentire reperio. Sicubi vero dissentiant, (quod in paucis fit,) id Calculi potius alicui lapsui fortuito (qui condonandus erit) quam Methodi vitio, imputandum videtur. Quod & de nostris intellectum esto, sicubi irrepserit (quod facile fieri possit, & quidem ægre cavebitur, in tam multiplici calculo,) calculi lapsus aliquis, (nedum calami, aut etiam Preli.) Quippe, Methodum ipsam meam, satis ubique demonstratam esse, satis securus sum: Sed neque de ipso Calculo multum metuo.

Quod autem ille multus sit in conquerendo, quasi cum eo minus candide actum fuerit: Ego quidem non miror; ut qui sæpius eadem ab eisdem hominibus expertus fuerim, de quibus hic conqueritur. Sed & jam, ante nos, Cartesius (ut in ipsius editis Epistolis passim liquet) eadem sæpius conquestus est. Et Torricellium (ne plures memorem) pari modo habitum fuisse, ex ea liquet Apologia quam pro illo sive *Carolus Dati*, sive quisquis alius, sub ficto nomine *Timauri Antiatis*, edidit Florentiæ, Anno 1663. Lingua Italica. Sunt utique qui Problemata sua, *Totius Europæ Mathematicis* solvenda exponunt; ne dicam venditant, jactitantve; (quasi quidem huic soli negotio cæteris vacaret, ut illorum pensa absolverent:) Quæ quidem si negligimus; Insultant: Si solvimus; Irascuntur, calumniantur, opprobriis onerant, insimulant plagii; (quasi quidem ipsi soli sapiant, atque impossibile sit ut alii, nisi ipsorum scriniis expilatis, quicquam in Mathematicis

ticis arduum præstare possint.) Quod fecit ut ego jam per plures annos tantum non religiose abstinuerim, utut aliquoties publice provocatus, & lacessitus, nequid hujusmodi commercii cum illis ultra haberem, apud quos nec impune licet eloqui, nec tacere : nec nisi nuperrime, nimis lacessitus, silentia rupi.

Quid autem rei sit, cur ibi *Dettonvilium* à *Paschalio* alium esse, insimulatum ire videantur, (quod & *Lalovera* observat,) ego non intelligo ; quem ego pro eodem semper habui, atque etiamnum habeo. Et quidem, eundem esse, *Lalovera* (in tractatu suo) iis indiciis ostendit, ut de eo non sit cur quisquam dubitet, saltem donec alius (à *Paschalio*) *Dettonvilius* reperiri possit. Et quidem ex *Paschalii* ad *Wrennium* literis, (jam antequam Problematum Propositor *Dettonvilii* nomen professus fuerat,) non erat conjectu difficile, ipsum fuisse istorum Problematum Authorem : Et quidem, utut D. *Carcavius* in suis ad me literis, quasi rem dissimulaturus, *Dettonvillium* à *Paschalio* distinguat ; (quasi non idem forent ;) in D. *Hugenii* tamen ad me literis, (per quem D. *Carcavius* ad me transmittenda curavit aliquot *Dettonvilii* exemplaria, ad alios aliquot distribuenda ; quem itaque putaverim tum *Carcavii* mentem, tum Authorem libri cognovisse ;) Junii 9. 1659. *Hagæ* datis, sic scribitur ; *Ad postremas tuas nihil hactenus rescripsi, eo quod ab illo jam tempore expectabam libros hosce* Dettonvillii *seu* Paschalii , *quos mihi ad te curandos commissum iri noveram. Quaterna hæc exemplaria ad te uti mitterem rogat* Carcavius ; *te vero ut singula ex his, Viris Clar.* Wrennio, Wardo, *&* Hobbio, *tradi cures. Oratque ut examinato* Dettonvillii *opere sententiam suam quisque ipsi edere velit.* Et quidem *Wrennius* noster, Parisiis huc ante triennium (Anno 166.) reversus, (ubi moram aliquam posuerat,) *Paschalium*, dixit, illius libri Authorem Parisiis habitum esse, nemine (quantum ille observaverat) vel reclamante vel dubitante. Sin fallimur omnes, (quod vix crediderim :) Siquando alius à *Paschalio* prodiverit *Dettonvillius* ; mihi certe perinde erit : (Quippe hic, mihi, neque seritur neque metitur :) Ego saltem hactenus, alium non novi.

Laloveræ Numeros quos cum meis me Contulisse dixi ; illi sunt qui habentur, ad octo Problemata, prop. 25. lib. 3. qui (ad terminos meos reducti) cum nostris consentiunt omnes.

Item, qui habentur, ad octo Problemata prop. 36. lib. 4. qui omnes item cum meis consentiunt ; nisi quod in octavo Problemate dissentiant. Quippe quam assignat ille distantiam (à conversionis axe) Centri gravitatis Semisolidi, ex Semiconversione superioris semissis semicycloidis AdC (in mea fig. 166.) circa Axem AC; esset (ad terminos nostros reducta,) $\frac{6RP^3 + 144R^2P^2 + 216R^3P - 512R^4}{9P^3 + 144RP^2 - 240R^2P}$. At vero, juxta meos numeros, (per § O, P. prop 21. hujus,) Ungulæ Segmenti A b V, aciem habentis A V seu A α, distantia centri gravitatis ab A V, seu A α, (hoc est, à perpendiculari plano super A α erecto,) ubicunque sumatur V, sive supra C, sive infra C, sive (quem ille solum casum considerat) in ipso C centro ; est

$$\frac{87aR^3 - 87sR^3 - 96avR^2 - 9svR^2 - 12a^3R + 36a^2sR + 12as^2R + 2s^3R + 24a^3v + 36a^2sv + 24as^2v + 6s^3v}{-48vR^2 - 18a^2R + 36asR + 6s^2R + 36a^2v + 36asv + 12s^2v};$$

Hoc est, in præsenti casu, (propter $a = \frac{1}{4}P$, & $s = v = R$,)

$\frac{3RP^3 + 72R^2P^2 + 108R^3P - 1408R^4}{18RP^2 + 288R^2P - 480R^3}$; (ut facta Reductione patebit.) Adeoque in Semisolido (cujus distantia est ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P, ut sæpius ante ostensum est,) erit $\frac{6RP^3 + 144R^2P^2 + 216R^3P - 2816R^4}{9P^3 + 144RP^2 - 240R^2P}$. Quod à numeris nostris in hoc dissentit ; quod habeat ille $- 512R^4$, pro $- 2816R^4$. Siquis autem dubitaverit, ubi numeri discrepant, utrum penes illius numeros, an penes meos, erratum fuerit ; errorem penes illum esse, etiam absque operosa disquisitione, facile constabit. Quippe si ad numeros absolutos (quam proxime) fiat reductio ; reperietur distantia centri gravitatis istius Semisolidi, ab A α, secundum meum calculum, quasi $\frac{3}{7}$ totius distantiæ $\alpha\tau$; at secundum ejus, quasi $\frac{2}{5}$; quam nimiam esse, qui figuram istius solidi mente conceperit, minime dubitabit : Est enim tanta fere quanta si esset Semicylindrus, cujus distantia saltem minor esset

quam $\frac{4}{9}$; quæ nonnisi paulo major est quam $\frac{2}{5}$, hoc est $\frac{4}{10}$: Adeoque hanc nimiam esse, non erit dubitandum.

Denique; qui habentur ad octo Problemata, suæ prop. 59. lib. 5. qui cum nostris item consentiunt omnes; excepto octavo Problemate. Quod est de distantia centri gravitatis (à conversionis Axe A α) superficiei factæ ex semiconversione curvæ A τ (in mea fig. 166.) circa A α. Est enim, secundum ipsius numeros, (ad meos terminos reductos,) $\frac{18RP^2 + 48R^2P - 544R^3}{9P^2 - 24RP}$; quæ ad numeros absolutos reducta, major erit quam $\frac{2}{5}$ totius α τ; quam nimiam esse, certum est; (quippe quæ major est quam si esset superficies semicylindrica, in qua distantia minor esset quam $\frac{2}{5}$, imo quam, $\frac{4}{9}$.) Est autem, juxta numeros meos (§ I. M prop. 22.) Centri gravitatis Ungulæ ipsi A τ insistentis, aciem habentis A α, distantia ab A α, (hoc est, à perpendiculari plano huic insistente,) $\frac{45P^2 - 1024R^2}{90P - 240R}$; adeoque in semisolido correspondente, distantia à conversionis axe A α, (utpote ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$; seu $4R$ ad P;) $\frac{90RP^2 - 2048R^3}{45P^2 - 120RP}$; quæ, ad numeros absolutos reducta, minor erit quam $\frac{1}{2}$, imo quam $\frac{8}{17}$, (sed major quam $\frac{7}{15}$,) totius α τ.

Verum cum numeri ejus pro casibus illis (nunc unico, nunc duobus,) quos ille expendit; (nempe, qui vel totam A τ α, vel superiorem semissem A d C spectant;) cum nostris universalibus (casum quemlibet indifferenter respicientibus;) in cæteris conveniant: non in ipsius Methodi vitium, sed in calculi lapsum aliquem, rejiciendus erit hic in paucis dissensus.

Inveniet autem, in his meis, Lector, eandem non raro quantitatem pluribus modis (sed qui sint ἰσοδύναμοι) designatam. Quod ideo factum est, quoniam nunc hic, nunc ille modus, (ubi ad usum reducendus erit,) accommodatior videri possit; adeoque Lectoris commodo consultum est, ut (reductionibus à me jam factis) eum seligat designandi modum qui ipsi gratior videbitur, vel suis usibus accommodatior. Quinimo & alii plures esse possunt modi (quos ego ne nimius essem non apposui) easdem quantitates designandi, prout quis alias atque alias reductiones instituere velit.

Sed & passim deprehendet, me easdem quantitates pluribus methodis investigasse, atque ad calculum perduxisse. Quod factum est, tum ut Methodos illas plures edocerem; (adeoque ostenderem quam abunde sufficiant principia nostra ad hæc quæsita multis modis exhibenda:) tum etiam ut de calculo rite adhibito magis securus essem, quam si unico modo illum exquisivissem. Quam enim, in multiplici calculo, lapsus in proclivi sit, nemini vel parum exercitato ignotum esse potest. Ideoque, quo caverentur hujusmodi lapsus, caute prospiciendum putavi, ut ea fere omnia, in quibus saltem siquis foret error idem etiam alia inde dependentia late inficeret, pluribus methodis ad calculum redigerentur; ut plurium methodorum consensu (quæ sibi mutuo Probationum seu Examinum vices subirent) confirmatior essem de calculo rite instituto. Quod fecit, ut vel de ipso Calculo, tanquam omnino recte instituto, confirmatior fuerim, etiam ante cognitum (quod jam nuperrime, post finita omnia contingit) *Lalouveræ* cum nostris consensum.

His autem de Cycloide, fusius (ut dictum est) explicatis; reliqua quæ sequuntur brevius exequemur: Ne si omnia particulatim persequi velim, in immensum excresceret hoc Caput; quod jamjam multo ultra quam speraveram excrevit.

PROP.

PROP. XXIII.

Superficies curva Cylindri recti, ejusve Portio duabus rectis lineis interjecta, æquatur Parallelogrammo rectangulo æque alto, cujus Basis sit æqualis peripheriæ basis Cylindri, ejusve respectivæ portioni eisdem rectis lineis interjectæ. A.

Idemque obtinet in Superficie istiusmodi Solidi cujuslibet Columnaris recti, quamvis basin habeat non circularem, sed Ellipticam, Parabolicam, Hyperbolicam, aliamve sive rectilineam sive curvilineam quamlibet. B.

Centrum gravitatis est in medio rectæ conjungentis centra gravitatis peripheriarum (sive totalium sive partialium, prout casus contigerit,) oppositarum basium. C.

Adeoque (propter arcus circularis centrum gravitatis datum) datur Superficiei istius Cylindricæ (perfectæ vel imperfectæ) centrum gravitatis. D.

Idemque in aliis illis superficiebus columnaribus dabitur, si dentur respectiva curvarum basium Centra gravitatis. E.

Datur etiam expositæ superficialis Ungulæ Cylindricæ, tum Magnitudo, tum Centrum gravitatis. F. H.

Idemque (datis Curvarum, ut dictum est, Longitudinibus & Centris gravitatis) dabitur in reliquis superficiebus Columnaribus. G, I.

Quodque de Ungulis superficialibus dictum est; idem ad quasvis in superficiebus illis figuras, planorum sectionibus terminatas accommodabitur. K, L, M.

Quæque de Cylindri Recti, Rective Solidi Columnaris, superficie dicta sunt; eadem ad Scalenorum superficies transferentur. N.

Estque Superficies Cylindri Recti, ad Superficiem Scaleni, ejusdem Lateris, & super eadem Base; ut est Perimeter Basis, ad Perimetrum Sectionis quæ Lateri seu Axi sit ad angulos rectos; Quod & de partibus respectivis intelligendum erit. O.

Idemque non minus obtinet in aliis Solidis Columnaribus, cujuscunque basis. P.

Ungulæque, & aliæ figuræ superficiales modo dictæ, quæ in erectis exigendæ sunt ad Basis Perimetrum; eædem, in Scalenis, similiter exigendæ sunt ad sectionem illam quæ Recta sit ad Scaleni Axem. Q.

INtelligantur enim, fig. 172. super basis Cylindri recti Peripheria, ejusve portione aliqua, $\alpha\Delta\tau$, in singulis punctis (æqualiter ab invicem distitis) erigi perpendiculares rectæ, ut $\Delta\delta$, curvam Cylindri superficiem complentes; (juxta Def. 1. Cap. 4. hujus:) quæ, propter omnes ad basin angulos æquales rectos, totidem parallelogramma rectangula (æque alta invicem & æque lata) repræsentabunt, superficiem illam curvam complentia; quæ, si in planum expandi intelligantur, totidem rectangulis rectilineis congruunt, complentibus rectangulum rectilineum ejusdem altitudinis, cujus basis æquetur ipsi $\alpha\Delta\tau$ curvæ in rectam expansæ. A. Fig. 172

Idemque similiter ostenderetur, etiamsi $\alpha\Delta\tau$ curva, non esset arcus Circularis, sed alia quævis Curva. B.

Hujus autem superficiei curvæ Cylindricæ, vel Columnaris, Centrum gravitatis esse in media longitudine, ostensum est, ad prop. 2. hujus; atque in ea recta quæ C.

oppositarum

Fig. 172. oppositarum basium superficiei istius Centra gravitatis conjungit, per prop. 5. hujus: Ergo, in hujus puncto medio.

D. Adeoque, propter datum arcus circularis centrum gravitatis, per 14 hujus; dabitur, non tantum totius superficiei Curvæ Cylindri recti, sed & portionis cujusvis (duabus rectis ad basin perpendicularibus interjectæ) Centrum gravitatis.

E. Idemque similiter dabitur, in alia superficie columnari, etiamsi $\alpha\Delta\tau$ curva, non sit arcus circuli, sed alia quævis curva, dummodo hujus curvæ centrum gravitatis notum sit.

F. Si vero ex hujus Cylindri recti superficie curva, plano quovis $T\kappa AT$ utcunque oblique posito, abscindi intelligatur superficialis Ungula $T\kappa A\delta$; (ubicunque contingat TA, Ungulæ acies; non minus quam si sit Diameter Circuli $T\delta A$:) propter datum inclinationis angulum $\upsilon a \beta$, arcusque Centrum gravitatis; dabitur Ungulæ altitudo super centrum illud, quæ in arcus longitudinem ducta dat superficialis istius Ungulæ Aream; per prop. 11. hujus. Quod non minus valet de Ungula tota $T\kappa A\delta$, quam de partialibus $A\beta\upsilon$, $\beta\upsilon\kappa\delta$, &c. Nam & hic ob data arcuum $A\beta$, $\beta\delta$, &c. Centra gravitatis, adeoque eorum ab acie AT distantias, & angulum inclinationis, adeoque altitudinem super gravitatis Centra; habebitur area; Ducta altitudine illa in curvæ longitudinem.

G. Atque hæc obtinent, quæcunque sit $A\delta T$ curva (non minus quam si sit arcus circularis,) cujus & Longitudo & Centrum gravitatis nota intelligantur.

H. Habitis autem, eo quo dictum est modo, Ungularum magnitudinibus; earundem Momenta ea methodo investigari possunt, quam, ex prop. 10. petitam, in superioribus sæpius adhibuimus: Nempe, omnium arcuum (Ungulam superficialem complentium) Momenta respectu expositæ rectæ, (quæ, propter cognita curvarum tum longitudines, tum Centra gravitatis, adeoque ipsorum ab exposita recta, planove per illam perpendiculari, distantias, habentur,) sunt ipsum Ungulæ Momentum respectu istius rectæ; quod, per magnitudinem divisum, exhibet distantiam Centri gravitatis ab illo perpendiculari plano. Atque hoc si respectu plurium rectarum (quæ non sint ad invicem parallelæ) fiat; habebitur ipsum gravitatis Centrum.

Vel etiam, (per § W. prop. 13. hujus) haberi possunt Ungularum istiusmodi in superficie Cylindri recti, saltem quarum acies est Circuli diameter, Centrum gravitatis; & Cylindracearum superficierum (parallelis rectis interjectarum) Centra dari, modo ostensum est, § C, D, hujus: Atque in harum aliquas (addendo vel subducendo, prout opus fuerit,) resolvi potest istiusmodi quævis Ungula superficialis Cylindri recti, (ut exemplis mox proferendis ostendetur:) Dabitur igitur, (per prop. 27. cap. præced.) istiusmodi cujusvis Ungulæ Centrum gravitatis.

I. Hæc autem, quo ad alias curvas transferantur, opus erit, ut tum ipsius $A\delta T$, quæcunque fuerit curva, tum partium ipsius quæ rectis puta ipsi AT parallelis (si nempe momentum respectu hujus inquiratur) æqualiter ab invicem distitis abscinduntur, tum longitudines, tum Centra gravitatis, vel (quæ ex his resultant) momenta habeantur. Quippe, his habitis, momenta similiter exquirentur (per prop. 10. hujus) atque si essent arcus circulares.

K. Quod autem de Ungulis superficialibus traditum est; idem ad quasvis in ea su-
Fig. 189. perficie figuras, planorum utcunque positorum intersectionibus (cum ea curva superficie) terminatas, accommodabitur. Nam, ut figuræ quævis in plano rectilineæ resolvi possunt in rectangula triangula & parallelogramma; eodem fere modo figuræ quælibet (in recti Cylindri vel Columnaris solidi superficie) planorum sectionibus factæ, resolvi possunt in superficiales Ungulas & Cylindraceas superficies rectangulas. Adeoque ex partialium magnitudinibus habitis, habebitur (addendo, & subducendo, ut casus postulaverit) magnitudo expositæ: Atque, ex illarum habitis Centris gravitatis, habebitur hujus, per prop. 27. cap. præced.

L. Exempli gratia; Sit istiusmodi Figura exposita (in superficie Cylindri recti) planis terminata, CAD, (fig. 189.) Atque demissis (ad Cylindri basin BAS) rectis CB, DS; erit exposita CAD figura, eadem atque Ungula superficialis $CBASD$, demptis CAB, & DAS.

Sed, propter dati arcus BAS Centrum gravitatis datum (per prop. 14. hujus,) adeoque ipsius distantiam à data Ungulæ acie (seu communi basis BAS, planique Ungulam abscindentibus CDF, sectione) XZ; & consequenter (propter

ter datum etiam Inclinationis Planorum angulum F X B) Longitudinem rectæ, Fig. 189.
quæ arcus Centro gravitatis insistit, rectis in superficie curva Cylindri parallelæ:

Datur etiam (per prop. 11. hujus) superficialis ungulæ C B A S D area seu magnitudo.

Et similiter; propter datum arcus B A Centrum gravitatis; Ungulæque Aciem E A (quæ sive sit ipsi X Z parallela, sive secus, perinde est;) Angulumque Inclinationis C E B: Dabitur superficialis Ungulæ C A B magnitudo.

Et, simili processu, dabitur magnitudo superficialis Ungulæ D A S.

Datur ergo, expositæ Figuræ C A D = C B A S D — C A B — D A S magnitudo. (Et similiter, mutatis mutandis, in expositis Figuris istiusmodi aliis.) Quod ostendendum erat.

(Idemque pariter obtinebit, etiamsi curva B A S non sit arcus circularis, sed alia quævis curva, dummodo (ut supra dictum est) tum ipsius, tum partium sui B A, A S, habeantur longitudines & Centra gravitatis.)

Porro; quo habeatur expositæ figuræ C A D (juxta tenorem § W. prop. 13. M.
hujus) Centrum gravitatis; resolvenda erit ea, non tantum in Ungulas C B A S D, C A B, D A S; sed & hæ porro ita sunt resolvendæ, ut per superficies Cylindraceas rectangulas, atque ejusmodi ungulas quæ acies habeant in diametro Circuli (additas demptasque prout res postulaverit,) exhiberi possint.

Puta; cum Ungulæ C B A S D acies X Z non sit in diametro circuli B A S, (sed extra illam in eodem plano:) ducta intelligatur in secante Plano C F D, per L punctum in Axe Cylindri, recta L H, ipsi X Z parallela; quæ curvæ C D occurrat in H: Atque, per H, circulus G H K, centro L, descriptus, basibus Cylindri parallelus. Adeoque fient superficiales Ungulæ C H G, D H K, communem aciem habentes L H in circuli Diametro. Quarum si auferatur illa, & hæc addatur, superficiei Cylindraceæ rectangulæ G B A S K; habetur Ungula C B A S D. Habitis itaque illarum tum Magnitudinibus, tum Centris gravitatis (nempe Ungularum C H G, D H K, per § W. prop. 13. & Cylindraceæ G B A S K per § C, D, hujus) habebitur etiam (per prop. 27. cap. præced.) Centrum gravitatis ipsius C B A S D = G B A S K + D H K — C H G.

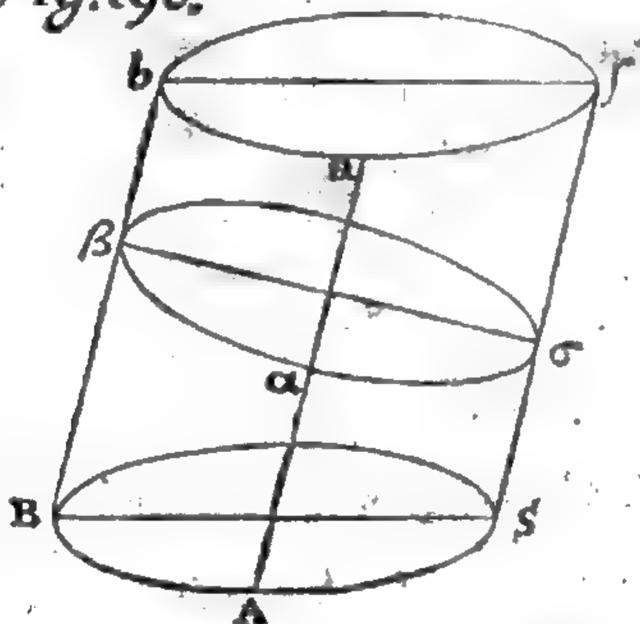
Similiter ostendetur (mutatis mutandis) Ungulam D A S, componi ex Cylindracea A M N S, addita Ungula D O N, dempta A O M, quarum Ungularum communis acies O P est in diametro Circuli. Habebitur itaque Centrum gravitatis ipsius D A S = A M N S + D O N — A O M.

Item, Ungulam C A B haberi, demptis, ex Ungula C Q T, tum Ungula A Q R, (quarum communis acies Q V est in circuli diametro,) tum Cylindracea B A R T. Adeoque habebitur Centrum gravitatis ipsius C A B = C Q T — A Q R — B A R T.

Habebitur itaque (per prop. 27. cap. præced.) Centrum gravitatis figuræ expositæ C A D = C B A S D — D A S — C A B. (Et similiter in aliis figuris, mutatis mutandis.) Quod erat ostendendum.

Fig. 189. Non autem erat necesse, in auxilium advocare § W. prop. 13. sed per methodum illam (sæpius adhibitam) ex prop. 10. hujus petitam, absolvi posset negotium: Eademque rem absolvet in aliis (ut dictum est) Superficiebus Columnaribus, dummodo Curva basis, partesque suæ, nota habeant tum Magnitudines tum Centra gravitatis.

Si vero exposita sit Cylindri (non Recti, sed) Scaleni superficies; ut in fig. 190. Quæ ad singula Perimetri basis puncta (æqualiter ab invicem dissita) obli-



que cadunt rectæ (axi Cylindri parallelæ) superficiem curvam cylindraceam complentes; neque habebunt ab invicem eandem quam respectiva basis puncta distantiam, (sed minorem, propter obliqua quæ repræsentant parallelogramma, quorum latitudo minor est quam est basium longitudo;) neque distantias invicem æquales, (propter inæqualem inclinationem ad basis perimetrum.) Utut enim habeant illæ ad planum basis Cylindri eandem omnes inclinationem; non tamen eandem habent omnes ad curvam basis perimetrum; (quod, si opus esset, facile est demonstratu; sed, consideranti, clarius per se liquebit, quam ut id sit opus.) Quo fit, ut Parallelogramma, quæ repræsentant rectæ illæ, superficiem complentia, neque Rectangula reputanda sint, sed neque æqualiter inclinata; (adeoque nec æquelata, utut æquales bases habentia.)

Atque ob harum considerationum priorem, evenit, quod Curva Superficies Cylindri Scaleni non (ut Recti) æquetur facto ex Cylindri latere in perimetrum basis (hoc est, in aggregatum basium omnium Parallelogrammorum quæ repræsentent illæ rectæ) ducto: Sed minor eo fit. Quæ consideratio communis etiam est Cylindri solido; quod minus est, quam factum ex latere Cylindri scaleni in basis planum ducto, (hoc est, in aggregatum omnium basium Prismatum, quæ repræsentant rectæ, solidum juxta def. 4. complentes;) quoniam Prismata solidum complentia, non sunt (ut in Cylindro recto) Recta, sed Scalena. Sed, cum sint æqualiter inclinata, (eandem utique ad planum basis inclinationem habent, quam Axis Cylindri,) in eadem ratione minuuntur (propter inclinationem) omnia; nempe, in ea ratione quam habet Cylindri Altitudo ad Latus suum. Adeoque Cylindri Solidum æquale fit facto ex (non Latere, ut in Cylindro Recto, sed) Altitudine Cylindri in Basem ducta.

Ob posteriorem vero considerationem, (quod Rectæ in superficie Cylindri Scaleni non sint, ad basis Perimetrum, Æqualiter inclinatæ,) evenit, quod non (ut in Solido fiebat) una aliqua recta, quæ sit communis omnium Parallelogrammorum Altitudo, pro Latere substituenda sit, in Basis Perimetrum ducenda, quo habeatur Area; sed, pro aliis atque aliis Perimetri punctis, aliæ atque aliæ rectæ; propter variatam in singulis punctis inclinationem ad Basis Perimetrum, adeoque Parallelogrammorum Altitudinem.

Huic itaque quo subveniatur incommodo; Si exponatur consideranda (fig. 190.) Cylindri Saleni b B S s superficies curva; neglectis basibus B A S, b a s, (quæ sunt

sunt ad Cylindri latus b B oblique positæ:) Sumatur planum aliud, quod sit ad Cylindri Latus (vel Axem) rectum, sectionem faciens $\beta\alpha\sigma$ Ellipsin (dummodo B A S sit Circulus;) ad quam itaque curvam $\beta\alpha\sigma$, rectæ omnes B b, A a, &c. superficiem complentes, non minus Rectæ sunt, quam sunt in Cylindro Recto Latera ad perimetrum basis. Et, consequenter, si per singula curvæ $\beta\alpha\sigma$ puncta, æqualibus ab invicem in eadem curva distantiis remota, transire intelligantur totidem æquales rectæ B β b, A α a, &c. superficiem complentes; repræsentabunt illæ (non minus quam quæ sunt in superficie Cylindri recti) totidem Parallelogramma Rectangula æque alta, & æque lata, quorum omnium Bases simul sumptæ complent ipsam $\beta\alpha\sigma$ curvam, & communis Altitudo est ipsum Cylindri Latus B β b; quæ itaque in curvam totam $\beta\alpha\sigma\beta$ ducta, exhibet integram Cylindri superficiem curvam; eademque in curvæ portionem quamlibet ut $\beta\alpha$ ducta, exhibet correspondentem superficiei portionem B A a b. Fig. 190.

Hinc sequitur; Superficiem Cylindri Recti, ad superficiem Scaleni, ejusdem Lateris & super eandem Basin, ita esse, ut est Perimeter Basis, ad Perimetrum Sectionis quæ Lateri vel Axi sit ad angulos rectos; puta, ut B A S, ad $\beta\alpha\sigma$: Atque illius portionem, ad respectivam portionem hujus, ut est ea basis portio cui insistit, ad respectivam sectionis rectæ portionem; puta, ut B A ad $\beta\alpha$, sic quæ portioni B A insistit in Cylindro Recto, ad eam quæ eidem insistit in Scaleno superficiem, idem Cylindri Latus habentem. O.

Idemque obtinet, ob eandem causam, non tantum in Cylindris veris, qui basin habent Circularem; sed & Solidis quibusvis Columnaribus. Nempe, quæcunque sit B A S curva quæ basis sit Solidi Scaleni pro ea substituenda erit $\beta\alpha\sigma$, quam exhibet sectionem Planum illud quod est Lateri, vel Axi, ad Angulos rectos. Quæ quidem Ellipsis erit, si B A S sit Circulus; si vero B A S Ellipsis sit, erit $\beta\alpha\sigma$ vel alia Ellipseos species, vel etiam Circulus. Et similiter, quæcunque fuerit curva B A S; pro ea substituenda erit correspondens $\beta\alpha\sigma$, prout cujusque curvæ ratio postulaverit. P.

Quæ autem, de Ungulis, aliisve figuris in Recti Cylindri seu Solidi Columnaris superficie, ad Basis Perimetrum B A S exigendis, dicta sunt: Eadem omnia in Scalenis, ad Perimetrum Sectionis rectæ $\beta\alpha\sigma$ accommodanda erunt. Quippe Solidum illud, (sive Cylindrus sit, sive aliud quodvis Solidum Columnare,) quod ad Basin B A S Scalenum est, idem ad basin $\beta\alpha\sigma$ Rectum erit. Q.

PROP. XXIV.

Figuræ cujusvis in Superficie Sphæræ, Planorum quorumvis cum Sphærica superficie sectionibus, (hoc est circulorum quorumvis sive maximorum sive minorum arcubus) terminatæ; Magnitudo datur. A, F.

Nempe; Superficies sphæræ integra, æquatur quatuor circulis maximis. B.

Segmenti cujusvis, Plano abscissi, (aut etiam Zonæ cujusvis Parallelis Planis interjectæ,) superficies, eam rationem habet ad totam Sphæræ superficiem, quam habet intercepta Axis portio ad Axem totum. B.

Cuneus superficialis, seu portio superficiei curvæ duobus planis in Axe coeuntibus interjecta, sive totius Sphæricæ superficiei, sive Segmenti superficialis, sive Zonæ; superficiem habet in ea ratione ad integram illius sive Sphæræ, sive Segmenti, sive Zonæ superficiem, quam habet Angulus inclinationis planorum illorum (vel arcuum plana illa jungentium,) ad quatuor rectos. C.

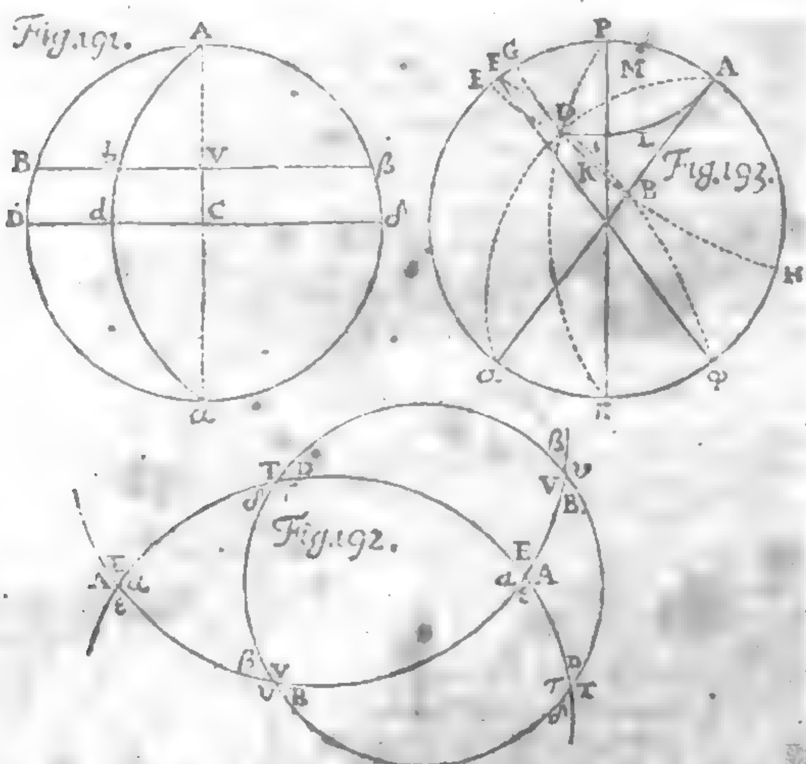
Triangulum sphæricum, (arcubus circulorum maximorum terminatum,) eam rationem habet ad circulum in sphæra maximum; quam habet excessus aggregati omnium angulorum supra duos rectos, ad duos rectos. Seu (quod tantundem valet) æquatur facto ex Radio in Arcum circuli maximi, qui isti angulorum excessui subtendit, ducto. D.

E. Trilinea circulorum minorum arcubus terminata (vel partim his, partim arcubus maximorum,) à Triangulis Sphæricis modo dictis, differunt Bilineis notæ magnitudinis.

F. Adeoque, Figuræ cujusvis, in superficie sphærica, planorum sectionibus, vel circulorum quorumvis arcubus, terminata, (utpote quæ in expositarum figurarum aliquas semper resolvi possit;) Magnitudo datur.

A. Posset quidem hæc Propositio, non tantum de Magnitudine, sed & de Centro gravitatis, istiusmodi Figuræ, ex præcedente deduci: Cum possit omnis istiusmodi in Sphærica superficie figura, in Trilinea Rectangula resolvi; quæ in Cylindri recti superficiales Ungulas expandi poterunt: Quarum quidem tum Magnitudines, tum Centra gravitatis, (per præcedentem,) haberi poterunt; atque inde ad Trilinea Sphærica transferri, ope prop. 14. hujus.

Verum cum ita calculus futurus sit perplexior quam ut illum jam aggredi libeat, (propter varias se mutuo decussantes Sphæræ diametros ad quas exigenda essent ea Trilinea Sphærica, eorumque partes:) libet alia methodo Figurarum illarum Magnitudines exhibere.



B. Fig. 191. Superficiei Sphæricæ *Segmentum*, (Plano abscissum;) vel etiam *Superficialis Zona* Sphærica, (duobus Planis Parallelis interjecta;) eam habet rationem ad totam Sphæræ Superficiem (hoc est, ad quatuor Circulos Maximos;) quam habet Axis portio, Plano seu Planis illis terminata, ad Axem totum. Puta, quanta pars est A V, vel V C, totius Axis A α; eadem pars est totius Superficiei Sphæricæ, Segmentum A B β, vel B β δ D Zona; & sic ubique. Per § H, I. prop. 13. hujus.

C. Curva Superficies *Cunei Sphærici*, aut etiam *Cunei Segmenti Sphærici, Zonæve*, arcubus duorum circulorum in Axe coeuntium interjecti; eam habet ad totam Sphæræ, vel totam illius Segmenti, aut Zonæ superficiem, quam habet Angulus inclinationis illorum Circulorum, ad quatuor Rectos. Quippe si intelligatur A B D α Semiperipheria, circa axem A α conversa, superficiem sphæricam describere: quam partem totius conversionis absolvit A B α, in situm A b α delata; eadem erit tum angulus B A b, quatuor rectorum; tum, integræ Peripheriæ sui circuli, arcus B b puncto B descriptus; suique, arcus D d descriptus puncto D; & sic ubique:

ubique: adeoque eadem pars erit, Bilineum A D α d A, totius Superficiei Sphæricæ; & A B b, segmenti B β A; & B b d D, Zonæ B β δ D: & sic ubique. Per § G. prop. 13. hujus.

Puta; Quam habet rationem Arcus B b, vel D d, ad suas respective Peripherias integras B β, vel D δ; aut angulus B A b vel D A d ad quatuor rectos: eam habet rationem *Sphærici Cunei Superficies* A B α b A, ad totius *Sphæræ* superficiem; *Cuneique Segmenti sphærici superficies* A B b A, vel α B b α, ad respectivi *Segmenti sphærici* superficiem A B β, vel α B β; *Cuneique Zonæ Sphæricæ superficies* B b d D, ad totius *Zonæ* superficiem B β δ D. Et sic ubique.

Exponatur jam, in superficie Sphærica, Triangulum Sphæricum A B D, circulorum Maximorum arcubus comprehensum. Qui quidem arcus continuati, intelligantur circulos integros absolvere. Hi Circuli cum sint in Sphæra maximi; se mutuo bisecabunt bini quilibet. Et, propter æquales angulos tum qui sunt oppositi verticales, tum qui sunt in eodem Bilineo oppositi, (puta $A = \alpha$, & $\alpha = \alpha$, & sic ubique;) æqualia invicem erunt quæ sunt in contrariis Hemisphæriis Bilinea, (eorundem Circulorum contrariis Semicirculis interjecta;) puta α α, & (quod, in Schemate disruptum est & replicatum, sed in Sphæra continuari intelligendum est,) A A; & similiter B B, & β β; item D D, & δ δ. Sed &, eadem ratione, Opposita Triangula A B D, α β δ, (propter Latera lateribus, & Angulos angulis, respective sumptus, æqualia,) erunt invicem æqualia. (Quæ est etiam D. *Samuelis Fosteri* nostratis Demonstratio, in Collegio *Greshamensi*, *Londini*, Astronomiæ dudum Professoris; Qui hoc mihi, de Triangulo *Sphærico*, Theorema indicavit, Anno circiter 1646 aut 1647; ut apud nostros tum dudum receptum; & ab *Harrioto* nostro, si satis memini, primo repertum.) D. Fig. 192.

Si autem, ex semisuperficie Sphærica T ν T ν T $= RP$, (hoc est, facto ex Radio in Peripheriam ducto) auferatur A B D triangulum; Residuum (RP—ABD) complebunt Triangula α ν V. (hoc est, α α — α β δ; hoc est, A A — A B D;) & B ι τ, (hoc est, B B — A B D;) & D E V, (hoc est, D D — A B D.) Hoc est, Bilinea $AA + BB + DD, - 3ABD, = RP - ABD$. Hoc est, (transponendo) $AA + BB + DD - RP = 2ABD$. Adeoque, quam habet rationem, excessus Bilineorum $AA + BB + DD$ supra RP, ad RP Semi-superficiem sphæricam; hoc est, quam habet rationem, Excessus angulorum $A + B + D$ supra duos rectos, ad duos rectos; seu Excessus arcuum (angulis illis competentium) supra semiperipheriam, ad semiperipheriam; eam habet 2 A B D duplum Trianguli, ad eandem RP Semisuperficiem sphæricam, seu duos circulos maximos; ipsumque A B D. Triangulum, ad $\frac{1}{2}RP$ circulum in sphæra maximum.

Hoc est, invertendo (posito a pro aggregato arcuum, in circulo maximo, angulis A, B, D, competentium;) ut Semiperipheria $\frac{1}{2}P$, ad $a - \frac{1}{2}P$; sic Circulus in Sphæra maximus $\frac{1}{2}RP$, ad ($aR - \frac{1}{2}RP$) triangulum sphæricum A B D. Quod itaque æquatur facto ex Radio R, in arcum $a - \frac{1}{2}P$, qui convenit Excessui angulorum $A + B + D$ supra duos rectos.

Esto demum Trilineum expositum A B D, cujus latera D L A, D K B, sint, arcus circulorum minorum E D A, G D B H; (latusque B A, arcus circuli maximi.) Inveniatur circuli E D A, polus P; & circuli G D B H, polus A. Transeatque per A, D, circulus maximus A D α; & per D, B, maximus F D B φ; item per P, D, maximus P D π. E. Fig. 193.

Habetur itaque (per § B, C,) magnitudo tum integri Segmenti Superficialis P E D A, tum hujus Cunei seu portionis P D L A: Et (per § D.) Magnitudo Trianguli Sphærici P D M A (arcubus maximorum circulorum terminati:) Adeoque & (horum differentiæ) Bilinei D A magnitudo.

Similiter, (per § B, C,) habetur magnitudo tum integri segmenti A G D B H, tum hujus portionis A M D K B: Et (per § D.) Trianguli Sphærici A M D I B: Ergo & (horum differentia) magnitudo Bilinei D B.

(Et similiter faciendum esset, ad latus B A, si fuisset arcus circuli minoris: Cum vero latus illud sit arcus Circuli maximi; id minime opus erit.)

Habetur autem, ut modo dictum est, (per § D.) Magnitudo Trianguli Sphærici (arcubus maximorum circulorum comprehensi) A M D I B: Unde si auferatur Bilineum jam inventum D A, atque addatur Bilineum D B; habetur magnitudo Trilinei expositi A B K D L A: cujus latera (saltem aliqua) sunt arcus minorum circulorum.

Atque, ad eandem formam, Triangulo Sphærico, additis ablatisve, ut res postulaverit, Bilineis uno vel pluribus; habebitur area Trilinei cujusvis utut minorum circulorum arcubus comprehensi.

F. Denique; Cum nulla possit exponi Figura, in superficie sphærica, Planorum sectionibus (hoc est, circulis sive maximis sive minoribus) terminata; quæ in hujusmodi jam traditas figuras non possit resolvi: Datur istiusmodi figuræ cujusvis magnitudo. Quod erat ostendendum.

PROP. XXV.

Segmenta Sphæræ, utcunque Planis truncatæ; Magnitudinem datam habent.

HUjusmodi enim Sphæræ Segmenta quælibet, terminantur, partim portione residua Superficiei Sphæricæ, partim planis truncantibus.

Intelligatur autem (ut ad prop. 16. hujus) ea quæ restat superficiei sphæricæ portio, (cujus magnitudo data est, per prop. præced.) in particulas quantumlibet minutas distribui, totam complentes; quibus insistere intelligantur totidem pyramides exiguæ, communem verticem habentes Sphæræ Centrum; & communem altitudinem, Sphæræ Radium. Adeoque, Radii Triens, in curvam illam superficiem ductus, (utpote Basium illarum aggregatum,) exhibebit, Pyramidum sive Sectorum Sphæricorum illorum, portioni curvæ insistentium, Aggregatum.

Plana vero, quæ, una cum hac curva superficie, totam complent, sunt etiam notæ magnitudinis: Utpote quæ sunt vel Figuræ Rectilineæ, vel saltem Circulorum portiones, quarum Magnitudo habetur, per prop. 15. hujus. Harumque item (utpote positione datarum) dantur Distantiæ à Centro Sphæræ; Quarum quidem trientes, in sua respective Plana ducti, exhibent Pyramidum magnitudines, Planis illis insistentium, & communem verticem habentium Centrum Sphæræ.

Quæ quidem Pyramides, additæ vel subductæ (prout res tulerit) Aggregato illi Pyramidum superficiei curvæ insistentium, jam invento; exhibent Expositi Segmenti magnitudinem.

Datur igitur istiusmodi cujusvis segmenti sphæræ, planis utcunque truncatæ, Magnitudo. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

UT vero Propositionis hujus, & simul præcedentis, Praxis, Exemplo aliquo illustrata, facilior reddatur: Libet hic subjungere, Problematis Solutionem, quod ante aliquot annos mihi solvendum proposuit Vir ingeniosus, & rerum Mathematicarum peritus, D. *Joh Collins*, (Augusti 12° 1665.) tanquam rem maxime desideratam; & quotidiani usus, in mensurandis vasis vinariis & cervisiariis, partim depletis.

Cujus ego Problematis Solutionem, ejusque Demonstrationem, eodem statim die, summatim ei exhibui; (&, quantum scio, omnium primus absolvi) ad hunc sensum. Nempe,

"Redigendum esse expositum Dolii vel Sphæroeideos truncati Frustum, ad inscriptæ Sphæræ Frustum correspondens; ad quod, Frustum illud Sphæroeideos eam habebit rationem, quam habet Sphæroeideos Axis, ad Diametrum Sphæræ; propter Plana Sphæroeideos parallelis Sphæræ Planis correspondentibus æqualia, sed ab invicem ea ratione longius remota, quam habet Axis Sphæroeideos ad Axem Sphæræ.

"Illud autem Sphæræ Frustum, considerandum esse tanquam ex Pyramidibus conflatum, communem verticem habentibus Centrum Sphæræ; basesque in Frusti Superficie continuas, ipsam complentes.

"Quorum quidem quæ Bases Planas habent, facile exhiberi posse; cum plana illa alia non sint quam Circulorum portiones, notis methodis exhibendæ; earumque à Centro distantiæ (altitudinem determinantes) facile exquirantur.

"Quod

" Quod autem ad eas innumeras attinet, quarum exiguæ bases superficiem cur-
" vam complent: cum basium aggregatum sit ea ipsa superficies curva; & com-
" munis omnium Altitudo, Radius sphæræ; id unum superesse posse difficultatis;
" ut exhibeatur illa Superficies curva.

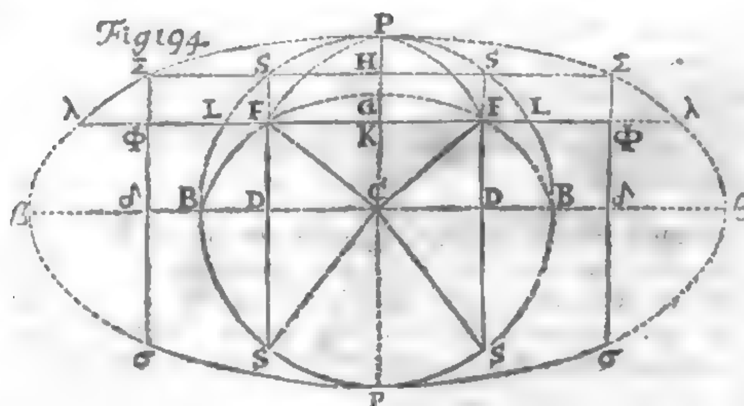
" Id autem quicquid sit difficultatis, à me jam olim explicatum esse in subjunctis
" ad Calcem mei *de Cycloide* Tractatus, pag. 122. (sed quæ inserenda fuerant pag. 23.
" § 68. quod jam factum est.) ubi docetur, *Figuram quamlibet, in Superficie Sphæ-*
" *ræ, Circulorum quorumvis (sive maximorum sive minorum) arcubus termina-*
" *tam, Quadrare.*

" Adeoque Rem totam, inter Desiderata, non esse censendam; ut quam ego jam
" tum ante plures annos absolveram, & scripto edito (anno 1659.) vulga-
" veram.

Quod ipsum paucis post diebus, latius aliquanto explicatum, ad illum etiam misi, hac fere quæ sequitur verborum forma.

PROP. XXVI.

Sit Dolium $\Sigma\sigma p\sigma\Sigma P$, (Sphæroideos $P\beta p\beta$ Frustum, parallelis circulis æqualibus $\Sigma\sigma$, $\Sigma\sigma$, abscissum,) situ Horizontali positum. Datæque sint; tum Circuli Medii Pp, Semidiameter CP; tum Extremorum $\Sigma\sigma$, Semidiameter $\delta\Sigma$; Vasisque Longitudo $\delta\delta$, (cujus Semissis $C\delta$:) Summique Liquoris $\Phi K\Phi$, Altitudo, supra infrave C centrum, CK; quæ minor sit quam $\delta\Sigma$. Quæritur, Liquoris contenti quantitas; seu Segmenti Majoris $\Phi\sigma p\sigma\Phi$, Minorisve $\Phi\Sigma P\Sigma\Phi$, Magnitudo.

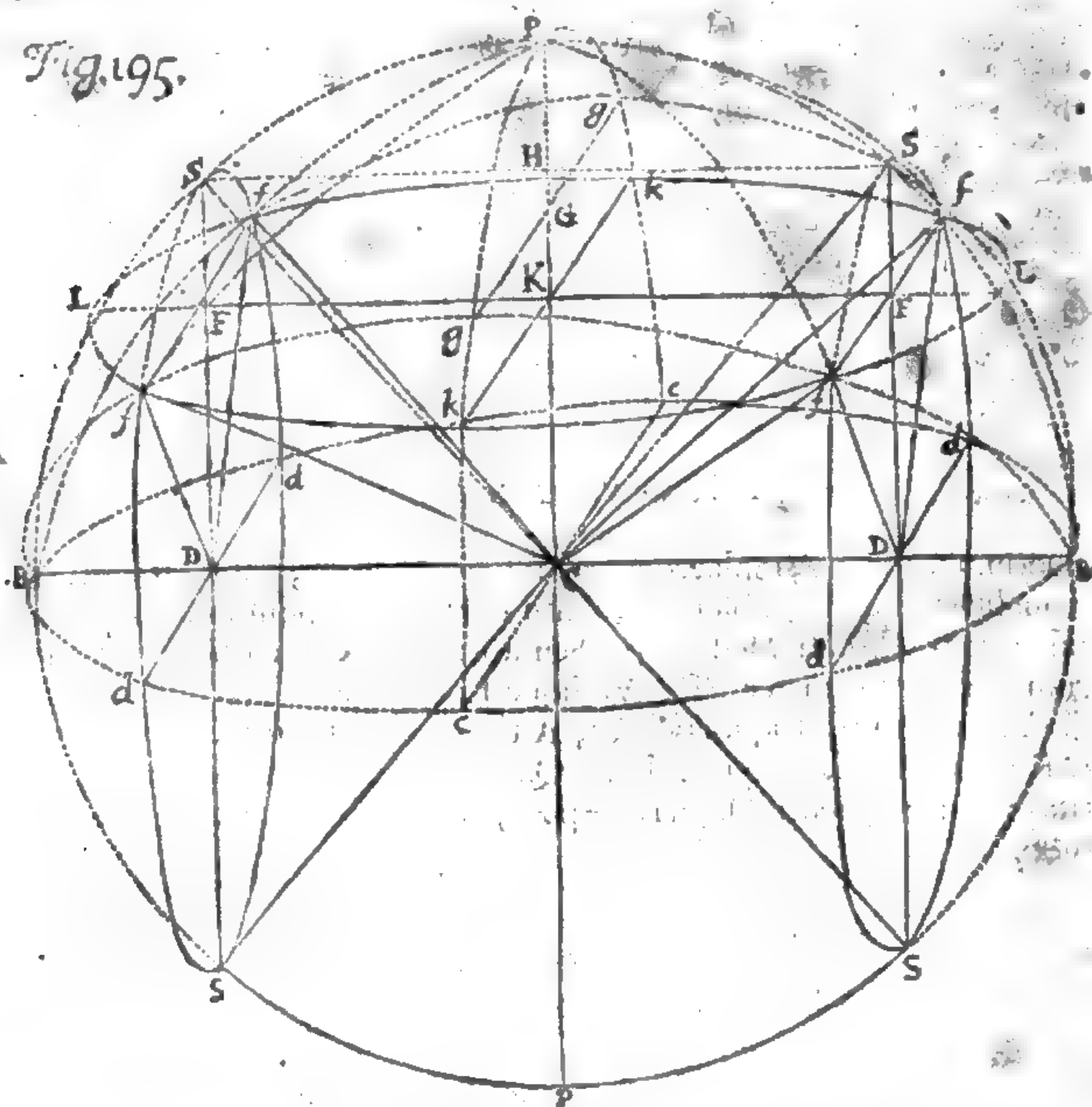


Sphæroidi $P\beta p\beta$, inscripta intelligatur Sphæra $PBpB$: quam secent Circuli Ss, Ss, ipsis $\Sigma\sigma$, $\Sigma\sigma$, æquales & paralleli; Planumque $\Phi K\Phi$ Horizontale, exhibens in Sphæra Circulum LFL, Ellipsi $\lambda\Phi\lambda$ in Sphæroeide respondentem. Eritque Sphæræ Portio $FspsF$, expositæ Sphæroideos Portioni $\Phi\sigma p\sigma\Phi$ correspondens.

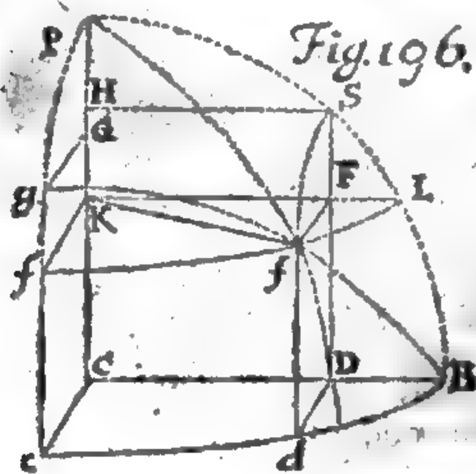
Estque hæc Sphæræ Portio; idem atque Semisegmentum $DspsD$ (quod Semidolio respondet, estque magnitudinis notis methodis investigabilis; & speciatim per prop. præced. vel prop. 16. hujus.) Addita, Demptave, (prout FKF supra infrave Centrum fuerit,) Segmenti Portione $FFDD$; planis FF, DD, FD, FD, interjecta; quam portionem investigare, est potissima totius negotii difficultas.

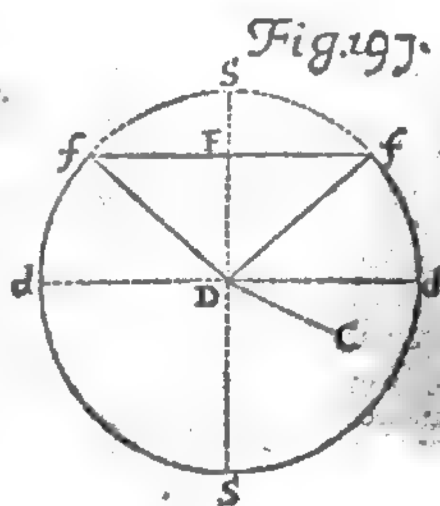
(Quo autem multiplices Solidi sectiones, in plano utcunque exhibitæ, melius percipiantur: Rem eam pluribus figuris explicare visum est: Quarum fig. 194. exhibet Sphæram Sphæroidi inscriptam; simplicissima projectione. Fig. 195. exhibet Sphæram, figuræ præcedenti exemptam, atque aliter projectam, quo partes ejus detegantur: Et fig. 196. ejusdem Octantem (planis quadrantalibus PCc, PCB, cCB, toti exsectum,) quo minor sit linearum confusio. Item duos circulos Fig. 194, 195, 196. 197, 198.

Fig. 194, 195, 196, 197, 198. culos S s, fig. 194. hoc est S f d s d f S, fig. 195. seorsim exhibet figura 197. Circulumque L F K F L fig. 194. hoc est, L f k f L f k f L fig. 195. seorsim exhibet figura 198.)



Constat autem ea Portio F F D D, (potissimum investiganda,) ex Quinque Solidis Pyramidalibus, Conicisve: Quorum communis Vertex, est C Centrum: Basesque, ipsæ Portionis Superficies F D, F D, F F, planæ; duæque Curvæ DFFD, D F F D, fig. 194. (seu potius d f f d, d f f d, fig. 195.) Planis illis, planoque D D terminatæ: Altitudinesque, Superficierum illarum à Centro Distantiæ.





Quantæque sint illæ Superficies Curvæ D F K F D, fig. 194. seu potius d f k f d, fig. 195. (quæ sola superest difficultas; reliqua siquidem, notis methodis, facile investigantur;) invenire docui, in subjunctis meo, *De Cycloide*, Tractatui, atque hic in prop. 24. hujus.

Nempe;

Fig. 198.

Nempe; Si intelligatur (fig. 195, 196.) f g f, arcus Circuli Maximi, ipsi f k f arcui Minoris Circuli conterminus; & compleatur P f g f Triangulum Sphæricum: Hujus Trianguli Sphærici P f g f magnitudo innotescit; utpote tum alibi tradita, tum hic ad § D. prop. 24. hujus. Atque innotescit Trilinei P f k f magnitudo, ex cognito angulo f P f, seu ratione arcus f k f ad peripheriam sui circuli: (per § B, C, prop. 24. hujus.) Adeoque & magnitudo Bilinei f k f g f, illorum differentia. Sed &, ex cognito Angulo g B d, seu Arcus f d ratione ad Peripheriam sui circuli, similiter innotescit magnitudo Quadrilinei Sphærici d f g f d. Ergo & (dempto Bilineo) Quadrilinei d f k f d magnitudo. Fig. 194, 195, 186, 197, 198.

Denique; Ex magnitudine Portionis Segmenti Sphærici sic inventa; Habetur etiam Portionis Segmenti Sphæroeideos correspondentis Magnitudo. Est utique hæc ad illam, ut Sphæroeides ad inscriptam Sphæram; (sive ut Axium Major ad Minorem:) propter Plana Planis respective sumptis æqualia, & ad Axes in ea ratione constitutos ordinatim-posita. Quæ est totius Problematis constructio.

Calculus huic Constructioni respondens.

1. Data Circuli, in Sphæroeide Medii, Semidiameter; seu Radius inscriptæ Sphæræ; $CP = CB = Cs = CS = Cf$; dicatur R: Ejusque Peripheriæ Quadrans, $\mathcal{Q}$; quæ sit & Anguli Recti mensura.

2. Data Circulorum, in Sphæroeideos frusto, Extremorum, (fig. 197. seorsim etiam exhibitorum) Semidiameter $\delta\Sigma = DS = Dd$; dicatur aR. (Facto scilicet, ut CP, ad DS; sic 1 ad a. Et sic alibi.) Estque, Sinus Rectus arcus $BS = Bf$.

3. Hujus Co-sinus, seu Sinus Complementi; hoc est, Sinus Arcus $SP = fg$; est $HS = CD = KF = \sqrt{:} R^2 - a^2R^2 : = R\sqrt{:} 1 - a^2$. Qui dicatur (brevitatis gratia) αR.

4. Ut B B ad S S, seu C B ad H S; hoc est, ut R ad αR, seu 1 ad $\alpha = \sqrt{:} 1 - a^2$: Sic est integra Sphæræ Superficies, seu Quatuor Circuli maximi, $8R\mathcal{Q}$; ad superficiem Zonæ S s s S, $= 8\alpha R\mathcal{Q}$.

5. Hæc Superficies, ducta in $\frac{1}{3}R$; exhibet magnitudinem Zonæ Solidæ, (intellige, Segmenti S D s s D S, exemptis duobus Conis, S C s, S C s,) S C s p s C S P $= \frac{8}{3}\alpha R^2\mathcal{Q}$.

6. Ut Quadratum Radii C P; ad Quadratum Radii D S; hoc est, ut R^2 ad a^2R^2, seu ut 1 ad a^2: Sic est Circulus Maximus $2R\mathcal{Q}$, ad Circulum $SDs = 2a^2R\mathcal{Q}$.

7. Circulus hic S D s, ductus in $\frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}\alpha R$; exhibet Magnitudinem Coni S C s D, $= \frac{2}{3}\alpha a^2R^2\mathcal{Q}$.

8. Hujusmodi Coni duo, una cum Zona solida (§ 5. inventa,) exhibent Segmentum Solidum S D s s D S, $= \frac{8}{3}\alpha R^2\mathcal{Q} + \frac{4}{3}\alpha a^2R^2\mathcal{Q}$. Adeoque Semisolidum D s s D, $= \frac{4}{3}\alpha R^2\mathcal{Q} + \frac{2}{3}\alpha a^2R^2\mathcal{Q}$.

9. Data summi Liquoris F K F, supra infrave Centrum, Altitudo $CK = DF$, dicatur bR. Estque, Sinus Rectus arcus B L.

10. Hujusque Co-sinus, seu Sinus Arcus $LP = fP$; est $KL = Kk = \sqrt{:} R^2 - b^2R^2 : = R\sqrt{:} 1 - b^2$. Qui dicatur (brevitatis ergo) βR.

Fig. 194, 195, 196, 197. 11. Ut KL $= \beta R$, ad R; ſeu ut $\sqrt{:1 - b^2:}$ ad 1: Sic eſt recta KF $= \alpha R$, ad $\frac{\alpha}{\beta} R = R\sqrt{\frac{1-a^2}{1-b^2}}$; ſinum arcus fk in ſuo circulo, ſive Anguli fKk = fPk = fP[illegible]; Qui (per Canonem Sinuum inveniendus) dicatur $c\mathfrak{Q}$.

12. Hujuſque Co-ſinus ſeu ſinus Arcus fL in ſuo circulo, ſeu Anguli fKL = fPL; eſt $\sqrt{:R^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} R^2:} = R\sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2}} = \frac{R}{\beta}\sqrt{:\beta^2 - \alpha^2:} = \frac{R}{\beta}\sqrt{:a^2 - b^2}$.

13. Ut DS $= aR$, ad R; ſeu ut a ad 1: Sic DF $= bR$, ad $\frac{b}{a} R$, Sinum Arcus fd in ſuo Circulo, ſeu Anguli fDd = gBd. Qui (per Canonem Sinuum inveniendus) dicatur $d\mathfrak{Q}$.

14. Ut tota Peripheria, ſeu Quatuor Recti, $4\mathfrak{Q}$; ad Arcum ſeu Angulum $d\mathfrak{Q}$; ſive ut 4 ad d: Sic eſt Zonæ totius SſſS ſuperficies, $8\alpha R\mathfrak{Q}$; ad Quadrilineum Sphæricum dfgfd, $= 2d\alpha R\mathfrak{Q}$.

15. Ut Pp $= 2R$, ad PK = CP − CK $= R - bR$; ſive ut 2, ad $1 - b$: Sic integra Sphæræ ſuperficies, $8R\mathfrak{Q}$; ad ſegmenti PLKLP ſuperficiem, $= 4R\mathfrak{Q} - 4bR\mathfrak{Q}$.

16. Ut tota Peripheria, ſeu quatuor Recti, $4\mathfrak{Q}$; ad Angulum fPf = 2fPg $= 2c\mathfrak{Q}$; ſive ut 2 ad c: Sic Segmenti PLKLP ſuperficies, $4R\mathfrak{Q} - 4bR\mathfrak{Q}$; ad Trilineum Sphæricum PfkfP, $= 2cR\mathfrak{Q} - 2bcR\mathfrak{Q}$.

17. In Triangulo Sphærico Rectangulo fgP; Ut Co-ſinus arcus fg, ſeu arcus Bf Sinus aR; ad Co-ſinum Anguli fPg, ſeu Anguli fPL Sinum, $\frac{R}{\beta}\sqrt{:a^2 - b^2:}$ Sive ut $a\beta$ ad $\sqrt{:a^2 - b^2:}$ Sic Radius, ad $\frac{\sqrt{:a^2 - b^2:}}{a\beta} R$ Sinum Anguli Pfg. (Nempe per doctrinam Trigonometricam.) Qui (per Canonem Sinuum inveniendus) dicatur $e\mathfrak{Q}$.

18. Ut duo Anguli Recti, $2\mathfrak{Q}$; ad Trium Angulorum, Trianguli ſphærici Pfgf, exceſſum ſupra Duos rectos, $2c\mathfrak{Q} + 2e\mathfrak{Q} - 2\mathfrak{Q}$: Hoc eſt, ut 1 ad $c + e - 1$: Sic eſt Circulus in Sphæra Maximus, $2R\mathfrak{Q}$; ad illius Trianguli Sphærici Pfgf Magnitudinem, $2cR\mathfrak{Q} + 2eR\mathfrak{Q} - 2R\mathfrak{Q}$.

19. Triangulum hoc, Pfgf, ex Trilineo Pfkf (invento § 16.) exemptum, relinquit Bilineum fkfgf $= 2R\mathfrak{Q} - 2eR\mathfrak{Q} - 2bcR\mathfrak{Q}$.

20. Atque hoc Bilineum, ex Quadrilineo dfgfd (invento § 14.) exemptum, relinquit Quadrilineum dfkfd, $= 2\alpha dR\mathfrak{Q} + 2bcR\mathfrak{Q} + 2eR\mathfrak{Q} - 2R\mathfrak{Q}$.

21. Atque hoc Quadrilineum, in $\frac{1}{3}R$ ductum; exhibet Sectorem Sphæricum Cdfkfd, $= \frac{2}{3}\alpha dR^2\mathfrak{Q} + \frac{2}{3}bcR^2\mathfrak{Q} + \frac{2}{3}eR^2\mathfrak{Q} - \frac{2}{3}R^2\mathfrak{Q}$.

22. Ut CP $= R$, ad Kk = KL $= \beta R$; (fig. 195, 198.) ſive ut 1 ad β: ſic Anguli fKk arcus $c\mathfrak{Q}$, ad longitudinem arcus fk, $= \beta c\mathfrak{Q}$: Et ſic Anguli fKF = fKL Sinus, $\frac{R}{\beta}\sqrt{:a^2 - b^2:}$ ad rectam fF, $= R\sqrt{:a^2 - b^2}$.

23. Kk $= \beta R$, ducta in fk $= \beta c\mathfrak{Q}$; exhibet Sectorem fKf $= \beta^2 cR\mathfrak{Q} = cR\mathfrak{Q} - b^2 cR\mathfrak{Q}$. Atque hic ductus in $\frac{1}{3}$CK $= \frac{1}{3}bR$, exhibet Coni portionem CfKf $= \frac{1}{3}bcR^2\mathfrak{Q} - \frac{1}{3}b^3 cR^2\mathfrak{Q}$.

24. KF $= \alpha R$: ducta in fF $= R\sqrt{:a^2 - b^2:}$ exhibet Triangulum KfFf $= \alpha R^2\sqrt{:a^2 - b^2}$. Atque hoc ductum in $\frac{1}{3}$CK $= \frac{1}{3}bR$, exhibet Pyramidem CKfFf $= \frac{1}{3}\alpha bR^3\sqrt{:a^2 - b^2}$. Cui (propter CK = DF, KF = CD, adeoque $\frac{1}{3}$CK × KF × Ff = $\frac{1}{3}$CD × DF × Ff,) æqualis eſt Pyramis CDff.

25. Ut CP $= R$, ad DS $= aR$; ſeu ut 1 ad a: Sic Arcus Anguli fDd $= d\mathfrak{Q}$, ad Arcum fd $= ad\mathfrak{Q}$. Qui ductus in Dd = DS $= aR$, exhibet binos Sectores, 2fDd $= a^2 dR\mathfrak{Q}$. Qui ducti in $\frac{1}{3}$CD $= \frac{1}{3}\alpha R$, exhibent binas Coni Portiones, 2CfDd, $= \frac{1}{3}\alpha a^2 dR^2\mathfrak{Q}$.

26. Additis

26. Additis igitur Binis Sectoribus (§ 21.) 2 C d f k f d $= \frac{4}{3}\alpha d R^2 \mathfrak{Q} + \frac{4}{3} bc R^2 \mathfrak{Q} + \frac{4}{3} c R^2 \mathfrak{Q} - \frac{4}{3} R^2 \mathfrak{Q}$: Atque Binis Coni portionibus (§ 23.) 2 C f K f $= \frac{2}{3} bc R^2 \mathfrak{Q} - \frac{2}{3} b^3 c R^2 \mathfrak{Q}$; Binisque Pyramidibus (§ 24.) 2 C K f f $= \frac{2}{3}\alpha b R^3 \sqrt{:a^2 - b^2:}$ (quæ cum binis illis portionibus Coni, complent Solidum Conicum, basis quadrilineæ, C f F f k f F f k:) Binisque Pyramidibus (§ 24.) 2 C D f f $= \frac{2}{3}\alpha b R^3 \sqrt{:a^2 - b^2}$; & Bis binis Coni portionibus (§ 25.) 4 C f D d $= \frac{2}{3}\alpha a^2 d R^2 \mathfrak{Q}$, (quæ cum binis Pyramidibus C D f f, complent, bina Solida Conica C d d f f:) Habetur Segmenti Portio d d d d f f f f, $= \frac{4}{3}\alpha d R^2 \mathfrak{Q} + \frac{2}{3}\alpha a^2 d R^2 \mathfrak{Q} + 2 bc R^2 \mathfrak{Q} - \frac{2}{3} b^3 c R^2 \mathfrak{Q} + \frac{4}{3} c R^2 \mathfrak{Q} - \frac{4}{3} R^2 \mathfrak{Q} + \frac{4}{3}\alpha b R^3 \sqrt{:a^2 - b^2}$. Fig. 194, 195, 196, 197, 198.

27. Atque hoc Additum vel Subductum (prout Segmentum Majus, Minusve requiratur) Semisegmento (§ 8.) d s d C d s d $= \frac{4}{3}\alpha R^2 \mathfrak{Q} + \frac{2}{3}\alpha a^2 R^2 \mathfrak{Q}$: Exhibet Sphæræ Segmentum Majus, Minusve; F s p s F K, vel F S P S F K; $= \frac{4}{3}\alpha R^2 \mathfrak{Q} + \frac{2}{3}\alpha a^2 R^2 \mathfrak{Q} \pm \frac{4}{3}\alpha d R^2 \mathfrak{Q} \pm \frac{2}{3}\alpha a^2 d R^2 \mathfrak{Q} \pm 2 bc R^2 \mathfrak{Q} \mp \frac{2}{3} b^3 c R^2 \mathfrak{Q} \pm \frac{4}{3} c R^2 \mathfrak{Q} \mp \frac{4}{3} R^2 \mathfrak{Q} \pm \frac{4}{3}\alpha b R^3 \sqrt{:a^2 - b^2}$.

28. Denique; Data Vasis Semi-longitudo, seu ratio Cδ, ad C D; hoc est, ratio Cβ, ad C B; ponatur ut f ad 1. Eritque expositum Sphæroeideos Segmentum Majus, Minusve; $\Phi\sigma p\sigma\Phi$, vel $\Phi\Sigma P\Sigma\Phi$; $= \frac{4}{3} f\alpha R^2 \mathfrak{Q} + \frac{2}{3} f\alpha a^2 R^2 \mathfrak{Q} \pm \frac{4}{3} f\alpha d R^2 \mathfrak{Q} \pm \frac{2}{3} f\alpha a^2 d R^2 \mathfrak{Q} \pm 2 f bc R^2 \mathfrak{Q} \mp \frac{2}{3} f b^3 c R^2 \mathfrak{Q} \pm \frac{4}{3} f c R^2 \mathfrak{Q} \mp \frac{4}{3} f R^2 \mathfrak{Q} \pm \frac{4}{3} f\alpha b R^3 \sqrt{:a^2 - b^2}$. Quod propositum erat inquirendum.

Calculi Synopsis.

§ 1. R; Data Semidiameter Major, seu Radius inscriptæ Sphæræ; C P.
§ 2. $a R$; Data Semidiameter Minor; D S.
§ 9. $b R$; Data Altitudo supra infrave Centrum; C K.
§ 28. $f R$; Semi-longitudo Conoeideos; C β.
§ 3. $\alpha = \sqrt{:1 - a^2}$.
§ 10. $\beta = \sqrt{:1 - b^2}$.
§ 1. $\mathfrak{Q}$; Angulus Rectus; vel Quadrans Peripheriæ Circuli Maximi.

§ 11. $c\mathfrak{Q}$, § 13. $d\mathfrak{Q}$, § 17. $e\mathfrak{Q}$ } Anguli, vel Arcus Circuli maximi, respondentes Sinibus rectis { $\frac{\alpha}{\beta} R$. ; $\frac{b}{a} R$. ; $\frac{\sqrt{:a^2 - b^2:}}{\alpha\beta} R$.

$+ \frac{8}{3} R^2 \mathfrak{Q}$; Sphæra integra, B p B P.
$+ \frac{4}{3} R^2 \mathfrak{Q}$; Hemisphærium, B B P.
$+ \frac{4}{3} b R^2 \mathfrak{Q}$; Zona Solida BLCLB, } Segmentum B L L B.
$+ \frac{2}{3} b\beta^2 R^2 \mathfrak{Q}$; Conus L C L K, } Segmentum B L L B.
$+ \frac{4}{3} a R^2 \mathfrak{Q}$; Zona Solida B S C S B, } Segmentum B S S B.
$+ \frac{2}{3} a\alpha^2 R^2 \mathfrak{Q}$; Conus S C S H, } Segmentum B S S B.

§ 5. $+ \frac{4}{3}\alpha R^2 \mathfrak{Q}$, Semizona solida S C S P,
§ 7. $+ \frac{2}{3}\alpha a^2 R^2 \mathfrak{Q}$, duo Semiconi 2 D C S,
} § 8. Semisegmentum S D D S P

§ 14. $+ \frac{4}{3}\alpha d R^2 \mathfrak{Q}$,
§ 19. $+ \frac{4}{3} c R^2 \mathfrak{Q}$,
§ 19. $- \frac{4}{3} R^2 \mathfrak{Q}$,
§ 19. $+ \frac{4}{3} bc R^2 \mathfrak{Q}$,
} § 20. 21 duo Sectores 2FFCDD, seu potius 2 C f k f d d,

§ 23. $+ \frac{2}{3} bc R^2 \mathfrak{Q}$,
§ 23. $- \frac{2}{3} b^3 c R^2 \mathfrak{Q}$,
} duæ portiones Coni, 2CKfkf,

§ 24. $+ \frac{2}{3}\alpha b R^3 \sqrt{:a^2 - b^2:}$ duæ Pyramides, 2 C K f F f,
} § 26. Pyram. F C F

§ 24. $+ \frac{2}{3}\alpha b R^3 \sqrt{:a^2 - b^2:}$ duæ Pyramides, 2 C D f F f,
§ 25. $+ \frac{2}{3}\alpha a^2 d R^2 \mathfrak{Q}$, bis binæ Portiones Coni, 2 C D f d,
} § 26. 2 Pyram. F C D

} § 26. Intersegmentum D F f D.

Semisegmentum + vel − Intersegmentum } § 27. F s p s F, major vel F S P S F minor } Portio.

§ 28. Hæc ducta in f; sunt Homologæ partes Conoeideos.

Exemplum Calculi.

Fig. 194, 195. Posito $R = 1$. Circulus Maximus, $2RQ = 3.1415926\frac{1}{2}$

Erit $Q = 1.5707963\frac{1}{4}$ Superficies Sphæræ, $8RQ = 12.5663706$

$\frac{1}{3}Q = 0.5235987\frac{3}{4}$ Superf. Hemisphærii, $4RQ = 6.2831853$

Sphæra integra, BpBP, $\frac{8}{3}R^2Q, = 4:1887902$

Hemisphærium, BBP, $\frac{4}{3}R^2Q, = 2.0943951$

Casus I.

$a = 0.75$ $a^2 = 0.5625$ $\alpha^2 = 1 - a^2 = 0.4375$ $\alpha = 0.6614378\frac{4}{5}$

$b = 0.5$ $b^2 = 0.25$ $\beta^2 = 1 - b^2 = 0.75$ $\beta = 0.8660254+$

$a^2 - b^2 = \beta^2 - \alpha^2 = 0.3125$ $\sqrt{:a^2 - b^2:} = 0.5590169+$

$4 + 2a^2 = 5.125$ $4\alpha + 2a^2\alpha = 3.3898688\frac{1}{3}$

Segmentum SspCP, vel semisegmentum SDDSP,

$\frac{4+2a^2}{3}\alpha R^2 Q$ $= 1.7749312-$

Segmentum integrum SspsSP, (istius duplum,) $= 3.5498624-$

Segmentum SsB, vel 2 SDB, (= BBP—SDDSP,) $= 0.3194639+$

Semisegmentum SDB, (istius semissis,) $= 0.1597319\frac{1}{2}$

$4 + 2\alpha^2 = 4.875$ $4a + 2\alpha^2 a = 3.65625$

Segmentum BSSB, $\frac{4+2\alpha^2}{3}aR^2Q,$ $= 1.9144080+$

Segmentum SSP, (= BBP — BSSB,) $= 0.1799871-$

Segmentum DSSD, (= SDDSP — SSP = BSSB — 2SDB) $= 1.5949441-$

$4 + 2\beta^2 = 5.5$ $4b + 2\beta^2 b = 2.75$

Segmentum BLLB, $\frac{4+2\beta^2}{3}bR^2Q,$ $= 1.4398966\frac{5}{8}$

Segmentum LLP, (= BBP — BLLB,) $= 0.6544984\frac{1}{2}$

Segmentum LSSL, (= BSSB — BLLB,) $= 0.4745113\frac{1}{2}$

$\frac{\alpha}{\beta}R = 0.7637626\frac{1}{8}$ Sin. Ang. gr. 49. 47', 8225. $= \frac{0.5533005}{1.0000000}Q = cQ$

$\frac{b}{a}R = 0.6666666\frac{2}{3}$ Sin. Ang. gr. 41. 48', 6186. $= \frac{0.4645590}{1.0000000}Q = dQ$

$a\beta = 0.6495190\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{:a^2 - b^2:}}{a\beta}R = 0.8606628\frac{1}{3}$ Sin. Ang. gr. 59. 23', 4658

$= \frac{0.6599010}{1.0000000}Q = eQ$

$c = 0.5533005$ $d = 0.4645590$ $e = 0.6599010$

(Verum hic, adeoque in iis quæ hinc dependent, ultima nota, fortassis & penultima, sunt in ambiguo; eo quod Canon Sinuum ad tantam ἀκρίβειαν vix patitur pervenire.)

$6b - 2b^3 = 2.75$ $6bc - 2b^3c = 1.5215764$ $4e = 2.6396040$

$+\frac{6-2b^2}{3}bcR^2Q = 0.7966955$

$+\frac{4+2a^2}{3}\alpha dR^2Q = 0.8245649$

$+\frac{4}{3}eR^2Q = 1.3820935$

$-\frac{4}{3}R^2Q = -2.0943951$

$+\frac{4}{3}abR^3\sqrt{:a^2 - b^2:} = 0.2465033$

} = Intersegment. DFFD, = 1.1554621. saltem 1.15546 proxime.

Frusti Sphærici Portio { Major, FspsF, (= SDDSP + DFFD) = 2.9303933 ; Minor, FSPSF, (= SDDSP — DFFD,) = 0.6194691 }

Abscissa 2LFDB, (= BLLB — DFFD,) = 0.2844345½

LFDB = 0.1422173 —

2SFL, (= LLP — FSPSF = 2EDB — 2LFDB,) = 0.0350293½

SFL = 0.0175147 —

Casus II.

Casus II.

$a = 0.8 \quad a^2 = 0.64 \quad \alpha^2 = 1 - a^2 = 0.36 \quad \alpha = 0.6$ Fig. 194. 195, 196, 197, 198.

$b = 0.6 \quad b^2 = 0.36 \quad \beta^2 = 1 - b^2 = 0.64 \quad \beta = 0.8$

$a^2 - b^2 = \beta^2 - \alpha^2 = 0.28 \quad \sqrt{:a^2 - b^2:} = 0.5291502\tfrac{1}{3} +$

$4 + 2\alpha^2 = 5.28 \qquad 4\alpha + 2\alpha^2\alpha = 3.168$

$SDDSP = \frac{4 + 2\alpha^2}{3} \alpha R^2 \mathcal{Q} = 1.6587609 +$

$SspsSP\,(= 2SDDSP) = 3.3175218 +$

$SsB = 2SDB\,(= BBP - SDDSP) = 0.4356342 -$

$SDB = 0.2178171 -$

$4 + 2a^2 = 4.72 \qquad 4a + 2a^2 a = 3.776$

$BSSB = \frac{4 + 2a^2}{3} a R^2 \mathcal{Q} = 1.9771090 +$

$SSP\,(= BBP - BSSB) = 0.1172861 +$

$DSSD\,(= SDDSP - SSP = BSSB - 2SDB) = 1.5414748$

$4 + 2\beta^2 = 5.28 \qquad 4b + 2\beta^2 b = 3.168$

$BLLB = \frac{4 + 2\beta^2}{3} b R^2 \mathcal{Q} = 1.6587609 +$

$LLP\,(= BBP - BLLB) = 0.4356342 -$

$LSSL\,(= BSSB - BLLB) = 0.3183481 -$

$\frac{\alpha}{\beta} R = 0.75$ Sinus Ang. gr. 48. 35′, 4229 $= \frac{0.5398931}{1.0000000} \mathcal{Q} = c\,\mathcal{Q}$

$\frac{b}{a} R = 0.75$ Sinus Ang. gr. 48. 35′, 4229 $= \frac{0.5398931}{1.0000000} \mathcal{Q} = d\,\mathcal{Q}$

$a\beta = 0.64$

$\frac{\sqrt{:a^2 - b^2:}}{a\beta} R = 0.8267973 -$ Sinus Ang. gr. 55. 46′, 2682

$= \frac{0.6196793}{1.0000000} \mathcal{Q} = e\,\mathcal{Q}$

$c = 0.5398931 \qquad d = 0.5398931 \qquad e = 0.6196793$

$6b - 2b^3 = 3.168 \qquad 6bc - 2b^3c = 1.7103814 \qquad 4e = 2.4787172$

$$\left.\begin{array}{ll} + \frac{6 - 2b^2}{3} bc R^2 \mathcal{Q} & = 0.8955536 \\ + \frac{4 + 2a^2}{3} \alpha d R^2 \mathcal{Q} & = 0.8955536 \\ + \frac{4}{3} e R^2 \mathcal{Q} & = 1.2978533 \\ - \frac{4}{3} R^2 \mathcal{Q} & = -2.0943951 \\ + \frac{4}{3} \alpha b R^2 \sqrt{:a^2 - b^2:} & = 0.2539921 \end{array}\right\} = \text{Intersegment. } DFFD, = 1.2485575. \text{ saltem } 1.24856 \text{ proxime.}$$

Frusti Sphærici, Portio $\left\{\begin{array}{l}\text{Major, } FspsF, (= SDDSP + DFFD) = 2.9073184 \\ \text{Minor, } FSPSF, (= SDDSP - DFFD,) = 0.4102034\end{array}\right.$

$2LFDB\,(= BLLB - DFFD) = 0.4102034$

$LFDB = 0.2051017$

$2SFL\,(= LLP - FSPSF = 2SDB - 2LFDB) = 0.0254308$

$SFL = 0.0127154$

Atque ad eandem formam procedendum erit in aliis casibus quibuscunque, prout alii atque alii valores ponuntur datarum magnitudinum a & b.

Inventis autem (pro casibus assignatis quibusvis) Portionibus Frusti Sphærici; habentur correspondentes portiones Frusti Sphæroideos, ductis singulis in f; quæcunque fuerit ea ratio, Axis Sphæroideos ad Diametrum Sphæræ; ($\beta\beta$ ad BB, vel Cβ ad CB = CP, vel Cδ = Kϕ ad CD = KF = HS Co-sinum dati DS, in Circulo Radii CP;) quam appellamus, f ad 1.

PROP. XXVII.

A. B. Fig. 199, 200. Figura Spiralis (linea Spirali à principio orsa, & recta contermina, terminata) est contermini Sectoris Triens: Toties repetitis omnibus, quoties iterato describuntur.

C. Sumptisque angulis A M T, A M T, &c. arithmetice proportionalibus; si Figura Spiralis primo conveniens ponatur 1; eadem per duos continuata, erit 8; per tres, 27; per quatuor, 64; & sic deinceps, secundum numeros cubos continue sequentes.

B. Totaque figura circulationis primæ, est contermini circuli primi Triens; &, duarum circulationum (repetito quod in secunda iterato describitur, quod ubique intelligendum est,) ejusdem Circuli primi Octo trientes; Trium Circulationum, ejusdem Viginti septem Trientes, (seu totius Noncuplum;) Quatuor Circulationum, ejusdem Sexaginta quatuor Trientes, & sic deinceps.

Et, universaliter, (posito R pro circuli primi Radio; P, pro ejusdem peripheria; angulique circulationis quousque libet continuatæ ratione ad quatuor rectos; vel correspondentis arcus circuli Primi, ad integram ejus Peripheriam; ut a ad P;) Figuræ Spirales sic descriptæ(repetitis toties omnibus quoties describuntur)Magnitudo est $\frac{a^3R}{6P^2}$.

D. Adeoque, quæ continuis Circulationum angulis æqualibus conveniunt figuræ Spirales, sunt ut numerorum cuborum continue sequentium 0, 1, 8, 27, 64, 125, &c. differentiæ; 1, 7, 19, 37, 61, &c.

Et speciatim quod Circulatione Prima describitur, est contermini Circuli primi Triens; quod secunda, ejusdem Primi Circuli Septem trientes; quod Tertia, ejusdem Trientes Novendecim; quod Quarta, ejusdem Trientes Triginta-septem; quod Quinta, ejusdem Trientes Unus & sexaginta. Et sic deinceps.

E. Figuræ Spiralis (à Principio orsæ) quousque libet continuatæ, toties repetitis omnibus quoties iterato describuntur: (posito s pro sinu recto anguli circulationis, ad Radium R; & v pro sinu complementi; ipsoque s, pro Semicirculis secundo, quarto, sexto, octavo, cæterisque in locis paribus, per contrarium signum semper exposito, utpote ad contrarias diametri partes posito:) Momentum respectu rectæ P M F, est $\frac{6aR^5 - 6sR^5 - 6avR^4 - a^3R^3 + 3a^2sR^3 + a^3vR^2}{3P^3}$; Centrique gravitatis inde distantia, $\frac{12aR^4 - 12sR^4 - 12avR^3 - 2a^3R^2 + 6a^2sR^3 + 2a^3vR}{a^3P}$:

Et quidem vel ad partes E, vel ad partes G, prout signum +, vel −, prævaluerit.

H. Ejusque Momentum respectu rectæ E M G, $\frac{6vR^5 + 3a^2R^4 - 6asR^4 - 3a^2vR^3 + a^3sR^2}{3P^3}$; Centrique gravitatis inde distantia, $\frac{12vR^4 + 6a^2R^3 - 12asR^3 - 6a^2vR^2 + 2a^3sR}{a^3P}$: Et quidem vel ad partes P, vel ad partes F, prout signum +, vel −, prævaluerit.

Et

Et speciatim, Circulationis Quadrantalis, Unius; Magnitudo, $\frac{1}{384}RP$: D.
Respectu PMF, versus E, momentum, $\frac{-32R^6+R^4P^2}{16P^3}$; distantia F.
Centri gravitatis, $\frac{-768R^5+24R^3P^2}{P^4}$: Respectu EMG, versus P, mo- I.
mentum, $\frac{384R^6-96R^5P+R^3P^3}{192P^3}$; distantia, $\frac{768R^5-192R^4P+2R^2P^3}{P^4}$.

Duarum; Magnitudo, $\frac{8}{384}RP = \frac{1}{48}RP$: Respectu PMF, versus E, momen- D.
tum $\frac{-24R^5+R^3P^2}{24P^2}$; distantia, $\frac{-48R^4+2R^2P^2}{P^3}$: Respectu EMG, F. I.
versus F, momentum $\frac{-16R^6+R^4P^2}{4P^3}$; distantia, $\frac{-192R^5+12R^3P^2}{P^4}$.

Trium; Magnitudo, $\frac{27}{384}RP = \frac{9}{128}RP$: Respectu PMF, versus G, momen- D.
tum $\frac{-32R^6+9R^4P^2}{16P^3}$; distantia, $\frac{-256R^5+72R^3P^2}{9P^4}$: Respectu EMG, versus F. I.
F, momentum $\frac{-128R^6-96R^5P+9R^3P^3}{64P^3}$; distantia,
$\frac{-768R^5-576R^4P+54R^2P^3}{P^4}$.

Quatuor; Magnitudo, $\frac{64}{384}RP = \frac{1}{6}RP$: Respectu PMF, versus G, mo- D.
mentum, $\frac{-6R^5+R^3P^2}{3P^2}$; distantia, $\frac{-12R^4+2R^2P^2}{P^3}$: Respectu F.
EMG, versus P, momentum $\frac{R^4}{P}$; distantia, $\frac{6R^3}{P}$. I.

Quinque; Magnitudo, $\frac{125}{384}RP$: Respectu PMF, versus E, momentum, D.
$\frac{-32R^6+25R^4P^2}{16P^3}$; distantia, $\frac{-768R^5+600R^3P^2}{125P^4}$: Respectu EMG, F. I.
versus P, momentum, $\frac{384R^6-480R^5P+125R^3P^3}{192P^3}$; distantia,
$\frac{768R^5-960R^4P+250R^2P^3}{P^4}$.

Atque in reliquis similiter.

Adeoque; Secundæ, Magnitudo, $\frac{7}{384}RP$: Respectu PMF, versus D.
E, momentum, $\frac{96R^6-48R^5P-3R^4P^2+2R^3P^3}{48P^3}$; distantia, F.
$\frac{768R^5-384R^4P-24R^3P^2+16R^2P^3}{7P^4}$: Respectu EMG, versus I.
F, momentum, $\frac{-384R^6-96R^5P+48R^4P^2+R^3P^3}{192P^3}$; distantia,
$\frac{-768R^5-192R^4P+96R^3P^2+2R^2P^3}{7P^4}$.

Tertiæ; Magnitudo, $\frac{19}{384}RP$: Respectu PMF, versus G, momentum, D.
$\frac{-96R^6-48R^5P+27R^4P^2+2R^3P^3}{48P^3}$; distantia, F.
$\frac{-768R^5-384R^4P+216R^3P^2+16R^2P^3}{19P^4}$: Respectu EMG, ver- I.
sus F, momentum, $\frac{128R^6-96R^5P-16R^4P^2+9R^3P^3}{64P^3}$; distantia,
$\frac{768R^5-576R^4P-96R^3P^2+54R^2P^3}{19P^4}$.

Quartæ;

D. F. Quartæ; Magnitudo, $\frac{37}{384} RP$: Respectu PMF, versus G, momentum $\frac{96 R^6 - 96 R^5 P - 27 R^4 P^2 + 16 R^3 P^3}{48 P^3}$; distantia,

I. $\frac{768 R^5 - 768 R^4 P - 216 R^3 P^2 + 128 R^2 P^3}{37 P^4}$: Respectu EMG, versus P, momentum, $\frac{-128 R^6 - 96 R^5 P + 64 R^4 P^2 + 9 R^3 P^3}{64 P^3}$; distantia, $\frac{-768 R^5 - 576 R^4 P + 384 R^3 P^2 + 54 R^2 P^3}{37 P^4}$.

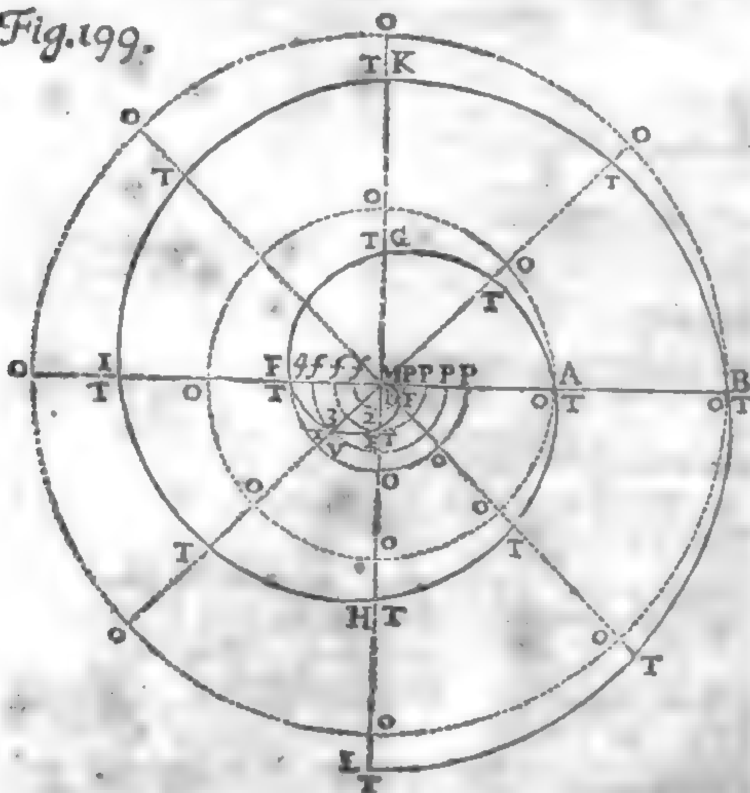
D. F. Quintæ; Magnitudo, $\frac{61}{384} RP$: Respectu PMF, versus E, momentum, $\frac{-96 R^6 - 96 R^5 P + 75 R^4 P^2 + 16 R^3 P^3}{48 P^3}$; distantia,

I. $\frac{-768 R^5 - 768 R^4 P + 600 R^3 P^2 + 128 R^2 P^3}{61 P^4}$: Respectu EMG, versus P, momentum, $\frac{384 R^6 - 480 R^5 P - 192 R^4 P^2 + 125 R^3 P^3}{192 P^3}$; distantia, $\frac{768 R^5 - 960 R^4 P - 384 R^3 P^2 + 250 R^2 P^3}{61 P^4}$.

Et similiter in cæteris.

G. K. Quæque de *Figura Spirali* tradita sunt; eadem *Solido Scalari* facile accommodantur.

A. Fig. 199, 200. SIt MTT Spiralis *Archimedea*; cujus natura hæc est: Dum recta quæpiam, ut MA, à situ suo MA (quod *Circulationis principium* vocant) manente puncto M ut Centro (quod vocant *Principium Spiralis*) æquabiliter circumdu-



cta, describit circulum AOOA (quem vocant *Circulum primum*;) intelligitur Punctum aliquod T (quod voco *Punctum Lineans*) eodem tempore ab M ad A in

in circumducta recta M A æquabiliter promotum, motu hoc composito Spiralem M T T A describere, (quem vocant *Spiralem Primæ circulationis*:) Eisdemque motibus continuatis; dum eadem recta M A, tantundem ad B protracta, hoc est M A B, secundo circumducta, describit B O O B *Circulum secundum*; Punctum Fig. 199, 200.

Fig. 200.

illud Lineans, similiter ab A ad B promota, describit A T T B *Spiralem circulationis Secundæ*: Et sic deinceps, ad tertiam, quartam, aut etiam plures circulationes, quousque libet.

Manifestum itaque est (ex constructione) rectas M T, respectivis angulis A M T, vel arcubus A O, (propter æquabilem utrobique motum) proportionales esse: Nempe, Quota pars est Arcus A O totius Peripheriæ; vel Angulus A M T, quatuor rectorum; ea pars est M T respectiva, totius M A: Vel etiam (sumpta *Anguli* appellatione, laxiori sensu, pro Angulorum quotlibet Aggregato, quamquam duos rectos, aut etiam plures, vel æquet, vel superet; *Arcusque* appellatione, pro Arcuum aggregato quovis, etiamsi superet integram Circuli Peripheriam; ut & *Sectoris* nomine, pro Sectorum quotlibet Aggregato, utut integrum Circulum vel etiam plures superet;) Quam habet rationem A M T Angulus (sic sumptus) ad quatuor rectos; vel correspondens arcus A O, ad peripheriam integram A O A; eam habet respectiva recta M T, ad M A. Et sic ubique.

Et, consequenter; si intelligatur Figuræ Spirali M T T M (curva M T T rectaque M T, sumpto ubivis T ultimo, comprehensæ) aptari figura ex similibus Sectoribus conflata; (quorum commune Centrum sit M, principium Spiralis;) erunt eorum Radii Arithmetice proportionales, (puta ut 0, 1, 2, 3, 4, &c. si figuram inscriptam consideremus; vel ut 1, 2, 3, 4, 5, &c. si circumscriptam; aut etiam ut $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, &c. hoc est ut 1, 3, 5, 7, 9, &c. si his intermediam, partim inscriptam, partim circumscriptam; quæ omnia, in partibus infinite exiguis, tantundem valent, ut ad prop. 1. hujus ostensum est:) Nempe, ut Series *Primanorum*. Adeoque Sectores ipsi (utpote in duplicata ratione Radiorum,) ut Series *Secundanorum*.

Et, consequenter, eorum Aggregatum, ad Aggregatum totidem maximo æqualium; hoc est (per def. 1. cap. 4.) M T M figura Spiralis, ad Sectorem conterminum P T M; ut 1 ad 3; (per prop. 1. hujus:) ubicunque sumatur T ultimum. Puta (posito ultimo T in V,) M T T V M = $\frac{1}{3}$ M V P M. Et sic ubique.

Et speciatim, Figura Spiralis Primæ Circulationis, æqualis Trienti Circuli Primi: Et figura Spiralis Duarum Circulationum (bis computato quod bis describitur,) æqualis Trienti Circuli Secundi bis sumpti (ut qui Radio maximo bis circumducto bis describitur:) Figura Spiralis Trium Circulationum (à principio B.

Ttttt semper

Fig. 199, 200. ſemper ordiendo,) toties computando quamlibet partem quoties iterato deſcribitur, (quippe quod prima circulatione deſcribitur, id in ſecunda repetitur; totumque hoc, in tertia; & ſic deinceps;) æqualis Trienti Circuli Tertii ter ſumpti (utpote qui à Radio maximo, ter circumducto, ter deſcribitur:)

Et ſic ſemper, ubicunque tandem terminetur (ſive in abſolutæ alicujus Circulationis termino, ſive loco quovis intermedio:) Nempe, Figuram Spiralem, Trientem eſſe Sectoris contermini, toties repetitis omnibus quoties ea iterato deſcribuntur, ſive à Radiis creſcentibus intra Spiralem, ſive à Radio maximo in contermino Sectore.

C. Sumptis igitur, ad idem M punctum, (à Principio Circulationis ordiendo,) angulis continuis quotlibet æqualibus, (cujuſcunque magnitudinis,) ut P M 1, 1 M 2, 2 M 3, 3 M 4, &c. quæ (à Spiralis Principio orſæ) huc pertingunt Figuræ Spirales; (puta M 1 M, M 1 2 M, M 1 2 3 M, M 1 2 3 4 M, &c.) ſunt ut 1, 8, 27, 64, &c. numeri cubi continue ſequentes; ſive ut Series Tertianorum. Cum enim (per ipſam ſpiralis conſtructionem) Radii M 1, M 2, M 3, &c. ſint arithmetice proportionales, ſeu ut Series Primanorum; puta ut a, $2a$, $3a$, &c. adeoque Sectores ſimiles ad hos Radios (utpote in Radiorum ratione duplicata,) ut a^2, $4a^2$, $9a^2$, &c. Series Secundanorum: Erunt (propter ipſos Sectorum angulos arithmetice proportionales, ſimiliter creſcentes ut a, $2a$, $3a$, &c.) Sectores M 1 P, M 2 P, M 3 P, &c. ut a^3, $8a^3$, $27a^3$, &c. (nempe in ea ratione quæ componitur ex ratione Angulorum, & ex duplicata ratione Radiorum,) quæ eſt ut ſeries Tertianorum. Adeoque & Conterminæ Figuræ Spirales, M 1 M, M 1 2 M, M 1 2 3 M, &c. (utpote Sectorum illorum Trientes, ut modo oſtenſum eſt,) ut $\frac{1}{3}a^3$, $\frac{8}{3}a^3$, $\frac{27}{3}a^3$, &c. ſeries item Tertianorum; ſeu ut 1, 8, 27, &c. numeri cubi.

D. Et, conſequenter; quæ his continuis angulis æqualibus conveniunt Figuræ Spiralis Portiones; puta M 1 M, 1 M 2, 2 M 3, 3 M 4, &c. ut 1, 7, 19, 37, &c. Cuborum 0, 1, 8, 27, 64, &c. differentiæ. (Quæ omnia in noſtra *Arithmetica Infinitorum*, fuſius expoſuimus; præſertim a prop. 24. ad prop. 38.)

Et, ſpeciatim, ſumptis Angulis rectis P M E, E M F, F M G, G M A, A M H, H M I, I M K, K M B, B M L, &c. Poſita figura Spirali M T E M = 1, erunt M T E F M = 8, M T E F G M = 27, M T E F G A M = 64, &c. Cum itaque ſit M T E F G A M triens circuli primi, (ut jam oſtenſum eſt;) hoc eſt, (poſito Circuli Primi Radio M A = R, & peripheria A O A = P, adeoque ipſo circulo primo A O A = $\frac{1}{2}RP$,) Figura Spiralis primæ Circulationis M T E F G A M = $\frac{1}{6}RP = \frac{64}{384}RP$: Erit quæ primo quadranti convenit figura Spiralis $\frac{1}{384}RP$; quæ Duobus $\frac{8}{384}RP = \frac{1}{48}RP$; quæ Tribus, $\frac{27}{384}RP = \frac{9}{128}RP$; quæ Quatuor (hoc eſt Figura Spiralis Primæ Circulationis) $\frac{64}{384}RP = \frac{1}{6}RP$; quæ Quadrantibus Quinque (repetito quod erat in primo) $\frac{125}{384}RP$; quæ Sex quadrantibus (repetito quod erat in binis primoribus) $\frac{216}{384}RP = \frac{9}{16}RP$; quæ Septem quadrantibus (repetito quod erat in tribus primoribus) $\frac{343}{384}RP$; quæ quadrantibus Octo; hoc eſt, binis Circulationibus (repetito quod erat in prima) $\frac{512}{384}RP = \frac{4}{3}RP$: quæ Novem quadrantibus (repetitis quæ fuerant prius deſcripta, & quidem toties quoties deſcripta fuerant,) $\frac{729}{384}RP = \frac{243}{128}RP$; & ſic deinceps quouſque opus erit. Nempe, univerſaliter, in ea ratione ad $\frac{1}{6}RP$, (trientem circuli primi,) qua eſt a^3 ad P^3, ſeu r^3 ad R^3. Puta $\frac{a^3 R}{6 P^2}$, vel $\frac{r^3 P}{6 R^2}$.

Adeoque, quæ Primo quadranti convenit, M T E M = $\frac{1}{384}RP$; quæ Secundo, E M F = $\frac{7}{384}RP$; quæ Tertio, F M G, = $\frac{19}{384}RP$; quæ Quarto, G M A = $\frac{37}{384}RP$; quæ Quinto, A M H = $\frac{61}{384}RP$; quæ Sexto, H M I = $\frac{91}{384}RP$; quæ Septimo, I M K = $\frac{127}{384}RP$; quæ Octavo, K M B = $\frac{169}{384}RP$; quæ Nono, B M L = $\frac{217}{384}RP$; & ſic deinceps, quouſque libet, in ratione differentiarum numerorum Cuborum continue ſequentium.

E. His ita de Figurarum magnitudine conſtitutis; quo Centra gravitatis determinemus, eaſdem ad Duas Diametros, P M F, E M G, ſe mutuo in M decuſſantes, exigemus; earum momenta harum reſpectu, adeoque Centrorum gravitatis ab his diſtantias, inquirendo. Et primo quidem reſpectu ipſius P M F.

Sunt

Sunt autem (ut jam ostensum est) similium Sectorum infinite exiguorum (ex quibus conflari intelligitur Figura Spiralis) Radii, ut totidem a, Arcus vel Anguli arithmetice proportionales; adeoque Sectores ipsi, ut totidem a^2, eorum Quadrata. Fig. 199, 200.

Sed & eorum Centra gravitatis R in Sectoris cujusque medio Radio similiter sita; utpote quæ ipsius Besse (seu duobus trientibus) ab M distant (propter arcuum infinite-exiguorum quam supponimus cum chordis coincidentiam; saltem, rationem infinite-exiguam;) per prop. 14. hujus.

Et propterea illorum à PMF distantiæ RS,(fig 200.) sunt in ratione Sinuum rectorum, Arcuum seu Angulorum arithmetice proportionalium, ad Radios item (MR) arithmetice-proportionales; puta ut $a\,s$; hoc est in ratione quæ componitur ex s sinuum angulorum arithmetice proportionalium, & a radiorum similiter in proportione arithmetica crescentium.

(Nequis autem hæreat, eo quod non sit idem angulus PMR (cui convenit RS,) qui est Sectoris PMY, (propter rectam MRT per medium Sectoris ZMY incedentem:) Id nihili res est. Quippe; si ponantur anguli PMY, ut 1, 2, 3, 4, &c. erunt anguli PMR, seu PMT, ut $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, &c. Quæ, in partibus innumeris, infinite exiguis, tantundem valent. Ut ad prop. 1. hujus, ostensum est.)

Erunt itaque eorum, respectu ipsius PMF, Momentorum ratio (utpote ex ratione magnitudinum a^2, & distantiarum $a\,s$, composita,) ut $a^3 s$; hoc est, ut a^3 series Tertianorum (seu cuborum quantitatum arithmetice proportionalium) in s respectivos Sinus rectos arcuum seu angulorum arithmetice proportionalium. (Perinde autem est, Momentum quod spectat, sive ponantur Pondera a^2 in distantiis $a\,s$, sive Pondera a^3 in distantiis s; quippe utrobique Momenta erunt $a^3 s$.) Et quidem, pro duobus quadrantibus primoribus, ad (ipsius PMF) partes E, quam Ponderationem signo + designabimus; pro duobus sequentibus, ad partes contrarias, hoc est ad G, (propter quantitates ipsas, ad contrarias rectæ PMF partes, positas,) quam Ponderationem Signo — designabimus. Et similiter in quadrantibus sequentibus faciendum erit, prout ad illas vel istas partes ponantur: Nempe, pro quadrantibus Quinto & Sexto, ponendum signum +; pro Septimo & Octavo, signum —: & sic deinceps (alternatim) duobus intermissis.

Quod tantundem est atque si totidem $\beta\upsilon$ (ipsis s proportionales) complentes figuram Sinuum Rectorum $\alpha\gamma\kappa$ (fig. 170.) vel (quæ eandem aliquoties repetitam exhibet) MυFυAυI (fig. 201.) quousque opus erit continuandam, (ad alteras atque alteras ipsius MFAI partes positam, prout ipsius figuræ Spiralis situs postulat;) onerentur respectivis a^3, in triplicata ratione suarum ab M distantiarum, arithmetice-proportionalium; hoc est, serie Tertianorum.

Sive (quod tantundem est, propter distantias Mβ $=a$,) ut Momentum (respectu ipsius MP fig. 201.) omnium $a^2 s$; hoc est omnium $\beta\upsilon=s$, respectivis a^2 onustarum. (Signis + — rite consideratis.)

Hoc est, per prop. 10. hujus, ut *Aggregatum omnium* $a^2 s$, (usque ad a maximum) toties sump-

Fig. 201.

 tum,

Fig. 201. tum, (hoc est in a ductum;) demptis *Omnibus Aggregatis* ejusmodi usque ad respectivos a arithmetice proportionales.

Est autem illud *Aggregatum Omn.* $a^2 s, = -a^2 R^2 + 2asR^2 + a^2 vR - 2vR^3$, per § O. prop. 19. Nempe, Ungulæ $\alpha\beta\nu$ fig. 170. aciem habentis A α, momentum respectu A α; cui respondet, in nostro casu, Ungulæ M$\beta\nu$ fig. 201. aciem habentis P M, Momentum respectu P M.) Adeoque illud toties sumptum, hoc est, in $a =$ Mβ ductum, est $-a^3 R^2 + 2a^2 sR^2 + a^3 vR - 2avR^3$.

Quod quo rite intelligatur, considerandum est; per s, intelligendum esse sinum rectum arcui $\alpha\beta$ fig. 170. hoc est Mβ fig. 201. convenientem; hoc est, ipsam $\beta\nu$ rectam; quæ interpretanda erit affirmative vel negative, prout citra vel ultra M F A jaceat: Sicut & in ipso circulo Sinus Recti in contrariis semicirculis, contrariis signis affici intelligantur; utpote ad contrarias diametri partes positi: Item, per v intelligendum esse Sinum versum arcui $\alpha\beta$ fig. 170. hoc est, Mβ fig. 201. convenientem. Si autem β sumatur citra F; adeoque in primo Semicirculo; nihil est quo quis hæreat; (quippe hoc sæpius ostensum est, in prop. 17, de figura Sinuum Rectorum $\alpha\tau\kappa$ fig. 170.) Si vero ultra F qui terminus est primi Semicirculi (cui convenit sinus versus $v = 2R$, & Sinus Rectus $s = 0$) sumatur β; (quod tantundem est atque si in fig. 169. post absolutum semicirculum A D α, continuandus esset arcus, ultra α, in Semicirculo opposito, sursum, versus A, puta A D $\alpha\theta$,) Sinus Rectus contrario Signo afficiendus esset; & decresceret Sinus versus (subducto ex $2R$, quantum esset sinus versus continuati arcus $\alpha\theta$, ab α inchoandus;) usque dum, absoluto secundo Semicirculo, ad A fig. 169. perventum fuerit, evanescente tum Sinu Recto, secunda vice, in $s = 0$, tum Sinu verso in $2R - 2R = 0$. Sin porro procedatur, ultra circulum integrum, ad tertium Semicirculum; ibidem Sinus Rectus Affirmative interpretandus erit, & crescet iterum Sinus Versus; Qui in quarto iterum decrescet, & Sinus Rectus negative interpretandus: Et sic porro, alternis vicibus. Quippe eadem recta A V fig. 169. ($=$ A $\alpha - \alpha$ V $=$ A $\alpha - \alpha$ A $+$ A V, &c.) est sinus versus, tum Arcus A B, tum (residui ad Circulum integrum) A D $\alpha\theta$, aut etiam (ultra Circulum continuati) A D $\alpha\theta$ A B: Item arcus A B, sinus V B $= s$ affirmative interpretandus, arcusque A B $\alpha\theta$, sinus oppositus V $\theta = -s$ negative interpretandus; iterumque Arcus A B $\alpha\theta$ A B, sinus V B $= s$; & Arcus A B $\alpha\theta$ A B $\alpha\theta$, sinus V $\theta = -s$: Et sic deinceps, si ad plures integros circuitus procedendum erit.

Porro; propter *Aggregatum Omn.* $a^2 s, = -a^2 R^2 + 2asR^2 + a^2 vR - 2vR^3$, (ut modo ostensum est;) erunt *Omn. Aggregata* $a^2 s, =$ *Omn.* $-a^2 R^2 + 2asR^2 + a^2 vR - 2vR^3$; sumptis a arithmetice proportionalibus usque ad a maximum, hoc est Mβ.

Sunt autem *Omn.* $a^2 = \frac{1}{3}a^3$, per prop. 1. hujus; Ergo, *Omn.* $-a^2R^2, = -\frac{1}{3}a^3R^2$.

Et *Omn.* $as = -eR^2 + avR$, per § Q. prop. 17. (est utique Trilinei $\alpha\beta\nu$ fig. 170. momentum respectu A a,) Ergo, *Omn.* $2asR^2, = -2eR^4 + 2avR^3$.

Et *Omn.* $a^2 v, = -2eR^3 + 2avR^2 + \frac{1}{3}a^3 R - a^2 sR$, per § L. prop. 19. (Nempe Ungulæ A b K fig. 170. aciem habentis A α, momentum respectu A α.) Ergo, *Omn.* $a^2 vR, = -2eR^4 + 2avR^3 + \frac{1}{3}a^3R^2 - a^2 sR^2$.

Et *Omn.* $v, = eR$, per § B. prop. 17. (Est utique Trilineum A b K fig. 170.) Ergo, *Omn.* $-2vR^3 = -2eR^4$.

Ergo, *Omn. Aggregat.* $a^2 s, =$ *Omn.* $-a^2R^2 + 2asR^2 + a^2vR - 2vR^3$; $= -\frac{1}{3}a^3R^2 - 2eR^4 + 2avR^3 - 2eR^4 + 2avR^3 + \frac{1}{3}a^3R^2 - a^2sR^2 - 2eR^4 = -6eR^4 + 4avR^3 - a^2sR^2$.

Atque hoc demum subductum ex, *Aggregat.* $a^2 s$, in a maximum, $= -a^3R^2 + 2a^2sR^2 + a^3vR - 2avR^3$; relinquit *Omn.* $a^2 s := 6eR^4 - 6avR^3 - a^3R^2 + 3a^2sR^2 + a^3vR$.

Fig. 199, 200. Cum itaque singulorum Sectorum exiguorum Angulus sit, verbi gratia, infinitesima pars quatuor rectorum; cui respondeat in Circulo primo, arcus $T = \frac{1}{\infty} P$; adeoque in suis P T peripheriis conterminis, $t = \frac{a}{P} T$; (posito a pro arcu circuli primi qui respondeat angulo P M T;) & propterea eorum magnitudines sint

ſint $\frac{1}{2}tr$ (ſumptis tum t tum r arithmetice proportionalibus; ſintque Centrorum gravitatis ab M diſtantiæ RM $= \frac{2}{3}r$; adeoque eorundem à PMF diſtantiæ (utpote ad RM, ut Sinus Rectus anguli PMR ad Radium, ſeu ut s ad R,) RS $= \frac{2sr}{3R}$; adeoque eorum reſpectu PM momenta $\frac{1}{2}tr \times \frac{2sr}{3R} = \frac{tr^2 s}{3R}$, (ſumptis tum t, tum r, arithmetice proportionalibus, ipſiſque s pro ſinubus rectis arcuum arithmetice proportionalium ad Radium R;) adeoque (ut prius etiam oſtenſum eſt) in ratione ipſorum $a^3 s$: Si, pro *Omnibus* $a^3 s$, $= 6eR^4 - 6avR^3 - a^3R^2 + 3a^2sR^2 + a^3vR$, ſubſtituantur Totidem $\frac{tr^2 s}{3R} =$ Fig. 199, 200.

$$\frac{6etr^2R^3 - 6avtr^2R^2 - a^3tr^2R + 3a^2str^2R + a^3vtr^2}{3a^3};$$

habetur figuræ Spiralis, quouſque libet continuatæ, (cujus Radius ultimus MT $= r$,) momentum reſpectu rectæ PMF, (toties computata parte qualibet quoties iterato deſcribitur,) & quidem vel ad partes E, vel ad partes G; prout ſignum + aut − prævaleat. Aut etiam, (propter $t = \frac{aT}{P}$,)

$$\frac{6er^2R^3 (= 6ar^2R^3 - 6sr^2R^3) - 6avr^2R^2 - a^3r^2R + 3a^2sr^2R + a^3vr^2}{3a^2P} T:$$

Vel, (propter eandem ubique rationem r ad a, quæ eſt R ad P; utpote in eadem ratione ſemper creſcentibus r & a, donec perveniatur illic ad R, hic ad P, in termino primi circuli;) $\frac{6aR^5 - 6sR^5 - 6avR^4 - a^3R^3 + 3a^2sR^3 + a^3vR^2}{3P^3} T$: Vel (neglecto T; quippe dum T ponitur pro $\frac{1}{\infty}P$, infiniteſima parte ipſius P, & P pro earundem in P linea partium numero; tantundem erit PT, atque ipſa P linea;)

$$\frac{6aR^5 - 6sR^5 - 6avR^4 - a^3R^3 + 3a^2sR^3 + a^3vR^2}{3P^3}.$$

Sunt autem, ut ex prædictis patet, ſingulorum Sectorum exiguorum magnitudines, $\frac{1}{2}tr$; hoc eſt, $\frac{arT}{2P}$; ſeu $\frac{a^2RT}{2P^2}$, (propter $r = \frac{a}{P}R$.) Adeoque omnium ſumma $\frac{a^3RT}{6P^2}$ vel $\frac{a^3R}{6P^2}$ (utpote ad maximum toties ſumptum, ut 1 ad 3; per prop. 1. hujus.) Nempe in ea ratione ad $\frac{1}{6}RPT$ vel (neglecto T) ad $\frac{1}{6}RP$, (trientem circuli primi, ſeu figuram ſpiralem primæ circulationis,) ut a^3, ad P^3, ſeu ut r^3 ad R^3; hoc eſt, ut Cubus Radii terminalis MT, ad Cubum MA radii circuli primi.

Per hanc itaque Magnitudinem, ſi dividamus Momentum modo traditum; habebitur $\frac{12aR^4 - 12sR^4 - 12avR^3 - 2a^3R^2 + 6a^2sR^2 + 2a^3vR}{a^3P}$ Centri gravitatis figuræ Spiralis (quouſque libet continuatæ) MTT (toties computatis ſingulis partibus quoties iterato deſcribuntur) diſtantia à recta PMF; & quidem vel ad partes E vel ad partes G, (ſive Momenta ſpectemus, ſive diſtantiam Centri gravitatis,) prout ſignum + vel − prævaluerit.

Notandum interim (ne hæc perperam intelligantur) in ſemicirculationibus ſecunda, quarta, ſexta, (reliquiſque in locis paribus,) pro Momentis his atque Diſtantiis æſtimandis, ſinum s negative interpretandum eſſe; utpote, in his ſemicirculis, ad contrarias Diametri partes poſitum: Adeoque ita exponendum atque ſi contrario ubique ſigno afficeretur. Quod & ante inſinuatum eſt.

Et quidem, pro integris Circulationibus abſolutis, (propter tum $s = 0$, tum $v = 0$, in fine cujuſque circulationis,) Magnitudines erunt, $\frac{a^3P}{6P^2}$; Momenta reſpectu PMF (neglecto T, ob cauſam modo dictam,) $\frac{6aR^5 - a^3R^3}{3P^3}$; (toties repetitis omnibus quoties iterato deſcribuntur;) diſtantiæ centrorum gravitatis à F.

 PMF

Fig. 199. 200. PMF versus E, $\frac{12R^4-2a^2R^2}{a^2P}$; Hoc est, (propter signum —, prævalens; est utique, hoc casu, a^2 semper plus quam $6R^2$; non potest enim a in fine circulationis, minor esse quam P;) distantiæ à PMF versus G, $\frac{-12R^4+2a^2R^2}{a^2P}$. In quibus omnibus, exponetur a, in fine Circulationis Primæ, per P; in fine secundæ, per $2P$; Tertiæ, per $3P$; & sic deinceps.

Pro Circulationibus Dimidiis, quæ integram Circulationem non terminant; (puta, pro una, tribus, quinque, &c.) propter $s=0$, & $v=2R$; erunt magnitudines (ut prius) $\frac{a^3R}{6P^2}$; Momenta respectu PMF $\frac{-6aR^5+a^3R^3}{3P^3}$; distantiæ à PMF versus E, $\frac{-12R^4+2a^2R^2}{a^2P}$. In quibus exponetur a, in fine Semicirculationis primæ, per $\frac{1}{2}P$; tertiæ, per $\frac{3}{2}P$; quintæ, per $\frac{5}{2}P$; & sic deinceps. Adeoque signum $+$, in hoc casu, semper prævalet: propter Quadratum, Semiperipheriæ majus quam sex quadrata Radii.

Pro Circulationibus Quadrantalibus, quæ Semicirculationem non terminant, (puta, pro prima, tertia, quinta, &c.) propter tum $s=R$, pro prima, quinta, nona, &c. sed $s=-R$, pro tertia, septima, undecima, &c. tum $v=R$ in omnibus: magnitudines erunt (ut prius) $\frac{a^3R}{6P^2}$; Momenta respectu PMF, $\frac{-6R^6+3a^2R^4}{3P^3} = \frac{-2R^2+a^2}{P^3}R^4$; distantiæ à PMF, versus E, $\frac{-12R^5+6a^2R^3}{a^3P}$; nempe pro prima, quinta, nona, &c. In quibus exponetur a, in fine Quadrantis primi, per $\frac{1}{4}P$; quinti, per $\frac{5}{4}P$; noni, per $\frac{9}{4}P$; & sic deinceps. Et signum $+$, prævalet: propter quadratum Arcus Quadrantalis, majus quam Duo quadrata Radii. Sed, pro tertia, septima, undecima, &c. (propter s contrario signo exponendum, seu $s=-R$;) Momenta erunt $\frac{+6R^6-3a^2R^4}{3P^3} = \frac{+2R^2-a^2}{P^3}R^4$; Distantiæ, $\frac{+12R^5-6a^2R^3}{a^3P}$; adeoque (propter a, interpretandum per, $\frac{3}{4}P, \frac{7}{4}P, \frac{11}{4}P$, &c.) signum — prævalebit; eruntque tum Momenta, tum Distantiæ, versus G.

Sin libeat singulos quadrantes seorsum perpendere, (non, ut hactenus, inchoando à principio, omniaque toties repetendo quoties iterato describuntur;) illud sic fiet.

De Primo quadrante, MTEM, jam ostensum est, magnitudinem esse $\frac{a^3R}{6P^2}$, hoc est (propter $a=\frac{1}{4}P$,) $\frac{1}{384}RP$; Momentum respectu PMF, $\frac{-2R^6+a^2R^4}{P^3} = \frac{-32R^6+R^4P^2}{16P^3}$; distantia centri gravitatis à PMF versus E, $\frac{-12R^5+6a^2R^3}{a^3P} = \frac{-768R^5+24R^3P^2}{P^4}$.

Magnitudo Primæ Semicirculationis, MTEFM, est $\frac{a^3R}{6P^2}$; hoc est, (propter $a=\frac{1}{2}P$,) $\frac{1}{48}RP$: Momentum respectu PMF, $\frac{-6aR^5+a^3R^3}{3P^3} = \frac{-24R^5+R^3P^2}{24P^2}$; distantia versus E, $\frac{-48R^4+2R^2P^2}{P^3}$.

Ex hujus itaque Momento, si subducatur Momentum primi quadrantis, $\frac{-32R^6+R^4P^2}{16P^3}$; Habetur Quadrantis secundi MEFM, Momentum respectu PMF, $\frac{96R^6-48R^5P-3R^4P^2+2R^3P^3}{48P^3}$; Adeoque propter magnitudinem

nitudinem (§ D. traditam) $\frac{7}{384} RP$; Distantia centri gravitatis à PMF versus E, $\frac{768R^5 - 384R^4P - 24R^3P^2 + 16R^2P^3}{7P^4}$. Fig. 199, 200.

Magnitudo Trium quadrantalium circulationum, M T E F G M, $\frac{a^3R}{6P^2} = \frac{27}{384}RP$, (propter $a = \frac{3}{4}P$;) Momentum respectu PMF, $\frac{2R^6 - a^2R^4}{P^3} = \frac{32R^6 - 9R^4P^2}{16P^3}$; (adeoque versus G, propter prævalentiam signi —; hoc est, revera, $\frac{-32R^6 + 9R^4P^2}{16P^3}$ versus G.) Distantia Centri gravitatis à P M F versus E, $\frac{12R^5 - 6a^2R^3}{a^3P}$; hoc est (propter signum — prævalens,) versus G, $\frac{-12R^5 + 6a^2R^3}{a^3P} = \frac{-256R^5 + 72R^3P^2}{9P^4}$.

Ex hujus momento, si subducatur momentum primæ semicirculationis $\frac{-24R^5 + R^3P^2}{24P^2}$; Habetur momentum Tertiæ quadrantalis MFGM, $\frac{96R^6 + 48R^5P - 27R^4P^2 - 2R^3P^3}{48P^3}$: Adeoque propter magnitudinem (§ D. traditam) $\frac{19}{384}RP$; Distantia Centri gravitatis à P M F versus E, $\frac{768R^5 + 384R^4P - 216R^3P^2 - 16R^2P^3}{19P^4}$; hoc est, revera, versus G, $\frac{-768R^5 - 384R^4P + 216R^3P^2 + 16R^2P^3}{19P^4}$.

Magnitudo integræ Circulationis primæ, MTEFGAM, $\frac{a^3R}{6P^2} = \frac{1}{6}RP$, (propter $a = P$,) Momentum respectu PMF, $\frac{6aR^5 - a^3R^3}{3P^3} = \frac{6R^5 - R^3P^2}{3P^2}$: Distantia Centri gravitatis à P M F versus E, $\frac{12R^4 - 2a^2R^2}{a^2P} = \frac{12R^4 - 2R^2P^2}{P^3}$; hoc est (propter prævalentiam signi —, (versus G, $\frac{-12R^4 + 2R^2P^2}{P^3}$.

Ex hujus Momento; si subducatur Momentum Circulationis Dodrantalis $\frac{32R^6 - 9R^4P^2}{16P^3}$; Habetur Quadrantalis Quartæ MGAM Momentum respectu PMF, $\frac{-96R^6 + 96R^5P + 27R^4P^2 - 16R^3P^3}{48P^3}$: & (propter magnitudinem $\frac{37}{384}RP$,) Distantia Centri gravitatis à PMF versus E, $\frac{-768R^5 + 768R^4P + 216R^3P^2 - 128R^2P^3}{37P^4}$; hoc est (revera) versus G, $\frac{768R^5 - 768R^4P - 216R^3P^2 + 128R^2P^3}{37P^4}$.

Magnitudo Quinque Quadrantalium MTEFGAHM, $\frac{a^3R}{6P^2} = \frac{125}{384}RP$, (propter $a = \frac{5}{4}P$;) Momentum respectu PMF, $\frac{-2R^6 + a^2R^4}{P^3} = \frac{-32R^6 + 25R^4P^2}{16P^3}$; Distantia Centri gravitatis à PMF, $\frac{-12R^5 + 6a^2R^3}{a^3P} = \frac{-768R^5 + 600R^3P^2}{125P^4}$, versus E.

Ex hujus Momento, si subducatur momentum Primæ Circulationis, $\frac{6R^5 - R^3P^2}{3P^2}$; Habetur Momentum Quadrantalis Quintæ, M A H M, $\frac{-96R^6 - 96R^5P + 75R^4P^2 + 16R^3P^3}{48P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{61}{384}RP$;) Distantia Centri gravitatis à PMF, versus E, $\frac{-768R^5 - 768R^4P + 600R^3P^2 + 128R^2P^3}{61P^4}$.

Et sic deinceps, quousque libet.

Atque

Fig. 199, 200. G. Atque eadem opera determinavimus tum Magnitudinem, tum Momentum & Centri gravitatis ab erecto super rectam P M F plano distantiam, Solidi *Scalaris*, super Figuram Spiralem T T M obliquo situ ascendentem positi, eandem ubique habentis altitudinem (quamlibet) supra oblique ascendentem figuram Spiralem; quæ quidem altitudo sit etiam cujusvis puncti in sequenti qualibet circulatione distantia à subjecto proxime præcedentis Circulationis puncto.

Quippe ad hoc nihil aliud requiritur, quam ut *T* (quæ pro infinitesima parte Peripheriæ circuli primi habebatur, adeoque negligi poterat,) jam habeatur pro illa quantalibet Altitudine; in Solidi tum Magnitudine tum Momento æstimando: Distantia vero Centri gravitatis à plano P M F, eadem hic erit quæ prius erat à P M F recta.

Si autem Solidum hoc utcunque Truncatum intelligatur; vel superne, ne ad M apicem pertingat; vel inferne, puta quo basem planam Horizontalem habeat; vel alias quomodolibet: non erit difficile, præmissa rite perpendentibus, amputati rationem habere; quodque inde oritur discriminis sive in Magnitudine, sive in Momento, & Centri gravitatis distantia.

Vel etiam si pro eadem (quam hic ponimus) Altitudine, aut Circulationum intervallo, (unde continuo mutabitur acclivitas ascendentis plani) eandem velimus retentam acclivitatem, (unde variabitur altitudo, quæ pro decrescentibus circulis continuo decrescet;) simili processu habebitur tum Solidi Magnitudo, tum Momentum, Centrique gravitatis a P M F plano distantia: Sed Calculo paulo adhuc intricatiori, propter novam adhuc cum cæteris componendam rationem, pro variata altitudine. Verum omnia sigillatim prosequi mihi non est in animo, ne nimius sim. Ad figuram itaque spiralem redeo.

H. Ut autem ejusdem M T T M figuræ Spiralis Momentum (quod hactenus ad P M F rectam expendimus,) ad rectam E M G expendamus: considerandum est, Centrorum gravitatis Sectorum exiguorum distantias ab E M G, esse ipsos R X (fig. 200.) sinus Complementi earundem arcuum quorum Sinus recti sunt RS; (atque ad eosdem radios R M continue crescentes in proportione arithmetica;) puta ut ax; (positis x pro sinibus complementi, ipsis s respondentibus: hoc est, pro V C Sinibus Complementi arcuum A B, fig. 169. quorum Sinus recti sunt B V.)

Adeoque (propter magnitudines, ut supra dictum est, ut a^2,) momenta respectu rectæ E M G, erunt ut a^3x ($= a^2 \times ax$;) Hoc est, ut a^3 series Tertianorum, in respectivos x arcuum arithmetice proportionalium *Co-sinus* seu sinus complementi: Hoc est, in ipsas $\beta\nu$ rectas, complentes figuram $\delta\kappa\tau$ (fig. 170.) quousque opus erit continuandam; Hoc est in ipsas $\beta\nu$ complentes figuram $\mu\nu\iota\nu\gamma\nu\nu$

Fig. 201. (fig. 201.) quousque opus est continuandam; inchoandam autem, non (ut prius) ab M P, sed à $\mu\nu$. (Est utique eadem $\nu\beta$ recta, tum *Sinus rectus* arcus, in rectam extensi, M β; tum *Co-sinus* arcus, in rectam extensi, $\mu\beta$.

Nam, ut Sinus s, à minimo incipiunt continue crescendo usque ad quadrantis finem, ubi decrescere incipiunt: Sic, vice versa, eorundem arcuum *Co-sinus* x, seu Sinus Complementi, à maximo incipiunt continue decrescendo ad finem usque quadrantis; ubi crescere incipiunt, sed ad contrarias partes ipsius E M G rectæ.

Quæ enim spectant ad quadrantem Primum, Quartum, Quintum, Octavum, Nonum, &c. ponderant ad rectæ E M G fig. 199, 200. partes P; (quam ponderationem signo + designo:) quæ autem pertinent ad quadrantem Secundum, Tertium, Sextum, Septimum, Decimum, &c. ponderant in partes contrarias, hoc est ad F; (quam ponderationem signo — designo;) & sic deinceps, alternatim, duos intermittendo continuos quadrantes seu integrum Semicirculum.

Quem situm imitantur ipsius figuræ $\mu\nu\iota\nu\gamma\nu\nu$, &c. (fig. 201.) portiones, ad alias atque alias rectæ $\mu\gamma$ partes positæ.

Quæ quidem eadem est figura atque C A b k (fig. 170.) quousque opus erit continuanda: Cujus portiones C A b k, vel C A d b k, fig. 170. (hoc est, $\mu\nu\nu\beta$, vel $\mu\nu\iota\nu\beta$, fig. 201, ubicunque in sinuosa curva, $\mu\nu$ inchoata, sumatur ν punctum,) consideravimus, ad § B. prop. 17. ostendimusque istiusmodi figuræ magnitudinem esse sR, æqualem facto ex respectivi Arcus $\mu\beta$ (seu Anguli A M T fig. 199, 200.) Sinu recto, in Radium ducto; habita tamen (prout ad alias atque alias rectæ partes jaceant figuræ portiones) debita signorum + — consideratione.

Quo

Quo itaque habeantur *Omnia* $a^3 x$; Hoc est, Omnes x, (seu $\beta\nu$ rectæ figuram $\mu\nu\iota\nu\gamma$, &c. complentes) respectivis a^3 (serie Tertianorum) onustæ: Intelligamus, juxta doctrinam prop. 10. hujus, (quam sæpius in auxilium advocavimus,) singulas α, β, γ, &c. fig. 135. æqualiter ab invicem remotas, totidem esse respectivas Fig. 135.
x rectas; adeoque ipsam A E onustam, seu Omnia, $\alpha + \beta + \gamma$, &c. $=$ *Omn.* x, $= s R$, ut jam ostensum est, ex § B. prop. 17.

Horumque omnium momenta respectu axis A; hoc est, *Omn.* $a x$; sunt ipsæ onustæ rectæ, A E + B E + C E, &c. hoc est, totidem A E, demptis omnibus A B + A C, &c. Hoc est, (propter A E $= s R$,) totidem $s R$ ultimis (seu $a s R$,) demptis omnibus $s R$ antecedentibus, pro arcubus arithmetice proportionalibus usque ad a ultimum.

Sunt autem (pro arcubus a arithmetice proportionalibus) *Omn.* $s, = v R$, per § Q. prop. 17. (utpote ipsa $\alpha\beta\nu$ fig. 170.) Adeoque *Omn.* $s R, = v R^2$. Hoc itaque ex $a s R$ subducto, habetur $a s R - v R^2 =$ *Omn.* $a x$.

Intelligantur deinde eadem α, β, γ, &c. fig. 135. tanquam totidem $a x$: adeoque onusta recta A E $=$ *Omn.* $a x, = a s R - v R^2$. Horumque omnium momenta respectu ipsius A; hoc est *Omn.* $a^2 x$; sunt ipsæ A E + B E + C E, &c. rectæ sic onustæ. Hoc est, totidem A E, ($= a^2 s R - a v R^2$,) demptis Omnibus A B + A C, &c. hoc est, omnibus $a s R - v R^2$, pro arcubus a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem (pro arcubus a arithmetice proportionalibus) *Omn.* $a s, = - e R^2 + a v R$, per § Q. prop. 17. (utpote momentum ipsius $\alpha\beta\nu$ fig. 170. respectu rectæ Aα;) adeoque *Omn.* $a s R, = - e R^3 + a v R^2$.

Item *Omn.* $v, = e R$, per § B. prop. 17. (utpote ipsum A b K trilineum, fig. 170.) adeoque *Omn.* $- v R^2, = - e R^3 = - a R^3 + s R^3$.

Ergo, *Omn.* $a s R - v R^2 := - 2 e R^3 + a v R^2 = - 2 a R^3 + 2 s R^3 + a v R^2$.

Hoc itaque, ex $a^2 s R - a v R^2$, subducto; habetur $2 a R^3 - 2 s R^3 - 2 a v R^2 + a^2 s R =$ *Omn.* $a^2 x$.

Intelligantur denique eadem α, β, γ, &c. fig. 135. tanquam totidem $a^2 x$: adeoque onusta recta A E, $=$ *Omn.* $a^2 x, = 2 a R^3 - 2 s R^3 - 2 a v R^2 + a^2 s R$. Horum itaque omnium momenta respectu axis A; hoc est, *Omn.* $a^3 x$; sunt ipsæ A E + B E + C E, &c. sic onustæ: Hoc est, totidem A E, ($= 2 a^2 R^3 - 2 a s R^3 - 2 a^2 v R^2 + a^3 s R$,) demptis A B + A C, &c. Hoc est, omnibus, $2 a R^3 - 2 s R^3 - 2 a v R^2 + a^2 s R$, pro arcubus a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem (pro a arithmetice proportionalibus) *Omn.* $a, = \frac{1}{2} a^2$, per prop. 1. hujus. Adeoque *Omn.* $2 a R^3, = a^2 R^3$.

Item, *Omn.* $s, = v R$, per § Q. prop. 17. adeoque *Omn.* $- 2 s R^3 = - 2 v R^4$.

Item, *Omn.* $a v, = \frac{1}{2} a^2 R - a s R + v R^2$, per § H. prop. 17. (utpote momentum trilinei A b K. fig. 170. respectu Aα;) adeoque *Omn.* $- 2 a v R^2, = - a^2 R^3 + 2 a s R^3 - 2 v R^4$.

Item, *Omn.* $a^2 s, = - a^2 R^2 + 2 a s R^2 + a^2 v R - 2 v R^3$, per § O. prop. 19. (nempe Ungulæ $\alpha\beta\nu$ fig. 170. aciem habentis Aα, momentum respectu Aα;) Adeoque *Omn.* $a^2 s R, = - a^2 R^3 + 2 a s R^3 + a^2 v R^2 - 2 v R^4$.

Ergo, (horum aggregatum) *Omn.* $2 a R^3 - 2 s R^3 - 2 a v R^2 + a^2 s R, = - a^2 R^3 + 4 a s R^3 + a^2 v R^2 - 6 v R^4$.

Hoc itaque subducto, ex $2 a^2 R^3 - 2 a s R^3 - 2 a^2 v R^2 + a^3 s R$; habetur, $6 v R^4 + 3 a^2 R^3 - 6 a s R^3 - 3 a^2 v R^2 + a^3 s R, =$ *Omn.* $a^3 x$.

Atque ad eandem formam (eadem quoties opus erit repetendo vestigia) procedendum esset, si porro *Omnia* $a^4 x$, *Omnia* $a^5 x$, (aut etiam ultra) inquirenda essent: Vel etiam, si loco ipsorum x, aliæ quælibet quantitates ponerentur. Quod hic obiter monitum esto.

Cum itaque (ut jam ante ostensum est § E.) singulorum Sectorum exiguorum Mag- Fig. 199,
nitudines, sint $\frac{1}{2} t r = \frac{a r T}{2 P} = \frac{a^2 R T}{2 P^2}$; distantiæq; ab EMG, RX $= \frac{2 r x}{3 R} = \frac{2 a x}{3 P}$, (po- 200.

Fig. 199, 200. sito x pro Co-sinu anguli vel arcus a, ad Radium R;) adeoque momenta respectu EMG, $\frac{a^2RT}{2P^2} \times \frac{2ax}{3P} = \frac{a^3xRT}{3P^3}$; vel (neglecto T, ob causam aliquoties dictam,) $\frac{a^3xR}{3P^3}$: Erit (propter *Omn.* a^3x, $= 6vR^4 + 3a^2R^3 - 6asR^3 - 3a^2vR^2 + a^3sR$,) Momentum Spiralis MTTTM, respectu rectæ EMG, *Omn.* $\frac{a^3xR}{3P^3}$, $= \frac{6vR^5 + 3a^2R^4 - 6asR^4 - 3a^2vR^3 + a^3sR^2}{3P^3}$.

Adeoque, (propter magnitudinem, jam ante traditam, $\frac{a^3R}{6P^3}$, Distantia Centri gravitatis ab EMG recta, $\frac{12vR^4 + 6a^2R^3 - 12asR^3 - 6a^2vR^2 + 2a^3sR}{a^3P}$. Et quidem vel ad partes P, vel ad partes F, (sive momentum seu ponderationem spectemus, sive distantiam Centri gravitatis,) prout vel signum +, vel signum —, prævaluerit.

I. Et quidem, pro integris quotlibet circulationibus absolutis, Momenta erunt $\frac{a^2R^4}{P^3}$ (cæteris evanescentibus, propter tum $s=0$, tum $v=0$;) adeoque (propter magnitudines $\frac{a^3R}{6P^3}$,) Distantia Centri gravitatis, ab EMG, versus P, $\frac{6R^3}{aP}$. Ubi exponendus est a in fine Circulationis primæ, per P; secundæ, per $2P$; tertiæ, per $3P$; &c.

Pro dimidiatis Circulationibus, quæ integras non terminant, (una, tribus, quinque, &c.) propter $s=0$, & $v=2R$; Momenta sunt, $\frac{12R^6 - 3a^2R^4}{3P^3} = \frac{4R^6 - a^2R^4}{P^3}$; & (propter Magnitudines, ut prius, $\frac{a^3R}{6P^3}$,) Distantiæ Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{24R^5 - 6a^2R^3}{a^3P}$; Hoc est revera (propter prævalentiam signi —,) versus F, $\frac{-24R^5 + 6a^2R^3}{a^3P}$: Exponendus utique est a in fine Semicirculationis Primæ, per $\frac{1}{2}P$; Tertiæ, per $\frac{3}{2}P$; Quintæ, per $\frac{5}{2}P$; & sic deinceps: adeoque a^2 in omnibus plus erit quam $4R^2$; est enim, $\frac{1}{2}P$ plus quam $2R$.

Pro circulationibus quadrantalibus (quæ Semicirculationes non terminant) una, tribus, quinque, &c. propter tum $s=R$ in prima, quinta, nona, &c. & $s=-R$, in tertia, septima, undecima, &c. tum $v=R$, in singulis: Momenta sunt $\frac{6R^6 - 6aR^5 + a^3R^3}{3P^3}$; & (propter magnitudines, ut prius,) Distantiæ Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{12R^5 - 12aR^4 + 2a^3R^2}{a^3P}$; nempe pro prima, quinta, nona, &c. sed, pro tertia, septima, undecima, &c. (propter s contrario signo exponendum,) Momenta $\frac{6R^6 + 6aR^5 - a^3R^3}{3P^3}$; Distantiæ, versus P, $\frac{12R^5 + 12aR^4 - 2a^3R^2}{a^3P}$; hoc est, (propter prævalentiam signi —,) versus F, $\frac{-12R^5 - 12aR^4 + 2a^3R^2}{a^3P}$. Exponendus autem est a, in prima, tertia, quinta, &c. per $\frac{1}{4}P$, $\frac{3}{4}P$, $\frac{5}{4}P$, &c.

Si libeat singulos Circulationum Quadrantes seorsum perpendere, id facile fiet.

Quadrantis Primi MTEM, momentum respectu EMG, jam ostensum est $\frac{6R^6 - 6aR^5 + a^3R^3}{3P^3} = \frac{384R^6 - 96R^5P + R^3P^3}{192P^3}$ (propter $a = \frac{1}{4}P$.) Distantia Centri gravitatis

vitatis ab EMG versus P, $\frac{12R^5 - 12aR^4 + 2a^3R^2}{a^3P} = \frac{768R^5 - 192R^4P + 2R^2P^3}{P^4}$. Fig. 199. 200.

Semicirculationis Primæ, MTEFM; Momentum $\frac{4R^6 - a^2R^4}{P^3} = \frac{16R^6 - R^4P^2}{4P^3}$ (propter $a = \frac{1}{2}P$;) Distantia ab EMG versus P, $\frac{24R^5 - 6a^2R^3}{a^3P} = \frac{192R^5 - 12R^3P^2}{P^4}$: Hoc est, revera, versus F, $\frac{-192R^5 + 12R^3P^2}{P^4}$.

Ex hujus Momento, si subducatur Momentum primi quadrantis; habetur Secundi quadrantis MEFM, Momentum respectu EMG, $\frac{384R^6 + 96R^5P - 48R^4P^2 - R^3P^3}{192P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{7}{384}RP$;) Distantia Centri gravitatis ab EMG versus P, $\frac{768R^5 + 192R^4P - 96R^3P^2 - 2R^2P^3}{7P^4}$: Hoc est, versus F, $\frac{-768R^5 - 192R^4P + 96R^3P^2 + 2R^2P^3}{7P^4}$:

Circulationis Dodrantalis, seu Trium quadrantum, MTEFGM; Momentum respectu EMG, est $\frac{6R^6 + 6aR^5 - a^3R^3}{3P^3} = \frac{384R^6 + 288R^5P - 27R^3P^3}{192P^3} = \frac{128R^6 + 96R^5P - 9R^3P^3}{64P^3}$ (propter $a = \frac{3}{4}P$;) Distantia Centri gravitatis ab EMG versus P, $\frac{12R^5 + 12aR^4 - 2a^3R^2}{a^3P} = \frac{768R^5 + 576R^4P - 54R^2P^3}{P^4}$; Hoc est, versus F, $\frac{-768R^5 - 576R^4P + 54R^2P^3}{P^4}$.

Ex hujus itaque Momento, si subducatur Momentum Semicirculationis Primæ; habetur Tertiæ quadrantalis MFGM, Momentum respectu EMG, $\frac{-384R^6 + 288R^5P + 48R^4P^2 - 27R^3P^3}{192P^3} = \frac{-128R^6 + 96R^5P + 16R^4P^2 - 9R^3P^3}{64P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{19}{384}RP$,) Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{-768R^5 + 576R^4P + 96R^3P^2 - 54R^2P^3}{19P^4}$; Hoc est, revera, versus F, $\frac{768R^5 - 576R^4P - 96R^3P^2 + 54R^2P^3}{19P^4}$.

Integræ Circulationis Primæ, MTEFGAM; Momentum respectu EMG est $\frac{a^2R^4}{P^3} = \frac{R^4}{P}$ (propter $a = P$:) Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{6R^3}{P^2}$.

Ex hujus itaque Momento, si subducatur momentum Circulationis Dodrantalis; habetur Quadrantalis Quartæ momentum, $\frac{-384R^6 - 288R^5P + 192R^4P^2 + 27R^3P^3}{192P^3} = \frac{-128R^6 - 96R^5P + 64R^4P^2 + 9R^3P^3}{64P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{37}{384}RP$,) Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{-768R^5 - 576R^4P + 384R^3P^2 + 54R^2P^3}{37P^4}$.

Quadrantalium Quinque, MTEFGAH, (repetito quod erat in prima,) Momentum respectu EMG, est $\frac{6R^6 - 6aR^5 + a^3R^3}{3P^3} = \frac{384R^6 - 480R^5P + 125R^3P^3}{192P^3}$: Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{12R^5 - 12aR^4 + 2a^3R^2}{a^3P} = \frac{768R^5 - 960R^4P + 250R^2P^3}{P^4}$.

Ex hujus itaque Momento, si subducatur Momentum integræ Circulationis Primæ; habetur Momentum Quadrantalis Quintæ, respectu EMG, $\frac{384R^6-480R^5P-192R^4P^2+125R^3P^3}{192P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{61}{384}RP$,) Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{768R^5-960R^4P-384R^3P^2+250R^2P^3}{61P^4}$.

Et sic deinceps quousque libet.

K. Atque eadem opera determinavimus, in Solido *Scalari*, (super figuram Spiralem TTM obliquo situ ascendentem, altitudinem eandem quamlibet habente super oblique ascendentem figuram spiralem,) magnitudinem, momentum, atque distantiam Centri gravitatis ab erecto super EMG plano. Quippe eadem omnia hic locum habent respectu erecti in EMG plani; quæ respectu plani in PMF erecti supra diximus, § G. Ut non sit opus eadem repetere.

PROP. XXVIII.

A. Q. Fig. 199, 200. Quæ in Propositione præcedente, de Spirali *Archimedea*, tradita sunt; eadem omnia Spiralibus aliis facile accommodantur, in quibus Radii MT, MT, continue crescant, non quidem (ut in illa) in ipsorum AMT, AMT, angulorum ratione, sed & in ipsorum ratione Duplicata, Triplicata, Quadruplicata, aliasve utcunque multiplicata: aut etiam in Subtriplicata, hujusce utcunque multiplicata.

A. Sed &, Magnitudinem quod spectat, iis etiam in quibus crescant MT, MT, radii, in eorundem AMT, AMT, ratione Subduplicata, Subquadruplicata, aliasve utcunque Submultiplicata; vel etiam in ratione subduplicatæ triplicata, quintuplicata &c. aut subquadruplicatæ, quintuplicata, septuplicata, &c. aliasve ex multiplicatis & submultiplicatis composita; aut etiam alias per numeros surdos designanda.

Q. Quod ad Momenta vero, & Centra gravitatis, quæ dicta sunt, non ita facile ad has accommodantur ubi ratio submultiplicata est, seu ex submultiplicata composita quæ multiplicatæ non æquepolleat, vel saltem subtriplicatæ, aut hujus multiplicatæ.

C. Suntque hæ Spirales omnes ex Parabolarum vel Paraboloeidium correspondentium convolutione factæ; possuntque in Parabolas illas seu Paraboloeidea evolvi.

C. D. Illa quidem Spiralis *Archimedea*, ex *Apolloniana* Parabola: Ea nempe, quæ Basem habeat æqualem Spiralis radio terminali; Axemque æqualem semissi arcus Sectoris contermini.

E. Cujus quidem Parabolæ semissi, æquatur illa Figura Spiralis. Unde constat, omnino possibilem esse Figuram Rectilineam, Circulo æqualem; ejusve Sectori cuilibet.

F. Ex data vero Altitudine istius Parabolæ, quæ Datæ Spirali respondeat; datur circuli Quadratura.

G. Rectaque Parabolam tangens, eundem cum Ordinata angulum facit quem facit, cum Spiralis correspondente Radio, recta Spiralem tangens.

H. K. Unde alia colligitur circuli quadratura *Archimedea* (Qualis & ab aliis Spiralibus colligi poterit.)

I. Et, Curvam Parabolæ, æqualem esse Spiralis Curvæ.

L. M. Aliæ vero Spirales; ex iis Paraboloeidibus in quibus Ordinatim-applicatæ

tæ sint series Indicem habens $\frac{1}{S+1}$; posito seriei rectarum MT Indice S; Basisque Paraboloeidis, æqualis ipsi MT terminali; ejusque altitudo, ad longitudinem arcus Sectoris contermini, ut 1 ad $S+1$. N. P.

Possuntque pari modo ex aliis item Figuris (puta Hyperbolicis, Ellipticis, aliisve mille modis variatis,) alia Spiralium genera Convolutione fieri; atque in eas unde construuntur evolvi. Quarum quidem Figurarum Spiralium mensuræ, ex illarum figurarum mensuris dependent, quarum Convolutione fiunt. K.

Sunt utique Figuræ Spirales, non modo quæ ex Convolutis Parabolis, sed & quæ ex aliis figuris Convolutis oriuntur; Figurarum illarum, ex quarum Convolutione fiunt Dimidiæ. K.

Et quidem non modo Curva Spiralis *Archimedea*, est æqualis Curvæ Parabolicæ *Apollonianæ* correspondenti; sed & aliæ Spirales quælibet, æquales illis respective sive curvis sive rectis quarum Convolutione fiunt. K.

Adeoque cognita Figuræ Spiralis Magnitudine, vel Curvæ Spiralis longitudine; cognoscitur similiter vel magnitudo istius figuræ cujus Convolutione fit, vel longitudo lineæ: Et vice versa. K.

Et quidem Spiralis illa cujus rectæ MT, crescunt in angulorum AMT ratione duplicata, non modo rationem habet cognitam ad Sectorem conterminum; sed ipsius Curvæ Rectam æqualem assignare licet, eamque in data ratione secare. O.

Quod ipsum aliis item Spiralibus innumeris contingit.

Sed & Figura Spiralis (ex Paraboloeide convoluta) assignari potest, quæ ad Sectorem conterminum rationem quamvis datam habeat; saltem Minoris ad Majus, numeris explicabilem: Et Paraboloeides similiter, eidem correspondens: Ut & cuivis Paraboloeidi respondens Spiralis. B. N.

Potestque hæc Spiralium doctrina, ad alia multa Spiralium genera ampliari. R.

SI Spiralis Radii MT, MT, crescant, non quidem in ratione Angulorum AMT, AMT, (ut in Spirali *Archimedea*,) sed in eorundem ratione duplicata, puta ut a^2: Erunt Sectores similes (figuram Spiralem componentes) ut a^4 (utpote in duplicata ratione arcuum suorum:) Adeoque, eorundem aggregatum ad aggregatum totidem maximo æqualium; hoc est, Figura Spiralis, ad Sectorem conterminum; ut 1 ad 5 $(=4+1,)$ per prop. 1. hujus. A. Fig. 199, 200.

Si Radii MT, MT, sint in angulorum AMT, seu PMT, ratione triplicata; hoc est, ut a^3; adeoque Sectores similes, ut a^6; erunt simul omnes ad totidem maximo æquales; hoc est, Figura Spiralis ad conterminum Sectorem; ut 1 ad 7. per eandem 1 hujus.

Et, universaliter, si Radii MT, crescant in Angulorum PMT, ratione Simpla, Duplicata, Triplicata, Quadruplicata, &c. Figura Spiralis, ad Sectorem conterminum, erit ut 1, ad 3, 5, 7, 9, &c. (Non, ut 1 ad 3, 4, 5, 6, &c. quod per incuriam scriptum fuerat in *Arithm. Infin.* Schol. Prop. 45.) propter Sectores Similes in Radiorum ratione duplicata.

Et similiter; si crescant Radii in Angulorum ratione Subduplicata, Subtriplicata, Subquadruplicata, &c. adeoque Sectores in ratione Simpla, Duplicata Subtriplicatæ, Subduplicata, &c. Figura Spiralis ad Sectorem conterminum erit, ut 1 ad $1+1$, $\frac{2}{3}+1$, $\frac{1}{2}+1$, &c. hoc est, ut 1 ad 2, $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{2}$, &c. vel 1 ad 2; 3 ad 5; 4 ad 6, &c.

Si crescant Radii in Angulorum ratione Duplicata subtriplicatæ, Triplicata subquadruplicatæ, &c. adeoque Sectores, in ratione Quadruplicata subtriplicatæ, Triplicata subduplicatæ, &c. (utpote in duplicata ratione radiorum;) erit Figura

 Spiralis

Fig. 199, 200. Spiralis ad conterminum Sectorem, ut 1 ad $\frac{4}{3}+1$, $\frac{3}{2}+1$, &c. (nempe ut 1 ad seriei indicem unitate auctum, per prop. 1. hujus;) hoc est, ut 3 ad 7, 2 ad 5, &c.

Quod ipsum similiter valeret, si intelligerentur Radii crescentes secundum Seriem cujus Index sit numerus surdus, puta $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, &c. adeoque Index seriei Sectorum, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, &c. quippe Figura Spiralis esset ad Sectorem conterminum, ut 1 ad $2\sqrt{2}+1$, $2\sqrt{3}+1$, &c.

Illud utique ubique obtinet; si Radii sint ut Series cujus Index sit S; Sectorum Series Indicem habebit $2S$; adeoque summa Sectorum omnium ad maximum toties sumptum; hoc est, Figura Spiralis ad Sectorem conterminum; ut, 1 ad $2S+1$: per prop. 1. hujus.

B. Et consequenter, Facile assignabitur Spiralis sic constructa, ut Figura Spiralis, ad Sectorem conterminum, datam habeat (minoris ad majus) rationem. Esto enim ratio data, ut 1 ad D. Quoniam est (ut jam ostendimus) Figura Spiralis ad Sectorem conterminum ut 1 ad $2S+1$; atque imperatum est ut sit, ut 1 ad D; erunt 1 ad $2S+1$, & 1 ad D, eadem ratio; adeoque $D=2S+1$, hoc est $D-1=2S$, & $\frac{D-1}{2}=S$. Si itaque Radii M T, ponantur ut Series Indicem habens $\frac{D-1}{2}$; erit figura Spiralis ad conterminum Sectorem, ut 1 ad D, in ratione data. Cum enim Series Radiorum Indicem habeat $\frac{D-1}{2}$; Series Sectorum habebit Indicem (istius duplum) $D-1$; adeoque Sectorum crescentium aggregatum, ad totidem maximo æqualium; hoc est, Figura Spiralis ad Sectorem conterminum; erit ut 1 ad D; nempe ad Seriei indicem $D-1$, unitate auctum (per prop. 1. hujus.) Quod erat imperatum.

Puta; Si ratio data, sit 1 ad 2; adeoque (posito $D=2$,) $\frac{D-1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$. Erunt M T, Series *Subsecundanorum*: hoc est, in subduplicata ratione angulorum P M T.

Si ratio data, sit 1 ad 5; adeoque (posito $D=5$) $\frac{D-1}{2}=2$. Erunt M T, Series *Secundanorum*; seu, in duplicata ratione angulorum P M T.

Si ratio data, sit 1 ad 3; adeoque $\frac{D-1}{2}=1$. Erunt M T, series *Primanorum*, seu in ipsa angulorum P M T ratione. Quæ est Spiralis *Archimedea*.

Si ratio data, sit 2 ad 3; seu 1 ad $\frac{3}{2}$; adeoque $\frac{D-1}{2}=\frac{1}{4}$. Erunt M T, Series *Subquartanorum*; seu in angulorum ratione Subquadruplicata.

Si data ratio, sit 1 ad 4; adeoque $\frac{D-1}{2}=\frac{3}{2}$. Erunt M T, Series *Radicum Quadraticarum Tertianorum*; seu in angulorum ratione Subduplicata-triplicatæ. Et similiter alibi, quæcunque fuerit ratio data.

Dico autem, In Ratione *Minoris ad Majus*: Quia supponitur Spiralis (à Principio orsa) radios habere M T, ab o continue crescentes; totaque, circumscripto Sectore contermino Minor.

Si vero proponeretur Ratio æqualitatis, 1 ad 1; adeoque $\frac{D-1}{2}=\frac{0}{2}=0$. Essent M T Series æqualium (cujus index o;) &, pro figura Spirali, prodiret Circuli Sector, (ex Convoluto Parallelogrammo confectus,) cum ipso Sectore (quem conterminum supponimus) coincidens.

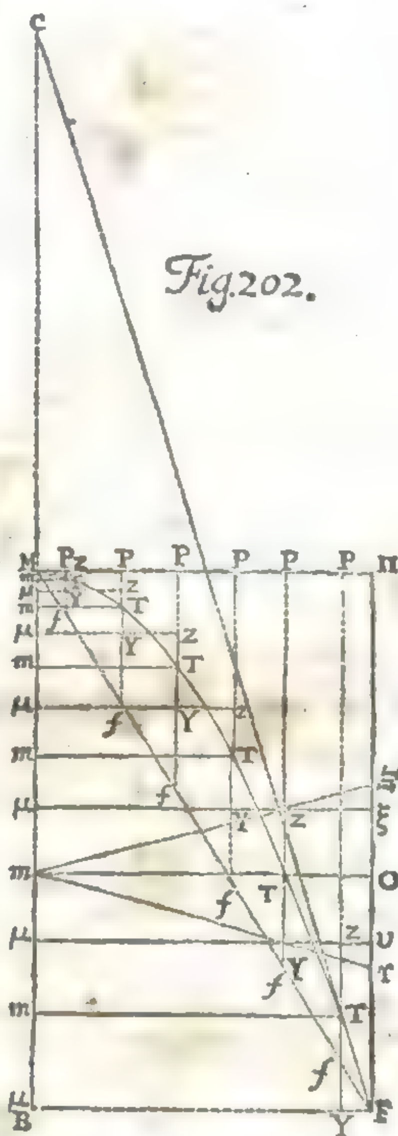
Sin proponeretur *Majoritatis* ratio, puta 2 ad 1; seu 1 ad $\frac{1}{2}$: adeoque $\frac{D-1}{2}=-\frac{1}{4}$: Essent M T ex eis Seriebus una, quas *Reciprocas* definivimus, (def. 2. hujus.) puta *Reciproca Subquartanorum*, cujus Index $-\frac{1}{4}$. Adeoque non inciperent M T, ab o, crescendo; sed ab Infinito ($\frac{1}{0}=\infty$) decrescendo: Essetque conterminus Sector, non quidem Circumscriptus sed Inscriptus.

Quæ

Quæ quidem Figuræ, utut pro Spiralium generibus haberi possint, & aliarum Spiralium leges non refugiant (debite accommodatas:) nos tamen eas potissimum hic spectamus quæ contermino Sectore includuntur. Quamquam si libeat, Spiralium nomen ad illas etiam ampliare; erunt utcunque ad reliquas Spirales similiter redigendæ, (nostrisque subjiciendæ legibus;) atque Figuræ quas *Reciprocas* dicimus, ad Paraboloeidium familiam.

Quod autem Spiralis *Archimedea*, aliud non sit quam Convoluta Parabola *Apolloniana*; sic evidentissime demonstratur. C.

Sumptis ad Spiralem Fig. 200. MT, MT; hoc est MP, MP, quotlibet; ut 1, 3, 5, 7, &c. arithmetice proportionalibus: totidemque ad Parabolam rectam Fig. 202. illis respective æqualibus MP, MP; hoc est, mT, mT: atque his proportionalibus utrobique ZY, ZY; hoc est Mμ, μμ, &c. Sumptoque ubivis figuræ Spiralis termino, puta MF, cui æqualis ponatur μF basis Parabolæ: hujusque altitudo FΠ seu MB æqualis semissi Peripheriæ sectoris contermini radio MF fig. 200. descripti: Erunt ipsæ Mμ, μμ, seu ZY, ZY, rectæ, fig. 202. ipsis ZY, ZY, arcubus, fig. 200. sigillatim æquales. Fig. 200, 202.



Quippe, si intelligantur numero infiniti arcus ZY arithmetice proportionales (ut 1, 3, 5, &c.) erunt hi omnes simul sumpti, æquales semissi totidem maximo æqualium; hoc est, semissi arcus contermini, radio MF descripti; per prop. 1. hujus. Cui quidem semissi cum ponatur æqualis altitudo Parabolæ FΠ, seu MB, hoc est, aggregatum omnium μμ seu ZY fig. 202. Sintque tum totidem numero, tum proportionales, ipsis ZY arcubus fig. 202. Erunt singulæ singulis, respective sumptis, æquales.

Cum itaque sint etiam sigillatim MP seu mT fig. 200. ipsis MP, seu MT, fig. 202. æquales: Si intelligantur omnia m, μ, puncta, in unum M colligi; (toto Parabolæ axe in verticis Punctum contracto;) manentibus rectarum μZ, mT, μY, longitudinibus; rectisque ZTY, in arcum flexis: Rectangula ZμμY, in Sectores contracta, ipsis ZMY sectoribus, respective sumptis, congruent; propter tum radiorum, tum arcuum æqualitatem.

Sed Sectores illi ZMY, si numero infiniti intelligantur, idem sunt, atque Figura Spiralis (per def. 1. cap. 4.) ipsaque similiter Rectangula ZμμY, idem atque Planum Parabolæ: Si itaque *Parabola* sic *Convoluta* intelligatur, ut ea omnia ex quibus conflari intelligatur Rectangula, in totidem Sectores contrahantur; fit Figura Spiralis.

Et quidem ea fit Spiralis (ut ex demonstratis constat) cujus terminalis recta ut MF, sit æqualis ipsi BF basi Parabolæ; angulusque circulationis tantus, ut contermini Sectoris arcus, duplus sit altitudinis Parabolæ: Hoc est, quæ eam habet rationem ad unam Circulationem integram, quam habet Parabolæ altitudo dupla, ad peripheriam integram ejusdem base descriptam: Vel etiam, (si intelligatur axis BM supra Parabolæ verticem continuati, usque dum in C puncto occurrat rectæ CF parabolam in F contingenti; unde, propter Parabolæ naturam, dupla futura est CB ipsius BM;) eam, quam habet BC (axis continuatus ad occursum rectæ Parabolam in basis puncto contingentis,) ad integram peripheriam quæ Parabolæ base ut Radio describatur. D.

Constat

Fig. 200, 202. Constat autem, ex hac constructione, (propter singulos Sectores ZMY, singulorum respective Rectangulorum $Z\mu\mu Y$, dimidios;) Figuram Spiralem
E. MTTFM, figuræ Parabolicæ MFB, dimidiam esse; & partes partium, respective sumptarum, dimidias. Quod similiter probabitur, de quovis alio Spiralium genere, quæ ex quacunque fit figura sic convoluta.

Constat item (quod ex veteribus dubitarunt nonnulli, nedum ex recentioribus,) Figuram Rectilineam Circulo æqualem esse posse; hujusve Sectori cuilibet: adeoque, rectam Peripheriæ. Cum enim certa sit ratio figuræ spiralis MTTF, tum ad Sectorem conterminum, (nempe, ut 1 ad 3;) tum ad MFB parabolam, ex cujus convolutione fit, (nempe, ut 1 ad 2;) tum denique hujus parabolæ ad circumscriptum rectangulum MBFπ, (nempe, ut 2 ad 3;) erit contermini Sectoris Radio MF descripti (puta Semicirculi) ad MBFπ rectangulum certa ratio; (erit utique æqualis; propter $\frac{3}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=1$.) Cum itaque nullus sit circulus, cujus trienti non æquetur Figura Spiralis; nullaque figura Spiralis cujus duplo non æquetur Parabola; nullaque Parabola, cujus sesquialterum non æquet Rectangulum Rectilineum: Nullus erit Circulus, cui non æquatur Rectangulum Rectilineum.

F. Constat etiam; si dari possit Altitudo Parabolæ MFB (seu hujus ad Basin ratio) quæ respondeat Spirali MTTFM (cujus circulationis angulus datam rationem habeat ad quatuor rectos;) datum iri rationem Radii, Diametrive, ad Peripheriam Circuli.

G. Sed & eadem FC quæ Parabolam tangit retento eodem cum BF angulo, CFB; eandem etiam curvam tanget, postquam in Spiralem convoluta fuerit Parabola. Nam, qua ratione probabitur omnes in Parabola rectas m T ordinatim-applicatas, (tum quæ sunt supra BF, tum quæ sunt infra,) sola BF excepta, ad CF contingentem non pertingere; eadem ostendetur neque ad eam pertingere easdem convolutas in situm MT in Spirali. Quippe si (verbi gratia) ad MF fig. 200. ita constituta sit FC, ut ad illam non pertingeret rectæ MT punctum T, etiamsi extensa ZTY curva in rectam sisteretur ad ipsam MF perpendicularis (posita, etiam TM, seu Tm, in situ parallelo ad FM, seu FB,) quod fit in Parabola: multo minus ad eandem FC pertinget idem T punctum in ZTY inde recurvata; concurrente recta Tm seu TM cum recta FM, in eodem M puncto; quod fit in in Spirali.

Unde sequitur; eundem esse, ad tangentem, angulum MFC in Spirali, atque (qui huic correspondet) BFC in Parabola.

H. Et consequenter; si intelligatur F (verbi gratia) in fine circulationis primæ, rectaque (ad MF perpendicularis) MC, Tangenti FC occurrens in C; erit ipsa MC fig. 200. (principio Spiralis, & contingente, intercepta,) ipsi BC fig. 202. (Parabolæ axe ad occursum tangentis continuato,) æqualis; (propter angulos ad F utrobique æquales, adeoque similia triangula rectangula;) hoc est, (per modo demonstrata,) integræ Peripheriæ radio MF descriptæ, seu Peripheriæ circuli primi: (ponitur enim F, in termino primæ circulationis; adeoque circulationis angulus, quatuor rectis æqualis.) Id quod ab *Archimede* fusius ostenditur, in libro de Spiralibus; estque ipsius Circuli quadratura, inde deducta; quo præcipue collimasse videtur in illa de Spiralibus doctrina.

Sin ubivis alibi (quam in fine circulationis primæ) intelligatur illud F punctum; puta in fine semicirculationis primæ, vel primi quadrantis, vel ubivis alias: idem consequi licebit. Quippe tum MC sic ducta (rectæ MF perpendicularis, & FC tangenti occurrens in C,) erit eadem pars (puta, vel semissis, vel quadrans, vel pars alia prout res tulerit,) integræ peripheriæ radio illo MF descriptæ, quæ est, circulationis integræ, exposita circulatio.

I. Sed & inde etiam sequitur; Curvam Spiralem MTTF fig. 200. curvæ Parabolicæ, correspondenti MF fig. 202. æqualem esse. Quippe si intelligantur utrobique sumi partes analogæ infinite exiguæ; in quibus itaque tangentium FC respectivarum particulæ, pro ipsis FT curvis habeantur per def. 1. cap. 4. (utpote à quibus differunt ratione data quavis minore;) ut & YT curva, similiter, pro YT recta, eidem æquali: adeoque minuta Trilinea TYF, utrobique, pro Triangulis rectangulis; & quidem (propter æquales utrobique respectivos angulos ad F) invicem similibus; quæ itaque & latera habebunt proportionalia: Erunt, propter YF rectas utrobique æquales, etiam FT (respective sumptæ) itidem æquales.

æquales. Cumque hoc ubique contingat; erunt omnes F T curvam Spiralem constituentes, æquales omnibus F T constituentibus curvam Parabolicam; hoc est, M T T F curva spiralis, æqualis correspondenti M F curvæ Parabolicæ. Quod demonstrandum erat. Idemque alias demonstravimus, in Tractatu, *De Curvarum* Εὐθύνσει, Tractatui de Cycloide subjuncto. Fig. 200, 202.

Quod etiam in aliis Spiralium generibus non minus valet. Si intelligatur enim eadem M F B fig. 202. non jam ut *Apolloniana* Parabola, sed ut Paraboloeides, Hyperbola, aliave ad libitum figura, in minuta Rectangula, ut Z μ μ Y, resolutæ; quæ (punctis omnibus m, μ, in unum M collectis,) in totidem Sectores, (Rectangulorum dimidios,) redigantur: qui quidem vel similes inter se erunt, si eadem ponatur ubique ratio rectarum Z Y ad m T; vel, si secus, dissimiles; (eam utique rationem habebit sectoris cujusvis angulus, ad quatuor rectos; quam habet Z Y ad integram Peripheriam radio m T describendam:) alia atque alia fient Spiralium genera. K.

Neque refert, utrum M F fig. 202. sit curva, an Recta; sed nec, utrum ad unum M verticis punctum terminetur, an secus. Quippe si integrum Rectangulum M B F Π sic convolveretur, (toto M B latere in unicum M punctum collecto, latereque Π F in arcum curvato,) Spiralis hinc oriunda, Circulus esset; vel Sector Circuli, qui eam habeat ad integrum circulum rationem quam F Π recta ad peripheriam radio B F vel M Π descriptam.) Et quidem, si Trilineum M F B, ubivis truncatum recta m T, intelligeretur sic convolvi; hoc saltem inde sequeretur discriminis, quod non jam à puncto ut M, ordiretur Spiralis fig. 200. sed, à recta aliqua, ut M T.

Hoc interim omnibus commune erit; Nempe, Figuram Convolutione factam, ut M T T F fig. 200. dimidiam esse ejusdem evolutæ, ut M F B fig. 202. propter singulos Z M Y sectores, singulorum Z μ μ Y rectangulorum respective sumptorum, dimidios.

Item; Tangentem F C, fig. 202. retento angulo C F B, tangentem etiam fore figuræ convolutæ M T T F M fig. 202. Quippe, [illegible] hic non minus obtinebit præcedens demonstratio, qua ostendebatur hoc contingere in Spirali *Archimedea*. Si enim rectæ m T, punctum T in Z T Y recta, fig. 202. ad T C tangentem non pertingat; multo minus ad eandem pertinget in eadem Z T Y recurvata, fig. 200. Quod ipsum obtinet etiam vice versa: Si enim convoluta curva F T fig. 200. explicanda intelligatur in correspondentem F T fig. 202. quanquam T propius accederet ad T C tangentem, non tamen eo pertingeret: Nisi saltem explicanda esset in lineam rectam, (quod in Circulo fit; cujus explicata curva, eadem futura est cum parallelogrammi pridem convoluti latere;) quippe, hoc casu, explicata linea cum tangente coincidet; quæ enim supponatur recta rectam contingere, alia non erit quam ipsa recta; quippe, nisi coincidat, secabit. Si vero adhuc ulterius explicanda intelligatur figura, ut non modo ad ipsam F C pertingat T, sed transeat; adeoque F T recurva fiat, in contrarias partes flexa: etiam adhuc eandem F C, sed ad contrarias partes, tanget. Cum enim flexionis angulus, qui idem est atque angulus contactus, magnitudinem vel nullam habeat, vel infinite exiguam, (sive sit rectæ & curvæ contactus, sive duarum curvarum externe vel interne tangentium,) quod ad prop. 15. cap. 2. ostensum est; eadem quæ prius fuerat manebit recta contingens F C, utcunque flectatur (modo ne frangatur, ut angulum faciat, rectilineo æquipollentem,) F T curva, in puncto F.

Sed &, qua ratione hinc infertur, (ob cognitum in parabola punctum C in quo cum axe producto Tangens occurrat,) *Archimedea* Circuli quadratura per Tangentem Spiralis: idem etiam simili ratione colligetur, ex aliis innumeris Spiralium generibus, ex convolutis figuris oriundis, in quibus idem C punctum pariter cognoscitur. Cum enim M B fig. 202. altitudo figuræ convolvendæ, æqualis sit omnibus Z Y arcubus fig. 200. simul sumptis: si quocunque modo colligi poterit quam habeant illi omnes ad contermini Sectoris arcum, quemque hic habeat ad integram peripheriam; conficietur negotium. Quippe cognita M C fig. 200. (cujuscunque Spiralis,) cognoscitur etiam (eidem æqualis) B C fig. 202. adeoque, quam habeat ea rationem ad cognitam M B fig. 202. hoc est, ad omnes Z Y fig. 200. adeoque & (cum horum ad arcum Sectoris contermini ratio nota ponatur,) ad arcum Sectoris contermini, & propterea (cum hujus ratio ad integram peripheriam nota ponatur) ad circuli peripheriam radio M F fig. 200. vel B F fig. 202. descriptam.

Fig. 200, 202. Item MF figuræ convolvendæ fig. 202. æqualem Curvæ figuræ convolutæ MTTF fig. 200. Quippe Demonstratio prius adhibita in comparatis invicem *Apolloniana* Parabola, & Spirali *Archimedea*; in aliis non minus obtinet. Nempe, in partibus infinite exiguis, habenda esse utrobique TYF trilinea, pro Triangulis rectangulis, & quidem (propter æquales utrobique angulos ad F) invicem similibus; adeoque, propter æquales utrobique YF, æquales item erunt FT; atque hoc semper. Æqualis itaque tota MF curva fig. 202. toti MTTF fig. 200.

Et propterea; ex cognita vel figuræ Spiralis magnitudine, vel Curvæ Spiralis longitudine; similiter cognoscitur vel Magnitudo figuræ cujus convolutione fit, vel Longitudo lineæ. Et vice versa.

L. Ut autem, ex convoluta Parabola, fit Spiralis *Archimedea*; sic, ex Paraboloeidibus convolutis, fiunt Spirales aliæ; quarum radii MT crescunt in ratione angulorum AMT duplicata, triplicata, aliasve multiplicata; vel subduplicata, subtriplicata, aliasve submultiplicata; aut etiam ex his utcunque composita.

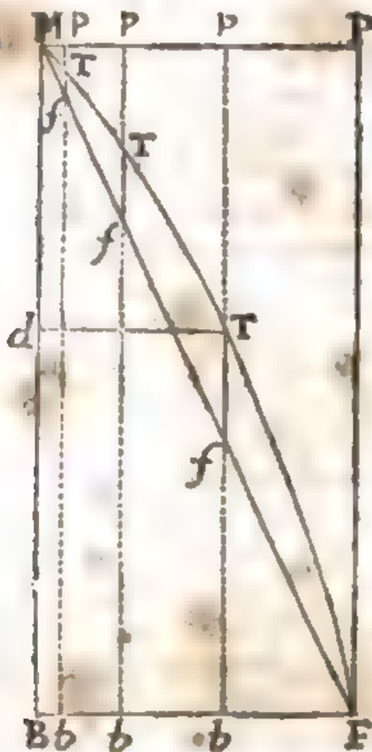
Quod eodem modo ostendi potest quo in Parabola id ostensum est; sumptis Paraboloeidibus idoneis, in quibus rectæ MB, MΠ, sic dividantur ut Mμ, μμ, &c. hoc est ZY, ZY, &c. sint ipsis MP, MP, &c. proportionales, (quo sectores ZMY fig. 200. ex rectangulis Zμμ Y fig. 202. convolutis facti, similes sint,) Paraboloeidisque curva per ipsas ZY, ZY, rectas transeat. (Quod aliis aliisque modis, pro variis Paraboloeidium generibus, faciendum erit.) Hoc enim facto, ostendetur, ut prius in Parabola, singula Rectangula, in respectivos Sectores, ipsorum dimidios, convolutum iri: reliquaque quæ hinc sequuntur.

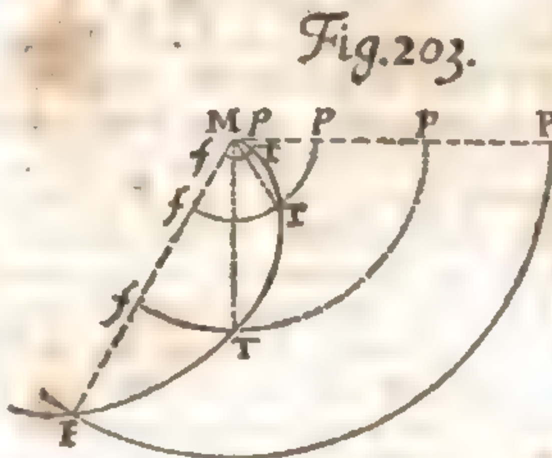
Cum vero alius occurrat modus expeditior, aliunde sumptis principiis, idem præstandi; (neque lectori, credo, displicebit varietas;) rem sic aggrediemur; ea methodo qua ad *Arithm. Infin.* prop. 36. &c. usus sum.

Fig. 199. 202. In Spirali *Archimedea*, MTTF, fig. 199. sumptis Sectoribus similibus; adeoque tum radiis MT, MT, &c. hoc est, MP, MP, &c. tum angulis PMT, PMT, &c. arithmetice proportionalibus; ut 1, 2, 3, 4, &c. Erunt arcus PT, PT, (utpote in ratione quæ ex radiorum MP, & angulorum MPT, rationibus componitur,) ut 1, 4, 9, 16, &c. series Secundanorum; (nempe uno gradu altior quam est series Radiorum MP, propter angulos MPT, in ratione seriei Primanorum, seu arithmetice-proportionalium:) adeoque, si in rectas expandi intelligantur, erunt ut totidem ordinatim-applicatæ in complemento Parabolæ, (axem habente MP; altitudinem, ipsi PF, non ut prius hujus dimidio, æqualem,) utpote in ratione duplicata axium MP, MP: (quales sunt PT, PT, complentes Semiparabolæ complementum MTFΠ fig. 202. sumptis BF, FΠ, fig. 202. æqualibus ipsis MF, FOP, fig. 199.) & propterea, simul omnes, (hoc est MTP, spiralis complementum ad conterminum sectorem,) æquantur Trienti Rectanguli Parabolæ circumscripti; hoc est, $\frac{1}{3}$ MP×PF, seu $\frac{1}{3}$ MΠ×ΠF, (per 1. vel 6. hujus.) Estque Conterminus Sector MPFM, (utpote ex arcubus arithmetice-proportionalibus conflatus,) = $\frac{1}{2}$ MP×PF, (per 1. hujus.) Ergo, figura Spiralis (utpote Sectoris residuum,) = $\frac{1}{6}$ MP×PF, (propter $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$;) hoc est, (propter $\frac{1}{6} . \frac{1}{2} :: 1 . 3$,) ad Sectorem conterminum, ut 1, ad 3.

Fig. 199, 200, 202. Nequis autem hæsitet, cur parabolæ MFB fig. 202. altitudinem, jam ponam, ipsius arcus contermini PF fig. 199. longitudini æqualem; quam prius feceram arcus PF fig. 200. dimidiam: ratio in promptu est. Cum enim retinentibus suam singulis longitudinem rectis ZY, utut in axem curvatis; dum, in rectis MB, contrahuntur μμ in unicum m punctum; adeoque Parabolæ magnitudo decrescat: necesse est ut, in ΠF, rectæ ξν (ipsis ZY æquales) protrahantur puta in πτ, (quibus respondeant, in Sectore Spirali contermino, arcus OO;) adeoque Complementi magnitudo crescat. Et propterea, dum complementum consideramus, (juxta hanc hypothesin,) facienda erit ΠF (complementi Semiparabolæ seu Semiparaboloeidis basis) ipsi POF semper æqualis, (quæcunque fuerit Parabolæ seu Paraboloeidis gradus,) utpote quæ ex omnibus πτ, (hoc est, omnibus OO,) componitur. Dum vero Parabolam vel Paraboloeidem figuram MFB (juxta priorem hypothesin) consideramus; facienda est MB parabolæ seu paraboloeidis altitudo, (non quidem omnibus OO, hoc est ipsi POF,) sed omnibus ZY simul sumptis æqualis: hoc est, in Spirali *Archimedea*, (propter ipsas MT, adeoque ZY,

Z Y, fig. 200. arithmetice proportionales,) æqualis semissi arcus P O F: Sed, si essent ipsæ M T, adeoque Z Y, ut illarum Quadrata (seu in duplicata ratione angulorum P M T,) hoc est, ut series Secundanorum; esset M B = ⅓ P O F: Si ut Series Tertianorum; esset M B = ¼ P O F: Et sic in aliis gradibus, prout cujusque ratio postulaverit; per prop. 1. hujus. (Quod in *Arithmetica Infinitorum*, prop. 5. & sequentibus, fusius ostendimus.) Atque hinc est, quod dum, in complemento considerando, reputamus omnes O O, hoc est z τ, invicem æquales: in Parabola, seu Paraboloeide, reputamus ipsas μ μ, seu Z Y rectas; hoc est, in Spirali, arcus R Y; continue crescentes, in ratione ipsarum m T, seu M T, rectarum. Quæcunque enim fuerit ipsarum Z Y differentia; dummodo idem sit angulus Z m Y seu Z M Y, eademque Radii M O seu m O longitudo; eadem ubique erit ipsius z τ seu O O longitudo. Tantundem utique sunt Triangula Z m Y, z m τ, atque Sectores Z M Y, O M O, respective sumpti; per 12 hujus. Quæ aliquanto fusius explicanda putabam, quo clarius percipiantur omnia. Fig. 199, 200, 202.





Eodem plane modo; si intelligatur Spiralis M T T F fig. 203. ita construi, ut, sumptis angulis P M T, P M T, arithmetice proportionalibus, (ut prius;) radii M T, M T; seu M p, M p; sint in eorum ratione Duplicata; seu, ut series Secundanorum: manifestum est, Arcus p T, p T, seriem esse Tertianorum (uno gradu altiorem quam est Series radiorum M p, M p,) utpote quorum rationes componuntur ex rationibus radiorum M p (quæ est Series Secundanorum,) & angulorum P M T (quæ est series Primanorum) respective sumptorum. Puta, ut rectæ p T, p T, fig. 204. diametro M P ordinatim-applicatæ, in paraboloeidis complemento M P F. Cujus quidem diametri M p, M p, sunt ut Secundana, sive Quadrata arithmetice-proportionalium; ordinatim-applicatæ p T, p T, ut Tertiana, seu arithmetice-proportionalium Cubi: Adeoque in Diametrorum ratione Subduplicatæ-Triplicata. Quæ itaque, si æqualibus intervallis sumerentur (non, uti nunc sunt, propter M p, M p, in ratione secundanorum;) hoc est, ut ordinatim-applicatæ ad diametros M p arithmetice-proportionales; series essent Indicem habens $\frac{3}{2}$. Quarum itaque ratio, ad maximam toties sumptam; hoc est, ratio complementi M T F P ad Parallelogrammum circumscriptum M B F P; ut 1 ad $\frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2}$; seu ut 2 ad 5. Est autem Sector P M F fig. 203. ad idem Parallelogrammum, ut 1 ad 2: (æquatur enim Sector, uti notum est, semissi rectanguli quod illius Radio & Arcu comprehenditur.) Cum itaque (propter singulos arcus p T, singulis rectis p T respective sumptis æquales; & eandem utrobique altitudinem M P;) Complementum Spiralis M T F P fig. 203. æquale sit Complemento Paraboloeideos M T F P fig. 204. erit Complementum illud Spiralis M T F P, ad Sectorem conterminum P M F; ut $\frac{2}{5}$ ad $\frac{1}{2}$; seu 4 ad 5: Et consequenter (quod reliquum est) Figura Spiralis M T F M, ad eundem Sectorem, ut 1 ad 5. (Quod M.

 etiam

Fig. 203, 204. etiam prius ostensum erat ad § A.) Arcusque T f fig. 203. complentes figuram Spiralem M T F; tantundem sunt atque rectæ T f fig. 204. complentes Bilineum M T F M. (Uti etiam ipsæ T f, fig. 202. tantundem sunt atque T f arcus fig. 199. complentes figuram Spiralem M T F M; seu, qui arcubus P T desunt ad complendum Sectorem conterminum.) Cum enim rectæ p f complentes Triangulum M F P fig. 204. tantundem sint atque p f arcus complentes Sectorem M F P fig. 203. (utpote utrobique arithmetice proportionales, & maxima maximæ æqualis, eademque utrobique altitudo;) sintque rectæ p T tantundem atque p T arcus: sequitur, Rectas residuas T f, tantundem esse atque residuos arcus T f.

N. Sed & simul innotescit, ex cujus Paraboloeideos convolutione, oriatur exposita Spiralis, cujus radii M T sint in duplicata ratione angulorum P M T. Nempe Paraboloeideos Semicubicalis, (quippe talis est M T F curva fig. 204. ut ex constructione patet;) hoc est, cujus ordinatim-applicatæ T p in complemento, sint in diametrorum M p ratione Subduplicatæ-Triplicata: & propterea in Paraboloeide, ordinatim-applicatæ T d, hoc est, p M, in diametrorum M d, hoc est p T, ratione Duplicata Subtriplicatæ.

Cujus quidem Paraboloeideos Basis B F, æqualis esse debet ipsi M F terminali in Spirali. Altitudo vero, non æqualis ipsi MB fig. 204. hoc est arcui PF fig. 203. seu aggregato omnium O O (quales in fig. 199, 200. conspiciuntur;) sed in ea ad ipsam M B fig. 204. ratione; quæ est (figuræ natura rite perpensa) omnium Z Y, ad omnes O O, seu $z\tau$, (quales in fig. 199, 202. conspiciuntur:) Hoc est, in præsenti casu (propter ipsas M T, adeoque Z Y, seriem Secundanorum,) ut 1 ad 3. Adeoque, si Paraboloeidis Semicubicalis, cujus basis sit B F, altitudo $\frac{1}{3}$ M B, fig. 204. omnia rectangula (qualia Z μ μ Y fig. 202.) in totidem triangula (ut ZmY) seu Sectores Z M Y (prout in fig. 200.) convolvi intelligantur: fiet figura Spiralis M T F M fig. 203. æqualis istius Paraboloeideos semissi. Quæ eodem modo demonstrantur, quo eadem de Parabola & Spirali *Archimedea* ostenduntur, § C, D, E.

Idemque ex calculo patet. Cum enim Index seu Exponens seriei Complementi M F P fig. 204. sit (ut supra ostensum est) $\frac{2}{3}$; adeoque ipsius Paraboloeideos MFB, $\frac{2}{3}$; erit hujus ad circumscriptum Parallelogrammum M P F B, (per prop. 1. hujus) ut 1, ad $1\frac{2}{3}$; seu 3 ad 5: Adeoque si (cæteris manentibus) sumatur altitudo subtripla, (quod faciendum esse ostendimus,) fiet ratio, ut 1 ad 5: Et consequenter, (quæ hujus est dimidia,) figura Spiralis M T F M fig. 203. ad idem Parallelogrammum M P F B fig. 204. ut 1 ad 10; hoc est, ad P M F fig. 203. Sectorem conterminum, (Parallelogrammi dimidium,) ut 1 ad 5. Quod fieri debere; supra ostensum est.

O. Similiter etiam ostendetur, (ut ad § I, K.) Curvam istius paraboloeideos sic constructi, æqualem esse curvæ Spiralis M T F fig. 203. Verum hujus Paraboloeideos Curvæ, æqualem rectam jam olim exhibuit *Neilius* noster, (Anno 1657. omnium primus,) &, post illum alii; (quod in Tractatu *De Curvarum* Ἐυθύνσει, pag. 91. (nunc 551.) & seqq. ostendimus. Ergo, ipsi MTF Spirali, æqualis recta exhibebitur; Supposita circuli quadratura, quæ hic necessaria erit (ut ex prædictis patet) pro designanda Paraboloeideos altitudine, quæ expositæ Spirali conveniat: utpote cujus altitudo, æqualis esse debet trienti arcus P F.

Quodque de recta hujus Spiralis curvæ æquali ostensum est; similiter & aliis Spiralibus accommodabitur, quæ ex ejusmodi paraboloeidibus aliisve figuris convolutis fiunt, quarum curvis æquales rectæ assignari possunt. De quibus fusius egeramus in Tractatu *De Curvarum* Ἐυθύνσει, præsertim pag. 111. & seqq. (nunc 563. &c.)

P. Ad eandem formam procedendum erit, in aliis Spiralibus, quarum Radii M T, sint in angulorum P M T ratione multiplicata, submultiplicata, vel ex his utcunque composita. Sunto enim verbi gratia, (ut una vice omnes absolvam,) ipsæ M T, seu M P, fig. 203. series Exponentem seu Indicem habens S: erunt itaque arcus P C (utpote in ratione ex Radiorum & Angulorum rationibus composita) series uno gradu altior; adeoque Indicem habens $S+1$. Idemque Index, per S divisus, erit correspondentis M T F P Complementi Paraboloeideos (fig. 204.) Hujus Paraboloeidis (cujus itaque Index erit $\frac{S}{S+1}$;) Basis ponenda erit æqualis ipsi M F spiralis Terminali rectæ. Altitudo vero, quæ ad arcum Sectoris contermini P F eam habet rationem quam Seriei ratio postulat; nempe quam habent omnes

omnes Z Y, seu M T, ad totidem maximo æquales; hoc est (propter seriei Indicem S,) ut 1 ad $S+1$ (per prop. 1. hujus.) Quæ quidem Parabola seu Paraboloeides est Figuræ Spiralis dupla; Curvaque illius, hujus curvæ æqualis; Tangensque illius cum Parabolæ seu Paraboloeidis Ordinatim-applicata in puncto contactus, eundem angulum facit quem facit Tangens Spiralis cum hujus radio respectivo.

Si vero, vice versa, quæratur quænam Figura Spiralis expositæ Paraboloeidi conveniat; puta cujus Exponens sit $\frac{1}{p}$. Erit $\frac{1}{p}=\frac{S}{S+1}$ (ut ex dictis patet;) ergo $p=\frac{S+1}{S}$, & $pS=S+1$, & $pS-S=1$, & $S=\frac{1}{p-1}$, qui Index erit Seriei radiorum M T in Spirali quæsita; cujus recta terminalis M F futura est Paraboloeidis basi æqualis; angulusque circulationis talis ut Sectoris Arcus conterminus eam habeat rationem ad expositæ Parabolæ vel Paraboloeidis altitudinem, quam habet $S+1$ ad 1. Quod ex modo demonstratis facile colligitur.

Superest, ut Centra gravitatis exquiramus. Quod eodem modo fiet atque in Propositione præcedente factum est. Posito enim, ut illic, P pro peripheria primi circuli; cujus pars infinitesima sit T; radius R; similiumque sectorum radii, utcunque crescentes, n; quibus respondeant in eadem ratione t: Erunt similes Sectores quilibet $\frac{1}{2}nt$, seu $\frac{n^2T}{2R}$; eorumque ab M distantia Centrorum gravitatis respective, $MR=\frac{2}{3}n$; adeoque à P M F, eorundem distantia $RS=\frac{2ns}{3R}$; ab EMG, distantia $RX=\frac{2nx}{3R}$: (nempe, in ea ratione ad R M, qua est Sinus Rectus illic, hic Co-sinus seu sinus complementi, anguli P M R, ad Radium:) Et propterea, singulorum respective momenta respectu rectæ P M F, $\frac{n^2T}{2R}\times\frac{2ns}{3R}=\frac{n^3sT}{3R^2}$; respectu rectæ E M G, $\frac{n^2T}{2R}\times\frac{2nx}{3R}=\frac{n^3xT}{3R^2}$: Vel, (neglecto T, ob causas ad § E. prop. præced. traditas,) illic, $\frac{n^3s}{3R^2}$; hic, $\frac{n^3x}{3R^2}$. Atque hoc quidem universaliter, quacunque ratione crescant radii M T, quos n dicimus usque ad eorum maximum N, qui sit M T terminalis. Q. Fig. 100.

Et propterea; Si crescant M T, seu n, in ratione angulorum P M T arithmetice proportionalium, quos a dicimus; erit $n=\frac{a}{P}R$, (hoc est, in eadem ratione ad R radium circuli primi, qua est a ad P; hoc est, angulus expositus P M T, ad quatuor rectos; seu istius anguli Arcus in Circuli primi peripheria, ad peripheriam integram;) Adeoque $\frac{n^2T}{2R}=\frac{a^2RT}{2P^2}$; & $\frac{n^3sT}{3R^2}=\frac{a^3sRT}{3P^3}$; & $\frac{n^3xT}{3R^2}=\frac{a^3xRT}{3P^3}$. Qui est casus, Spiralis *Archimedeæ*, capite præcedente expositus.

Si vero crescant M T seu n, in angulorum a ratione duplicata, triplicata, aliasve multiplicata; erit $n=\frac{a^2}{P^2}R$, vel $n=\frac{a^3}{P^3}R$, & sic porro prout rationis multiplicatæ gradus postulaverit. Adeoque $\frac{n^2T}{2R}=\frac{a^4RT}{2P^4}$, & $\frac{n^3sT}{3R^2}=\frac{a^6sRT}{3P^6}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2}=\frac{a^6xRT}{3P^6}$; Vel $\frac{n^2T}{2R}=\frac{a^6RT}{2P^6}$, & $\frac{n^3sT}{3R^2}=\frac{a^9sRT}{3P^9}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2}=\frac{a^9xRT}{3P^9}$; & sic porro, prout res postulaverit.

Si crescant M T seu n, in angulorum a ratione subduplicata, subtriplicata,

 aliasve

Fig. 200. aliasve submultiplicata; erit $n = R\sqrt{\frac{a}{P}}$, vel $n = R\sqrt[3]{\frac{a}{P}}$, atque sic porro. Adeoque $\frac{n^2 T}{2R} = \frac{aRT}{2P}$; & $\frac{n^3 sT}{3R^2} = \frac{1}{3} sRT\sqrt{\frac{a^3}{P^3}} = \frac{asRT}{3P}\sqrt{\frac{a}{P}}$, & $\frac{n^3 xT}{3R^2} = \frac{axRT}{3P}\sqrt{\frac{a}{P}} = \frac{1}{3} xRT\sqrt{\frac{a^3}{P^3}}$; Vel $\frac{n^2 T}{2R} = \frac{1}{2} RT\sqrt[3]{\frac{a^2}{P^2}}$, & $\frac{n^3 sT}{3R^2} = \frac{asRT}{3P}$, & $\frac{n^3 xT}{3R^2} = \frac{axRT}{3P}$: Atque sic porro, ut casus postulaverit.

Si crescant denique MT seu n, in angulorum a ratione aliqua quæ composita sit ex multiplicata & submultiplicata; puta, subduplicata triplicatæ, seu ut $\sqrt{a^3}$: Erit $n = R\sqrt{\frac{a^3}{P^3}} = \frac{a}{P} R\sqrt{\frac{a}{P}}$; adeoque $\frac{n^2 T}{2R} = \frac{a^3}{2P^3} RT$, & $\frac{n^3 sT}{3R^2} = \frac{1}{3} sRT\sqrt{\frac{a^9}{P^9}} = \frac{a^4 sRT}{3P^4}\sqrt{\frac{a}{P}}$, & $\frac{n^3 xT}{3R^2} = \frac{a^4 xRT}{3P^4}\sqrt{\frac{a}{P}}$: Et similiter alibi, prout cujusque compositionis gradus postulaverit, mutatis mutandis.

Ut igitur habeatur summa Omnium $\frac{n^2 T}{2R}$; hoc est, ipsa figura Spiralis, quocunque demum multiplicatæ seu submultiplicatæ seu ex his compositæ rationis gradu crescant MT seu n: id saltem requiritur ut habeatur summa *omnium* a^2, vel *omn.* a^4, vel *omn.* a^6, vel *omn.* a, vel *omn.* $\sqrt[3]{a^2}$, vel *omn.* a^3, aliave istiusmodi summa prout res postulaverit: (Quod universaliter obtinebitur per prop. 1. hujus.) Quippe hæc summa (per analogam ipsius P potestatem divisa) ducta in $\frac{1}{2} RT$, vel (neglecto tandem T, ob causas § E. prop. præced. traditas,) in $\frac{1}{2} R$; exhibet Spiralis figuræ magnitudinem. Quam & ante habuimus § A.

Ut autem habeatur summa omnium $\frac{n^3 sT}{3R^2}$, vel omnium $\frac{n^3 xT}{3R^2}$; hoc est, istius figuræ spiralis momentum respectu PMF, vel EMG; adeoque (momento per magnitudinem diviso) Distantia Centri gravitatis ab illis rectis: Id requiritur, ut habeatur summa omnium $a^3 s$, $a^3 x$; vel omnium $a^6 s$, $a^6 x$; vel omnium $a^9 s$, $a^9 x$; vel omnium $s\sqrt{a^3}$, $x\sqrt{a^3}$; vel omnium $s\sqrt[3]{a^3}$, $x\sqrt[3]{a^3}$, (hoc est, omnium as, ax;) vel omnium $s\sqrt{a^9}$, $x\sqrt{a^9}$, (hoc est, omnium $a^4 s\sqrt{a}$, $a^4 x\sqrt{a}$;) aliave istiusmodi summa prout expositus casus postulaverit. Quippe hæc summa (per analogam ipsius P potestatem divisa) ducta in $\frac{1}{3} RT$, vel (neglecto T) in $\frac{1}{3} R$; exhibebit totius momentum respectu rectarum PMF, EMG; atque ad has aut illas partes, prout signum + vel − prævaluerit; ut ad prop. præced. ostensum est. Unde etiam (ut dictum est) colligitur Centri gravitatis ab illis rectis distantia.

Quo pacto autem habebitur summa omnium as, ax; vel omnium $a^2 s$, $a^2 x$; vel omnium $a^3 s$, $a^3 x$; (ope prop. 10. hujus,) ostensum est ad § E. H. prop. præced. Quod etiam (ut ibidem monitum est § H.) ad alias ejusdem a potestates (indicem habentes numerum integrum) continuabitur; puta, ad $a^4 s$, $a^4 x$; $a^5 s$, $a^5 x$; $a^6 s$, $a^6 x$; &c.

Quod itaque sufficiet casibus eis omnibus, ubi ponuntur MT seu n crescentes vel in ratione angulorum a, vel in horum ratione duplicata, triplicata, aliasve multiplicata. Ut patet.

Vel etiam, in ipsorum a ratione subtriplicata, aut subtriplicatæ multiplicata. Quippe si sit $n = R\sqrt[3]{\frac{a}{P}}$, vel $n = R\sqrt[3]{\frac{a^2}{P^2}}$, &c. in horum Cubis, tolletur Radicalitatis nota; nempe $n^3 = \frac{a}{P} R^3$, vel $n^3 = \frac{a^2}{P^2} R^3$; & sic in cæteris: Adeoque $\frac{n^3 sT}{3R^2} = \frac{asRT}{3P}$, $\frac{n^3 xT}{3R^2} = \frac{axRT}{3P}$; vel $\frac{n^3 sT}{3R^2} = \frac{a^2 sRT}{3P^2}$, $\frac{n^3 xT}{3R^2} = \frac{a^2 xRT}{3P^2}$; & sic in cæteris. Quæ itaque omnia, ope ejusdem prop. 10. exhiberi poterunt; uti ostensum est.

Verum

Verum si ponantur MT, seu n, crescentes in angulorum a ratione subduplicata, subquadruplicata, aliave submultiplicata, aut ex his utcunque composita, (quæ non æquipolleat vel ipsi angulorum a rationi, vel hujus alicui multiplicatæ, vel saltem subtriplicatæ, aut hujus multiplicatæ;) res non ita feliciter succedit. Quoniam hic, ne quidem in Cubis eliminabitur Radicalitatis nota: Adeoque nec satis applicari poterit methodus illa, § E. H. prop. præced. exposita; ex prop. 10. hujus petita. Fig. 200.

Quæ autem, ad § Q. universaliter tradita sunt; Nempe, quacunque ratione crescant MT seu n radii; Sectorum similium magnitudines esse, $\frac{n^2 T}{2R}$; eorumque momenta respectu PMF, & EMG, esse $\frac{n^3 sT}{3R^2}$, & $\frac{n^3 xT}{3R^2}$: Non modo in his Spiralibus locum habent, ubi radii n sint in angulorum a ratione multiplicata, vel submultiplicata, vel ex his composita; sed quæcunque fuerit utcunque perplexa seu implicata ratio. Quæcunque enim fuerit, siquo modo haberi possit summa omnium $\frac{n^2 T}{2R}$, habebitur spiralis magnitudo: &, si haberi possit summa omnium $\frac{n^3 sT}{3R^2}$, & omn. $\frac{n^3 xT}{3R^2}$; habebitur istius Momentum respectu PMF, & EMG: & quidem si utraque habeantur; habebitur (momento per magnitudinem diviso) Distantia Centri gravitatis ab illis rectis. R.

Exempli gratia; si ponantur radii n, crescentes in ratione Ordinatim-applicatarum in Hyperbola; puta ut $\sqrt{:\frac{1}{2}aP+\frac{1}{2}a^2}$: adeoque $n=\frac{\sqrt{:\frac{1}{2}aP+\frac{1}{2}a^2:}}{P}R$: Erunt horum Quadrata, $n^2=\frac{aP+a^2}{2P^2}R^2$; adeoque $\frac{n^2 T}{2R}=\frac{aP+a^2}{4P^2}RT$. Cum itaque (per prop. 1. hujus) haberi possit tum summa omnium a, tum omnium a^2; habebitur etiam, omnium $\frac{aP+a^2}{4P^2}RT$; quæ est ipsa figuræ spiralis magnitudo. Et quidem, si porro haberi possit, summa omnium n^3 seu omnium $\frac{aP+a^2}{2P^3}R^3\sqrt{:\frac{1}{2}aP+\frac{1}{2}a^2}$: atque etiam summa omnium $\frac{n^3 sT}{3R^2}$, & omnium $\frac{n^3 xT}{3R^2}$; hoc est, omnium $\frac{aP+a^2}{6P^3}sTR\sqrt{:\frac{1}{2}aP+\frac{1}{2}a^2}$: & omnium $\frac{aP+a^2}{6P^3}xTR\sqrt{:\frac{1}{2}aP+\frac{1}{2}a^2}$: Hoc est, istius Figuræ Spiralis momenta respectu rectarum PMF, EMG: Momenta hæc, per magnitudinem illam divisa, exhiberent Centri gravitatis distantias ab illis rectis.

Cumque hæc in aliis Spiralium generibus, mille modis variatis, pariter obtineant: amplus hic pateret excurrendi campus, si liberet exspatiari.

Et quidem nonnulla alia Spiralium genera, in Tractatu meo, *De Curvarum Εὐθύνσει* exponuntur; quæ, cum multis aliis possent in hunc locum transferri. Sed, ne nimius sim, Lectoris illud industriæ (si opus fuerit) permittendum erit.

SCHOLIUM.

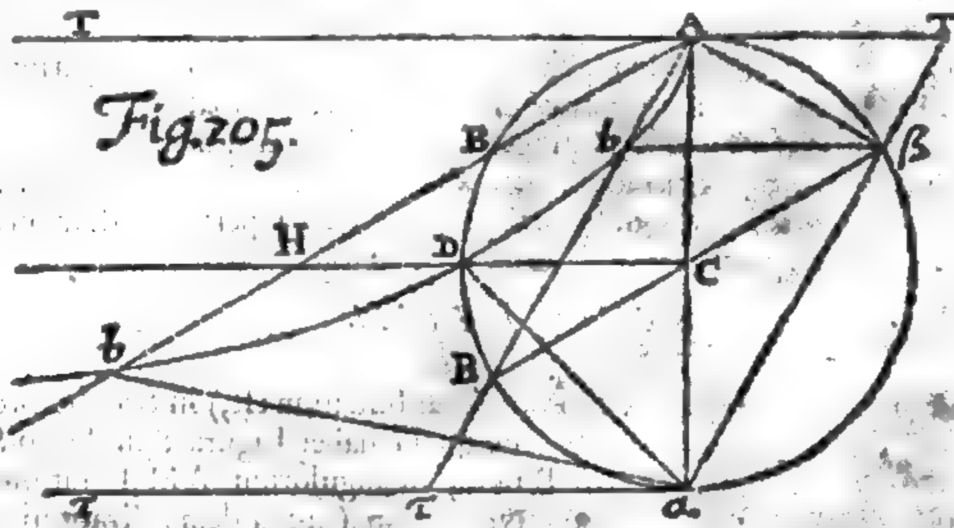
Monendum hic duxi, (quod & supra, § A. insinuatum est,) in Scholio prop. 45. *Arithm. Infin.* in assignanda ratione quam habet Figura Spiralis ad Sectorem conterminum, prout crescunt MT radii, in angulorum AMT ratione simpla, duplicata, triplicata, quadruplicata, &c. Cum (juxta demonstrationis tenorem) dicendum erat, *ut* 1 *ad* 3, 5, 7, 9, *&c.* nescio qua incuria scriptum fuerat, *ut* 1 *ad* 3, 4, 5, 6, *&c.* Quod cum non animadverterit V. Cl. *Stephanus de Angelis*, merum esse sive Calami sive Calculi lapsum, (non ex demonstrationis vitio ortum;) suspicatus est doctrinam illam de Spiralibus infirmam esse. Cum interim si satis animadvertisset demonstrationis vim (quæ hinc potissimum dependet, quod similes Sectores sint in Radiorum ratione duplicata; adeoque ubi Radiorum

Fig. 206. Radiorum series indices habent 1, 2, 3, 4, &c. series sectorum habebunt indices 2, 4, 6, 8, &c. adeoque omnium summa, ad maximum toties sumptum; hoc est, figura Spiralis, ad Sectorem conterminum; ut 1 ad 3, 5, 7, 9, &c.) vidisset, tum demonstrationi vim inesse; tum, emendato mendo numerali, omnia probe constare. Adeoque quam ille prolixa refutatione (in suo *de Spiralibus* tractatu) doctrinam subversum it: multo facilius, tribus verbis emendasset; dicendo, [*pro* 3, 4, 5, 6, *substituendum* (*juxta demonstrationis tenorem*) 3, 5, 7, 9:] quo facto, non erit quod reprehendat. Sed & simul videbit, totam illam quam ille justo volumine *De Spiralibus* doctrinam habet; eodem Scholio summatim tradi: Et quidem (utut hoc ille non statim perspexerit) universalius quam ab ipso tradita est. Cum enim dixeram, doctrinam illam de Parabolis & Paraboloeidibus, tum ante traditam, *tum deinceps tradendam*, spiralibus accommodari posse, in quibus crescant MT rectæ, in angulorum PMT ratione *duplicata, triplicata, quadruplicata, &c.* illud & *cætera* extendendum erat non modo ad alias rationes (stricte loquendo) *multiplicatas*, sed & *submultiplicatas*, vel ex multiplicatis & submultiplicatis utcunque *compositas*, vel etiam *numero surdo* exponendas. Quippe illud summatim insinuatum vellem; (quod de Paraboloeidibus, magis particulatim, vel ante traditum, vel mox tradendum erat;) Quemcunque habeat Indicem Series Rectarum MT, (integrum, fractum, surdumve;) hujus *Duplum*, indicem esse Seriei similium Sectorum radiis illis descriptorum: Summamque horum, ad maximum toties sumptum, (hoc est, figuram Spiralem ad Sectorem conterminum,) esse, ut 1 ad indicem illum (*duplum*) unitate auctum. Cujus quidem doctrinæ universalis, nonnisi pars est, tota illa quam habet ille de Spiralibus. Quæ tamen non ideo dicta sunt, ut, ab eo traditis, derogatum eam: sed ut ostendam, quam sit corollariorum ferax generalis illa methodus; cum Scholium illud Unicum (nec adeo longum) quo particulatim exponatur, materiam subministrare possit justo Volumini.

PROP. XXIX.

Quæ de Spatio Cycloidali (prop. 15.) tradita sunt non pauca, possunt & Spatio Cissoeidali accommodari.

CIssoeidis lineæ meminit Pappus lib. 3. prop. 4, 5. (pro duabus mediis proportionalibus inveniendis excogitatæ;) Cujus hæc natura. Sit ADα Semicirculus; cujus Centrum, C; Diameter, Aα; cui ad angulos rectos insistat CHD: Ducta ubivis Chorda AB, quam secet CD in H; si in ea sumatur, rectæ BH,



æqualis Hb; (vel Ab = Bτ;) quæ per omnia b puncta incedit curva AbD, *Cissoeides* dicitur. Eademque etiam ultra D punctum eodem ritu continuata (alternato tantum punctorum Bb situ, quæ in D coincidunt,) ea est quam hic volumus. Cui Asymptota est ατ recta, circulum in α contingens.

Spatium Cissoeidale, dicimus, quod curvæ Abb, rectisque Aα, ατ, interjacet: interminabile quidem ex parte bτ; magnitudinis tamen finitæ.

Spatium hoc consideravimus in Tractatu Epistolari, Tractatui de *Cycloide* subjuncto. Ejusque tum magnitudinem, tum momentum respectu rectarum A T, ατ; Centrique gravitatis (si quod foret) ab iis distantiam; Solidique ejusdem conversione sive circa A T sive circa ατ, facti magnitudinem, determinavimus. Fig. 205.

Est utique illud A b b τ α spatium interminabile, semicirculi A D α triplum. Et Axis Æquilibrii (adeoque, siquod esset, Centrum gravitatis) distat à τ α, Sextante Diametri A α; adeoque, à T A, ejusdem Diametri quinque Sextantibus; eisdem T A, τ α, tangentibus parallelus. Centrum autem gravitatis, intelligendum est, in axe illo, ab A α removeri ad infinitam distantiam; adeoque nusquam erit.

Solidumque ejusdem circa τ α conversione factum, est æquale Solido ex simili conversione Semicirculi A D α, circa eandem τ α: adeoque Semicylindro cujus basis sit idem Semicirculus, & altitudo æqualis peripheriæ puncto C circumducto descriptæ. Solidumque ejusdem circa T A conversione factum, est Solidi prioris quintuplum. Solidum vero quod intelligatur ejusdem circa A α conversione describi; est magnitudinis infinitæ.

Ungularum vero eidem insistentium, aciem habentium τ α, vel T A; ad similes Ungulas Semicirculo insistentes, easdem acies habentes; eadem est ratio quæ Solidorum istius conversione factorum, ad Solida simili conversione Semicirculi facta.

Ungularum vero; Planum Æquilibrii (in quo & Centrum gravitatis siquod esset,) quæ aciem habent τ α, ab ea distat, $\frac{3}{8}$ rectæ A α; quæque aciem habent TA, ab ea distant, $\frac{5}{8}$ ejusdem rectæ A α. Semisolidorum vero, aliorumve imperfecta conversione factorum, distantia Axis Æquilibrii ab axe conversionis τ α vel T A, ad illam in Ungulis distantiam, (ut sæpius ante ostensum est,) ut est ad conversionis arcum Chorda sua.

Quæ omnia cum ibidem demonstrata sint, non opus est ut eadem hic repetam.

Ut autem de Spatio Cycloidali ostensum est, (prop. 15. hujus,) non modo totum A b τ α (fig. 166.) totius A D α Semicirculi triplum esse; sed & partes partium respective sumptarum; puta b β τ, b β β b, b β α A, triplas partium α B α, B α B, B α A; & sic ubique: Ita in Spatio Cissoeidali fig. 205. non modo totum b b A α τ (spatium interminabile) triplum totius Semicirculi A D α, (adeoque Semicycloidi A τ α fig. 166. æquale:) sed & portiones b α A, b α b, b α τ, fig. 205. triplas respectivarum Semicirculi portionum α B α, B α B, B α A; & sic ubique; (adeoque ipsis Semicycloidis portionibus, b β τ, b β β b, b β α A, &c. fig. 166. respective sumptis, æquales.) Quod Vir Cl. *Christianus Hugenius* me primus monuit.

Verum hæc, ne nimius sim, mihi nunc non est in animo ulterius prosequi; nedum quæ ad partium Centra gravitatis spectant, quæque hinc dependent.

Id interim monendum duxi, Posse quidem eandem curvam alio adhuc modo construi.

Cum enim (ut ibidem ex Pappo demonstratum est,) ducta diametro B C β, junctaque tum A β, tum β b, quæ rectam A α secet in V; sit (propter tum B b bisectam in H, tum B β in C,) β V b, ipsi C H parallela; adeoque anguli ad V recti: erunt V α, V β, V A, V b, continue proportionales; hoc est (positis, A V $= v$, V α $= b$, V β $= s$, ut antehac sæpius;) continue proportionales, $b, s, v, \frac{v^2}{s} =$ b V. (Quod perinde valet, sive sumatur b, in A b D curva intra Semicirculum; sive in eadem extra Semicirculum continuata.) Adeoque, sumpto ubivis in A β α semiperipheria puncto β; sumptaque ad V β, V A, (seu s, v, sinum rectum & versum Arcus A β $= a$,) tertia proportionali $\frac{v^2}{s}$; erit hæc æqualis ipsi b V ordinatim-applicatæ ad Diametri A α punctum V. Quæque per omnia b puncta transit A b b, est ipsa Cissoeidalis curva. Sumptisque A V $= v$, arithmetice proportionalibus; erunt omnes $\frac{v^2}{s}$, totidem b V spatium Cissoeidale complentes. Cujus quidem portio A b α, cum tripla sit segmenti α B α, hoc est segmenti, A b A; erit (per § G. prop. 15.) $\frac{3}{2} c R$, seu $\frac{3}{2} a R - \frac{3}{2} s R$.

Fig. 205. Sed & sic poteſt conſtrui eadem Curva.

Ducta recta $\alpha\beta T$, quæ tangenti TAT occurrat in T; erit ubique $\beta b = AT$. Eſt enim $\alpha V . V\beta :: VA . Vb :: \alpha A = \alpha V + VA . AT = V\beta + Vb = \beta b$.

SCHOLIUM.

HAnc *Ciſſoeidalis Spatii* menſuram, me primus monuit (ſed abſque Demonſtratione) Vir Nobiliſſ. D. *Chriſtianus Hugenius* (acuti & ſagacis ingenii Vir) literis ad me datis 6° Auguſti 1658: Solicitus; An id ego poſſem conſequi methodis meis in *Arithmetica Infinitorum* traditis; (quas ibidem ille ſumme comprobat & collaudat;) prout me notat ante feciſſe (in *Commercio Epiſtolico*, tum nuper edito, Epiſt. 5 & 16.) in *D. Fermatii Hyperbolis Infinitis*; (nondum utique ſciebat Vir Nobiliſſimus, id item me feciſſe in *Cycloide*; cum ille *De Cycloide* liber nondum prodierit; ſed Anno tum ſequente 1659, una cum *Tractatu Epiſtolari*, ad illum ſcripto, *De Curvis Rectificandis & Complanandis*.)

Quod anſam dedit ea conſcribendi, quæ hac de re habentur in Tractatu illo Epiſtolari: Quo conſtaret Nobiliſſimo Viro, Eiſdem Methodis, directo ordine, huc perventum iri poſſe; etiam cum lucro.

Poſt autem editum Tractatum illum Epiſtolarem; atque hanc etiam *Secundam* Mechanicorum partem: Dignatus eſt Vir Nobiliſſimus (à me rogatus) ſuam ejuſdem (Ciſſoeidalis Spatii) menſuræ Demonſtrationem (ad modum Veterum conſtructam) mecum communicare. Quam ego (ne periret) ſubjunxi, tanquam Appendicem, Mechanicorum Parti *Tertiæ* (cap. 15. prop. 2.) meamque aliam eidem conſulto accommodatam: Quas ambas inde huc transferre jam viſum eſt, ut in locum debitum.

Demonſtratio D. Hugenii.

Quod *Spatia Ciſſoeidalia* $b\alpha A$, $b\alpha b$, $b\alpha\tau$, *&c. ſint tripla reſpectivorum in Semicirculo* $\alpha B\alpha$, $B\alpha B$, $B\alpha A$, &c. & ſic ubique. D. *Hugenii* Demonſtratio erat ad hunc ſenſum; (verbis nonnihil, ipſo inſinuante, mutatis;) quam potui proxime ad mentem ſuam deſcripta.

Fig. 329.

Fig. 328.

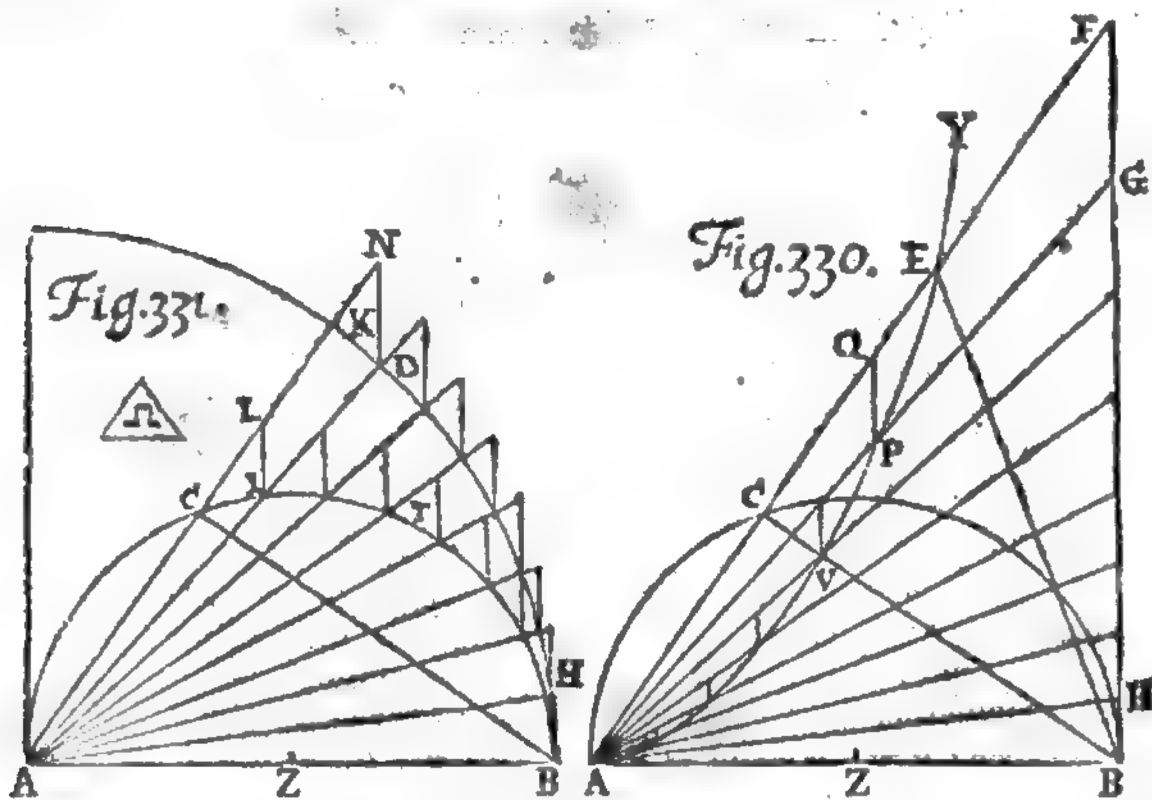
" Sit ACB, ſemicirculus, (cui Centrum Z, tangens BF) & $AVPE$ Ciſſoides " Dioclis inde genita: Cujus hæc proprietas, ut ſit ubique $AC = EF$. Atque ei- " dem Semicirculo (ſeorſum tranſcripto, quo vitetur linearum confuſio,) circum- " ponatur ABS circuli Quadrans (Centro A radio AB deſcriptus;) cui AC " producta occurrat in K. " Dico,

"Dico, *Spatium* A V P E F B *æquari Triplo segmento* C B T *una cum Triangulo* "A C B: Hoc est, Sectori A K B una cum Spatio C T B K. Est enim Segm. "C B T = Spat. C T B K. Nam (juncta C Z) erit Ang. C Z B = 2 Ang. C A B. "Adeoque Sect. Z C B = ½ Sect. A K B. Ergo Sect. Z C B = Triang. A C Z + "Spat. C T B K. Auferantur æqualia, hinc Triang. A C Z, inde Triang. Z C B: "Fit, Spat. C T B K = Segm. C B T.

"Ostendendum ergo, quod Spat. AVPEFB = Sect. AKB + Spat. CTBK.

"(Præsumitur autem, tanquam facile demonstratu, per notas exhaustionum me- "thodos, *Sectori* A K B *Inscribi posse & Circumscribi figuram Dentatam, ita ut* "*altera alteram excedat spatio minore quolibet dato: Et similiter, Spatio Cissoidali* "A V P E F B.)

"Si dicatur Cissoidis Spatium A V P E F B, minus esse quam Sect. A K B + "Spat. C T B K: Sit horum excessus Ω. Et inscribatur sectori A K B figura ordi- "nate, ut duplum omnium Trilineorum K N D sit minus quam Ω. Et Cissoidis "Spatio A V P E F B, figura inscribatur ex totidem trapeziis. Ostendetur Tra- "pezium E F G Q = Triang. A K N + Trapez. C N. Est enim Trapez. E G ad "Triang. A C L, ut F G + E Q ad C L, (quia eandem habent altitudinem;) "Hoc est, ut F A + A E ad A C; Hoc est, ut A F + F C ad A C; Hoc est, (de- "missa perpendiculari C R) ut A B + B R ad R A. Ergo, componendo, Tra- "pez. E G + Triang. A C L ad Triang. A C L, ut 2 A B ad A R; Hoc est, ut "2 Quadrat. A B ad Quadrat. A C; Hoc est, ut 2 Qu. A K ad Qu. A C; Hoc est, "2 Triang. A K N ad Triang. A C L. Ergo, Trapez. E G + Triang. A C L = "2 Triang. A K N. Et, ablato utrinque Triang. A C L, manet Triang. A K N "+ Trapez. C N = Trapez. E G. Et similiter de cæteris. Ergo, figura in Sectore "Inscripta + Omn. Trapez. C N, = Figuræ spatio Cissoidis Inscriptæ. Sed fi- "gura in Sectore assumens omnia K N D, item Trapezia C N assumentia omnia "K N D, ista inquam omnia simul sumpta superant Sectorem A K B + Spat. "C T B K. Ergo, figura in Sectore + trapeziis C N (hoc est, figura in Cissoide,) "assumens spatium Ω, longe superabit Sectorem A K B + spat. C T B K. Sed ipsum "Cissoidis spatium A V P E F B + Ω æquatur ex hypothesi Sectori A K B + spat. "C T B K. Ergo figura in Cissoide ipso Cissoidis spatio major erit. Quod est ab- "surdum.



"Dicatur jam Spatium idem A V P E F B, majus Sectore A K B + Spat. CTBK. "Sitque excessus Ω. Et circumscribatur Sectori figura, ut omnia K N D bis sumpta "sint minora excessu Ω. Et Cissoidis spatio, figura ex totidem Trapeziis; (nisi "quod, pro ultimo Trapezio, habeatur in Cissoide Triangulum A H B = Triang. "A H B in Sectore.) Ostendetur, ut supra, Trapez. P Q F G = Triang. A D N + "Trapez. L D. Ergo, tota figura circumscripta Cissoidi, æqualis circumscriptæ

" Sectori + omnibus Trapeziis L D. Sed ab his si demantur bis omnia Trilinea " K D N, residuum minus erit quam Sector A K B + spat. C T B K. (Nam primum auferendo omnia K D N, à figura circumscripta Sectori, relinquitur Sector " A K B: At eadem K D N auferendo à Trapeziis L D, residua omnia simul minora sunt spatio C T B K: Quin additis rursus spatiis L I C, omnia simul æquantur demum spatio C T B K.) Ergo, Si ab his ipsis, à figura nimirum circa Sectorem + Trapeziis L D; Hoc est, à figura Spatio Cissoidis circumscripta; Auferatur Ω: Reliquum multo minus erit Sectore A K B + spat. C T B K. Sed " spatium ipsum Cissoidis dempto Ω æquale dicebatur his ipsis. Ergo Cissoidis spatium majus erit figura sibi circumscripta. Quod est absurdum.

" Hoc itaque demonstrato, Quod Spat. A V P E F B = 3 Segm. C B T + Triang. A C B: facile ostendetur, Quod *Spatium infinitum* A V P E Y F B = 3 *Semicirc.* A C B.

" Item, *Quod Spatium* A V P E B = 3 *Segment.* C B T.

Atque hactenus Demonstratio D. *Hugenii.* Aliam se dicit ad D. *Slusium* olim misisse, (quam non vidi,) sed cui hanc præfert.

Idem aliter.

Huic D. *Hugenii* demonstrationi, libet etiam meam subjungere, (*Hugenianæ* consulto accommodatam,) ad eandem fere formam qua supra in Cycloide usus sum; retentis item eisdem Symbolis. Nempe;

Fig. 169, 174, 332. Intelligatur (ut, in Cycloide, § C, H. prop. 20. & alibi,) Semicirculi Genitoris peripheria A D α, in punctis X, B, D, &c. in partes quotlibet æquales dividi; puta, X B, B D, vel X B D, &c. Quibus respondeant Sectores X α B, B α D, vel X α D, &c. semicirculum complentes: Seu (quod in partibus infinite exiguis tantundem valet) Triangula figuram Inscriptam complentia, quorum unum sit B α P; vel complentia figuram Circumscriptam, quorum unum sit B α Y; vel denique (quod hic potissimum sequemur) complentia figuram partim inscriptam partim circumscriptam, quorum unum sit P α Y.

Quibus respondeant Triangula (situ contrario) ad Circulum, B A P, B A Y, P A Y; ad Cissoidem, b A p, b A y, p A y; ad Tangentem, β A π, β A υ, π A υ; & (Triangulorum ad Cissoidem, & ad Tangentem, differentiæ) Trapezia b β π p, b β υ y, p π υ y. Quæ quidem (figuras partim inscriptas partim circumscriptas spectantia) P α Y, P A Y, p A y, π A υ, p π υ y, repræsentent axes sui α B, A B, A b, A β, b β. Quanquam enim, in sectione definita, major sit B Y quam B P, adeoque b y quam b p, & β υ quam β π: neque rectæ A X, α D, in eodem Y puncto præcise coeant; aut rectæ α X, A D, in eodem præcise puncto P: sectione tamen in infinitum continuata, differentiæ illæ evanescunt; adeoque hic pro nullis habendæ, ipsaque recta P B = B X arcui, & B Y = B D, & P B Y = X B D. Ut, ex supra traditis de Cycloide, liquet.

His ita constructis; Ponamus Triangulorum P α Y, P A Y, (seu α B, A B,) basin P B Y = B; Adeoque (propter hujus altitudinem A V = v;) erit Triangulum P A Y, seu A B, = $\frac{1}{2} v B$. Sed, (propter similia triangula) ut recta A B ad A b, & ad A β; hoc est, ut A V = v, ad A Σ = α V = b, &. ad A α = $2R$; sic est P Y = B, ad $\frac{bB}{v}$ = p y, & ad $\frac{2RB}{v}$ = π υ. Adeoque (propter altitudinem, illic

A Σ = b,

A Σ $= b$, hic A α $= 2R$,) erit Triangulum A p y, seu A b, $= \frac{b^2 B}{2v}$; & A π v, seu A β, $= \frac{4R^2 B}{2v}$; & (horum differentia) Trapezium pyυπ, seu bβ, $= \frac{4R^2 - b^2}{2v} B$, hoc est (propter $b = 2R - v$, adeoque $b^2 = 4R^2 - 4vR + v^2$, & $4R^2 - b^2 = 4vR - v^2$,) $\frac{4R - v}{2} B$. Et sic ubique,

Ut igitur, Omnia A B Triangula, hoc est *Omn.* $\frac{1}{2} vB$, (sumptis arcubus a arithmetice proportionalibus usque ad a maximum seu arcum A B, quorum communis differentia B,) complentia vel totum Semicirculum A D α, vel illius Segmentum A B A, vel Sectorem B A α; ad Omnia p y υ π, hoc est *Omn.* $\frac{4R - v}{2} B$, complentia vel totum spatium Cissoidale interminatum Q b b A α τ, vel ipsius partem (item interminatam) b β τ Q arcum A B spectantem, vel partem reliquam A b b β α arcum B α spectantem, (nam de toto & de partibus perinde valet demonstratio;) vel (propter omnes $\frac{1}{2} B$ invicem æquales) ut *Omn.* v, ad *Omn.* $4R - v$, eo spectantia; sic spatia illa *Circularia*, ad respectiva *Cissoidalia*.

Sunt autem (sumptis, ut dictum est, a arithmetice proportionalibus) *Omnes* v arcum A B spectantes, (hoc est, A b K fig. 170.) $= eR$ (per § B. prop. 17.) & *Omnes* $4R$, $= 4aR$. Adeoque Segmentum A B A, ad correspondens spatium Cissoidale b β τ Q, ut eR ad $4aR - eR$, hoc est, ut e ad $4a - e$, vel (propter $e = a - s$) ut $a - s$ ad ($4a - a + s =$) $3a + s$. Est autem Segmentum ABA, $= \frac{1}{2} eR = \frac{1}{2} aR - \frac{1}{2} sR$ (per § G. prop. 15.) Ergo, Spatium Cissoidale b β τ Q, $= \frac{3}{2} aR + \frac{1}{2} sR$. Et, additis Triangulis illic α B A, hic α b β, (invicem æqualibus, propter æquales bases A B, b β, & altitudinem eandem,) quorum utrumvis $= sR$; fiet Sector B α A $= \frac{1}{2} aR - \frac{1}{2} sR$, & Spatium Cissoidale α b Q τ $= \frac{3}{2} aR + \frac{3}{2} sR$, Sectoris Triplum.

Similiter; *Omnes* v arcum B α spectantes, (hoc est K b τ T fig. 170.) $= \frac{1}{2} PR - eR = \frac{1}{2} PR - aR + sR = \alpha R + sR$ (per § B. prop. 17.) & *Omnes* $4R$, $= 4\alpha R$. Adeoque Sector B A α, ad correspondens Spatium Cissoidale A b b β α, ut $\alpha R + sR$ ad ($4\alpha R - \alpha R - sR =$) $3\alpha R - sR$, hoc est, ut $\alpha + s$ ad $3\alpha - s$. Est autem Sector B A α $= \frac{1}{2} \alpha R + \frac{1}{2} sR$ (per § H. prop. 15.) Ergo, Spatium Cissoidale A b b β α $= \frac{3}{2} \alpha R - \frac{1}{2} sR$. Et, sublatis æqualibus Triangulis, (illic α B A, hic α b β,) $= sR$; fiet Segmentum α B α $= \frac{1}{2} \alpha R - \frac{1}{2} sR$, & spatium Cissoidale α b b A $= \frac{3}{2} \alpha R - \frac{3}{2} sR$, segmenti Triplum.

Totum autem, quod A D α semicirculum spectat, Spatium Cissoidale AbbQτα, utrovis modo consequemur, propter evanescentia triangula α B A, α b β; seu $sR = 0$.

Eadem non multo aliter consequemur, ope Triangulorum P α Y. Nam, ut (Omnia Triangula P α Y arcum A B spectantia, hoc est) *Omnia* $\frac{1}{2} bB$, ad (omnia respectiva Trapezia p y υ π, hoc est) *Omnia* $\frac{4R - v}{2} B$; seu ut *Omn.* b. ad *Omn.* ($4R - v =$) $2R + b$; sic Sector (quem illa complent Triangula) B α A, ad Spatium (quod ea complent Trapezia) β b Q τ. Sunt autem *Omn.* b, eo spectantia, (hoc est, A b β α fig. 170.) $aR + sR$ (per § B. prop. 17.) adeoque *Omn.* $2R + b$ respectiva, $2aR + aR + sR = 3aR + sR$. Ergo, ut $aR + sR$ ad $3aR + sR$; seu ut $a + s$ ad $3a + s$; sic Sector B α A $= \frac{1}{2} aR + \frac{1}{2} sR$ (per § H. prop. 15.) ad Spatium β b Q τ $= \frac{3}{2} aR + \frac{1}{2} sR$. Si huic itaque addatur Triangulum β b α $=$ α B A $= sR$; fiet totum spatium α b Q τ $= \frac{3}{2} aR + \frac{3}{2} sR$, triplum Sectoris B α A.

Item, ut *Omn.* (Triang. P α Y, seu) $\frac{1}{2} bB$ arcum B α spectantia, ad *Omn.* (Trapez. p y υ π, seu) $\frac{4R - v}{2} B$ respectiva; seu *Omn.* b ad *Omn.* ($4R - v =$) $2R + b$ eo spectantia; sic Segmentum (quod illa complent) α B α, ad Spatium (quod hæc complent) β b b A α. Sunt autem *Omn.* b arcum B α spectantes (hoc est, b β τ fig. 170.) $\alpha R - sR$ (per § B. prop. 17.) adeoque *Omn.* $2R + b$ respectiva, $3\alpha R - sR$. Ergo, ut $\alpha R - sR$ ad $3\alpha R - sR$; seu ut $\alpha - s$ ad $3\alpha - s$, sic Segmentum α B α $= \frac{1}{2} \alpha R - \frac{1}{2} sR$ (per § G. prop. 15.) ad Spatium β b b A α $= \frac{3}{2} \alpha R - \frac{1}{2} sR$. Unde si auferatur Triangulum β b α $=$ α B A $= sR$; relinquitur

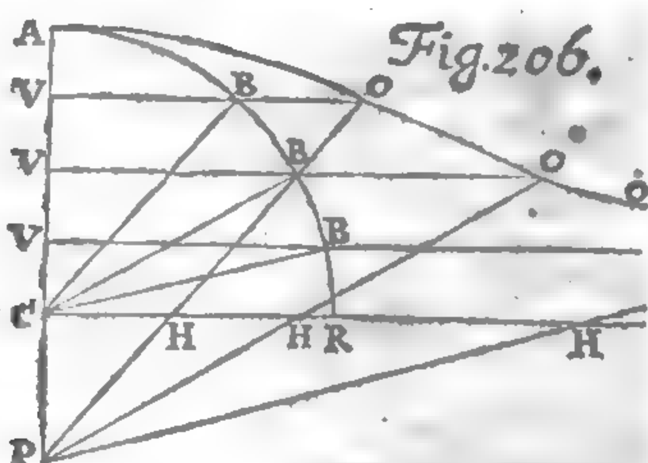
linquitur Spatium $\alpha b b A = \frac{2}{3} \alpha R - \frac{1}{3} s R$; Triplum Segmenti $\alpha B \alpha$.

Hinc facilis esset ad Momenta, & Centra gravitatis (ubi habentur,) Solidaque conversione facta, & horum item (ubi habentur) Centra Gravitatis, transitus; per methodos supra sæpius adhibitas.

PROP. XXX.

A. B. Fig. 206. *In Conchoeide, quæ ad Axem Ordinatim-applicatur recta componitur ex *Sinu-recto & Tangente* ejusdem Anguli: Et quidem ejusdem Circuli in Primaria, (ubi PC & CA æquantur,) sed diversorum in aliis.

C. Adeoque constat Semi-Conchoeidale Planum CAOOH, ex Qua-



drante Genitore CAR, & figura Tangentium RBAOO; ad eundem radium æstimatarum in Conchoeide *Primaria*, (ubi CA, PC, æquantur;) sed, in *Secundaria*, ad alium; (nempe PC:) Majorem quidem in *Protracta*, (ubi excentricitas PC major est quam AC altitudo,) in *Contracta* vero (ubi PC minor est quam CA) minorem.

D. Atque, in Conchoeidibus diversis invicem Comparatis; Genitores Quadrantes (eorumque segmenta respectiva) sunt in duplicata ratione Altitudinum CA. Reliquaque spatia RBAOO, (eorumque respectiva segmenta, ut ABO, vel OBBO,) si Altitudines CA æquales sint; sunt in ratione Excentricitatum: si Excentricitates PC sint æquales; in ratione Altitudinum CA: si neutræ; in ea quæ ex Altitudinum & Excentricitatum rationibus componitur; seu in ratione rectangulorum CPA.

A. E. Conchoeidis Planum (Curvæ & Regulæ interjectum) interminabile est, & magnitudinis infinitæ.

F. Ejusdem vero Momentum, respectu rectæ CH quæ Regula dici solet, finitum est: Ungulaque eidem insistens, aciem habens Regulam CH; Solidumque Plani circa Regulam illam conversione facti: sunt quidem Interminata, sed Magnitudinis finitæ, & notæ. Quod & de partibus, ut ABO, perinde valet.

G. H. Plani Semi-Conchoeidis Centrum gravitatis nullum est, (seu, quod eodem recidit, non nisi in infinita ab Axe distantia:) Sed neque Ungulæ, nec Solidi conversione facti.

G.H.I. Idemque obtinet de segmentis OVCH, rectæ CHH adjacentibus; atque de Ungulis Solidisque eo spectantibus: Sed non item de

Segmentis

Segmentis remotis AVO, seu ABO; aut ungulis Solidisve eo spectantibus. Sed neque de Ungulis Solidisque quæ Conchoeidem totam spectant (utrinque ab AC porrectam) quæ Centrum gravitatis habent in ipsa AC recta. Fig. 206.

IN exposita quavis recta AP, dicatur P polus, A vertex, punctumque quodvis intermedium C Centrum, rectaque infinita CHH (ad expositam AP perpendicularis) Regula: Atque intelligatur AP recta (ad partes P quantum opus est continuata) circa Polum P manentem sic converti, ut C punctum in recta CH perpetuo maneat; punctoque sui extremo A, curvam designet AOO: Hanc curvam veteres *Conchoeidem* dixerunt. A.

Manifestum autem est, (propter rectam PO, regulam CH secantem in H,) punctum O ad CH regulam nunquam perventurum: Sed & (propter HO perpetuo æqualem ipsi CA, & sectionis angulum continue acutiorem;) eo tandem perventum iri ut puncti O ab ipsa CH distantia futura sit data quavis minor: Adeoque rectam CHH ad curvam AOO Asymptotam esse; spatiumque, interminabile. Quæ demonstranda erant.

Centro C, radio CA, describatur circuli quadrans CAR (quem *Genitorem* appello) regulæ CHH occurrens in R; sitque ordinatim-applicata quælibet in Quadrante VB, in Conchoeide VO, (quadranti occurrens in B;) jungantur CB, PO. B.

Manifestum est, (propter æquales CA, CB, HO,) parallelas esse CB, HO, hoc est, CB, PO: adeoque angulos ACB, APO, æquales esse.

Est autem VB, Sinus Rectus Anguli ACB ad radium AC; & CH, hoc est BO, ejusdem anguli APO seu ACB, Tangens ad Radium PC; (quam *Excentricitatem* appello:) Hoc est, ad eundem radium, ubi PC, CA, æquantur; ad diversos, ubi non æquantur. Illas ego Conchoeides *Primarias* appello; has, *Secundarias*; & quidem vel *Contractas* vel *Protractas*, prout Excentricitas PC minor est vel major quam Genitoris radius CA, quam *Altitudinem* appello. Puta, in fig. 207. AOO est *Primaria*; Secundariæ vero, Aoo *Contracta*, & Aωω *Protracta*.

Adeoque; ut, in Cycloide, fig. 166. ordinatim-applicata quælibet bBV, componitur ex Sinu recto BV in circulo genitore; & ex Bb, quæ respectivo arcui æquatur; nempe ipsi BA in Cycloide *Primaria* (cujus basis τατ æquatur perimetro Circuli genitoris,) vel in *Secundariis*, (sive *protractæ* sint, sive *contractæ*,) simili arcui alterius circuli; cujus nempe perimeter æqualis est expositæ Cycloidis basi; (ut ad prop. 20. hujus ostensum est:) sic in Conchoeide fig. 206. ordinatim-applicata VBO, componitur ex sinu recto VB (ad radium CR inscripti Quadrantis CAR) & ex BO, hoc est CH, tangente correspondentis anguli; & quidem ad eundem radium, in Conchoeide *primaria* (ubi PC, CA, æquantur;) sed in *Secundariis*, sive protractis sive contractis, (in quibus PC, CA, non æquantur,) ad diversum; nempe, ad radium PC. Quod itidem erat demonstrandum. (Et quidem num illud ante me quispiam animadverterit, nescio.)

Componitur itaque Semiconchoeidale Spatium interminatum CAOOH, ex CAR Quadrante Genitore, & RBAOO, figura Tangentium (distorta) unius quadrantis, Radio PC convenientium, sinibus versis arithmetice-proportionalibus respondentium: sed, quæ altitudinem habeat AC. Pariter atque componitur Semicycloidale spatium Aτα fig. 166. ex Semicirculo Genitore ADα, & ADατ figura Arcuum distorta (sinibus versis arithmetice-proportionalibus respondentium,) ad eundem cum circulo genitore Radium, in Primaria; ad alium, in Secundariis; sed quæ Altitudinem habeat eandem cum Genitore circulo. C.

Hinc sequitur; In Conchoeidibus diversis, ejusdem altitudinis, (intellige, quarum eadem sit radii CA longitudo, seu magnitudo eadem quadrantis Genitoris CAR,) sed quæ inæquales habeant Excentricitates PC; Conchoeidale spatium (quod extra Circuli quadrantem est) RBAOO, (quam Tangentium figuram esse, jam ostendimus) vel etiam ejusdem assignatum quodvis segmentum (ordinatim-applicata abscissum) ABO, vel duabus ordinatim-applicatis interjectum OBBO; in ea ratione majora esse vel minora, qua majores sunt vel minores suæ respectivæ Excentricitates PC. Nam qua ratione crescit vel descrescit radius PC, D.

eadem

eadem ratione crescunt vel decrescunt Tangentes omnes (respective sumptæ) ÇH, hoc est, omnes BO, spatium complentes RAO, vel BAO, vel OBBO.

Adeoque (propter easdem utrobique respectivas altitudines) in eadem ratione augetur vel minuitur spatium quod complent illæ rectæ. Puta, (fig. 207.) Spatium ABO in *Primaria*; ad AB.o, in secundaria *Contracta*; & ABω, in *Protracta*; eam rationem habet (propter eandem altitudinem) quam habet Excentricitas PC, ad pC, & πC. Et sic ubique.

Si vero, eadem manente Excentricate PC, mutetur Altitudo CA; erunt respectiva spatia ABO, &c. altitudinibus illis proportionalia. (Nempe, propter easdem latitudines respectivas.)

Adeoque, si mutentur utræque; erunt respectiva Spatia, in ea ratione quæ componitur ex rationibus Altitudinum CA, & Excentricitatum PC: hoc est, in ratione rectanguli PCA in una, ad rectangulum PCA in altera. Quod (credo) primus indicabam ego, in *Commercio Epistolico*, Epist. 39, 40.

Quadrantes autem Genitores, si altitudines (hoc est, radios,) æquales habeant, æquales esse; sin inæquales, in Radiorum suorum ratione duplicata esse; notius est quam ut demonstratu opus sit.

E. Quod autem Conchoeidale spatium interminatum, sit etiam magnitudinis Infinitæ; sic colligitur.

Seponamus aliquantisper Quadrantem genitorem; & adjunctam figuram Tangentium consideremus: Eamque (exempto Quadrante genitore) restituamus in situm proprium, ut in fig. 208. ubi rectæ BO, figuram Tangentium complentes, (finibus versis AV arithmetice-proportionalibus respondentes,) ad axem CA ordinatim-applicantur.

Esto autem, fig. 209. Quadrans CAR seorsum exemptus: sumptoque, ubivis in CA radio, puncto V; erit VC (ejusdem à centro distantia) sinus complementi, istius anguli cujus AV est sinus versus, & VB sinus rectus, & AT Tangens, est autem (propter similia triangula) ut CV ad VB, sic CA ad AT; Hoc est, (positis VC $= x$, VB $= s$, CA $= R$,)

CA$=R$,) ut x ad s, sic R ad $\frac{s}{x}R=$ AT $=$ BO. Fig. 208.

Si itaque sumi intelligantur, ut (in fig. 208.) CV seu x, arithmetice-proportionales; vel, his æquales, Vu triangulum CAu complentes: Sumptis ubique, ut x ad s sic R ad *quartam*; erunt illæ quartæ, series totidem AT, hoc est, totidem BO, complentium RBAO figuram tangentium.

Sed (neglectis aliquandiu tertiis R) perpendamus quid futurum sit, si, pro R, substituerentur totidem s: Adeoque sumerentur ubique, ut x ad s sic s ad *quartam*. Erunt utique illæ *quartæ*, totidem $\frac{s^2}{x}$: Hoc est, (propter, in fig. 209. VBq$=$CBq$-$CVq$=$CAq$-$CVq, seu $s^2=R^2-x^2$,) totidem $\frac{R^2-x^2}{x}$; seu totidem $\frac{R^2}{x}-x$.

Sunt autem (propter x arithmetice proportionales, ab ipso C puncto, seu o, ordientes; & R^2 eandem ubique quantitatem;) *Omnes* $\frac{R^2}{x}$, series *Reciproca primanorum*, (per def. 2. hujus.) Indicem habens -1. Adeoque ad seriem totidem ultimo æqualium, hoc est ad totidem R^2, in ratione infinita, (per prop. 1. vel 7. hujus;) & propterea, magnitudinis infinitæ. (Estque revera, spatium Hyperbolicum exterius, Curvæ & Asymptotis interjectum, ut ad prop. 31, post ostendetur. Eademque Figura Secantium, finibus versis Arithmetice-proportionalibus convenientium; propter proportionales, in fig. 209, CV$=x$. CB$=R$ :: CA$=R$. CT$=\frac{R^2}{x}$.)

Sed, *Omnes* x, sunt series Primanorum; adeoque finitæ magnitudinis: Nempe $\frac{1}{2}R^2$ seu $\frac{1}{2}AR$, (per prop. 1. vel 7. hujus:) tantundem scilicet atque CAu Triangulum, quod complent rectæ Vu ipsis x æquales.

Et propterea, *Omnes* $\frac{R^2}{x}-x$, magnitudinis adhuc infinitæ. Nam finitæ magnitudinis ab infinita detractio, relinquit adhuc infinitam.

Verum, quam jam consideramus, Figura Tangentium etiam adhuc major est: Quippe Tangentes singulæ, sunt (non quidem totidem $\frac{s^2}{x}$ seu $\frac{R^2-x^2}{x}$, sed) totidem $\frac{sR}{x}$: Adeoque, (propter R; ubique majorem quam s,) Series *Omnium* $\frac{sR}{x}$, seu Figura Tangentium, major erit quam *Omnium* $\frac{s^2}{x}$; adeoque multo magis erit magnitudinis infinitæ. Adeoque multo adhuc magis, Spatium Conchoeidale, seu Semiconchoeidale CAOOH, (ex quadrante Genitore, & hac figura Tangentium, composita,) magnitudinis erit infinitæ. Quod demonstrandum suscepimus.

Verum quidem est, in Conchoeidibus *Secundariis*, ipsas BO, non esse tangentes ad radium CA, sed ad radium PC. Hoc tamen infinitati figuræ non derogat quippiam. Si enim PC major sit quam CA, figura RBAOO in eadem ratione augetur, (ut § D. ostensum est,) non minuitur; adeoque non minus erit infinita. Sin PC minor sit quam CA, minuitur quidem figura RBAOO; sed non nisi in ea ratione minuitur, qua PC minor est; Hoc est, in ratione finita: Quod autem infinito non nisi in ratione finita minus est, etiamnum est infinitum; adeoque plani infinitudo non destruitur. Saltem, nisi intelligatur ipsa PC penitus evanescere (ut PC quam CA sit infinities minor) coincidentibus PC punctis; quo casu Conchoeidale spatium degenerabit in CAR quadrantem. Fig. 206.

Quod autem Planum hoc, utut magnitudinis infinitæ, Momentum respectu Regulæ suæ CHH finitum habeat; adeoque Ungulas quæ aciem habeant Regulam illam, Solidaque circa illam conversione facta, magnitudinis esse finitæ; (quod nos, ni fallor, primi docuimus, in subjunctis Tractatui de Cycloeide;) sic ostendimus. F.

Zzzzz Quodnam

Fig. 206. Quodnam habeat momentum Quadrans genitor CAR, respectu rectæ CR, ostensum est prop. 15. § Q. nempe $\frac{1}{3}R^3$, (semissem scilicet istius quam habet Semicirculus respectu diametri suæ:) Atque tantundem est Semiquadrantalis Ungula eidem insistens, aciem habens CR: Solidumque ipsius conversione circa CR factum (utpote ad ungulam illam ut P ad R,) $\frac{1}{3}R^2P$; nempe Hemisphærium.

Plani reliquum, RBAOO, ex Tangentibus constat, seu totidem BO; Hoc est, in Conchocide primaria (ubi PC = CA = R,) totidem $\frac{sR}{x}$ seu $\frac{s}{x}R$; in Secundariis (posito PC = ϱ) totidem $\frac{s\varrho}{x}$ seu $\frac{s}{x}\varrho$: (Nempe in ea ratione vel longiores vel breviores quam tangentes ad radium CA = R, qua PC = ϱ longior est vel brevior quam CA.) Quæ si ducantur singulæ in suas ab CH distantias CV = x, fiunt totidem sR vel $s\varrho$. Sunt autem *omnes* s, idem atque circuli quadrans CAR quem complent; puta $\frac{1}{4}RP$, (per § D. prop. 15,) Adeoque *Omnes* sR, seu *Omnes* $s\varrho$, idem atque quadrans ille in distantia R vel ϱ suspensus; hoc est, $\frac{1}{4}R^2P$, vel $\frac{1}{4}\varrho RP$: Cui itaque æquatur Momentum *Omnium* BO, seu plani RBAOO, in suo loco suspensi; respectu rectæ CH.

Et similiter ostendetur, Ungulam semi-quadrantalem eidem insistentem cujus acies CH; hoc est *Omn.* $\frac{sR}{x}xx$, seu *Omn.* $\frac{s\varrho}{x}xx$, tantundem esse atque *Omn.* sR, seu *Omn.* $s\varrho$. Hoc est, circuli quadrantem CAR in altitudinem R, seu ϱ, = CP ductum; seu Cylindrum quadrantalem, cujus Basis CAR quadrans, & Altitudo ipsi CP æqualis: Nempe, $\frac{1}{4}R^2P$ vel $\frac{1}{4}\varrho RP$. Solidumque conversione plani RBAOO circa CH factum (utpote ad Ungulam illam, ut P ad R,) tantundem atque Cylindrum quadrantalem super eadem Base CAR, altitudinem habentem æqualem Peripheriæ radio CP descriptæ: Hoc est, $\frac{1}{4}RP^2$, seu $\frac{1}{4}\varrho P^2$.

Idemque, eadem ratione, in partibus ostendetur. Nempe, Momentum segmenti ABO respectu CHH, idem atque segmenti AVB in distantia R, vel ϱ, = CP suspensi. Ungulamque semi-quadrantalem eidem ABO insistentem aciem habentem CHH; tantundem esse atque Cylindrum cujus basis sit AVB & altitudo CP. Solidumque ejusdem ABO conversione circa CHH factum, tantundem atque Cylindrum cujus basis sit idem AVB segmentum & altitudo æqualis Peripheriæ radio CP descriptæ. Perinde enim procedit demonstratio de partibus respective sumptis, atque de totis.

G. Plani vero totius CAOOH, aut etiam totius figuræ Tangentium RBAOO, Centrum gravitatis nullum est. Cum enim Momentum (ut jam ostensum est) sit Finitum, & Magnitudo Infinita; si illud per hanc dividi intelligeretur, prodiret Centri gravitatis ab CHH distantia infinite-exigua: Neque tamen in ipsa CH esse, commode dici posset; quippe tum totum pondus ad unas partes rectæ CHH (quam esse tamen axem Æquilibrii oporteret) poneretur. Item, cum Spatium jam ostendatur infinitum esse; in quacunque ab AC distantia finita poni intelligeretur Centrum gravitatis; esset, circa illud, pondus finitum & in distantia finita; sed ultra Centrum illud, pondus infinitum in distantia item infinita: quod cum natura Centri gravitatis non consistit. Nullum igitur erit Plani totius Centrum gravitatis, vel (quod eodem recidit) nonnisi in infinita distantia ab AC.

Idemque similiter ostenderetur de totius portione OVCH, vel OBR, quæ rectæ CHH adjaceat. Quippe quicquid id sit quod ultra VBO abscinditur, finitum erit, (utpote undecunque terminatum;) reliquumque quod ipsi CHH adjacet, manebit adhuc magnitudinis infinitæ.

Segmentum vero quodcunque remotius AVO, vel ABO; cum & Momentum finitum habeat, & Magnitudinem finitam atque undecunque terminatam; habebit etiam Centrum gravitatis.

H. In Ungula Semiquadrantali, aciem habente CH, quæ singulis BO rectis insistunt Parallelogramma rectangula (ungulam complentia) sunt (propter longitudinum $\frac{sR}{x}$ seu $\frac{s\varrho}{x}$, in respectivas altitudines, distantiis x æquales, ductas) totidem sR seu $s\varrho$: Quæ tantundem sunt atque totidem rectangula respectivis VB = s insistentia, communem altitudinem habentia R, seu ϱ, = PC. Suntque in

in eiſdem à C H H diſtantiis. Adeoque eadem habent, reſpectu ipſius C H H momenta; tum ſigillatim reſpective ſumpta, tum ſimul omnia. Hoc eſt, idem eſt Momentum Ungulæ R B A O O (ejuſve ſegmentorum, ordinatim applicatis abſciſſorum, A B O, O B R,) atque Cylindri C A R (hujuſve ſegmentorum reſpective ſumptorum, A V B, B V C R,) reſpectu ejuſdem rectæ C H H. Fig. 206.

Diſtat autem quadrantis C A R (adeoque Cylindri huic inſiſtentis, per § E. prop. 5. hujus,) Centrum gravitatis à C H H, $\frac{8R^2}{3P}$, (per § Q. prop. 15.) quæ in quadrantis magnitudinem $\frac{1}{8}RP$ ducta, exhibet quadrantis Momentum reſpectu C H H, $\frac{1}{3}R^3$; adeoque (propter altitudinem R vel ϱ,) Cylindri momentum $\frac{1}{3}R^4$ vel $\frac{1}{3}\varrho R^3$. Idemque propterea momentum erit Ungulæ R B A O O reſpectu ejuſdem C H H. Atque hoc Momentum, per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{8}R^2P$ ſeu $\frac{1}{8}\varrho RP$, diviſum; exhibet diſtantiam Centri gravitatis (ſi quod ſit) vel ſaltem Axis Æquilibrii à C H H (intellige à perpendiculari plano ſuper recta C H H erecto,) $\frac{8R^2}{3P}$. (Tantundem utique quantum inde diſtat per § Q. prop. 15. Centrum gravitatis quadrantis C A R à C H R, ſeu Semicirculi ab ea cui adjacet diametro.) Et propterea, Solidi Semiconverſione circa C H H facti, Centri gravitatis inde diſtantia, (utpote ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, ſeu $4R$ ad P, per § E. F. prop. 14. hujus,) $\frac{32R^3}{3P^2}$.

Similiter de Ungulæ ſegmentis, puta quæ ipſis A B O, O B R, inſiſtunt; procedendum erit. Sunt utique illa æqualia reſpectivis Cylindri ſegmentis, quæ ipſis A V B, B V C R, inſiſtunt; atque in eiſdem à C H H diſtantiis; adeoque & æqualia habent momenta: quæ quanta ſint, ex prop. 15. hujus, facile eſt colligere. Eademque momenta, per reſpectivas magnitudines diviſa, exhibebunt Centrorum gravitatis (ſiqua ſint) à C H H diſtantias reſpectivas. Atque inde colligetur (per § E. F. prop. 14. hujus) Semiſolidorum (aliorumve imperfecta converſione circa C H H factorum) Centri gravitatis (ſiquod eſt) inde diſtantia.

Et, propterea; cum etiam Ungularum (aut Solidorum correſpondentium) quæ C A R (ejuſve portiones) ſpectant, tum magnitudines, tum Centra gravitatis determinata ſint, prop. 15, 16. hujus: Ungularum ſimiliter quæ Conchoeidale ſpatium C A O O H (ejuſque partes) ſpectant, Momenta & Magnitudines (per prop. ult. cap. præced.) non minus determinantur, quam quæ Figuram Tangentium C A O O (ejuſque partes) ſpectant.

Si vero, eorundem parallelogrammorum ipſis B O (fig. 208.) inſiſtentium; hoc eſt, totidem sR vel $s\varrho$, (ut ſupra oſtenſum eſt;) reſpectu rectæ A C vel A R (cui, exempto quadrante, ibidem adjacent) momentum conſideretur: Cum ſua Centra gravitatis in media longitudine ſita ſint (per prop. 2. hujus,) erunt eorum ab A B R diſtantiæ reſpectivæ, $\frac{sR}{2x}$, ſeu $\frac{s\varrho}{2x}$, (nempe longitudinum ſupra inventarum ſemiſſes:) quæ in reſpectivas magnitudines sR vel $s\varrho$ ductæ, exhibent eorum reſpectu rectæ A B R momenta $\frac{s^2R^2}{2x}$, ſeu $\frac{s^2\varrho^2}{2x}$: Hoc eſt (propter $s^2 = R^2 - x^2$,) $\frac{R^2 - x^2}{2x}R^2$, ſeu $\frac{R^2 - x^2}{2x}\varrho^2$: Hoc eſt, $\frac{R^4}{2x} - \frac{1}{2}xR^2$, ſeu $\frac{\varrho^2R^2}{2x} - \frac{1}{2}x\varrho^2$. I. Fig. 208.

Eſt autem, ſeries omnium $\frac{R^4}{2x}$, ſeu $\frac{\varrho^2R^2}{2x}$, Reciproca primanorum; cujus itaque magnitudo infinita erit, (per prop. 1. vel 7. hujus:) Sed omnium $\frac{1}{2}xR^2$ ſeu $\frac{1}{2}x\varrho^2$, ſeries primanorum, adeoque magnitudinis finitæ, (per prop. 1. vel 6. hujus:) Hujus itaque ex illa ſubductio, non impedit quin adhuc maneat, omnium $\frac{R^4}{2x} - \frac{1}{2}xR^2$, ſeu $\frac{\varrho^2R^2}{2x} - \frac{1}{2}x\varrho^2$ ſeries, hoc eſt, Ungulæ R B A O O (aciem habentis C H H) momentum reſpectu rectæ A B R, magnitudinis infinitæ. Adeoque Momentum illud infinitum, per Ungulæ Magnitudinem (quam finitam eſſe jam oſtenſum eſt, § F.) diviſum; diſtantiam Centri gravitatis ab A B R exhibebit infinitam: Et multo magis fig. 206. (interpoſito quadrante C A R) diſtantiam

stantiam Centri gravitatis ejusdem Ungulæ RBAOO (distortæ) distantiam à recta AVC infinitam: Et magis adhuc, totius CAOOH Ungulæ Conchoeidalis, Centri gravitatis ab eadem AVC distantiam infinitam. Quod itaque nusquam est; seu (quod eodem recidit) non nisi in infinita distantia ab AC.

Idemque similiter ostendetur, de Ungula segmenti CVOOH, ipsi CHH adjacentis: Atque etiam de solidis conversione (perfecta vel imperfecta) sive totius CAOOH sive segmenti CVOOH factis: Nempe, distantiam Centri gravitatis ab AC infinitam esse.

Ungula vero segmenti remoti AVO, (utpote undique terminata, adeoque magnitudinis finitæ, & in distantia finita,) Momentum habet finitum, & Centrum gravitatis. Et similiter, solidum conversione factum.

Item, quæ Conchoeidem totam (utrinque in infinitum porrectam) spectant, (aut etiam ejusdem segmentum, ordinatim-applicata abscissum, & utrinque ab AC æqualiter porrectum) Ungulæ, Solidaque conversione facta, (propter duos semisses, utrinque ad AC positos, invicem æquiponderantes,) Centra gravitatis habebunt; in ipsa quidem AC recta (seu Plano huic perpendiculariter insistenti;) atque in ea à C distantia quam ad § H modo determinavimus.

Fig. 210.

PROP. XXXI.

A. Spatium Hyperbolicum exterius, (Curvæ & Asymptotis interjectum,) ex Primanorum reciprocis conflatur: inscripta Parallelogramma habens invicem æqualia.

B. Estque suapte natura utrinque interminabile.

C. Estque magnitudinis infinitæ, sive ex utraque sive ex altera tantum parte interminatum maneat: Sin utrinque truncatum seu terminatum censeatur, magnitudinis finitæ.

D. E. Portio hujus, ex altera tantum parte truncata, & recta terminata quæ alteri Asymptotarum parallela sit, (ut ASHhσ,) utut magnitudinis sit infinitæ, momentum tamen habet respectu istius Asymptotæ (Aσ) finitum: Ungulamque, cujus acies sit Asymptota illa, exhibet magnitudinis finitæ, & noto Parallelepipedo æqualem: Solidumque conversione circa Asymptotam illam factum, magnitudinis finitæ & notæ.

F. Quæque huic Portioni sive toti (ut ASHhσ,) sive ejusdem parti duabus rectis Asymptotæ illi parallelis interjectæ, (ut SCIH) insistit Ungula, aciem habens Asymptotam illam; habet Æquilibrii Planum (adeoque & Axem Æquilibrii, & siquod sit Centrum gravitatis) in perpendiculari Plano quod præcise medium sit inter parallelas rectas portionem hanc, ejusve partem expositam, terminantes; atque in illo per aciem plano quod Ungulæ altitudinem bisecat. Centrum autem gravitatis quod hujusmodi Ungulam, ipsi Asymptotæ (quæ acies ipsius est) contiguam, respicit; nullum est, vel (quod eodem recidit) nonnisi in infinita distantia ab altera Asymptotarum.

G. Portionis hujusmodi utrinque truncatæ (duabus Asymptotæ parallelis interjectæ (ut SOVH, SCIH,) magnitudo, (vero proxima,) calculo assignari potest quantumlibet accurate.

H. Adeoque & Portionis interioris; ut HVX, HIx, vel HVD, HId.

I. K. Et utriusque momentum tum respectu Asymptotæ Aσ, tum respectu Axis vel Diametri AX, Ax; Centrique gravitatis inde distantia.

tia. Adeoque ipsum gravitatis Centrum. Idque in Hyperbolis tum Erectis, tum Scalenis.

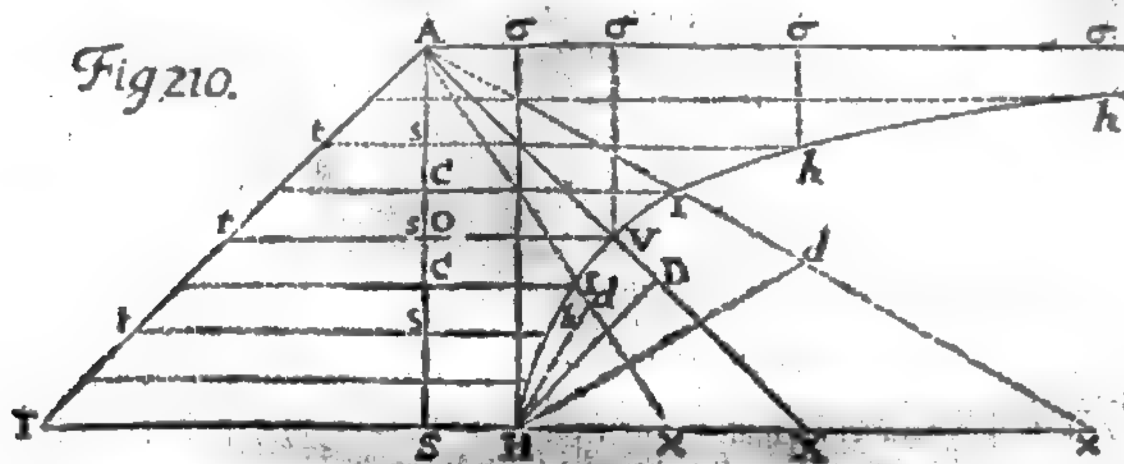
Habetur etiam Hyperbolici Conoeideos (vel Pyramidoeideos) tum magnitudo, (nempe ad Cylindrum seu Prisma, ejusdem basis & altitudinis, ut $3T+2D$, ad $6T+6D$;) tum Centrum gravitatis; utpote quod in ipso Solidi Axe ita constitutum est, ut pars ad verticem sit ad totum, ut $4T+3D$ ad $6T+4D$. L. M.

Hinc etiam habetur (quæ cum Hyperbolæ quadratura conjuncta est) Curvæ Parabolicæ Rectificatio; seu Recta huic curvæ æqualis. N.

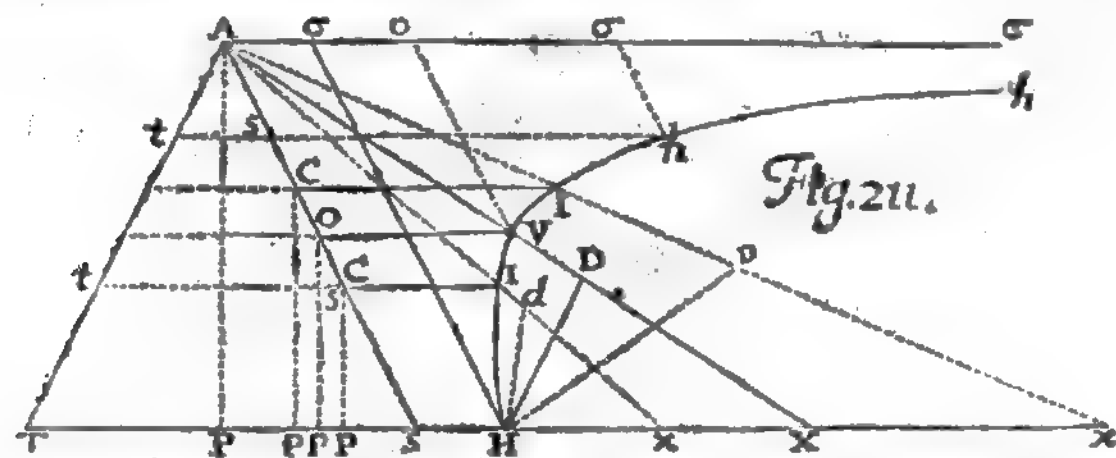
Item, Superficiei Curvæ Conoeideos Parabolici Expansio; seu Plana huic Curvæ æqualis. N.

Aliaque multa, quæ Curvas alias tum Lineas tum Superficies spectant, ad Rectas & Planas reducendas, (earumque Centra gravitatis,) subjungi possent. O.

SIt Hhh Hyperbola, cujus Asymptotæ AS, Aσ, (angulum ad A utcunque facientes,) Axis AX, vertex V: Alterique ex Asymptotis, puta Aσ, parallela SH, aliæque quotlibet sh (æqualibus intervallis dissitæ) spatium curvæ & asymp- A. Fig. 210, 211.



totis interjectum complentes; quibus ex adverso respondeant totidem st complentes AST triangulum, adeoque ipsis As proportionales.



Ostendimus jam olim (ad prop. 88, 91, 92, 94, 95, 103, *Arithmeticæ Infinitorum*) Figuram (nisi *Spatium* appellare malis) curvæ & asymptotis interjectam, ex *Primanorum Reciprocis* conflatam esse; adeoque natura sua utrinque interminabilem esse, (tum ad partes hσ, tum ad partes HS;) & magnitudinis infinitæ, sive utrinque sive ex altera tantum parte interminata censeatur; sed, utrinque truncatam, adeoque undique terminatam, magnitudinis esse finitæ.

Nempe; propter inscripta Parallelogramma ASHσ, Ashσ, &c. omnia inter se æqualia, (quæ nota est Hyperbolæ proprietas, per prop. 12. lib. 2. *Apollonii,*) erunt ubique rectæ SH, sh, ipsis AS, As, (adeoque ipsis ST, st,) reciproce proportionales; hoc est, reciprocæ Primanorum (seu arithmetice proportiona-

 lium;)

Fig. 210, 211. lium;) ex talibus itaque Figura seu Spatium illud conflatur. Quod erat primo demonstrandum.

B. Cum itaque ita sumi possit s punctum, ut recta As ad AS, seu st ad ST, sit in ratione quantumvis exigua, (donec tandem in ipsum A punctum degeneret,) erit propterea (quæ illi respondeat) sh ad SH in ratione quantumvis magna, (donec tandem quæ ipsi A puncto respondere intelligatur evadat infinita:) Unde sequitur, respectiva puncta h, σ, nonnisi post infinitam distantiam (hoc est, nunquam,) coitura: (Utut intervallo tandem distent quod dato minus sit, quantillum scilicet est As:) Adeoque Spatium illud esse, ad partes hσ, interminabile: rectamque Aσ asymptotam esse.

Similiter; Cum ita sumi possit (in AS continuata) punctum s, ut sit As ad AS, seu st ad ST, in ratione quantumvis magna (nec unquam eo perveniri possit ut non possit major sumi,) erit propterea quæ ipsi respondeat reciproce proportionalis sh ad SH in ratione quantumvis exigua, (nec eo tamen pervenietur ut non possit sumi minor.) Unde sequitur; neque unquam coitura esse puncta H, S, (utut, ad distantiam data quavis minorem, continue accedant:) Adeoque Spatium idem, ad partes etiam HS, interminabile esse: rectamque AS similiter esse Asymptotam. Quæ itidem erant demonstranda.

C. Intelligatur autem Spatium illud ex altera parte truncatum (puta ad partes HS,) recta HS (ipsi Aσ parallela) terminatum, interminatum vero ad partes hσ: Erit (propter seriei ex primanorum reciprocis Indicem -1, per def. 2. hujus,) Spatium illud ASHhσ, ad inscriptum Parallelogrammum ASHσ, ut 1 ad $-1+1$, (per prop. 1. vel 7. hujus;) hoc est, ut 1 ad 0: adeoque magnitudinis Infinitæ. Quod item erat demonstrandum.

Atque similiter ostendetur, Spatium idem recta hσ terminatum, & interminatum ad partes HS, magnitudinis esse infinitæ. Adeoque, à fortiori, si utrinque fuerit interminatum. Quæ itidem probanda erant.

Si vero utrinque truncatum, adeoque & terminatum, fuerit; puta, rectis HS, hσ; vel HS, sh; (vel alias utcunque:) Manifestum est, figuram illam sic truncatam, (utpote undique terminatam,) puta SHhσA, vel SHhs, magnitudinis esse finitæ. Quod etiam erat propositum.

D. Intelligatur itaque Basi SH, parallela recta CI, portionem CSHI abscindere. Sitque basis $SH=B$, latus AS (vel, in obliquangulis, figuræ altitudo, AP) $=A$; adeoque parallelogrammum inscriptum $ASH\sigma=AB$: Item CS (vel, in obliquangulis, ut fig. 211. hujus altitudo, CP) $=C$: Ipsiusque A, vel C; particulæ infinite exiguæ, a, a, &c. Cum itaque rectæ sh, planum complentes, sint ipsis As (seu harum altitudinibus,) hoc est, suis à vertice distantiis, reciproce proportionales; Hoc est, As, AS :: SH . sh: Erunt ipsæ sh, (à vertice deorsum,) $\frac{AB}{0}, \frac{AB}{a}, \frac{AB}{2a}, \frac{AB}{3a}$, &c. usque ad basin $\frac{AB}{A}=B$: Vel (à base sursum) $\frac{AB}{A}, \frac{AB}{A-a}, \frac{AB}{A-2a}, \frac{AB}{A-3a}$, &c. usque ad $\frac{AB}{A-A}=\frac{AB}{0}$ (si ad ipsum verticem procedatur;) vel (si tantum ad CI) usque ad $\frac{AB}{A-C}=$ CI. Quorum itaque omnium Aggregatum, sunt ipsum quod complent planum.

E. Eædemque rectæ, in suas singulæ à vertice distantias ductæ; puta, $\frac{AB}{a}$ in a, $\frac{AB}{2a}$ in $2a$, &c. hoc est, totidem AB; sunt ipsa Ashσ parallelogramma; (quæ itaque omnia, ut prius dictum est, sunt invicem æqualia.)

Sed & eædem rectæ in easdem distantias ductæ, sunt earundem Momenta respectu rectæ Aσ: Vel etiam, parallelogramma, eisdem sh rectis insistentia, Semiquadrantalem Ungulam complentia, aciem habentem Aσ: Quæ itaque sunt totidem AB. Et propterea quæ toti ASHhσ (figuræ interminatæ) insistit Ungula, aciem habens Aσ, (seu Plani ASHhσ momentum respectu Aσ,) est ipsum AB in A (totius altitudinem) ductum: Hoc est, A^2B. Et similiter ejusdem Ungulæ portio ipsi ACIhσ insistens (seu plani hujus Momentum respectu Aσ,) est AB in $A-C$; hoc est, A^2B-ABC: Quæque portioni SHIC insistit, aciem itidem

itidem habens A σ, (seu plani momentum respectu A σ,) est AB in C; hoc est ABC. Fig. 210, 211.

Habetur itaque, quæ plano interminato, magnitudinis infinitæ, A S H h σ, insistit Ungula (aciem habens A σ) magnitudinis Finitæ; nempe Solido $A^2 B$ (Parallelipipedo Rectangulo) æqualis. Ejusdemque Plani (magnitudinis infinitæ) quod conversione circa A σ describitur, Solidum Magnitudinis Finitæ: Quippe, ad ungulam illam, ut (P ad R, hoc est, ut) Circuli Peripheria ad ejusdem Radium; (per prop. 12. hujus:) Estque hoc Torricellii *Solidum Hyperbolicum Acutum.*

Hinc etiam sequitur, istius Ungulæ (aciem habentis A σ) sive quæ toti ASHhσ, sive quæ utrivis portioni A C I h σ, vel S C I H, insistit, Centrum gravitatis (nempe si quod sit) seu Planum Æquilibrii, esse in eo plano quod inter extrema medium est. Nempe, primæ, in eo quod medium est inter A σ & S H, (quodque ab A σ seu H S distat $\frac{1}{2}A$;) secundæ, in medio inter A σ & C I, (quodque ab A σ seu C I distat $\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}C$;) tertiæ, in medio inter C I & S H, (adeoque à C I vel S H distat $\frac{1}{2}C$.) Quippe, cum singulæ rectæ h s planum complentes æqualiter onerantur (nempe parallelogrammo AB,) Centrum gravitatis seu Æquilibrii planum in ipso medio erit (non minus quam si Parallelogrammi plano insisteret Parallelepipedum, altitudinem habens ipsi A æqualem;) per prop. 2. vel 3. hujus. F.

Atque in quo per aciem plano situm sit, jam supra sæpius ostensum est; (nempe, in eo quod Ungulæ altitudinem bisecat:) Ergo, in ea recta quæ est utrique communis: quæ itaque recta, est Axis Æquilibrii.

In quo autem hujus rectæ puncto sit Centrum gravitatis (quod ungulam respiciat ipsi A σ contiguam) si inquiratur: Invenietur, (secundum ea quæ tradita sunt ad prop. 8. hujus) nusquam esse: seu (quod eodem recidit) in distantia (ab AS) infinita. Est enim Series Magnitudinum, series Æqualium (propter æqualia parallelogramma ipsis s h rectis insistentia,) cujus Index, 0; adeoque Magnitudo, verbi gratia, NP: Series vero Distantiarum (Centrorum gravitatis) ab A S, (utpote in media longitudine rectarum s h,) Series est reciproca primanorum (qualis est ipsa rectarum series) cujus Index, -1: Et propterea Series Momentorum (ex illis conflata) series item reciproca primanorum; (propter $-1+0=-1$.) Adeoque Momentum integrum, $\frac{1}{-1+1} NPD = \frac{1}{0} NPD : NP) \frac{1}{0} NPD (\frac{1}{0} D$. Hoc itaque per Magnitudinem NP divisum, exhibebit distantiam ab A S, $\frac{1}{0} D$; hoc est, quæ sit ad D (distantiam centri gravitatis basis ab A S;) seu, in hoc casu, ad $\frac{1}{2} B$; ut 1 ad 0. Quæ ratio est infinita.

Sed, (ut ad Planum redeamus,) ostensum est, (§ D.) C S H I, (planum interminatum,) æquale esse aggregato omnium s h, hoc est, omnium $\frac{AB}{A}+\frac{AB}{A-a}+\frac{AB}{A-2a}+\frac{AB}{A-3a}$, &c. usque ad $CI=\frac{AB}{A-C}$. G.

Est autem $\frac{A}{A-a}=1+\frac{a}{A}+\frac{a^2}{A^2}+\frac{a^3}{A^3}$ &c. in infinitum. (Quod dividendo A per $A-1$ patebit.) Adeoque $\frac{AB}{A-a},=1+\frac{a}{A}+\frac{a^2}{A^2}+\frac{a^3}{A^3}$ &c. in B. Et similiter ostendetur $\frac{AB}{A-2a},=1+\frac{2a}{A}+\frac{4a^2}{A^2}+\frac{8a^3}{A^3}$ &c. in B. Et $\frac{AB}{A-3a},=1+\frac{3a}{A}+\frac{9a^2}{A^2}+\frac{27a^3}{A^3}$ &c.

$$A-a)\,A\,(1,+\frac{a}{A},+\frac{a^2}{A^2},+\frac{a^3}{A^3},\ \&c.$$

$$\frac{A-a}{+a}$$

$$\frac{+a-\frac{a^2}{A}}{+\frac{a^2}{A}}$$

$$\frac{+\frac{a^2}{A}-\frac{a^3}{A^2}}{+\frac{a^3}{A^2}}$$

$$\frac{+\frac{a^3}{A^2}-\frac{a^4}{A^3}}{+\frac{a^4}{A^3}\ \&c.}$$

in

Fig. 210, 211. in *B*. Et similiter in cæteris usque ad $\frac{AB}{A-C} = 1 + \frac{C}{A} + \frac{C^2}{A^2} + \frac{C^3}{A^3}$ &c. in *B*.

Vel, posito $A=1$, (quo ipsius *A* potestates omnes deleantur, *B* in, $1+a+a^2+a^3$ &c. Et *B* in, $1+2a+4a^2+8a^3$ &c. Et *B* in, $1+3a+9a^2+27a^3$ &c. Et sic deinceps usque ad *B* in, $1+C+C^2+C^3$ &c.

Erunt ergo, omnes s h (spatium CSHI complentes) posito $A=1$,

$$\left.\begin{array}{c} 1+a+a^2+a^3+a^4 \text{ \&c.} \\ 1+2a+4a^2+8a^3+16a^4 \text{ \&c.} \\ 1+3a+9a^2+27a^3+81a^4 \text{ \&c.} \\ \text{Et sic deinceps usque ad} \\ 1+C+C^2+C^3+C^4 \text{ \&c.} \end{array}\right\} \text{in } B.$$

Quorum omnium Aggregatum (seu ipsum CSHI planum) est (per prop. 1. hujus; vel prop. 64. *Arithmet. Infinitorum*)

$$C+\tfrac{1}{2}C^2+\tfrac{1}{3}C^3+\tfrac{1}{4}C^4+\tfrac{1}{5}C^5 \text{ \&c. in } B. = \text{Plano.}$$

Si vero non ponatur $A=1$, sed cujuscunque magnitudinis: Erit saltem Planum, seu $PL, = C+\frac{C^2}{2A}+\frac{C^3}{3A^2}+\frac{C^4}{4A^3}+\frac{C^5}{5A^4}$ &c. in *B*.

Vel, posito $\frac{C}{A}=E$; erit $PL, = 1+\tfrac{1}{2}E+\tfrac{1}{3}E^2+\tfrac{1}{4}E^3+\tfrac{1}{5}E^4$ &c. in *CB*.

Res autem ad calculum sic commodissime referetur.

Cum *C* (per constructionem) semper minor sit quam *A* (propter CI rectam, rectis Aσ & HS interjectam; adeoque hujus à CI distantiam minorem quam ab Aσ:) Posito $A=1$, erit *C* in partibus decimalibus quamlibet proxime exprimenda. Hujusque propterea potestates, C^2, C^3, &c. (quod semper obtinet ubi Radix seu Latus minus est quam 1,) continue decrescunt, adeoque in remotiora loca decimalia continue detruduntur. Quamquam igitur, in plano designando, intelligantur ipsius *C* potestates, C^2, C^3, C^4, &c. in infinitum continuandæ: Postquam tamen aliquousque processum est (& quidem plus minusve prout major minorve ἀκρίβεια spectetur,) reliquæ, utpote in loca decimalia altius detrusæ quam ut magni sint momenti, merito possunt negligi.

Exempli gratia;
Posita AS $= A = 1$.
Sit SC $= C = 0{,}21$.
SH $= B = 0{,}01$.

Erunt

$$\begin{array}{rl} C &= 0{,}21 \\ \tfrac{1}{2}C^2 &= 0{,}02205 \\ \tfrac{1}{3}C^3 &= 0{,}003087 \\ \tfrac{1}{4}C^4 &= 0{,}000486203 - \\ \tfrac{1}{5}C^5 &= 0{,}000081682 + \\ \tfrac{1}{6}C^6 &= 0{,}000014294 + \\ \tfrac{1}{7}C^7 &= 0{,}000002573 + \\ \tfrac{1}{8}C^8 &= 0{,}000000473 - \\ \tfrac{1}{9}C^9 &= 0{,}000000088 + \\ \tfrac{1}{10}C^{10} &= 0{,}000000017 - \\ \tfrac{1}{11}C^{11} &= 0{,}000000003 + \end{array}$$

Horum Summa, 0,235722333
Ducta in $B = 0{,}01$

Exhibet planum CSHI, seu $PL = 0{,}00235722333$ proxime.

Atque ad eandem formam procedendum erit, posita $A=1$, quæcunque fuerit *C* (quæ tamen semper minor est quam *A*,) & *B* (quæ vel major esse potest, vel minor, quam vel *A* vel *C*;) prout expositus casus postulaverit.

Atque huic non multum absimilem Hyperbolæ quadraturam exhibuit nuper in *Logarithmotechnia* sua D. *Nicolaus Mercator*. De qua verba fecimus in binis literis

teris ad D. Vice-comitem *Brouncker*, (Societatis Regiæ *Londini* Præſidem digniſſimum, & harum rerum ſcientiſſimum,) datis, *Julii* 8. & *Augusti* 5. 1668. atque in *Transactionibus Philoſophicis Londinenſibus*, ſub idem tempus, inſertis, pro Menſe *Augusti* 1668. Fig. 210, 211.

Habita vero, ut dictum eſt, Figuræ Hyperbolicæ Exterioris magnitudine: Etiam Interioris magnitudo facile obtinetur. H.

Intelligatur utique ab V vertice, recta V O, ipſi A σ parallela; portionem abſcindens S H V O. Cujus plani magnitudo, (ſic ut jam traditum eſt inventa,) dicatur $\mathcal{P}L$. Eſtque A V O $=\frac{1}{2}$ A O V $\sigma = \frac{1}{2}AB$. Item A X S $=\frac{1}{2}A^2$ (nempe ſi ſit Triangulum rectangulum; adeoque X S & S A ipſi A, figuræ altitudini, æqualis;) vel ſaltem (poſito S X $=F$,) A X S $=\frac{1}{2}AF$: Ergo H V X $=$ A X S $-$ A V O $-$ O V H S $=\frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}AB - \mathcal{P}L$, ſeu $\frac{1}{2}AF - \frac{1}{2}AB - \mathcal{P}L$. Sed & hinc etiam, ſi opus ſit, abſcindi poterit (per H D ordinatim-applicatam) H D X triangulum; ut habeatur portio H D V.

Si vero, non quidem ad Axem, ſed ad aliam quamvis Diametrum, ponatur hyperbola: Menſuram ejus non minus aſſequemur.

Nempe; Sumpto, ubivis in Hyperbola, vertice I; cui reſpondeat Diameter A I d x. Quippe hic ſimiliter habebitur Magnitudo Triangulorum A C I, A S x, H d x, & ſpatii S C I H: Adeoque & I H x, I H d.

Sed &, propter cognita triangulorum A S X, A O V, H D X, vel A S x, A C I, H d x, tum Magnitudines, tum Centra gravitatis, horumve momenta reſpectu rectæ A σ; (per prop. 6. hujus:) Atque etiam (per jam tradita; § G.) Spatii S O V H vel S C I H magnitudinem, Centrique gravitatis ab A σ diſtantiam, ejuſque (reſpectu ejuſdem A σ) momentum: Habebitur etiam portionum H V X, H D V, vel H I x, H d I, momentum. Cumque (ut jam oſtenſum eſt) habeatur & harum magnitudo; habetur (momentum per magnitudinem dividendo) earundem diſtantia Centri gravitatis ab A σ. I.

Porro: Si conſideretur eadem V H D ſemi-hyperbola, tanquam ex rectis ipſi H D parallelis, ad axem V D ordinatim-applicatis, conflata. Manifeſtum eſt, ſingularum H D ordinatim-applicatarum momenta, ſeu Triangula ipſis inſiſtentia Semiquadrantalem Ungulam complentia, aciem habentem V D; earundem Semiquadratis eſſe æqualia. Adeoque ſemiſumma quadratorum illorum, erit totius V H D ſemi-hyperbolæ reſpectu ipſius V D momentum: (ſeu ſemi-quadrantalis Ungula aciem habens V D.) K.

Poſito itaque pro Axe Tranſverſo, T; pro Latere Recto, L; ſumptis Diametris interceptis, d, arithmetice proportionalibus, ut 1, 2, 3, &c. uſque ad maximum $\mathcal{D} =$ V D: Erunt quæ his reſpondent ordinatim-applicatarum (ſemi-hyperbolam complentium) Quadrata (ut in tractatu meo *De Conicis Sectionibus*, prop. 33. oſtenſum eſt:) totidem $dL + \frac{d^2 L}{T}$ ſeu $\frac{dT + d^2}{T} L$, ſumptis d arithmetice-proportionalibus, uſque ad maximum $\frac{\mathcal{D}T + \mathcal{D}^2}{T} L =$ Quadr. H D. Adeoque (propter *Omn.* $d, = \frac{1}{2}\mathcal{D}^2$; & *Omn.* $d^2, = \frac{1}{3}\mathcal{D}^3$; per prop. 1. hujus;) Omnium quadratorum ſumma $\frac{\frac{1}{2}\mathcal{D}^2 T + \frac{1}{3}\mathcal{D}^3}{T} L$, ſeu $\frac{3T + 2\mathcal{D}}{6T} \mathcal{D}^2 L$: & ſemi-ſumma, ſeu plani momentum, $\frac{3T + 2\mathcal{D}}{12T} \mathcal{D}^2 L$.

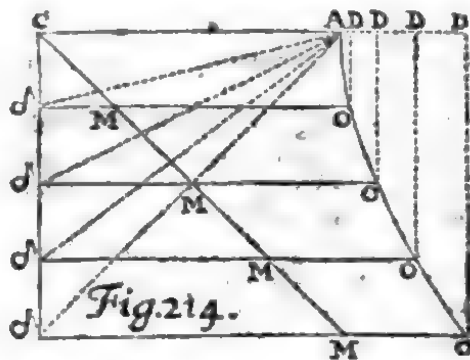
Atque hoc Momentum, per plani magnitudinem (modo exhibitam) diviſum; exhibet ejuſdem ab V D diſtantiam Centri gravitatis.

Sed ejuſdem Centri diſtantia ab A σ, jam exhibita eſt: Ergo (propter A σ, A V D, non invicem parallelas,) exhibetur ipſum Plani V H D Centrum gravitatis; per prop. 26. Cap. præced.

Et, conſequenter; (propter data etiam triangulorum A S X, A O V, H D X, Magnitudines & Centra gravitatis, per prop. 5. vel 6. hujus; ipſiuſque S O V H magnitudinem, jam oſtenſam;) datur etiam plani S O V H Centrum gravitatis; per prop. 27. Cap. præced.

 Vel

Fig. 214. Vel etiam, in Fig. 214. ubi Hyperbolæ A O, vertex A, Centrum C, Diameter conjugata C δ, Semissis diametri transversæ $AC = S = \frac{1}{2}T$; Ordinatim-applicatæ



ad hyperbolæ diametrum $DO = b$; Ordinatim-applicatæ ad diametrum conjugatam $\delta O = c$. Ostensum est (in Tractatu meo *De Conicis sectionibus, prop.* 35,41.) Rectas $\delta O = c$, esse totidem $\sqrt{:S^2 + \frac{T}{L}b^2}$: (sumptis $C\delta = DO = b$, arithmetice proportionalibus.) Earum itaque quadrata, sunt totidem $S^2 + \frac{T}{L}b^2$; quorum summa (per prop. 1. hujus) $AS^2 + \frac{AT}{3L}b^2$, (posito A pro altitudine figuræ;) Cujus itaque semissis, $\frac{1}{2}AS^2 \frac{AT b^2}{6L}$, est plani C δ O A (curvæ & diametro conjugatæ interjecti) momentum respectu C A.

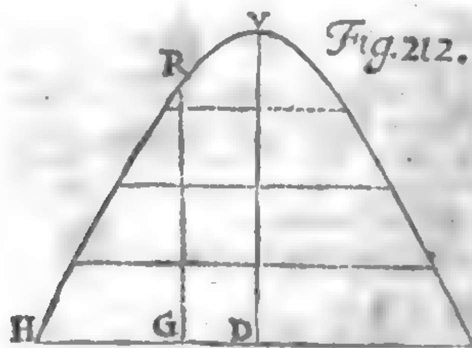
Sed & magnitudo cognoscitur, ex jam traditis; propter cognitam Spatii MCAO fig. 214. hoc est S A V H fig. 210, 211. magnitudinem; & magnitudinem trianguli M C δ fig. 214; adeoque & totius C δ O A.

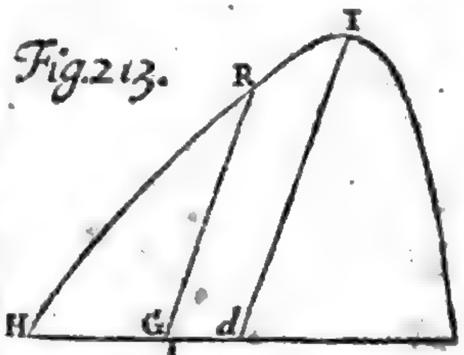
Hujus itaque momentum per magnitudinem dividendo, habetur Centri gravitatis ejusdem distantia à C δ.

Verum & Totius Parallelogrammi C D O δ, tum magnitudo tum & Centri gravitatis à C δ distantia habentur. Habetur itaque & partis reliquæ A O D, tum magnitudo tum Centri gravitatis ab eadem C δ distantia: per prop. 27. cap. præced.

Sed & ejusdem distantia sive à C M, sive ab A D, fig. 214. (hoc est ab A S, vel V D fig. 210, 211.) jam ante data est. Ergo & ipsum gravitatis Centrum datur, per prop. 26. cap. præced.

Fig. 212, 213. Quæque de Semi-hyperbola Recta V H D jam ostensa sunt; eadem Scalenæ I H d, facile accommodantur. Est utique Semi-hyperbolæ I H d fig. 213. Cen-





trum gravitatis in ea recta (puta G R) diametro I d parallela, quæ ita dividit basin H d, acsi anguli ad basin recti essent: Puta, ut recta G R fig. 212. (parallela rectæ V D) dividit basin H D.

L. Hinc etiam colligitur Conoeidis (vel Pyramidoeidis) Hyperbolici tum Magnitudo

tudo tum Centrum gravitatis. Cum enim ſimilia plana ſolidum complentia, baſi parallela, ſint in duplicata ratione ordinatim-applicatarum, ſeu ut harum quadrata; hoc eſt, ut totidem $\frac{dT+d^2}{T}L$, ſumptis d arithmetice-proportionalibus; Solidumque Cylindricum ſeu Priſmaticum ſuper eadem baſe, æque altum, compleant plana totidem maximo æqualia, $\frac{\mathcal{D}T+\mathcal{D}^2}{T}L$: Erit Conoeides illud ſeu Pyramidoeides, ad Solidum hoc Cylindricum ſeu Priſmaticum, (propter T, L eadem perpetuo utrobique,) ut omnia $dT+d^2$, (ſumptis d arithmetice-proportionalibus,) ad totidem $\mathcal{D}T+\mathcal{D}^2$ (ſumptis $\mathcal{D}$ maximo æqualibus;) hoc eſt (ut modo oſtenſum eſt, ex prop. 1. hujus,) ut $\frac{1}{2}\mathcal{D}^2T+\frac{1}{3}\mathcal{D}^3$ ad $\mathcal{D}^2T+\mathcal{D}^3$; ſeu ut $3T+2\mathcal{D}$ ad $6T+6\mathcal{D}$. Quod ipſum jam olim demonſtravimus, ad prop. 163, 164. *Arithmeticæ Infinitorum.* Et perinde obtinet ſive Conoeides hoc vel Pyramidoeides, Erectum ſit, ſive Scalenum. Fig. 212, 213.

Sunt autem planorum horum Diſtantiæ à Vertice, ipſis d diametris interceptis proportionales; adeoque eorum Momenta reſpectu plani tangentis in vertice, ut totidem d^2T+d^3, ſumptis d arithmetice proportionalibus; qualia totidem $\mathcal{D}^2T+\mathcal{D}^3$ ſunt momentum Solidi iſtius Cylindrici ſeu Priſmatici in maxima diſtantia ſuſpenſi; adeoque illorum omnium ſumma, ſeu Momentum Solidi (per prop. 1. hujus) $\frac{1}{3}\mathcal{D}^3T+\frac{1}{4}\mathcal{D}^4$. Quod quidem momentum, per magnitudinem $\frac{1}{2}\mathcal{D}^2T+\frac{1}{3}\mathcal{D}^3$ diviſum; exhibet $\frac{4T+3\mathcal{D}}{6T+4\mathcal{D}}\mathcal{D}$ Diſtantiam Centri gravitatis à vertice Conoeidis vel Pyramidoeidis (ſive Erecti, ſive Scaleni,) in ipſo Solidi Axe conſtituti. M.

$$\tfrac{1}{2}\mathcal{D}^2T+\tfrac{1}{3}\mathcal{D}^3)\,\tfrac{1}{3}\mathcal{D}^3T+\tfrac{1}{4}\mathcal{D}^4(\,\frac{4T+3\mathcal{D}}{6T+4\mathcal{D}}\mathcal{D}.$$

Eademque eſt diſtantia à Plano Verticem tangente, in Erecto, (cujus Altitudo eadem eſt cum $\mathcal{D}$, maxima diametro intercepta:) In Scaleno vero, $\frac{4T+3\mathcal{D}}{6T+4\mathcal{D}}A$; poſito A pro figuræ altitudine, ſeu diſtantia maxima.

Cum Hyperbolæ vero Quadratura, conjunctam eſſe Curvæ Parabolicæ Εὔθυνσιν, ſeu Rectæ huic Curvæ æqualis exhibitionem; jam olim demonſtravimus in Tractatu Epiſtolari *de Curvarum* Εὐθύνσει & Πλατυσμῷ, Tractatui *de Cycloide* ſubjuncto. Ubi etiam, Conoeidis Parabolici Superficiei Curvæ, æqualem Planam exhibuimus. N.

Atque hic quidem pateret Campus ſatis amplus; ſi ad Curvarum aliarum Linearum Rectificationem, & Superficierum Complanationem, (vel Rectarum illis, Planarum his, æqualium exhibitionem) liberet procedere: (Qualia non pauca in illo de Εὐθύνσει & Πλατυσμῷ tractatu ſtrictim indicavimus, & multo plura in promptu eſſet exhibere:) Centrique gravitatis in illis inveſtigationem. O.

Aliaque multa, conſimilis argumenti, de figurarum aliarum, aut etiam linearum curvarum, Magnitudinibus, Momentis, & Centris gravitatis, Solidiſque aut Superficiebus earundem varia converſione factis, magna varietate adjungi poſſent.

Verum, ex his non pauca, ibidem (ſaltem breviter) inſinuata ſunt: Aliaque, juxta methodos hic ſupra traditas, cum opus fuerit, excogitari poterunt, & Calculo ſubjici. Atque tandem aliquando ſiſtendum videtur, ne in immenſum excreſcat volumen, quod jamjam multo ultra quam ſperaveram excrevit.

SCHOLIUM.

PRiuſquam autem hoc Spatium Hyperbolicum dimittam, libet ejuſdem cum aliis aliquot figuris Symbolizationes, non olim obſervatas recolligere.

1. *Si rectarum quotlibet arithmetice proportionalium quadrata, quadratis invicem æqualibus (vel eodem communi) augeantur; aggregatorum latera quadratica, ad rectam ut axem æqualibus intervallis ordinatim-applicata, complebunt Spatium Hyperbolicum, Curvæ, Semi-axi tranſverſo, & Axi Conjugato interjectum,*

jectum, rectaque axi transverso parallela clausum. Puta, Si expositæ rectæ C A
Fig. 323. fig. 323. normalis fiat C δ Δ quantumvis producta, in qua sumantur partes æquales quotlibet C δ, δ δ, δ Δ, &c. adeoque C δ, C δ, C Δ, &c. arithmetice-proportionales; & junctis δ A, Δ A, &c. æquales ponantur δ o, Δ O, &c. Erit A o O curva Hyperbolica, cujus Semiaxis transversus C A, & C Δ axis conjugatus; spatiumque C A O Δ hyperbolicum complebunt rectæ δ o, &c. ipsis δ A æquales. Hoc demonstramus in Tractatu *De Curvarum* Εὐθύνσεων, iterumque mox ad prop. 32. hujus Capitis V.

Fig. 324. 2. Si exponatur, fig. 324. A o O Parabola, cujus Axis interceptus A d D, ordinatim-applicata D O, tangensque O F axi producto occurrat in F; tangatque in vertice A t T, = D O, divisa utcunque in t; cui æqualis ponatur C δ Δ (fig. 323.) similiter in δ divisa; fiatque angulo D F O, æqualis C Δ A, determinans (in recta ipsi C δ Δ normali) rectam C A; & junctis δ A, Δ A, æquales ponantur δ o, Δ O, ipsi C A parallelæ, fiatque (ut modo dictum est) A o O Hyperbola, cujus Semiaxis transversus C A; sitque asymptota C m M: Erit, *Ut*, (Fig. 323.) *spatium hyperbolicum* C Δ O A, *ad* C Δ M *triangulum*; *sic* (Fig. 324.) A o O *curva parabolica, ad ejus axem interceptum* A d D: *Itemque, ut* (illic) C δ o A, *ad* C δ m; *sic* (hic) A o *curva parabolica, ad ejus axem* A d; *& sic ubique.* Hoc demonstramus in eodem De Εὐθύνσεων tractatu; iterumque hic monemus ad prop. 31. hujusce Cap. V.

3. Si conversione Parabolæ A O D circa Axem A D describatur Conoeides parabolicum; & conversione Rectanguli circumscripti A D O T circa eundem axem describatur Cylindrus: Erit, *Ut momentum spatii hyperbolici* C Δ O A, *ad momentum trianguli* C Δ M, *respectu ejusdem* C A; *seu, ut erecta Ungula super illud, ad Ungulam erectam æque altam super hoc, quarum communis acies sit eadem* C A; *seu, ut Solidum ex conversione illius, ad Solidum ex conversione hujus, circa eandem* C A; (sunt enim hæ rationes, eædem omnes;) *Sic Conoeidis hujus parabolici superficies curva, ad duos trientes superficiei curvæ Cylindri circumscripti.* Vel etiam (propter C Δ O A = C Δ O D — A O D.) Ut *Momentum Rectanguli* C Δ O D *minus momento Semihyperbolæ* A O D, ad *momentum Trianguli* C Δ M, (respectu ejusdem C A D;) Sic est *Conoeidis hujus superficies Curva*, ad *duos trientes curvæ superficiei Cylindri circumscripti.* Quod ibidem demonstramus, atque hic monemus ad prop. 31. hujus Cap. V.

4 Sed; positis (ut § E. prop. 32. hujus Cap. V.) $AC = S = \frac{1}{2}T$, Latereque recto $= L$, $AD = d$, $DO = C\Delta = b = \sqrt{\frac{dT + d^2}{T}L}$, $\Delta O = CD = c = \frac{1}{2}T + d = S + d = \sqrt{: s^2 + \frac{T}{L}b^2} = \sqrt{: \frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L}b^2}$, $\Delta M = \sqrt{\frac{T}{L}b^2} = b\sqrt{\frac{T}{L}}$: *Momentum Semi-hyperbolæ* A O D *respectu rectæ* C A D (utpote Semiquadrata omnium D O) est $\frac{\frac{1}{2}d^2T + \frac{1}{3}d^3}{2T}L$; (Quod, ut ibidem demonstratum, assumimus

ex

ex prop. 164. *Arith. Infin.* iterumque ostendimus ad § L. prop. 31. hujus Cap. V.) Fig. 323,
Momentum autem (respectu ejusdem C A D rectæ) Rectanguli C Δ O D, $\frac{1}{2} c b^2$; & 324.

Trianguli C Δ M, $\frac{1}{3} b^3 \sqrt{\frac{T}{L}}$; (per pr. 6. ejusdem.) Ergo, ut $\frac{1}{2} c b^2 - \frac{\frac{1}{2}T + \frac{1}{3}d}{2T} d^2 L$,

ad $\frac{1}{3} b^3 \sqrt{\frac{T}{L}}$; hoc est, Ut $c b^2 T - \frac{1}{2} d^2 T L - \frac{2}{3} d^3 L$, ad $\frac{2}{3} b^3 T \sqrt{\frac{T}{L}}$; Hoc est

(propter $c = \frac{1}{2} T + d$, & $b^2 = \frac{dT + d^2}{T} L$,) Ut $\frac{1}{2} T^2 + dT + \frac{2}{3} d^2$, ad $T + d$,

in $\frac{2}{3} \sqrt{: dT + d^2}$: Sic *illa superficies curva Conoeidica*, ad $\frac{2}{3}$ *Cylindricæ*: Seu, Ut $\frac{1}{2} T^2 + dT + \frac{2}{3} d^2$, ad $T + d$, in $\sqrt{: dT + d^2}$; Sic *Conoeidica* ad *Cylindricam*.

5. Sed & eadem est ratio momenti curvæ parabolicæ A O, ad momentum rectæ T O, respectu ejusdem rectæ A D, (nempe, quæ est conversione factorum:) Cum itaque Momentorum ratio ex rationibus ponderum & distantiarum componatur; si ex hac momentorum ratione eximatur ratio magnitudinum, hoc est (ut modo ostensum est) quadrilinei C Δ O A ad triangulum C Δ M, (seu hujus conversa cum ea componatur:) habebitur ratio *distantiæ centri gravitatis curvæ parabolicæ* AO, ad *distantiam centri gravitatis rectæ* T O, (ab eadem A D,) hoc est, ad AT $= C\Delta = DO = b = \sqrt{: \frac{dT + d^2}{T} L}$: Adeoque $\frac{\frac{1}{2} T^2 + dT + \frac{2}{3} d^2}{T + d, \text{ in } \sqrt{: dT + d^2}} \times \frac{C\Delta M}{C\Delta O A}$ A T *Distantia Centri gravitatis curvæ parabolicæ* A O *ab ejus axe* A D: Vel, propter C Δ M $= \frac{1}{3} b^2 \sqrt{\frac{T}{L}}$, si ponamus $bg =$ C Δ O A, adeoque $\frac{C\Delta M}{C\Delta O A} = \frac{\frac{1}{3} b}{g} \sqrt{\frac{T}{L}}$; erit ea distantia $\frac{\frac{1}{2} T^2 + dT + \frac{2}{3} d^2}{T + d, \text{ in } \sqrt{: dT + d^2}} \times \frac{\frac{1}{3} b}{g} b \sqrt{\frac{T}{L}}$, hoc est, reductione facta, (propter $b = \sqrt{\frac{dT + d^2}{T} L}$, & $b \sqrt{\frac{T}{L}} = \sqrt{: dT + d^2}$:) $\frac{\frac{1}{2} T^2 + dT + \frac{2}{3} d^2}{T + d} \times \frac{\frac{1}{3} b}{g} =$

$\frac{3T^2 + 6dT + 4d^2}{6T + 6d} \times \frac{\sqrt{: dT + d^2 :}}{2g} \sqrt{\frac{L}{T}}$. Ubi quantitates omnes sunt Geometricæ determinatæ præter unam g, quæ cum C Δ $= b$ intelligitur Rectangulum comprehendere æquale Quadrilineo C Δ O A; eaque ipsa approximatione quamlibet accurata determinatur prop. 31. hujus Cap. V. Sed & hinc similiter habetur ejusdem ab O T distantia; adeoque ratio superficiei ab A O curva circa O T conversa descriptæ, ad Cylindricam recta A D sic conversa descriptam. Aliaque de ejusmodi aliis curvæ parabolicæ conversionibus; quæ hic ulterius prosequi non est animus, ne nimis divagarer.

6. Si eadem curva Parabolica A O circa tangentem verticis A T ut axem convertatur, Conoeidis Parabolici Acuti superficiem curvam describens; rectaque A D sic conversa describat circulum: Erit, *Ut Ungulæ Quadrilinei Hyperbolici* CΔOA, *aciem habentis* C A, *momentum respectu aciei suæ* C A; *ad Ungulæ Trianguli* C Δ M, *aciem item habentis* C A, *momentum respectu ejusdem* C A: *Sic superficies curva Conoeideos parabolici acuti ab* A O *circa* A T *descripti*; *ad circulum recta* A D *ut radio circa* A *ut centrum conversa descriptum*. Quod etiam in eodem De Εὐθύνσει tractatu demonstratur. Manente scilicet Magnitudinum ratione o o, d d, in Parabola, ut δ o, δ m, in Hyperbola; distantiæ τ o, τ o, sunt (non ut d o, d o, arithmetice proportionales, sed) ut quadrata arithmetice proportionalium: adeoque comparantur, (non cum Quadrilinei C Δ O A, & Trilinei C Δ M, Ungulis seu Momentis respectu C A rectæ, sed) cum Momentis Ungularum C Δ O A & C Δ M respectu communis aciei C A. Eademque (quæ factorum, è conversione) est ratio momenti curvæ A O, ad momentum rectæ A D, respectu A T rectæ. Atque, ex hac momentorum ratione, si eximatur ratio magnitudinum, (vel hujus conversa cum eo componatur,) habetur ratio distantiæ centri gravitatis Curvæ parabolicæ A O, ad distantiam Centri rectæ A D (quod est ipsius punctum medium,) ab A T eadem tangente verticis. Adeoque (propter habitam istius Centri distantiam

 à dua-

à duabus rectis non parallelis) habetur ipsum curvæ Parabolicæ A O Centrum gravitatis; &, quæ inde dependent.

7. *Figura ex Primanorum Reciprocis conflata, est Spatium Hyperbolicum Curvæ & Asymptotis interjectum, recta Asymptotarum alteri parallela terminatum.* Ut A S H σ fig. 210 Hoc demonstravimus prop. 94, 95. *Arithmet. Infinit.* iterumque prop. 31. hujus Cap. V.

Fig. 210.

8. *Idemque spatium Hyperbolicum, est Figura Secantium, sinibus rectis complementorum (aut arcuum suorum sinibus versis) arithmetice proportionalibus respondentium.* Hoc insinuatum est, § B. prop. 17. hujus Cap. V. iterumque occurrit § E. prop. 30. (Nam quæ illic occurrunt rectæ $\frac{R^2}{x}$ sunt hæ Secantes.) Estque obvium & demonstratu facile. Cum enim sit, in fig. 327. Ut sinus complementi C V = x, ad radium CB = R; sic radius CA = R, ad secantem C T = $\frac{R^2}{x}$: Sumptis Sinibus complementi C V = x arithmetice proportionalibus (adeoque & sinibus versis A V = v arithmetice item proportionalibus;) si ponantur (fig. 325, 326.) rectis C B T secantibus, æquales ordinatim-applicatæ V B O; (quæ itaque erunt

Fig. 325.

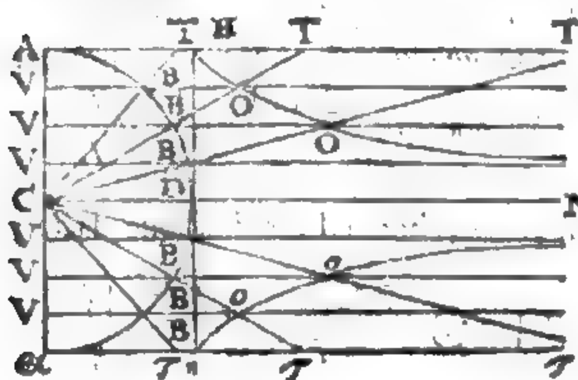
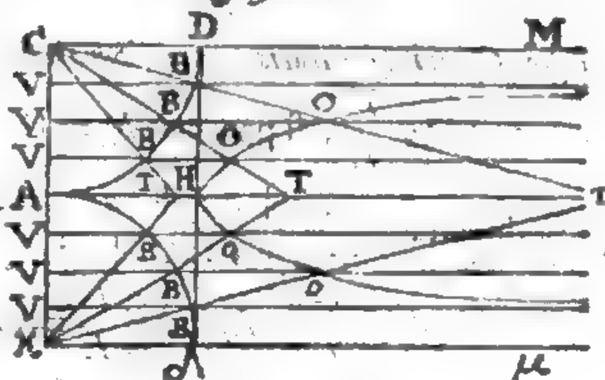


Fig. 326.



totidem $\frac{R^2}{x}$, ipsis x arithmetice proportionalibus reciprocæ, *Figuram Secantium* complentes;) erit, eadem Figura Secantium, spatium illud Hyperbolicum, (per modo dicta;) utpote Figura ex Primanorum Reciprocis conflata.

Nempe, ut C A H O M: Ubi Hyperbolæ Centrum, C, Asymptotæ C M, & C A, Vertex, H. (Quæ autem de C, A, H, O, M, dicta sunt; pariter intelligantur de κ, α, η, ο, μ.)

Et quidem, si sumatur A H, æqualis semidiametro Circuli C A, (ut fig. 325, 326.) ordinatim ad Asymptotam applicatæ V O sunt ipsis secantibus C T æquales; eritque H Vertex Axis. Si vero brevior sit A H quam A C, in eadem ratione breviores erunt V O, quam C T, respectivæ Secantes ad Radium C A: neque erit H vertex Axis, sed alterius alicujus diametri; Axis autem vertex situs erit propius ad Asymptotam, (nempe ubi recta bisecans angulum C, occurrit curvæ.) Sin longior sit A H quam A C, etiam in eadem ratione longiores erunt V O quam C T; (utrobique scilicet æquales Secantibus ad Radium A H, sive longior sit sive brevior quam A C:) Nec erit H vertex Axis sed alterius diametri, Vertex autem Axis nusquam comparet, quippe qui ibi futurus esset ubi recta angulum C bisecans occurreret curvæ ultra H productæ. Quippe recta Angulum C bisecans, in figura *Primaria*, (ubi A H ipsi A C æqualis,) occurrit rectæ A H, in H: Secus autem in *Secundariis*: Nempe, In *Contracta*, (ubi A H brevior quam A C,) ultra H, intra Hyperbolam: In *Protracta*, (ubi A H longior quam A C) citra H (inter H & A) extra Hyperbolam.

Si vero Duo Circuli Quadrantes componantur, (ut fig. 325.) semicirculum absolventes; erunt duæ Hyperbolæ H O O, η ο ο, situ inverso positæ communem habentes Asymptotam C M, ut & A C α: Sin quadrantes duo inversis verticibus componantur, (ut fig. 326.) Hyperbolæ duæ, H O O, H ο ο, communem verticem H habentes, Asymptotas habebunt oppositas C M, κ μ, communem vero C A κ.

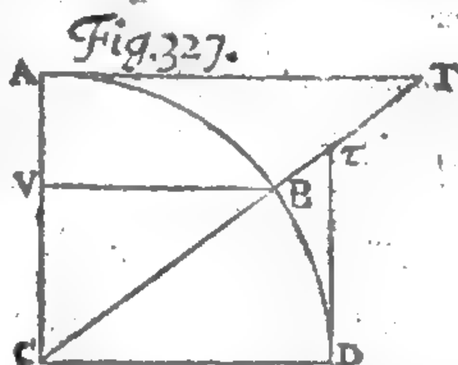
Duæ

Duæ autem Hyperbolæ, H O O, H ο ο, sic compositæ; utut similes sint, & quidem quamvis (ut in *Primaria*, fig 326.) communem habeant Axis Verticem H; non tamen eandem continuant Curvam hyperbolicam; sed Angulum in H faciunt (productæque, se mutuo secabunt,) Rectum quidem in *Primaria*; Acutum, in *Protracta*; Obtusum, in *Contracta*; magisque vel Acutum vel Obtusum, quo magis vel Protracta vel Contracta fuerit: adeo ut, in valde contractis, fere videantur unam facere continuam curvam.

Ponuntur enim (fig. 326.) H O O, H ο ο, semihyperbolæ, situ distorto; propter dirempta puncta C, κ; (quæ, ut O H ο foret una hyperbola, idem essent punctum, nempe commune centrum semihyperbolarum H O O, H ο ο;) convergentibus punctis M, μ; adeoque &, O, ο. Neque est A H utriusvis vel Axis vel Diametrorum ulla: utpote quæ per C transire debent omnes quæ spectant H O O; & per κ, quæ H ο ο spectant.

Si vero, in figura *Primaria*, (propter H verticem Axis,) manente communi puncto H, divaricari intelligantur curvæ O ο; simulque Asymptotæ in M μ, donec in unum coeant K, κ, puncta; evanescet angulus ad H, fietque ο H O una hyperbola. Sed non item in *Secundariis*, (in quibus H non est vertex Axis:) Possunt quidem, etiam in his, manente H puncto, ita divaricari curvæ in O ο, ut, evanescente angulo ad H, coeant in unam curvam, at non in unam *Hyperbolam* (sed duarum portiones.) Manifestum enim est (ex constructione) hyperbolas H O O & H ο ο omnino similes esse & congruentes: fieri autem non potest in ullo hyperbolæ puncto, præter ipsum Axis Verticem, ut curvæ utrinque adjacentes congruant.

9. Verum hic cavendum est ne existimetur O H O fig. 326. eadem curva cum ω ω ω fig. 186. Quanquam enim A α O ω ω sit etiam figura Secantium, (sed Contracta, propter A O minorem quam A C,) ut § B. prop. 17. insinuatum est: Sunt tamen illæ (non, ut hic, Secantes sinibus versis, seu complementorum rectis, sed) Sinibus Rectis, arithmetice proportionalibus respondentes. Sunt enim illic rectæ Fig. 186.
$V\omega = \frac{BR}{s}$ (sinibus rectis $s = VB$, arcuum AB, reciprocæ;) hic vero, $VO = \frac{R^2}{x}$, ipsis $x = VC$ sinibus complementorum B D reciprocæ. Hoc est; Sumptis A V arithmetice proportionalibus; spatium complentes rectæ V O fig. 326. sunt arcuum A B secantibus C T fig. 327 proportionales; sed V ω fig. 186. proportionales complementorum BD secantibus C τ.



10. Cumque sint $s = \sqrt{:R^2 - x^2}$. Si sumantur $x = CV$, (adeoque & $v = AV$) arithmetice proportionales; erunt omnes s, ut rectarum in parabola, axi parallelarum radices quadraticæ, seu in ipsarum ratione subduplicata; puta quæ sint in rectarum V β fig. 164. semiparabolam complentium ratione subduplicata; (cum enim rectæ β δ complentes semiparabolæ complementum sint ut x^2, quadrata primanorum; erunt harum continuationes V β, axi parallelæ, ut $R^2 - x^2$; sumpto Axe ut R^2:) quæque ex istiusmodi radicum reciprocis conflatur figura, est ipsa C A O ω fig. 186. Omnesque s^2, sunt ut ipsæ rectæ axi Parabolæ parallelæ. Puta, ut ipsæ V β fig. 164. (ut pr. 112. *Arithm. Infin.* & § V. prop. 15. hujus Cap. 5. ostenditur:) atque harum reciprocæ, $\frac{R^4}{s^2}$, sunt ut rectarum V ω (fig. 186.) $\frac{AB}{s}$ vel $\frac{R^2}{s}$ quadrata, seu ut earum momenta respectu A α, aut circuli earundem conversione circa A α facti. Rectarum vero $VO = \frac{R^2}{s}$ fig. 326. (spatium hyperbolicum complentium) quadrata seu momenta, ut $\frac{R^4}{x^2}$, sunt ut ipsarum β δ (fig. 164.) rectarum reciprocæ. Quæ autem sunt ipsis β b fig. 164. vel V p fig. 178. ordinatim-applicatis in parabola reciprocæ, sunt ut V ω figuram A α O ω (fig. 178.) complentes, curvæ Cycloidalis particulis (continue sumptis) proportionales:

portionales; spatiique (quod illæ complent rectæ) A α O α portiones, proportionales respectivis Curvæ Cycloidalis partibus quas illæ complent particulæ: ut § B, C. prop. 22. ostensum est. Sed rectæ V ω fig. 186. sunt peripheriæ circularis particulis (continue sumptis) proportionales; spatiique quod illæ complent rectæ, proportionales respectivis peripheriæ partibus quas illæ complent particulæ: ut § B. prop. 17. ostensum est.

11. Etiam hoc addo. *Spatii Hyperbolici, sive interioris sive exterioris, non quidem ipsum Gravitatis Centrum sed Rectam in qua est, seu Axem Æquilibrii, exhiberi posse, etiamsi ignoretur Plani magnitudo.*

Fig. 337.

Esto enim expositæ Hyperbolæ HhV, Centrum A, axis AX, vertex V, latus rectum L, axis transversus $T = 2S$, axes intercepti V D $= \mathcal{D}$, V d $= d$, ordinatim-applicatæ HD $= H$, hd $= b$, axis conjugatus A Δ, ad quem ordinatim applicatæ HΔ $= K$, h δ $= k$, asymptotarum alteri A σ parallela HS $= B$ ad alteram AS $= A$ applicetur, & VO ad AO $= E$, & hs, HS: atque intelligatur S A σ angulus rectus: sitque OS $(= A - E) = O$.

Sunt (propter $b = \sqrt{:dL + \frac{L}{T} d^2:}$) ordinatarum ad axem semiquadrata, seu momenta respectu ADX, $\frac{1}{2} Ld + \frac{L}{2T} d^2$: & (propter *Omn.* $d, = \frac{1}{2} \mathcal{D}^2$, & *Omn.* $d^2, = \frac{1}{3} \mathcal{D}^3$,) simul omnia, seu Momentum totius HVD respectu AX, $\frac{1}{4} L \mathcal{D}^2 + \frac{L}{6T} \mathcal{D}^3$.

Item (propter $k = \sqrt{: S^2 + \frac{T}{L} b^2:}$) ordinatarum ad axem conjugatum semiquadrata, seu momenta respectu A Δ, $\frac{1}{2} S^2 + \frac{T}{2L} b^2$; & (propter *Omn.* $b^2, = \frac{1}{3} H^3$,) simul Omnia, seu totius AVHΔ momentum respectu A Δ, $\frac{1}{2} S^2 H + \frac{T}{6L} H^3$. Quod ex (totius ADHΔ momento) $\frac{1}{2} K^2 H = \frac{1}{2} S^2 H + \frac{T}{2L} H^3$ subductum, relinquit residui HVD respectu A Δ momentum $\frac{T}{3L} H^3$.

Ergo (propter Distantias Momentis proportionales,) in DH, sumpta DG quæ sit ad AD, ut $\frac{1}{4} L \mathcal{D}^2 + \frac{L}{6T} \mathcal{D}^3$ ad $\frac{T}{3L} H^3$, hoc est, $3 TL^2 \mathcal{D}^2 + 2L^2 \mathcal{D}^3$ ad $4 T^2 H^3$; erit in (juncta) AG, ipsius HVD centrum gravitatis; utpote cujus puncta singula in ea ratione distant ab AD, A Δ.

Idem obtinebitur ope momenti ejusdem HVD respectu Asymptotæ A σ. Est (per § D. prop. 31, Cap. 5.) ipsius OVHS respectu A σ momentum ABO. Est autem trianguli ASX $(= \frac{1}{2} A^2)$ respectu ejusdem A σ momentum $\frac{1}{3} A^3$; & trianguli AOV momentum $\frac{1}{3} E^3$; positisque HX $(= A - B) = X$, & DB (parallela AS) $= T$, adeoque HDX $= \frac{1}{2} XT$, hujusque ab A σ distantia centri gravitatis $A - \frac{1}{3} T$, erit trianguli HDX respectu A σ momentum $\frac{1}{2} AXT - \frac{1}{6} XT^2$.

Ergo

Ergo (propter HVD = ASX − AOV − OVHS − HDX) ipsius HVD respectu Aσ momentum $\frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{3}E^3 - ABO - \frac{1}{2}AXT + \frac{1}{6}XT^2$.

Ergo (propter Distantias momentis proportionales,) in DH, sumpta DQ, quæ sit ad AS ut $\frac{1}{4}L\mathcal{D}^2 + \frac{L}{6T}\mathcal{D}^3$ ad $\frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{3}E^3 - ABO - \frac{1}{2}AXT + \frac{1}{6}XT^2$; ductaque QK parallela AX occurrente SX in K; erit in (juncta) AK (utpote cujus singula puncta in ea ratione distant ab AD, Aσ,) Centrum gravitatis HVD. Quæ quidem AK est eadem positione recta cum AG, quoniam utraque tum per A transit tunc per centrum gravitatis HVD.

Similiter (ob eandem causam) in ΔH, sumpta ΔL, quæ sit ad AS ut $\frac{T}{3L}H^3$ ad $\frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{3}E^3 - ABO - \frac{1}{2}AXT + \frac{1}{6}XT^2$; ductaque LK parallela AΔ, occurrunte SK in K; erit in (juncta) AK (cujus utique singula puncta in ea ratione distant ab AΔ, Aσ,) Centrum gravitatis HVD. Erit autem hoc K idem quod prius, ob causam modo insinuatam.

12. Simili processu utendum est in spatio exteriori OVHS.

Est enim (ut jam ostensum) hujus respectu Aσ momentum ABO.

Item, respectu AX, trianguli ASX $= \frac{1}{2}A^2$ est (propter centri ab AX distantiam $\frac{1}{3}A\sqrt{\frac{1}{2}}$) momentum $\frac{1}{6}A^3\sqrt{\frac{1}{2}}$; & similiter trianguli AOV momentum $\frac{1}{6}E^3\sqrt{\frac{1}{2}}$; trianguloque HDX $= \frac{1}{2}XT$ (propter distantiam $\frac{1}{3}H$) momentum $\frac{1}{6}XTH$; ipsiusque HVD (ut modo) $\frac{1}{4}L\mathcal{D}^2 + \frac{L}{6T}\mathcal{D}^3$: Ergo (propter OVHS = ASX − AOV − HDX − HVD,) ipsius OVHS respectu AX momentum $\frac{1}{6}A^3\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}E^3\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}XTH - \frac{1}{4}L\mathcal{D}^2 - \frac{L}{6T}\mathcal{D}^3$.

Ergo (propter distantias momentis proportionales) in DH, sumpta DI, quæ sit ad AS, ut $\frac{1}{6}A^3\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}E^3\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}XTH - \frac{1}{4}L\mathcal{D}^2 - \frac{L}{6T}\mathcal{D}^3$ ad ABO; ductaque IF parallela AX occurrente SX in F; erit in (juncta) AF (cujus puncta singula in ea ratione distant ab AX, Aσ,) Centrum gravitatis OVHS.

Idem obtinebitur comparando ejusdem OVHS momenta respectu Aσ, & AΔ; vel AX, & AΔ; eandem autem AF prodire necesse erit, ut quæ transire debeat tum per A; tum per ipsius OVHS centum gravitatis.

13. Simili item processu utendum est in spatio exteriori AVHΔ.

Est enim (ut modo) hujus respectu AΔ momentum, $\frac{1}{2}S^2H + \frac{T}{6L}H^3$.

Item, respectu AX, rectanguli ADHΔ momentum $\frac{1}{2}KH^2$; unde subducto ipsius HVD momento $\frac{1}{4}L\mathcal{D}^2 + \frac{L}{6T}\mathcal{D}^3$; habetur ipsius AVHD, respectu AX, momentum $\frac{1}{2}KH^2 - \frac{1}{4}L\mathcal{D}^2 - \frac{L}{6T}\mathcal{D}^3$.

Ergo, in ΔH, sumpta ΔM, quæ sit ad DH, ut $\frac{1}{2}S^2H + \frac{T}{6L}H^3$ ad $\frac{1}{2}KH^2 - \frac{1}{4}L\mathcal{D}^2 - \frac{L}{6T}\mathcal{D}^3$; erit in (juncta) AM, (cujus singula puncta in ea ratione distant ab AΔ, AX,) centrum gravitatis AVHΔ.

Idemque obtinebitur, comparatis ejusdem momentis respectu AΔ, & Aσ; vel respectu AX, & Aσ: eandem autem AM prodire necesse erit, ob causam ante insinuatam; ut non sit spes inde ob duas hujusmodi rectas se mutuo decussantes, ipsum Centrum obtinendi, absque plani magnitudine.

Si vero, in his omnibus, vel non sit SAσ angulus rectus; vel Hyperbola non recta, sed scalena, (sumpta diametro quavis alia loco axis AX;) similis adhibenda erit accommodatio cum ea quam de Scalenis insinuavimus ad § K. prop. 31. Cap. 5.

Multaque alia adjungi posset, nisi sic nimius essem.

Missis itaque aliis; Unam adhuc de Hyperbola Speculationem subjungam, quam

 Wrennio

Wrennio nostro debemus: Qui Solidum Hyperbolicum, convexo-concavum, Torni ope, acie Dolabræ rectilinea obliquo ad Axem situ posita, conficere docuit. Quam rem, ad meas methodos reductam, sic visum est exponere, & paulo fusius prosequi: Ejusque Solidi Sectiones, & Centra gravitatis, considerare.

PROP. XXXII.

A. B. Si in quacunque ab Axe Torni distantia, ponatur Acies Dolabræ recta, in situ ad illum Axem (non parallelo, ut in Tornando Cylindrum, sed) quocunque obliquo: Formabitur torno Cylindroeides Hyperbolicum Convexo-concavum.

C. Et quidem ea Hyperbola; cujus Semi-axis transversus æquatur minimæ distantiæ aciei dolabræ ab Axe Cylindroeidis (seu Semi-diametro basis inscripti Cylindri;) Axisque conjugatus cum Asymptota eum faciat angulum, quem facit Dolabræ Acies recta, cum recta axi torni parallela.

D. Unde patet methodus, Cylindroeides torno formandi, cujus sectio per axem, sit Data Hyperbola.

E. Solidi hujus sectiones Plano factæ; si planum illud sit, ad Axem Solidi, Rectum; sunt Circuli.

F. L. Si, ad Axem, minus obliquum quam est Asymptota; Ellipses.

F.H.I. Si similiter inclinatum sit atque ipsa Asymptota; sunt Parabolæ; vel (si etiam per Centrum sit) Parallelogrammum.

F.G.K. Si adhuc Obliquius secet Axem, vel etiam sit Axi Parallelum; Oppositæ Hyperbolæ; vel (si axi parallelum atque per verticem Hyperbolæ Genitricis, aut Hyperbolam hanc ubivis tangat,) opposita Triangula.

M. Solidi sic constructi (à Centro utrinque æqualiter continuati) Magnitudo, nota est: Quippe ad Cylindrum circumscriptum, ut $3\,LT + 4\,H^2$, ad $3\,LT + 12\,H^2$. Et Centrum gravitatis in Centro solidi, seu Axis medio.

N. Semisolidi (plano per Centrum, ad Axem recto, abscissi,) Centrum gravitatis, in Axe situm, abscindit axis sui partem ad Centrum, quæ sit ad totum, ut $3\,LT + 6\,H^2$ ad $6\,LT +$ [illegible] H^2.

A. Fig. 214. HOc quo commodius absolvatur; Lemma præmittam, in meo de Εὐθύνσεως Tractatu, modo memorato, insinuatum; Demonstratione ex meo de *Conicis Sectionibus* tractatu, prop. 35, 40. petita. Ad hunc sensum;

Si ad Rectæ alicujus puncta quotlibet, æqualibus intervallis sumpta, ordinatim-applicentur Rectæ, quarum Quadrata sint, ut numerorum continue consequentium 1, 2, 3, 4, &c. *quadrata, eodem aliquo vel æqualibus quadratis aucta: Quæ per harum extrema reliqua transit Curva, est Hyperbola.*

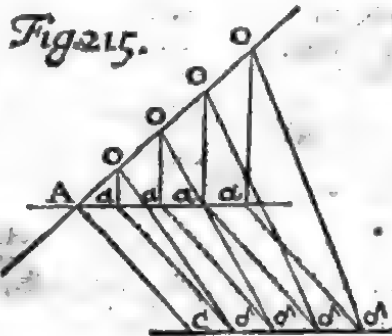
Quippe, (in fig. 27. ibidem, quam hic repeto fig. 214.) Manifestum est rectas δA, tales esse quales innuit Lemma; (propter Cδ, Cδ, Cδ, &c. ut 1, 2, 3, &c. & CA communem:) Quæ si in situm δO transferantur, ad Cδδ ordinatim-applicatæ; Hyperbolam AOO designabunt.

Quodsi, manentibus CA, δO, ordinatim-applicatis, intervalla Cδ, δδ, minora fuerint vel majora quam nunc sunt; vel etiam angulus ACδ, qui jam rectus intelligitur, fiat obliquus quilibet: prodibit utcunque AOO Hyperbola; sed cujus aliud erit Latus-rectum, aliusque ad Asymptoton CM angulus δCM, aliusque angulus quem cum diametro faciant conjugata diameter & ordinatim-applicatæ.

Demonstratio petitur, ex meis *de Conicis Sectionibus* prop. 35, 41. ubi ostenditur, rectas ad Hyperbolæ diametrum conjugatam ordinatim-applicatas δO; hoc est, CD

CD distantias, punctorum applicationis ad diametrum, à Centro, quas illic *c* dicimus; (ex Semidiametro transversa, & diametro intercepta aggregatas, seu $\frac{1}{2}T+d$;) esse $\sqrt{:}\frac{1}{4}T^2+\frac{T}{L}b^2$: Quarum itaque quadrata sunt, $\frac{1}{4}T^2+\frac{T}{L}b^2$: (Positis T pro diametro transversa, L pro latere recto, & b pro ordinatim-applicata ad hyperbolæ diametrum.) Adeoque, (propter T, L, quantitates permanentes,) si sumantur b, hoc est DO, seu Cδ, arithmetice-proportionales ut 1, 2, 3, &c. manifestum est, quadrata illa, $\frac{1}{4}T^2+\frac{T}{L}b^2$, esse, ut *Quadrata æqualia, quadratis arithmetice-proportionalium aucta.* Quæ itaque cum sit Hyperbolæ generalis proprietas, (quæcunque fuerit ratio Diametri-transversæ ad Latus-rectum, & quemcunque ad diametrum angulum faciant ordinatim-applicatæ;) Lemma constat.

His præmissis; Intelligatur (fig. 215.) Acies Dolabræ recta, AOO, in qua- B.

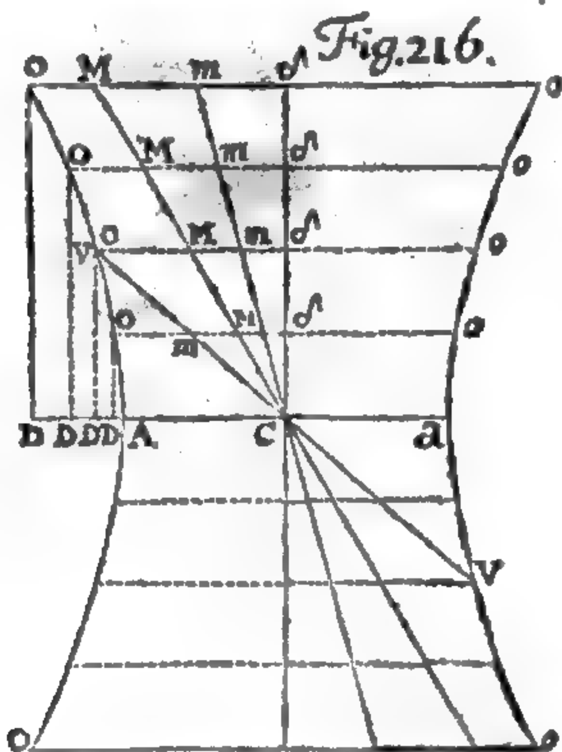


cunque ab Axe Cylindroeidis (torno conficiendi) distantia, situ quocunque obliquo (ad axem illum) posita. Manifestum est, per rectam illam AOO, transiturum esse planum aliquod, ut OAα, cui (plano) parallelus sit Cylindroeidis axis Cδ: Rectamque aliquam in eo plano, axi parallelam, ut Aαα, (nempe, ex parallelis eam quæ sit axi proxima,) lineam contactus esse qua planum illud tangat Cylindrum, (Cylindroeidi inscriptum,) cujus Axis Cδ; & basis radius CA; (quæ est minima distantia aciei dolabræ, quantum opus sit continuatæ, ab Axe Cylindri seu Cylindroeidis formandi.) Sumptisque in Axe Cδδ, partibus continue æqualibus Cδ, δδ, &c. atque ad eum perpendicularibus CA, δα, &c. erectisque iisdem ad planum CAα perpendicularibus αO, αO, &c. Manifestum est, rectas αO, esse ut 1, 2, 3, &c. numeros continue consequentes; earumque quadrata, ut quadrata horum: Et propterea (propter angulum δαO rectum, rectasque αδ invicem æquales,) junctis omnibus Oδ, quadrata harum esse, ut quadrata numerorum illa æqualibus quadratis aucta.

Adeoque; Si Torni ope, circa axem Cδ (fig. 215.) describi intelligantur in Cylindroeide Circuli, quorum radii sint ipsæ δO rectæ: Sectio per axem exhibebit ipsum δCAO (fig. 214.) planum. Erunt utique Circulorum illorum radii, planum complentes, ipsis δO, utriusvis figuræ, æquales. Nempe si, in binis figuris, sumptis tum AC æqualibus, tum æqualibus Cδ respectivis; sumantur αO fig. 215. ipsis Cδ fig. 214. respectivis æquales: Quod fit, sumpto OAα fig. 215. angulo semi-recto; (qualis est, in fig. 214. δCM, quem cum axe conjugato Cδ facit Asymptota CM:) Si vero alius sit angulus OAα quam semirectus; illi congruet Hyperbolæ quæ similem habeat angulum, δCM; ut nempe Cδ fig. 214, 215. sint respectivis αO fig. 215. æquales. C.

Constat itaque, non modo Cylindroeides hujusmodi torno formari posse cujus sectio per axem sit hyperbola; sed &, quæ sit *data* Hyperbola. Quippe exponatur Hyperbola AOO (fig. 214.) quælibet, cujus Centrum C, semi-axis transversus CA, axis conjugatus Cδ, & CM asymptota; cui similem imperatum sit torno exhibere: Hoc tantum curandum erit; nempe ut CA fig. 215. sit æqualis ipsi CA fig. 214. sitque angulus αAO fig. 215. ipsi δCM, fig. 214. (quem cum Asymptota facit axis conjugatus) æqualis. D.

E. Fig. 216. Solidum vero sic constructum cum varias admittat sectiones plano factas; eas ut ordine exquiramus, considerabimus hoc idem solidum ut alia constructione formatum; conversione scilicet Hyperbolæ O A O fig. 216. circa conjugatum axem δ C δ. Quippe hoc, idem esse solidum atque illud quod Torno constructum iri modo docuimus, ex dictis satis patet.



Cumque Solidi hujus sectio quælibet plano facta, sit alicui per Axem sectioni recta, seu perpendicularis: Esto ea per Axem sectio O o n O; in qua oppositæ Hyperbolæ (Genitrices) A O, a o; quarum Centrum, C; Axis conjugatus (qui & Solidi Axis est) δ C δ; Asymptotarum altera, C M; Axis Transversus, A a $=$ 2 C A $= T = 2S$; Axis interceptus, A D $= d$; à Centro distantia, C D $= c = \frac{1}{2}T + d = S + d$; Ordinatim-applicata ad Hyperbolæ axem, D O $= b$; cujus quadratum, $b^2 = Ld + \frac{L}{T}d^2 = \frac{Td + d^2}{T} L = \frac{c^2 - S^2}{T} L$; (quæ sunt itaque, ut series Primanorum aucta serie Secundanorum; aut etiam, ut Series Secundanorum mulctata serie Æqualium:) Adeoque $c^2 = S^2 + \frac{T}{L}b^2$: Quod itaque est quadratum rectæ C D (distantiæ à Centro) vel (huic æqualis) O δ, ordinatim-applicatæ ad Axem conjugatum. (Quæ omnia olim demonstravimus, *Con. Sect.* prop. 35, 41.) Et, propterea, sumptis C δ, hoc est D O $= b$, arithmetice proportionalibus; erunt omnia rectarum δ O, ordinatim-applicatarum ad Axem conjugatum, (spatium O δ C A complentium,) quadrata, totidem $S^2 + \frac{T}{L}b^2$, sumptis b arithmetice-proportionalibus: Hoc est. Series Æqualium aucta serie Secundanorum.

Sed &, sumpto M in Asymptota C M, erit (per *prop.* 39. *ibidem*,) ut L ad T, sic quadratum C δ seu D O, hoc est b^2, ad quadratum δ M. Adeoque quadrata omnium δ M (spatium M C δ complentium) sunt totidem $\frac{T}{L}b^2$; sumptis C δ $= b$ arithmetice proportionalibus.

Manifestum autem est, (ex constructione solidi,) quæ rectis A a, O o, insistunt erecta plana (solidum complentia) totidem esse circulos; quorum diametri sunt ipsæ A a, O o, rectæ. Quippe radii C A, δ O, circa Axem δ C δ conversi, totidem describunt Circulos.

F. Intelligatur autem, sumpto, ubivis in δ O recta, puncto m, recta per Centrum C m, cui erectum insistat Planum sectionem faciens, quam itaque compleant rectæ m (ipsis m punctis insistentes:) Quarum quadrata (utpote, in suis respective circulis, inter diametri segmenta O m, m o, mediarum proportionalium, seu ordinatim-applicatarum ad Circuli diametrum,) sunt totidem quadrata δ O, demptis respectivis quadratis δ m; seu $m^2 =$ δ O q $-$ δ m q.

Sitque 1°, punctum m in δ; adeoque δ m $= 0$, & δ O q $-$ δ m q $=$ δ O q: Et propterea, quæ rectæ C δ insistit sectio, eadem erit atque δ O A C hyperbola.

Sit 2°, punctum m in M, (nempe C m eadem existente atque C M asymptota;) adeoque δ m $=$ δ M, & δ m q $=$ δ M q $= \frac{T}{L}b^2$: Et propterea δ O q $-$ δ m q $= S^2 + \frac{T}{L}b^2 - \frac{T}{L}b^2 = S^2 = m^2$: ipsæque m, totidem S, invicem æquales. Adeoque, quæ Asymptotæ insistit sectio, est Parallelogrammum Rectangulum.

Sit

Sit 3°, punctum m inter δ & M; adeoque δ m minor quam δ M, sed eidem ubique proportionalis; puta in ratione ν ad b. Adeoque δ m q $= \frac{T}{L}\nu^2$: Et δ O q $-$ δ m q $= S^2 + \frac{T}{L}b^2 - \frac{T}{L}\nu^2 = S^2 + \frac{b^2 - \nu^2}{L}T = m^2$. Quæ itaque (propter ν minorem quam b) sunt quadrata ordinatim-applicatarum ad hyperbolæ axem conjugatum, (utpote series Æqualium aucta serie Secundanorum;) Quæ quidem Hyperbola, Semi-axem Transversum habet (super C centro erectum) $S =$ C A; seu Transversum Axem $T =$ A a; Axem Conjugatum, C m m: & Latus-Rectum $\frac{b^2 L + \nu^2 T}{b^2 - \nu^2}$. Quippe, cum sit, in quavis Hyperbola, $b^2 = \frac{c^2 - S^2}{T}L$; pro b, c, L, (ne fiat Symbolorum confusio, propter has literas jam usurpatas,) ponamus, in hac, θ, κ, λ; (manentibus S, T, utpote huic cum Hyperbola Genitrice communibus:) Eritque $\theta^2 = \frac{\kappa^2 - S^2}{T}\lambda$. Adeoque $\frac{\theta^2 T}{\kappa^2 - S^2} = \lambda$. Est autem θ^2 ($=$ C m $q =$ C δ $q +$ δ m $q =$) $b^2 + \frac{T}{L}\nu^2$; & $\theta^2 T = \frac{b^2 L + \nu^2 T}{L}T$. Item κ^2 (utpote quadratum rectæ puncto m insistentis quam m diximus,) $= m^2 = S^2 + \frac{b^2 - \nu^2}{L}T$; Adeoque $\kappa^2 - S^2 = \frac{b^2 - \nu^2}{L}T$. Et propterea $\frac{\theta^2 T}{\kappa^2 - S^2} = \frac{b^2 L + \nu^2 T}{b^2 - \nu^2} = \lambda$, Latus Rectum. Estque Conjugatus Axis, ipsa C m recta: Centrum, C. Fig. 216.

Sit 4°, punctum m inter O & M, (inter Curvam & propiorem Asymptotam; adeoque C m, continuata, curvam secabit; & quidem utrinque continuata, sectiones oppositas:) Adeoque (propter δ m majorem quam δ M, seu ν majorem quam b,) erunt δ O q $-$ δ m q $= S^2 + \frac{T}{L}b^2 - \frac{T}{L}\nu^2 = m^2$, hoc est $S^2 - \frac{\nu^2 - b^2}{L}T$; quadrata ordinatim-applicatarum ad Ellipseos conjugatum axem, (per *Con. Sect. prop.* 28. utpote series Æqualium mulctata Serie Secundanorum;) Cujus minor Axis Transversus, T, seu $2S$, $=$ A a: cujus Centrum, C; Axis conjugatus C m O; Latus Rectum $\frac{b^2 L + \nu^2 T}{\nu^2 - b^2}$. Quippe cum, in quavis Ellipsi sit $c^2 = \frac{S^2 - c^2}{T}L$; pro c, L, (ne fiat Symbolorum confusio, propter has jam in Hyperbola usurpatas,) ponamus, in Ellipsi, ε λ, (manentibus S, T, utpote communibus Ellipsi cum Hyperbola.) Eritque $\varepsilon^2 = \frac{S^2 - \kappa^2}{T}\lambda$. Adeoque $\frac{\varepsilon^2 T}{S^2 - \kappa^2} = \lambda$. Est autem ε^2 ($=$ C m $q =$ C δ $q +$ δ m q) $= b^2 + \frac{T}{L}\nu^2$: & $\varepsilon^2 T = \frac{b^2 L + \nu^2 T}{L}T$. Item κ^2 (utpote quadratum rectæ puncto m insistentis) $= S^2 - \frac{\nu^2 - b^2}{L}T$. Adeoque $S^2 - \kappa^2 = \frac{\nu^2 - b^2}{L}T$. Et propterea $\frac{\varepsilon^2 T}{S^2 - \kappa^2} = \frac{b^2 L + \nu^2 T}{\nu^2 - b^2} = \lambda$, Latus Rectum. Et C m o in eo puncto Curvæ A o occurrit, cui respondet δ O $=$ δ m, hoc est $c^2 = \frac{\nu^2}{L}T$. Et C O $q = b^2 + c^2 = b^2 + \frac{\nu^2}{L}T = \frac{b^2 L + \nu^2 T}{L}$. Hoc est, C O $= \sqrt{:}\,\frac{b^2 L + \nu^2 T}{L}$: semi-axis transversus Conjugatus.

Omnis igitur hujus solidi sectio, plano per Centrum facta, erit vel Circulus, nempe si super rectam C A; vel Ellipsis, si inter C A & C M (seu inter curvam & asymptotam proximam;) vel Parallelogrammum, si in ipsa Asymptota; vel Hyperbola (seu potius Oppositæ Hyperbolæ, infra supraque,) si per C m inter C M & C δ; vel ipsa quidem Genitrix hyperbola, si per Axem C δ.

Intelligatur deinde, Sectio rectæ $\kappa\mu$, axi parallelæ, insistens. Eruntque, & G. hic, Fig. 217.

Fig. 217. hic, omnia quadrata rectarum punctis μ insistentium (planum complentium,) puta $\mu^2, = \delta O q - \delta \mu q = \delta O q - C\kappa q$ (propter $\delta\mu = C\kappa$.)

Fig. 217.

Ideoque, si κ sit in C; erit (ut prius) sectio per $\kappa\mu$, eadem quæ per $C\delta$, hoc est $\delta O A$ Genitrix hyperbola (propter $\delta\mu = o$.)

Si κ sit in A vel a; adeoque $C\kappa = CA = S$: Erunt $\delta O q - C\kappa q = S^2 + \frac{T}{L} b^2 - S^2 = \frac{T}{L} b^2 = \mu^2$. Quæ itaque sunt quadrata ordinatim-applicatarum in triangulo, (utpote Series Secundanorum;) seu potius binis triangulis communem verticem A habentibus, quæ fiunt rectis decussantibus eundem angulum facientibus quem faciunt Asymptotæ se mutuo in plano decussantes.

Si κ sit inter C & A, vel C & a; adeoque $C\kappa = \sigma$ minor quam S; Erunt $\delta O q - C\kappa q = S^2 + \frac{T}{L} b^2 - \sigma^2 = \mu^2$, quadrata ordinatim-applicatarum ad conjugatum axem hyperbolæ; (quippe series Æqualium aucta serie Secundanorum:) cujus Semi axis transversus est $\sqrt{: S^2 - \sigma^2}$: (Nempe, quæ puncto κ insistit ordinatim-applicata in Semicirculo Aa;) Latus rectum, $\frac{2L}{T}\sqrt{: S^2 - \sigma^2}$, seu $\frac{L}{S}\sqrt{: S^2 - \sigma^2}$: atque axis conjugatus, ipsa $\kappa\mu$ recta.

Si κ sit extra Solidum, puta ultra A vel a, (adeoque plani secantis pars media etiam extra solidum,) Planum secans in iis punctis occurret ubi est δO (vel δo) $= C\kappa = \delta\mu$; (quæ itaque puncta sunt vertices oppositi:) puta, V, V. Atque ultra hæc puncta, existente μ intra solidum, erunt $\mu^2 = \delta O q - \delta\mu q = \delta O q - C\kappa q = S^2 + \frac{T}{L} b^2 - \sigma^2$; hoc est (propter σ majorem quam S,) $\frac{T}{L} b^2 - \sigma^2 + S^2 = \mu^2$; quadrata ordinatim-applicatarum in Hyperbola (seu Oppositis hyperbolis) ad suum axem: (utpote Series Secundanorum mulctata serie Æqualium:) Cujus Axis transversus est $2\sqrt{\frac{\sigma^2 - S^2}{T} L}$, & Latus rectum, $2\sqrt{\frac{\sigma^2 - S^2}{L} T}$. Centrum vero, ipsum κ; atque Axis, $\kappa\mu$; Transversus, $V\kappa V$.

Omnis igitur hujus Solidi Sectio, plano quod Axi sit parallelum facta, est, vel Opposita Triangula ad eundem verticem, nempe si per verticem hyperbolæ Genitricis; vel Hyperbolæ Oppositæ, si alibi.

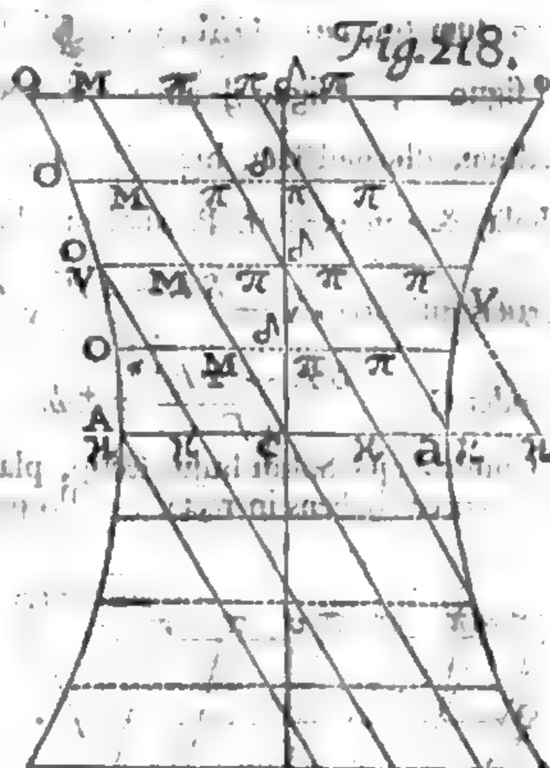
H. Fig. 218. Intelligatur denique, ubivis in Hyperbolæ Genitricis axe Aa, quantumvis producto, sumi punctum κ; unde ducatur (cui insistat sectio) in plano per Axem solidi, recta $\kappa\pi$, solidi Axi $C\delta$ non parallela, sed eidem alicubi occurrens.

Et quidem si sumatur κ in C; fiet sectio per Centrum, de qua jam supra dictum est: In qua quadrata ordinatim-applicatarum sunt $m^2 = S^2 + \frac{T}{L} b^2 - \frac{T}{L} \kappa^2$: Adeoque sectio ipsa, vel Hyperbola, vel Parallelogrammum, vel Ellipsis; prout κ minor est, vel æqualis, vel major quam b.

Jam vero, cuivis prædictarum Cm, parallela intelligatur $\kappa\pi$. Sitque $C\kappa (= m\pi) = \sqrt{\frac{T}{L} F^2} = F\sqrt{\frac{T}{L}}$; (uti prius erat $\delta m = \sqrt{\frac{T}{L}\kappa^2} = \kappa\sqrt{\frac{T}{L}}$. Adeoque $\delta\pi = \delta m + m\pi$, vel $\delta m - m\pi$, vel $m\pi - \delta m$, (pro vario situ punctorum m, π;) hoc est, æqualis summæ vel differentiæ rectarum δm, $m\pi$; hoc est, ipsarum

$\kappa\sqrt{}$

$\kappa\sqrt{\frac{T}{L}}$, $F\sqrt{\frac{T}{L}}$; (nempe, Summæ, si punctum m sit intermedium inter δ & π Differentiæ, si secus.) Adeoque ipsarum $\delta\pi$ quadrata, $\delta\pi q = \frac{\kappa^2 \pm 2\kappa F + F^2}{L} T$.



Cum itaque Quadrata rectarum punctis π insistentium (sectionis planum ipsi $\kappa\pi$ insistentis complentium,) puta π^2 sint (per prius ostensa) $\delta Oq - \delta\pi q$; erunt ipsa, $\pi^2 = S^2 + \frac{b^2 - \kappa^2 \mp 2\kappa F - F^2}{L} T$. (Nempe, $2\kappa F$ cum signo $-$, si m sit intermedium; cum signo $+$, si secus.) Ubi S^2 & F^2 sunt series Æqualium; $2\kappa F$, series Primanorum; $b^2 - \kappa^2$, series Secundanorum.

Et quidem 1°, sit $\kappa\pi$ parallela ipsi CM asymptotæ: Adeoque (propter $\delta m = \delta M$,) $b^2 = \kappa^2$, se mutuo perimentes.

Quo casu, si sit etiam $S^2 = \frac{F^2}{L} T$, (existente scilicet κ in A vel a; adeoque CA $=$ Cκ:) his item se perimentibus mutuo, solum superest $\frac{2\kappa FT}{L}$, & quidem cum signo $+$: (Nam, posito κ in A vel a, non potest punctum m intermedium esse inter δ & π, quin π erit extra Solidum:) seu (propter $\kappa = b$,) $\frac{2bFT}{L}$; seu (propter $S^2 = \frac{F^2}{L} T$, adeoque $F^2 = \frac{L}{T} S^2$, & $F = S\sqrt{\frac{L}{T}} = \frac{1}{2}T\sqrt{\frac{L}{T}} = \frac{1}{2}\sqrt{LT}$,) $bT\sqrt{\frac{T}{L}}$, series Primanorum; (ut quadrata ordinatim-applicatarum in parabola.) Adeoque quæ rectæ $\kappa\pi$, per verticem A vel a transeunti, utrivis Asymptotarum parallelæ, insistit Sectio, est Parabola. Cujus vertex, κ; Axis interceptus, $\kappa\pi = $ C m $= \sqrt{:C\delta q + \delta Mq:} = \sqrt{:b^2 + \frac{T}{L} b^2:} = b\sqrt{\frac{L+T}{L}}$: Latus rectum, $\frac{2FT}{\sqrt{:L^2 + LT}}$; vel (propter $F = \frac{1}{2}\sqrt{LT}$,) $T\sqrt{\frac{T}{L+T}}$.

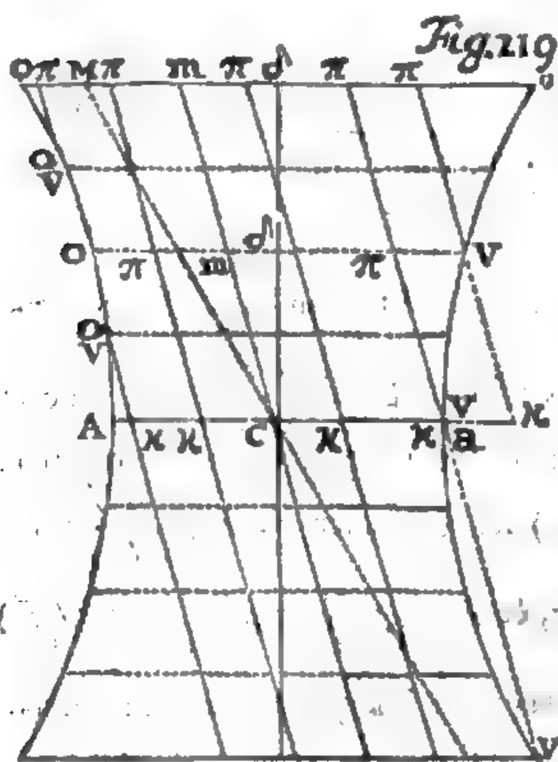
Sin (manente $\kappa\pi$ parallela CM asymptotæ) punctum κ sit extra solidum (ultra A vel a,) adeoque $\frac{F^2}{L} T$ majus quam S^2: Erit etiamnum $2\kappa F$ seu $2bF$ cum signo $+$, (quippe posito κ extra Solidum, non poterit m intermedium esse, quin π etiam erit extra solidum:) Et $\pi^2 = S^2 + \frac{2bF - F^2}{L} T$, hoc est $\frac{2bF}{L} T - \frac{F^2 T - S^2 L}{L}$, series Primanorum mulctata serie Æqualium: Adeoque, & hic, sectio erit Parabola; sed cujus vertex sit non in κ, sed (ubi $\kappa\pi$, intrando, curvam secat) in V; & κ, in axe continuato extra Parabolam: Latus rectum (ut prius) $\frac{2FT}{\sqrt{:L^2 + LT}}$: Verticis distantia $\kappa V = \frac{2F^2 - SL}{4F}\sqrt{\frac{L+T}{L}}$. Cui respondet C$\delta = b = \frac{2F^2 - S^2}{4F}$.

Si autem (manente $\kappa\pi$ parallela CM asymptotæ) punctum κ sit intra solidum, (sive inter A & C, sive inter C & a,) erit Cκ minor quam CA; adeoque $\frac{F^2 T}{L}$ minus quam S^2: Potestque m vel M intermedium esse inter δ & π (nempe si

Fig. 218. si $\varkappa\pi$ sumatur citra CM,) vel (si ultra) non esse: adeoque $2\varkappa F$ seu $2bF$, vel signo —, vel signo + affici. Adeoque $\pi^2 = S^2 - \frac{F^2}{L}T \mp \frac{2bF}{L}T$; series Æqualium, illic mulctata, hic aucta, serie Primanorum: utrobique, sectio erit Parabola, & $\varkappa$ in axe intra Parabolam: Latus rectum (ut prius) $\frac{2FT}{\sqrt{:L^2+LT:}}$; & verticis distantia $\varkappa V = \frac{SL - 2F^2}{4F}\sqrt{\frac{L+T}{L}}$; illic sursum, hic deorsum. Cui respondet $C\delta = \frac{SL - 2F^2}{4F} = \pm b$.

Omnis itaque Solidi hujus sectio, plano Asymptotæ parallelo facta, est Parabola, verticem habens in rectæ $\varkappa\pi$ illo puncto quo Curvam genitricem secat.

K. 2°. Si Cm cui parallela est $\varkappa\pi$, non sit ipsa CM asymptota, sed quæ obliquius secet solidi Axem $C\delta$; sumpto scilicet puncto m inter δ & M: erit $\varkappa$ minus quam b.



Quo casu, si sit $S^2 = \frac{F^2T}{L}$, adeoque $C\varkappa = CA$, sumpto scilicet $\varkappa$ in A vel a: His ita se permentibus mutuo, erunt $\pi^2 = \frac{b^2 - \varkappa^2 \mp 2\varkappa F}{L}T$, quadrata ordinatim-applicatarum in oppositis hyperbolis, (utpote series Secundanorum, mulctata vel aucta serie Primanorum;) quarum quidem axis transversus $\varkappa V$ est extra solidum, vertices habens in eadem Curva genitrice: Signa vero — + respicient, hoc unum; illud, reliquum verticem.

Idem accidet, si sit S^2, minus quam $\frac{F^2T}{L}$, adeoque $\varkappa$ extra solidum: nisi quod jam $\varkappa$ non erit in verticum altero, sed in axe transverso alicubi intra vertices. Quippe tum $\pi^2 = S^2 + \frac{b^2 - \varkappa^2 \mp 2\varkappa F - F^2}{L}T$, hoc est, $\frac{b^2 - \varkappa^2}{L}T - \frac{F^2T - S^2L}{L} \mp \frac{2\varkappa FT}{L}$, erit series Secundanorum mulctata serie Æqualium, mulctata vel aucta serie Primanorum. Qui etiam est Locus ad Hyperbolam: Cujus Axis est ipsa $\varkappa\pi$, verticesque illius ea puncta quæ sunt in curva genitrice.

Si S^2 majus sit quam $\frac{F^2T}{L}$, adeoq; $\varkappa$ intra solidum: erunt $\pi^2 = S^2 + \frac{b^2 - \varkappa^2 \mp 2\varkappa F - F^2}{L}T$, hoc est $\frac{S^2L - F^2T}{L} + \frac{b^2 - \varkappa^2}{L}T \mp \frac{2\varkappa F}{L}T$; series Secundanorum aucta serie Æqualium, & mulctata vel aucta serie Primanorum; adeoque Sectio, oppositæ Hyperbolæ: Ipsaque $\varkappa\pi$ earundem Axis si curvam genitricem secet, vertices habens in ipsis intersectionibus: Vel, si curvam illam non attingat, Axis conjugatus; Sin curvam Tangat; perinde est ad utrumvis casum referas; Quippe tum oppositæ Hyperbolæ degenerant in opposita Triangula, quorum communis Vertex est O, punctum contactus; evanescente Latere Transverso.

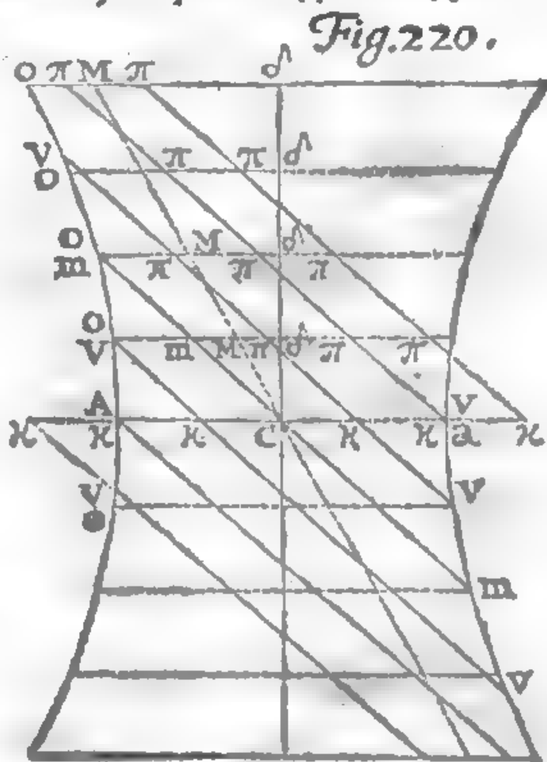
Omnis igitur hujus Solidi sectio, plano facta quod obliquius secat axem solidi, quam eam secat Asymptota, sunt Oppositæ Hyperbolæ, vel Triangula.

L. Fig. 200. 3°. Si Cm cui parallela est $\varkappa\pi$, minus oblique secet axem solidi quam Asymptota CM; adeoque sit m punctum intra M & O: erit $\varkappa$ majus quam b: rectaque $\varkappa\pi$ oppositas curvas genitrices secabit.

Quo casu, si $S^2 = \frac{F^2T}{L}$, posito scilicet $\varkappa$ in A vel a; (cum non possit m cadere

inter

inter δ & π,) erit $\pi^2 = \frac{b^2 - \kappa^2 + 2\kappa F}{L} T$; hoc est, $+ \frac{2\kappa FT}{L} - \frac{\kappa^2 - b^2}{L} T$; eritque sectio, Ellipsis; cujus Axis $\kappa\pi$V, & verticum alter in κ, reliquus in opposita hyperbola.



Si vero κ sit extra Solidum; adeoque S^2 minus quam $\frac{F^2 T}{L}$; (nec possit m cadere inter δ & π:) Erunt $\pi = S^2 + \frac{b^2 - \kappa^2 + 2\kappa F - F^2}{L} T$; hoc est, $+ \frac{2\kappa FT}{L} - \frac{\kappa^2 - b^2}{L} T - \frac{F^2 T - S^2 L}{L}$; Sectio item Ellipsis erit, cujus axis est ipsa $\kappa\pi$, sed neuter verticum in puncto κ, quod est in axe continuato extra Ellipsin: Verticesque in illis rectæ $\kappa\pi$ punctis quibus oppositas curvas genitrices secat.

Sin S^2 majus quam $\frac{F^2 T}{L}$, adeoque κ intra solidum; erunt $\pi^2 = S^2 + \frac{b^2 - \kappa^2 \mp 2\kappa F - F^2}{L} T = \mp \frac{2\kappa FT}{L} - \frac{\kappa^2 - b^2}{L} T + \frac{S^2 L - F^2 T}{L}$: Sectioque Ellipsis erit; cujus axium alter est ipsa $\kappa\pi$ recta, punctumque κ in neutro verticum, sed in axe illo intra ellipsin, cujus vertices sunt in eis ejusdem punctis quibus oppositas curvas genitrices A O, a o, secat.

Omnis itaque hujus Solidi sectio, plano facta quod ad Axem solidi minus obliquum sit quam est Asymptota; est Ellipsis; vel saltem (si rectum sit ad axem) Circulus. M. Fig. 214.

Solidi hujus Centrum Gravitatis quod spectat; si totum spectemus, æqualiter utrinque continuatum, non est quod ambigemus in ipso C centro positum esse; propter tum δ C δ totius axem (in quo propterea Centrum gravitatis situm esse liquet, ex prop. 5. hujus;) tum Circuli planum A a, quod tum axem tum solidum etiam ita dividat ut singulæ segmenti unius particulæ, singulis alterius respective sumptis, æquiponderent; utpote æquales, & æqualiter utrinque remotæ; quare & in hoc etiam plano situm esse constat, per prop. 3. vel 4. hujus: adeoque in ipso C puncto quod est utrique commune.

Si vero alterutrum segmentum consideremus; puta O A a o, à dividente plano A a quantumlibet continuatum, vel hujus etiam segmenta quælibet planis ipsi A a parallelis abscissa, vel interjecta: Hic etiam rem facile obtinebimus.

Cum enim, verbi gratia, in Plano C A O δ, fig. 214. cujus conversione circa C δ axem, istiusmodi semisolidum formatur; rectarum δ O quadrata (quibus & circuli his radiis descripti sunt proportionales) sint, (per § A.) $S^2 + \frac{T}{L} b^2$, vel $\frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L} b^2$, hoc est, series Æqualium aucta serie Secundanorum: Sintque (per prop. 1. hujus) *omnia* T^2 idem atque T^2 (in altitudinem) H ductum, seu HT^2, & *omnia* $\frac{1}{4}T^2 = \frac{1}{4}HT^2$: atque *omnia* b^2, idem atque $\frac{1}{3}H^3$; & *omnia* $\frac{T}{L} b^2, = \frac{T}{3L} H^3$: Erunt *omnia* $\frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L} b^2, = \frac{1}{4}T^2 H + \frac{T}{3L} H^3$, (posito H pro D O $= b$ maximo:) Solidumque Conversione vel Semiconversione factum, ad hanc quadratorum summam, ut Circulus vel Semicirculus ad quadratum radii. Adeoque ad Cylindrum æque altum cujus basis æquetur Circulo radii D O maximi, ut $\frac{1}{4}T^2 H + \frac{T}{3L} H^3$ ad $\frac{1}{4}T^2 H + \frac{T}{L} H^3$, seu ut $\frac{1}{4}LT^2 + \frac{1}{3}TH^2$ ad $\frac{1}{4}LT^2 + TH^2$. Hoc est, ut $3LT + 4H^2$ ad $3LT + 12H^2$.

Sed & rectarum, adeoque & quadratorum aut circulorum δ O, à C A distantiæ, N.

 sunt

ſunt ut *b* arithmetice proportionales: Adeoque (verbi gratia) quadratorum ♂O momenta reſpectu C A, ſunt totidem $\frac{1}{2}T^2b + \frac{T}{L}b^3$ (ſumptis *b* arithmetice proportionalibus uſque ad H maximum;) Adeoque (per prop. 1. hujus) omnium (ſive quadratorum ſive circulorum) in ſuis locis ſuſpenſorum Momentum, ad momentum totidem maximo æqualium in diſtantia maxima ſuſpenſorum, ut $\frac{1}{4}T^2H^2 + \frac{T}{4L}H^4$ ad $\frac{1}{2}T^2H^2 + \frac{T}{L}H^4$; hoc eſt $\frac{1}{2}LT^2 + TH^2$ ad $LT^2 + 4TH^2$, ſeu $LT + 2H^2$ ad $2LT + 8H^2$.

Cum itaque Magnitudinum ratio ſit, ut $3LT + 4H^2$ ad $3LT + 12H^2$; & Momentorum ratio, $LT + 2H^2$ ad $2LT + 8H^2$; ſitque Momentorum ratio ex rationibus Magnitudinum & Diſtantiarum compoſita; erit Diſtantiarum ratio, (hoc eſt, diſtantiæ Centri gravitatis à C A, ad diſtantiam totam ſeu altitudinem figuræ,) ut $3L^2T^2 + 18LTH^2 + 24H^4$ ad $6L^2T^2 + 32LTH^2 + 32H^4$, vel (abbreviando per $LT + 4H^2$,) ut $3LT + 6H^2$ ad $6LT + 8H^2$

$$\frac{3LT + 4H^2}{3LT + 12H^2}\Big) \frac{LT + 2H^2}{2LT + 8H^2}\Big(\frac{3L^2T^2 + 18LTH^2 + 24H^4}{6L^2T^2 + 32LTH^2 + 32H^4} = \frac{3LT + 6H^2}{6LT + 8H^2}$$

Adeoque (cum in Axe ſolidi ſitum eſſe certum ſit,) erit in Axe ſic diviſo.

Verbi gratia; ſi ponantur $L = T = H$: Erit ut $3 + 18 + 24 = 45$, ad $6 + 32 + 32 = 70$; ſeu, ut $3 + 6 = 9$, ad $6 + 8 = 14$; hoc eſt, ut 9 ad 14: Sic, Solidi Centri gravitatis (in C ♂ ſiti) à C diſtantia, ad totam C ♂. Atque ſimiliter judicandum erit (mutatis mutandis) quæcunque ponatur ipſorum $L, T, H,$ ad invicem ratio.

Quæque hic de Magnitudine & Centro gravitatis Solidi Erecti, ejuſve recta Portione ipſi A a plano adjacente dicta ſunt: ad Scalena facile transferuntur; (poſito A loco H pro figuræ altitudine;) Atque ad ſegmenta duobus utcunque planis plano A a parallelis interjecta; utpote quæ ſunt duorum ipſi Plano A a adjacentium, vel Summa vel Differentia.

SCHOLIUM.

Atque hic tandem pedem figo; neque hoc *De Calculo Centri Gravitatis* Caput ulterius produco. In quo ſi quiſpiam cauſetur me ſatis aliquando perplexum fuiſſe; utut id non negem, perplexo (ſiquod aliud) ſubjecto imputandum erit. Nec dubito quin, qui intricatiſſimam rerum traditarum naturam intelligunt, me ſatis dilucide pro ſubjecta materia tradidiſſe, exiſtimabunt; nec ſperaverint forſan clarius hoc olim ab aliis traditum iri. Si cui nimius fuiſſe videar; (utut ego is ſim qui de hoc omnium maxime conqueri debeam, qui incredibilem intricatiſſimi calculi laborem, ne dicam infinitum, ſuſtinui ſolus:) qui tamen multiplicem rerum traditarum copiam perpendit, atque ſuccinctam tradendi methodum; facile pro me ſponſor erit, me, pro tanta materiæ varietate, etiam brevem fuiſſe: Dum ea, unico hoc capite; tradi videat, quæ, ſi, aliorum quorundam exemplum ſequutus, in longum protraxiſſe vellem, ad ſpiſſa ſatis volumina, neque pauca, materiam affatim ſuppeditarent. Contra vero, ſiquis ejuſmodi alia non pauca adjungi potuiſſe queratur, quæ tanquam omiſſa deſiderat: neque ego hoc negaverim, (neque id mihi in animo fuit, ſic omnia undecunque corradere, ut nullum ſupereſſet ſequenti ſpicilegium:) Addo tamen, etiam ea forſan ipſa, quæ tanquam deſiderata cauſantur illi, ſi rite animum adverterint, ita univerſaliter tradi perſpiciant, ut nihil ultra deſit, quam ut, univerſaliter tradita, ad particulares caſus applicentur: Saltem eas hic methodos tradi, quæ ſi ad quæſita particularia accommodentur, etiam alia innumera, quæ hactenus pro difficilibus fuerint habita, expedire poterunt.

Superſunt adhuc plura ad hanc, quæ præ manibus eſt, *De Mechanicis*, ſive *De Motu* doctrinam ſpectantia: Sed preli moras atque difficultates jam expertus; hæc interim præmittenda judicavi, dum *Partem Tertiam*, jam inchoatam, abſolvant operæ.

FINIS PARTIS SECUNDÆ.

MECHANICORUM,
SIVE
Tractatus DE MOTU;

PARS TERTIA.

IN QUA,

De Vecte; aut unico, aut binis pluribusve Fulcris sustento.
De Axe in Peritrochio, cum Potentiis cognatis.
De Trochlea, seu Polyspasto.
De Cochlea.
De Motibus Compositis, Acceleratis, Retardatis, & Projectorum.
De Percussione.
De Cuneo.
De Elatere, & Resilitione seu Reflexione.
De Hydrostaticis, & Aeris Æquipondio.
Variisque Quæstionibus Mechanicis.

Anno 1671 edita.

AD LECTOREM MONITIO.

CUR Partem hanc Tertiam, (*ut prius* Secundam,) *tanquam ex abrupto inchoemus; continuatis tum Capitum, tum Figurarum, Numeris: Ad Partem Secundam jam dictum est: Nempe, ut Citationes commodius peragantur.*

CAP.

CAP. VI.

De Vecte.

DEFINITIONES.

DEF. I. Vectem (*notæ significationis in usu vulgari*) *hic consideramus, tanquam* Lineam Rectam Inflexilem, *Ponderibus vehendis, sustinendis, vel levandis accommodatam: Ponderisque vel nullius, vel saltem æquabilis. Græcis* μοχλὸς *dicitur.*

II. Fulcrum (*Græcis* ὑπομόχλιον) *illud est quo Vectis sustinetur; Vel etiam super quo, tanquam immobili, movetur.*

VEctis nomen, à *Vehendo* dici videtur, (ut *vector, vectio, vectura, vectigal, convexum, vexo, vexillum,* quæque his cognata sunt;) eumque præsertim ipsius usum respicere, quo Bajuli (seu *Palangarii*) utrinque adhibiti, *Vecti* (*Palangæ* itidem dictæ) impositum Onus *vehunt*; Aut etiam (quod eodem recidit) quo Vectis, Trabs, seu Tignum, Fulcris utrinque sustentatum, incumbens Grave sustinet.

Vox Græca μοχλὸς, sive à μόχθος *labor, molestia,* sive (ut ὀχλεὺς ejusdem significatus) ab ὀχλίζω *moveo,* dicatur; alterum potius Vectis usum respicit (quem Mechanici potissimum tractant) quo, unius Fulcri ope, Vis alteri Vectis extremo applicata, reliquo impositum Grave, facilius sublevat: Quo respicit & nostratium vox **Leaver**, tanquam à *levando* dicta, quod nostri dicunt **to lift**, vel etiam **to heave**, (quasi à *vehο* diceretur inversis literis;) unde & nostratium vox **Heaven**, Cœlum denotans; tanquam *Elatum, Altum, Elevatum*; (quomodo & Cœlum *convexum* dicunt Poetæ.) Eodem sensu nautæ, speciatim de Anchora sublevanda, dicunt **to weigh Anchor**, hoc est, Anchoram sublevare, atque *invehere*; (cui contrarium est **to cast Anchor**, hoc est, projicere.)

A μοχλὸς dicitur μοχλεύω, quod prima significatione est *vecte movere*, (unde ad alia etiam molimina transfertur;) atque hinc Latinorum *molior, molimen, moles, molestia,* &c. dici videntur; nisi quis hæc à *moveo* dicta malit.

Nos, utrumque Vectis usum respicientes, quo & Vehendis seu sustinendis ponderibus, & Levandis etiam accommodatur; utrique definitionem accommodavimus.

Quod autem, à μοχλὸς, ὑπομόχλιον dicunt Græci (utpote quod Vecti subjacere solet,) Latinis *Fulcrum* dicitur, quod à *Fulcio, fulsi, fultum,* formatur eadem analogia qua à suis Verbis, eorumve Supinis, formantur alia; nam prout à *lavatum, simulatum, ambulatum, involutum, sepultum,* formantur *lavacrum, simulacrum, ambulacrum, involucrum, sepulcrum,* (& siqua sunt similia) & à *fultum* formabitur *Fulcrum*. Sed &, à *Fulcio, fulcivi, fulcitum,* etiam *Fulcimen* dicitur, & *Fulcimentum*, eodem significatu. Significat autem vel illud immobile super quo moveri Vectis intelligitur, ubi submovendis ponderibus adhibetur; vel bina illa (sive plura sint) fulcimina, quibus utrinque incumbens Trabs, seu Vectis, fulcitur seu sustinetur: Prout scilicet vel unico, vel binis (pluribusve) Fulcris Vectis sustinetur.

III. Applicationum puncta, Centrum Æquilibrii, *aliaque hujusmodi, sicubi hic occurrunt, eodem sensu intelligenda erunt quo supra de Libra, definitum est.*

Fig. 221. SIC, (Fig. 221.) A B, Vectis; O, Onus levandum seu submovendum, vel etiam Obex amoliendus; V, Vis motrix adhibita; B, punctum applicationis ponderis; A, punctum applicationis Vis motricis; F, Fulcrum quo sustinetur; cujus apex C est Centrum motus, Axique Libræ respondet; Onusque & Vis motrix, oppositis ad Libram Ponderibus respondent.

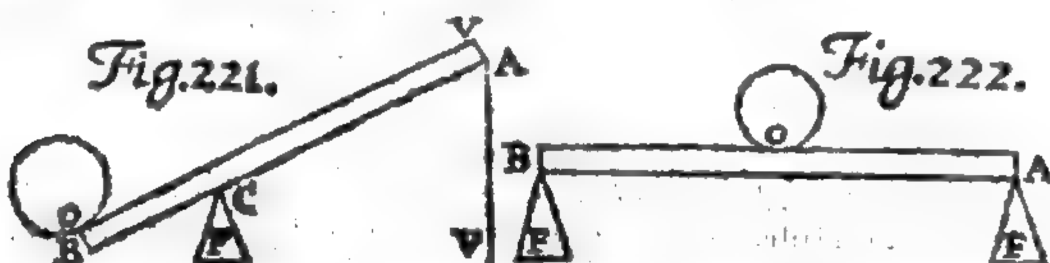


Fig. 222. Item, (Fig. 222.) A B Vectis, duobus fulcris seu bajulis F, F sustentatum; O pondus seu onus impositum.

Vectem autem tanquam rectam lineam (sed non flexilem) eadem ratione hic habemus, qua *Libram* supra sic habuimus: Quoniam tanquam nullius ponderis æstimatur. Et siquid, revera ponderis habeat, id vel Oneri movendo, vel Vi motrici, vel partim huic partim illi, (pro vario situ) accensendum erit.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si Vectis, (unico fulcro Oneri & Viribus intermedio nixus,) tanquam Libra consideretur; quæ de Libra supra dicta sunt, eadem & Vecti accommodantur.

Fig. 221. PUta; si Vectis A B, Fulcro sustineatur in C; atque applicentur Onus in B, & Vis in A, (utraque deorsum prementia;) Vis & Onus contra-ponderant; (seu invicem contra-nituntur;) hoc est, Vis deorsum in V, elevat O. per 1. Cap. 3.

Item, tantundem simul gravant seu premunt Fulcrum, quantum est utriusque simul (cum ipso Vecte) Vis (dum suspensum onus in quiete libratur;) per 2. Cap. 3. dumque est in motu, quantum per 16. Cap. 3. determinatur.

Item, tantundem utrumque suum afficit seu gravat applicationis punctum, cui vel directe imminet, vel directe subest, (vel ipsum, vel ejus Centrum gravitatis,) atque si in ipso esset applicationis puncto. (Quod & alibi perinde obtinet.) Per 30. Cap. 2. vel 4. Cap. 3. & 16. Cap. 4.

Item, in ea ratione valent (Vis agendo, & Onus resistendo,) quæ componitur ex rationibus Graduum (puta Ponderum & Virium,) & Distantiarum punctorum applicationis à Fulcro seu Centro motus (cæteris paribus;) per 12. Cap. 3.

Item, si Vis (sic æstimata) oneri præpolleat; movebit: Si minus, non movebit. per 11. Cap. 1.

Adeoque, quo propius ad fulcrum sit Onus O, & Vis V remotius, eo minori Vi majus movebitur Onus. per 12. Cap. 3.

Item, si, propter curvatum Vectem (quem rectum supponimus;) vel (quod eodem recidit) propter Centrum motus extra ipsum Vectem, (hoc est, extra rectam applicationum puncta jungentem;) vel propter non easdem Oneris & Virium Directiones; vel alias undecunque, contingat; pro vario Vectis situ, inæquales

quales subinde futuras esse motuum (Oneris & Virium motricium,) Obliquitates: Eædem hic anomaliæ contingent, quæ de Libra ostenduntur, prop. 14. Cap. 3.

Aliaque de Libra tradita, etiam de Vecte intelligenda erunt. Vectis enim Libra est; & Fulcri vertex, est Libræ Axis, seu Centrum Motus: Onusque & Vis Motrix, sunt et Pondera utrinque Libræ applicata. Adeoque quæ illic de Libra universaliter demonstrantur; speciatim Vecti conveniunt.

SCHOLIUM.

NOtandum interim est; quanquam Vectrum præcipuus usus esse soleat ad onera in altum levanda, (quem itaque vocabula horsum accommodata potissimum respicere videantur;) tamen eadem omnino ratio est, mutatis mutandis, Vectium in alio situ adhibitorum, ad quoscunque obices amoliendos; (eademque & hic demonstratio.) Puta, si, in situ horizontali, Vectis A B, firmiori fulcro F ad dex- Fig. 223.

tram posito nixus, adhibeatur (vi in A applicata) ad amoliendum obicem O ad sinistram positum; aut ad fores ibidem perfringendas; aliudve hujusmodi perficiendum. Eodem modo; si fulcro F, superne posito, adhibeatur A B vectis, quo Clavus superne fixus subducatur, Vi adhibita in A quæ sursum premat. Et sic alibi. Fig. 224.

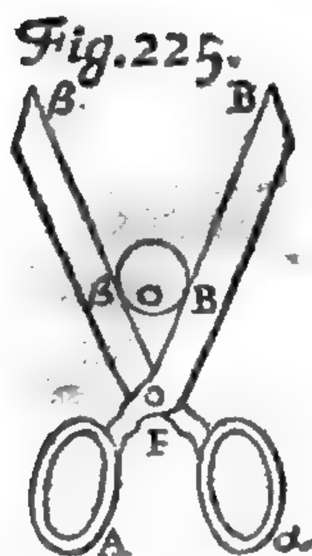
Dico autem, *firmiori Fulcro F.* Nisi enim satis firmum sit Fulcrum; Manente O, movebitur F, (ut fiat O fulcrum, & F mobile; de quo in Propositione sequente dicendum erit.) Sicut &, nisi vectis A B sit satis firmus; frangetur vectis A B, vel curvabitur. (Quæ & alibi similiter intelligenda erunt.)

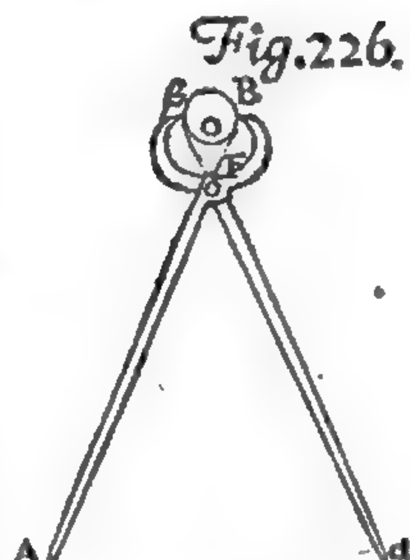
Et quidem sic aliquando inter plura distribuitur motus, ut in ambiguo sit, quod Fulcrum dicatur, quod Mobile. Sic in Navigii vel Cymbæ, Remis; dum Vis Manubrio applicatur, Palmula Aquæ ut Fulcro innixa, Scalmum cum conjuncta Cymba submovet: Verum, cum neque ita firmum fulcrum sit Aqua, quin & ipsa nonnihil pressa cedat; ratione motus hujus, Scalmus pro Fulcro erit, eritque Aqua pro Mobili: Sed &, cum neque Remus ipse tam validus aut firmus sit, quin Flectatur nonnihil seu Incurvetur, (etiam cum non frangitur;) tertius hinc oritur motus: Qui quidem tres motus se minuunt invicem. Quippe Aquæ Cessio, & Remi Flexio, motui Cymbæ nonnihil demunt, qui major esset si non adessent illæ; sicut ex adverso, Motus Cymbæ, eademque Remi Flexio, Cessioni Aquæ; duoque motus reliqui, Flexioni Remi nonnihil demunt: Adeo quidem ut Vis eadem adhibita, quæ jam flectit; si nec Aqua cederet, nec submoveretur Cymba, Remum frangeret. Et simile esto in aliis judicium.

Sed & nonnunquam gemini Vectes, decussatim positi, eidem communi Fulcro nituntur. Ut in Forficibus, & Forcipibus, ad interjectum obicem vel scindendum vel comprimendum adhibitis. Ubi duo Vectes A B, $\alpha\beta$, communi fulcro F nixi, (adhibita vi in A, α,) comprimunt interjectum obicem O; & quidem eo fortius, quo vel O propius est ad F, vel A α inde remotius, Fig. 225, 226.

Quæ autem ad hanc propositionem monemus; etiam in sequentibus obtinent.

Possent



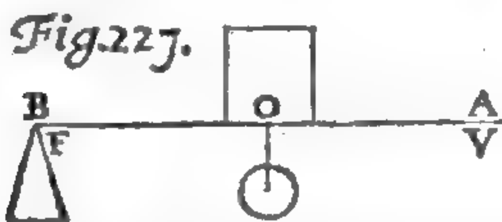


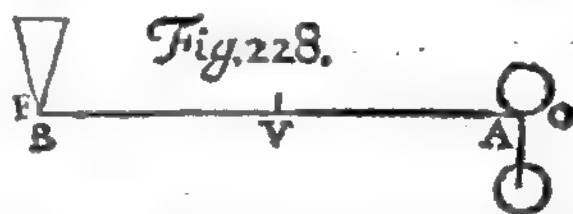
Possent quidem hæc omnia deduci, ex prop. 4, 5, 6. Cap. 2. (ubi fundamenta jacta sunt pro Machinarum omnium viribus æstimandis :) Cum autem id *de Libra* jam factum sit, Cap. 3. potius duxi, ea quæ de Libra dicta sunt, ad Vectem hic transferre, propter similes utrobique affectiones ab iisdem principiis deductas.

PROP. II.

Si Onus, Vecti applicatum, Fulcro & Vi motrici interjaceat: Quæ de Libra traduntur, etiam huc facile transferentur. Aut etiam, si Vis Fulcro & Oneri interjaceat.

Fig. 227. NEmpe; Si ad AB vectem, inter Vires in V, & Fulcrum in F, applicetur Onus in O: Vis sursum in V, secundum directionem suam procedens, elevat O contra directionem suam; (propter inflexilem AB:) Adeoque contra-nituntur vis & onus. Per 1. Cap. 3.





Fulcrum vero non utraque vi premitur (vi scilicet oneris, & vi motrice,) quia Vis motrix non est deorsum, nec Fulcro impeditur (ut in casu propositionis præcedentis;) sed sursum: Sed neque toto Onere premitur F, sed auxilio virium in V partim sublevatur. (Cui consonum occurrit ad prop. 18. Cap. 3.) Quantam autem oneris partem sustinet F, determinandum erit ex iis quæ post tradentur de Vecte duobus Fulcris sustentato.

Sed & hic in ea ratione valent, Vis sursum nitendo, & Onus renitendo, quæ ex rationibus Graduum, & Distantiarum puncti applicationis à Fulcro, componitur: Per 11 & 12. Cap. 3.

Atque si Vis (sic æstimata) præpolleat; submovebit Onus: Secus; non movebit. Et quidem si minus polleat, ne sustinebit quidem. Per 11. Cap. 1.

Adeoque, quo propius ad Fulcrum sit Onus, vel Vis remotior; eo minore Vi movetur majus Onus. Quippe sic Oneris Vis minuitur, Vis motrix augetur.

Quæque ad Prop. præcedentem, ex prop. 14. Cap. 3. notantur: etiam hic locum habent.

Fig. 228. Eadem fere omnia dicenda veniunt, si Vis V, Fulcro & Oneri intercedat. Hoc saltem interest, quod Fulcrum jam superne ponendum erit; & minus Onus, nonnisi majore Vi elevabitur: Sed neque tam Onere premitur Fulcrum, quam Virium parte.

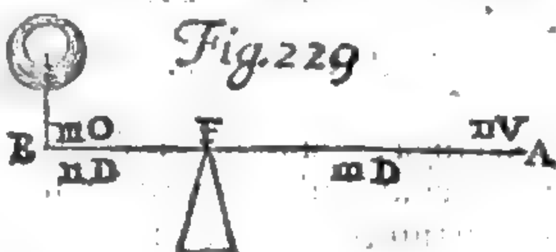
PROP.

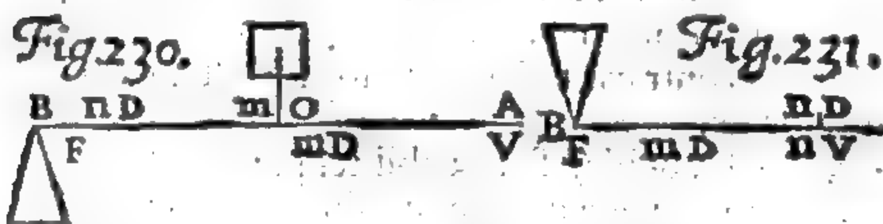
PROP. III.

Si (ad Vectem cum unico Fulcro applicatorum) ratio Vis motricis, ad Onus, major sit quam reciproca distantiarum (punctorum applicationis) à Fulcro; Vis Onus movebit: Secus; non movebit: Si minor; ne sustinebit quidem.

$$\frac{\begin{matrix} n & m \\ m & n \end{matrix}}{mn = nm} \qquad \frac{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix}}{6 = 6}$$

Verbi gratia. Si Vis Motrix ad Vim Oneris, sit ut 2 ad 3; seu n ad m; sitque distantia V F ad O F, ut 3 ad 2, seu ut m ad n: Æquipollebunt quidem Vires (propter $2 \times 3 = 3 \times 2$, seu $mn = nm$;) sunt utique (ut jam ostensum Fig. 229, 230, 231.





est, ad prop. 1 & 2.) illarum valores in ratione ex graduum & distantiarum rationibus composita. Adeoque, nondum movebit. Sed si Vis motrix vel tantillum augeatur, aut minuatur Onus: Vis præpollebit, adeoque movebit Onus. Sin minuatur Vis, vel Onus augeatur; Vis Onus ne sustinebit quidem, per 9, & 11. Cap. 1.

Demonstratio perinde valet, sive Onus ultra fulcrum intelligatur; ut in fig. 229. sive citra, ut in fig. 230. Aut etiam (ut in fig. 231.) si Vis utrique intercedat; nisi quod, hoc casu, Vis motrix semper major esse debeat quam Vis Oneris (propter minorem à Fulcro Distantiam) quo possit Vis Oneri æquipollere; sicut, ex adverso, ubi Onus citra Fulcrum est, (Vi motrici & Fulcro interjectum) Vis motrix minor, majori Vi ponderis, æquipollet; (propter minorem Oneris à Fulcro Distantiam:) Ubi autem Fulcrum intermedium est, potest utrumvis contingere.

PROP. IV.

Datum Pondus, data Vi, Vecte movere.

$$\frac{\begin{matrix} n & m \\ m & n \end{matrix}}{nm = mn} \qquad \frac{\begin{matrix} nV & mO \\ mD & nD \end{matrix}}{mnDV = mnDO} \qquad \frac{\begin{matrix} 2V & 3O \\ 3D & 2D \end{matrix}}{6DV = 6DO}$$

Intelligatur vis V, oneri O, æquipollere; sitque expositum Onus mO (quod utique sit ad O ut m ad 1;) & nV vis exposita; (puta quæ sit ad V, ut n ad 1;) sitque onus mO, vi nV movendum. Si Vectis A B (fig. 229.) ita dividatur in puncto F, (quod Fulcro incumbat,) ut sit A F ad F B, ut m ad n; Vis nV in A adhibita, Oneri mO applicato in B æquipollebit; per 3. hujus. (Propter rationem virium ad onus, n ad m, reciprocam rationis distantiarum m ad n; adeoque, quæ ex utrisque componitur, momenti ad impedimentum rationem æqualitatis, Fig. 229.

tatis, per 6. Cap. 1.) Si itaque, vel tantillum ad Fulcrum versus admoveatur Onus, (quo minuatur Impedimentum,) vel inde remotius applicetur Vis (quo Momentum augeatur,) vel denique Fulcrum tantillum promoveatur ad Onus (quo utrumque fiat,) Momentum Impedimento præpollebit, & Vis exposita (sic adhibita) expositum Onus movebit. Per 9 & 11. Cap. 1.

Fig. 230, 231. Idem fiet, si Vectis A B ita in O dividatur, ut sit A B ad O B ut m ad n. Quippe tum, posito Fulcro in B, æquipollebit vis $n V$ in A, ponderi m O in O; (propter Vis & Oneris à Fulcro distantias ipsis reciprocas;) Adeoque si vel Fulcrum Oneri, vel Onus Fulcro, tantillum admoveatur, vel remotius applicetur Vis; hæc Oneri præpollebit, adeoque movebit. Quippe tribus saltem hisce modis (ne plures nominem) augebitur ratio distantiarum A F ad O F.

Patet autem, in hac posteriori via, si Vis Oneris major sit quam Vis motrix; debere Onus Fulcro & Vi Motrici intercedere, ut in Fig. 230. Si Vis Motrix Vi Oneris major sit, potest Vis illa Fulcro & Oneri interponi, ut in Fig. 231. Verum ubi hoc contingit, Vecte non opus erit; quippe Vis Motrix, Oneri immediate applicata, movebit Onus.

PROP. V.

Si Vectis (Tignum, Palanga, seu Trabs oblonga,) situ Horizontali jacens, utroque sui extremo Fulcris sustineatur: Fulcra bina sustinentia, onus inter se partiuntur; idque in ea ratione quæ est reciproca distantiarum suarum à Vectis Centro gravitatis: Et quidem utrumvis eam totius portionem sustinet quæ ad totum eam habeat rationem, quam habet contrarii Fulcri distantia ad distantiam totam, seu Vectis longitudinem.

Adeoque, si Vectis, vel Trabs illa, sit æquabiliter gravis; & propterea Centrum gravitatis habeat in media longitudine; (aut etiam, si hoc propter aliam causam contingat;) Onus inter se æqualiter partiuntur.

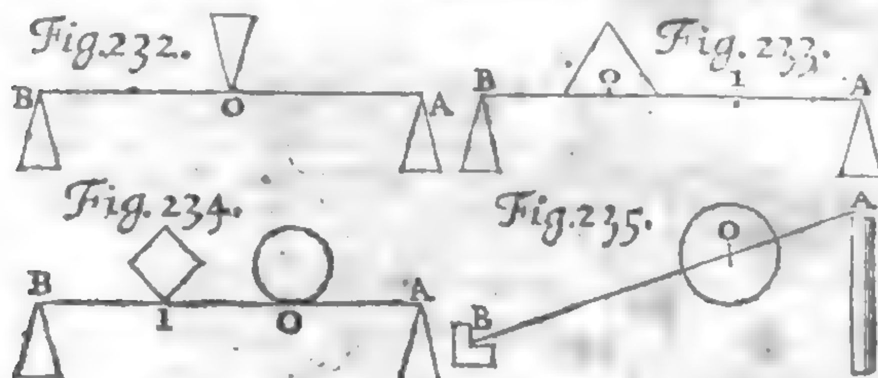
Si vero Centrum gravitatis in media longitudine non sit: Fulcrum illud magis premitur cui propius est Centrum gravitatis; atque in ea ratione quæ hac proportione determinatur.

Idemque valet, si Vecti ubivis applicetur Pondus quodvis. Nempe, si Pondus præcise Vectis medio applicetur; æqualiter ab utroque Fulcro sustinetur. Si non in ipso medio, in ea ratione premitur, ab incumbente Pondere, utrumvis Fulcrorum, quæ est reciproca distantiarum suarum à puncto applicationis. In ea vero ratione ad totum Pondus absolute consideratum, qua est contrarii Fulcri Distantia (à puncto applicationis ponderis) ad Fulcrorum ab invicem Distantiam, seu Vectis longitudinem.

Si autem in pluribus punctis, plura applicentur Pondera; de singulis seorsim simile fiet judicium; (nempe, quantam partem cujusque Ponderis, utrumvis ferat Fulcrum;) atque inde de omnibus simul sumptis. Vel etiam (quod eodem recidet) ibidem omnia applicata censeantur, ubi est commune omnium Centrum gravitatis.

Fig. 232. ESto, duobus Fulcris in A & B, Vectis A B sustentus; cujus Centrum gravitatis sit O punctum medium: Vel (quod eodem recidit, per prop. 16. Cap. 4.) Intelligatur A B Vectis tanquam linea recta nullius ponderis, quæ in suo puncto O, onusta intelligatur totius Vectis (Tigni seu Trabis) pondere, cujus Centrum gravitatis ibidem esse intelligatur: Vel denique (nam & hoc tantundem valet) Vectis puncto medio O, intelligatur Pondus quodlibet applicatum. Dico utrumvis Fulcrum semisse totius Ponderis onerari: adeoque Fulcra duo totum onus æqualiter inter se partire.

Manifestum utique est, Onus fulcro A incumbens, tantum esse, quanta vis est quæ ibidem foret necessaria huic sustinendo oneri, si (manente fulcro B) fulcrum A abesset. (Quippe tantum Onus est, quanta Vis est quæ sustinendo sufficit: per prop. 11. Cap. 1. vel prop. 18. Cap. 2.) Hoc est; (propter distantiam A B, duplam distantiæ O B,) quæ dimidio Oneri æquipollet, (per prop. 3. hujus.) Idemque similiter ostendetur de Fulcro B. Adeoque totum onus æqualiter inter se partiuntur duo Fulcra A, B. Quod ostendendum erat.



Si veró Punctum O (quod sit vel totius Vectis seu Trabis Tignive aut Palangæ Centrum gravitatis, vel punctum applicationis impositi Ponderis) non sit in ipso Vectis puncto medio: Utcunque tanto Onere premitur fulcrum A, quanta Vis est quæ huic ibidem sustinendo par esset, si abesset A fulcrum: Hoc est, (per prop. 3. hujus,) quod sit, ad totum Pondus, in ea ratione quæ est reciproca distantiarum A B, O B; hoc est, ut O B ad A B. Et similiter ostendetur eo onere premi fulcrum B, quod sit ad Pondus totum, in ratione reciproca distantiarum B A, O A; hoc est, ut O A ad eandem A B. Et propterea (ob eundem utrobique consequentem) onera fulcrorum A, B, sunt ad invicem, ut O B ad O A; hoc est, in reciproca ratione suarum (ab applicationis puncto) distantiarum. Quæ itidem erant demonstranda. Fig. 233.

Sin plura applicentur Pondera, puta alterum in O, alterum in I: Similiter ostendetur, Fulcrum A, eam partem ponderis O sustinere, quæ sit ad totum ut O B ad A B; eamque partem ponderis I, quæ ad totum sit ut I B ad A B: Et Fulcrum B, eam sustinere ponderis O partem, quæ sit ad totum, ut O A ad B A; eamque partem ponderis I, quæ sit ad totum ut I A ad B A. Fig. 234.

Vel etiam, si per prop. 27. Cap. 4. quæratur commune simul utriusque Centrum gravitatis; atque ibidem utraque censeantur tanquam unum Pondus applicari: Hujus eam partem sustinebit utrumvis fulcrum, quam indicant reciprocæ distantiæ; (per modo demonstrata.) Tantundem utique gravant utcunque applicata pondera atque si ibidem essent ubi est commune omnium Centrum gravitatis: per prop. 26. & 27. Cap. 4.

SCHOLIUM.

Dico autem diserte, *In situ Horizontali jacent.* Quamquam enim de hac conditione prorsus tacere soleant Mechanicorum Scriptores (quantum scio, Omnes:) rationem onerum ad A & B, eandem assignent in Obliquo Vectis situ, quam assignant in situ Horizontali: Est tamen onerum, alia plane ad invicem ratio, in hoc, atque in illo, situ (Ut ex dicendis ad prop. 8. patebit.) Quod quidem eousque verum est, ut, prout alterutrum Vectis extremum A altius elevatur, ita continuo minuatur Onus; donec tandem, Vecte ad situm perpendicularem redacto, Fulcrum A nihil prorsus oneris sustineat, sed B totum. Quod in erigenda prælonga Pertica, vel Scala, facile quis deprehendat. Fig. 235.

PROP. VI.

Hinc sequitur; Ita posse ad eundem Vectem (duobus Fulcris sustinendum, vel duobus Bajulis ferendum,) applicari Pondus; ut unius Fulcri (seu Bajuli) onus, ad onus reliqui, eam habeat rationem quam quisque velit.

Fig. 233. PUta, si Gigas & Infans (seu Fulcra firmitudinum utcunque inæqualium) adhibeantur (ille quidem in B, hic in A,) eidem portando oneri, imponendo Vecti A B: quod ita moderandum sit ut ferentium viribus justa proportione consulatur; Id fiet, si ita dividatur, in O, vectis A B, ut sit distantia B O ad O A, ut sunt vires A ad vires B. Quippe, tum erunt Onera Viribus proportionalia: per præced. Sed ipsius Vectis hic nulla habetur ratio.

PROP. VII.

Inde etiam Calculo colligetur; Quanta cuique Vectis puncto Firmitas requiratur, ne rumpatur.

Fig. 233. EXempli gratia. Vectis A B, duo segmenta B O, O A, firmitate conjunctionis suæ in communi O puncto, impediuntur ne rupto Vecte ruant. Tanta igitur conjunctionis firmitudo ibidem requiritur, quanta si disjuncta essent vis fulcri foret necessaria utriusque segmenti extremo sustinendo. Si autem, disjunctione in O facta, supposito Fulcro sustinendum esset utriusque segmenti extremum; onerandum foret (per prop. 5. hujus) fulcrum illud, tum semisse ponderis B O (propter Vectem B O, duobus fulcris in B & O sustentum;) tum semisse ponderis O A, (ob similem causam:) Hoc est, semisse totius A B. Tanta itaque firmitudinis Vis in O requiritur, ne Vectis suo pondere rumpatur.

Intelligatur deinde, eidem O puncto (præter ipsum Vectis seu Trabis pondus) imponi vel suspendi pondus aliud quantumvis. Manifestum est onerandum fore subjectum fulcrum illud, tum semisse totius A B, (ob causam jam dictam,) tum toto onere Ponderis ibidem incumbentis. Tanta itaque Vectis firmitudo ibidem requiritur, quæ simul utrique (sui semissi, & toti ponderi imposito) æquipolleat.

Intelligatur demum proponi punctum quodvis aliud expendendum (extra punctum applicationis appensi ponderis) ut I. Manifestum est, si disjunctione ibidem facta supponendum esset, in I Fulcrum, onerandum fore fulcrum illud (ob causam modo dictam) tum semisse ponderis B I, tum semisse ponderis I A, (hoc est, semisse totius B A,) tum etiam (per prop. 5. hujus) ea parte oneris O (inter B & I suspensi) quæ sit ad totum ut B O ad B I; (atque similiter, si plura adhuc pondera sive inter B & I, sive inter I & A, imponi aut suspendi intelligantur, de singulis fiet judicium; adeoque, additione facta, de omnibus:) tanta itaque firmitas in I requiritur quæ oneribus illis æquipolleat. Atque sic alibi, prout res tulerit.

SCHOLIUM.

ATque hinc, in re Architectonica, facienda erit æstimatio, quam trabis cujusque partem oporteat fortiorem facere, prout imponendi oneris & disponendi ratio postulaverit.

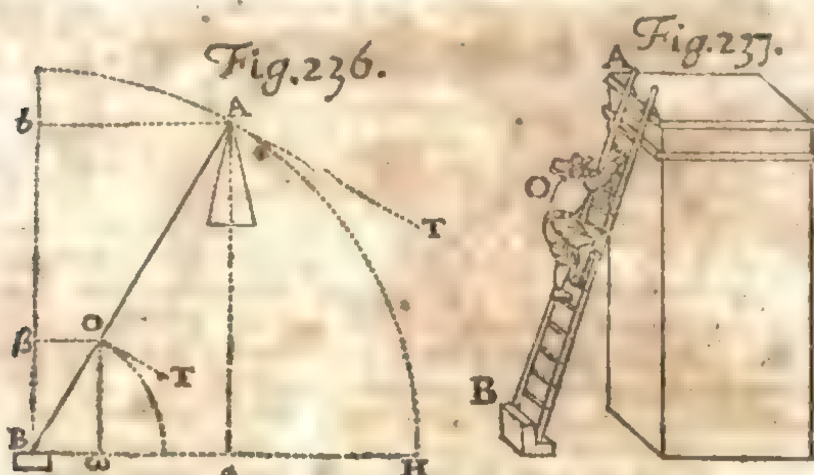
PROP.

PROP. VIII.

Si intelligatur Vectis obliquo situ positus; Fulcrum elatius, eam totius Oneris impositi partem sustinebit, quæ sit ad totum, in ea ratione quæ componitur ex ratione Distantiæ Oppositi Fulcri ab applicationis puncto, ad totam Fulcrorum ab invicem Distantiam; &, ratione quam habet ad Radium Sinus rectus istius anguli quem cum recta ad horizontem perpendiculari facit Vectis; seu Co-sinus inclinationis Vectis ad horizontem: Reliquumque oneris sustinebit inferius fulcrum.

Nempe (in fig. 236.) Oneris O eam partem sustinet Fulcrum A, quæ sit ad totum ut B ω ad B H; B vero, quæ est ω H ad B H. Adeoque Onus Fulcri A, ad Onus Fulcri B, ut B ω ad ω H.

INtelligatur enim Vectis A B = *R*, situ ad Horizontem Obliquo positus, fulcris A, B, sustentus; cui applicetur, in O, pondus quodvis; Vectem dirimens in duo segmenta, A O = *a*, & O B = *b*. Manifestum est (per demonstrata ad prop. 5.) Onus fulcri elatioris A, tantum esse, quanta Vis esset eidem ibidem sustinendo necessaria, si (manente fulcro B) abesset A fulcrum. Hoc est; propter rectæ A B divisionem in O; in ea ratione ad totum pondus, quæ est distantiarum B O ad B A; seu *b* ad *R*: per prop. 2. hujus, vel prop. 7. Cap. 2. & prop. 11. Cap. 3. Sed & porro; propter Obliquum situm ad Horizontem, adeoque Obliquum Descensum si (manente B) moveatur A, (puta in arcu A H, cujus Tangens A T;) in ea ratione quam ad Radium habet Sinus rectus anguli quem facit Vectis cum perpendiculari, vel Co-sinus anguli Inclinationis ad Horizontem: per prop. 13. Cap. 3. vel prop. 21. Cap. 2. Hoc est A b ad B A; seu O β vel B ω ad B O; puta Fig. 236.



ut *s* ad *R*. Adeoque; propter simul utramque causam; in ea ratione quæ ex utrisque componitur; *s* ad *R*, & *b* ad *R*; hoc est, ut *s b* ad R^2: Seu ex β O ad B O, & B O ad B A; hoc est, ut β O ad B A, seu B ω ad B H.

Adeoque Oneris reliquum quod sustinet B fulcrum, est ad totum, ut ω H ad B H. Et propterea Onus fulcri A, ad Onus fulcri B, ut B ω ad ω H. Quæ erant demonstranda.

Hic nota; rectam B α (Co-sinum anguli inclinationis A B H) in eadem ratione secari in ω, qua secatur B A in O.

SCHOLIUM.

CAusa diversæ rationis in Obliquo Vectis situ, ab ea quæ est in situ Horizontali; hinc oritur, quod, manente B fulcro, fulcrum A impedit tantummodo Rotationem puncti O Circa B centrum, quæ in hoc situ æquipollet Obliquo Fig. 236.

 Descensui

Descensui secundum tangentem O T, (per prop. 15. Cap. 2.) non descensui recto in recta O ω. Fulcrum vero B, (ut in fig. 235.) impedit, non tantum Rotationem ipsius O circa centrum A; sed etiam ejusdem Descensum Obliquum secundum rectam A O B, cui fulcrum A non obstat. Nam, nisi obstaret B fulcrum, posset, manente fulcro A, non modo punctum O circa A rotari, sed etiam totus A B Vectis deorsum labi; adeoque punctum O ferri in motu composito ex motu Rotationis & motu Vectis Labentis, cui utrique obstat Fulcrum B.

Fig. 235.

Si vero intelligatur Vectis A B, non tantum fulcro A inniti, (quo impediatur rotatio,) sed & (ut fig 237.) cum illo sic ligari, aut unco aliasve sic conjungi, ut, etiamsi B abesset, non posset alias, quam circa A rotando, moveri punctum O: alia prodibit ratio. Quippe jam fulcra A, B, obliquum lapsum secundum A B rectam æqualiter impediunt: rotationem vero impediunt in oppositarum distantiarum ratione.

Fig. 237.

Fig. 238. Sed & porro; si intelligatur, non modo A fulcrum, sed & fulcrum B, sic esse comparata, ut non impediant obliquum illum secundum rectam A B Descensum (puta si intelligatur A B Vectis extremo tantum fulcri B angulo incumbere:) labetur Vectis simul cum annexo pondere, descensu illo obliquo. Rotationem vero impedient in ea ratione Fulcra quæ est Oppositarum Distantiarum; (quæ continue variabitur prout O propius ad B feretur.) Totumque quod inter se partiuntur Onus, non est totius Ponderis impositi, sed ea pars totius quæ determinanda erit ex diminuto descensu in obliqua recta O B (fig. 235.) præ eo qui esset in O ω perpendiculari (fig. 236.) juxta leges prop. 17. & 21. Cap. 2. traditas. Puta, quæ sit ad totum, ut (in fig. 42.) P R ad P F, propter obliquum descensum in F B recta: hoc est (in fig. 236.) ut B O — O ω ad B O.

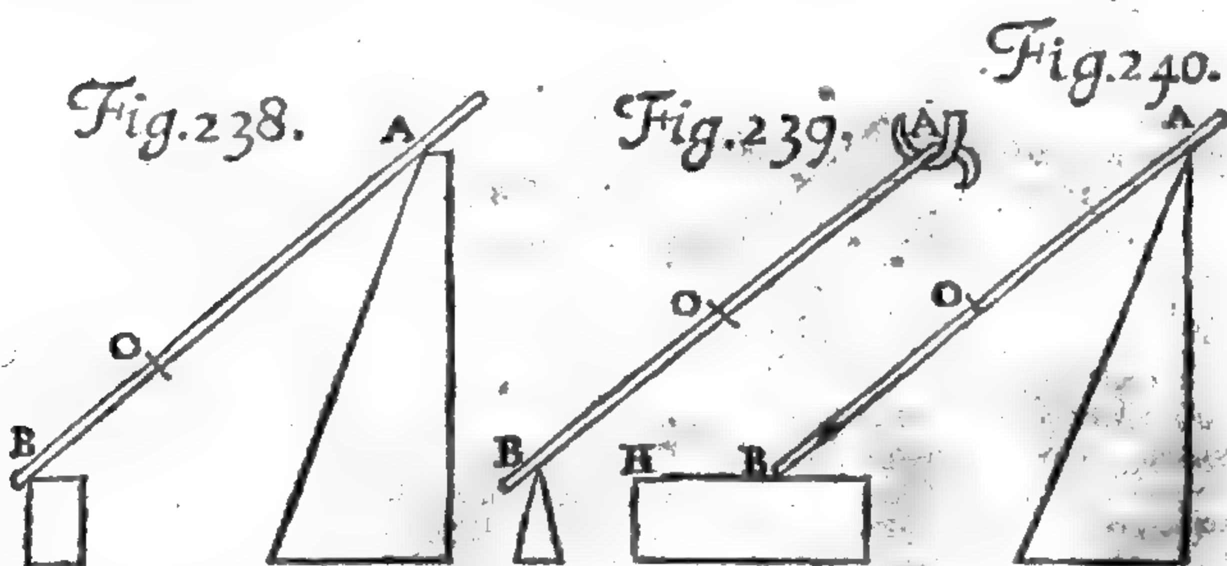


Fig. 239. Si vero, (fulcro B id permittente,) intelligatur Vectis A B, fulcro A sic suspendi (aliasve cum illo sic connecti) ut hoc solo impediatur Vectis A B, ne secundum A O B rectam descendat; (fulcro B nonnisi rotationem circa A impediente:) erit onus fulcri B, ad onus totius ponderis impositi in ea ratione, quæ ex *s* ad *R*, & *a* ad *R*, componitur, hoc est, ut *s a* ad R^2, (quod similiter de B probabitur, atque supra probatum erat, in casu propositionis, rationem oneris A, esse ad totum, ut *s b* ad R^2;) reliquumque oneris sustinebit A.

Fig. 240. Denique; si intelligatur Fulcri B facies superior horizontalis, sic ab omni asperitate lævigata, ut quamvis non permittat Vecti descensum per A O B rectam, permittat saltem ut Vectis extremum B (verbi gratia) in horizontali recta HB labatur, (neque huic obstet aliqua connexio cum A fulcro,) unde aliqualis saltem descensus puncto O permittatur: minus propterea premetur fulcrum B, propter descensum non penitus impeditum. Idem vero est quod prius fulcri A Onus; sed quod continuo variabitur, partim Auctum (propter situm Vectis minus obliquum) partim Diminutum (propter majorem rationem distantiæ A O ad O B) prout Vectis extremum B remotius in H B recta retro lapsum fuerit; dummodo (quod hic intelligendum erit) Vectis pars O A intelligatur ultra A quantum opus fuerit prolongata; secus enim, retro labente extremo B, alterum A fulcrum suum deseret, nec eo sustinebitur.

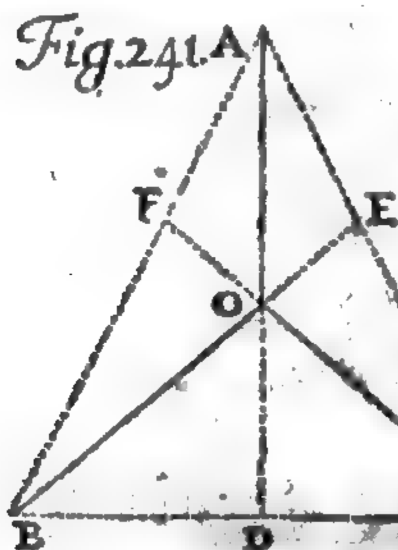
Et

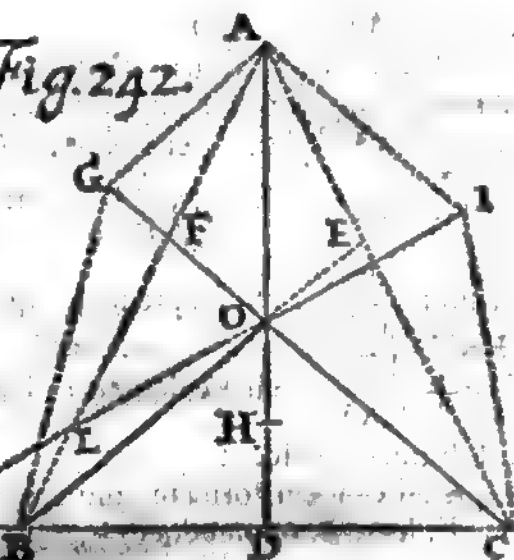
Et quidem similiter, mutatis mutandis, in aliis casibus judicandum erit, quos omnes sigillatim prosequi nimis molestum foret.

PROP. IX.

Si pluribus Fulcris (Vectium invicem commissarum ope) sustineatur impositum Pondus; Onus cujusque, prout singulorum situs postulaverit, calculo æstimabitur, cui ferendo par esse debet ne fatiscat.

EXempli gratia: Si tribus Vectibus seu Tignis, A O, B O, C O, in communi O puncto firmiter conjunctis, impositum pondus O, tribus fulcris in A, B, C, sustineatur. Manifestum est, si A B C sit triangulum æquilaterum, sitque O in Trianguli medio, æqualiter à singulis angulis remoto; Onus hoc inter tria Fulcra (ob similem omnium situm) æqualiter distribui; adeoque quodlibet Fulcrum trientem totius Oneris sustinere. Fig. 241.





Sin secus fuerit; singulorum tamen Onus sic habebitur. Intelligatur (verbi gratia) Vectis A O continuari, donec in D occurrat rectæ B C. Cumque fulcri A id unicum munus sit, ut impediatur Oneris O rotatio circa B C rectam (ut ex prop. 1. Cap. 4. liquet:) perinde est (quantum ad fulcrum A) sive id fiat ope continuati Vectis A O D, in ejusdem B C rectæ puncto D fulfulti, sive fiat ope duorum B O, C O: Utrovis enim modo eadem præcise Rotatio impeditur. Si vero id fiat (sublatis fulcris B, C,) ope continuati Vectis A O D (supposito Fulcro ipsi D puncto;) erit Oneris A, ea pars totius quæ sit ad totum ut O D ad A D; per prop. 5. hujus. Tantundem itaque erit, si, sublato D, fulcris B, C, idem obtineatur. Atque similiter ostendetur, (continuatis BO ad E in recta AC, & CO ad F in recta AB,) onus fulcri B, eam esse totius O partem, quæ sit ad totum in ratione O E ad B E; onusque fulcri C, ad totum, ut O F ad C F: Cujuscunque formæ fuerit Triangulum A B C.

Et simili modo procedendum erit, prout res postulaverit, quotcunque Fulcris quomodocunque sitis, sustineri intelligatur Pondus O. Quippe id semper prospiciendum erit, Quam Rotationem impediat quodlibet Fulcrum; &, quidem, Num Unum aliquod an Plura id præstent. Quippe si Plura sint; utut unum eorum non satis valeat Oneri sustinendo, tamen si simul omnia (suis cujusque Viribus rite computatis) ferendo Oneri saltem æquipolleant; Onus sustinebitur.

Puta; si non tantum in A, B, C, (ut modo) sed & in G, H, I, intelligantur Fulcra; (cæteraque constructa ut in fig. 242.) Quorum respectivæ Vires sunto *a, b, c, g, h, i*. Fig. 242.

Stantibus Fulcris A, B, vel A, G, B; non aliter Descendendo movebitur Pondus O, quam circa A B rectam rotando, (ut modo ostensum est ex prop. 1. Cap. 4) Huic autem obstant Tria Fulcra C, H, I. Quorum quidem C, Pondus in O sustinebit, quod ad Vires suas sit ut C F ad F O; puta $\frac{CF}{FO}c$: per 2 vel 3 hujus:

jus: (tantundem utique est, acsi continuata Vectis COF, fulcrum haberet F, in ea recta AB circa quam facienda esset Rotatio.) Similiter Fulcrum H, sustinebit Pondus in O, quod sit ad Vires suas, ut HA ad AO; puta $\frac{HA}{AO}b$. Et Fulcrum I, similiter Pondus in O sustinebit quod sit ad Vires suas ut IL ad LO, puta $\frac{IL}{LO}i$. Si itaque totum Pondus O (simpliciter consideratum) majus non sit quam $\frac{CF}{FO}c+\frac{HA}{AO}b+\frac{IL}{LO}i$; valebunt hæc tria Fulcra C, H, I, onus in O sustinere ne circa AB rotetur. Sin majus fuerit Pondus O, quam ut dictum est; fatiscent Fulcra, C, H, I, ponderi sustinendo imparia.

Similiter; Stantibus Fulcris A, C, seu A, I, C; non descendet O, nisi circa AC rectam rotando. Huic autem obstant Tria Fulcra B, G, H. Quorum, Fulcrum B, sustinebit $\frac{BE}{EO}b$: Fulcrum G, $\frac{GC}{CO}g$: Fulcrum H, $\frac{HA}{AO}b$; (ut ex modo dictis, & Schematis inspectu patet.) Si itaque majus non sit Pondus O, quam $\frac{BE}{EO}b+\frac{GC}{CO}g+\frac{HA}{AO}b$; satis valebunt B, G, H, Fulcra, Oneri sustinendo ne circa AC rotetur: Si secus; fatiscent.

Item; Stantibus Fulcris B, C; non descendendo movebitur O, nisi circa BC rectam rotando. Huic vero obstant Quatuor Fulcra, A, G, H, I. Quorum A, sustinebit (per ante dicta) $\frac{AD}{DO}a$: Fulcrum G, $\frac{GC}{CO}g$: Fulcrum H, $\frac{HD}{DO}b$: Fulcrum I, $\frac{IK}{KO}i$. Si itaque majus non sit Pondus O, quam $\frac{AD}{DO}a+\frac{GC}{CO}g+\frac{HD}{DO}b+\frac{IK}{KO}i$; satis valebunt Fulcra A, G, H, I, ne circa BC rotetur O: si secus; sub onere fatiscent.

Atque ad eandem formam, mutatis mutandis, instituetur Calculus, quotcunque fuerint Fulcra, & quomodocunque sita.

SCHOLIUM.

NOtandum hic, (quo rectius intelligantur omnia,) Onus seu Pondus quod intelligitur ad punctum O applicari; & Vectibus AO, BO, &c. invicem compactis sustineri; posse Tabulatum esse (gravatum vel non gravatum incumbente aut dependente pondere quovis alio) vel aliud quodvis Grave cohærens; cujus saltem Centrum gravitatis vel sit in ipso O puncto, vel huic directe subsit aut immineat: per prop. 18. Cap. 2. & prop. 16. Cap. 4.

Item Vectes, AO, BO, &c. non semper alios esse ab ipso onere; sed vel ipsius Tabulati seu Gravis rectas, vel imaginarias saltem rectas à suis respective Fulcris ad O pertingentes, & prout opus fuerit continuatas, secundum quas Fulcrorum A, B, &c. distantias tum ab O onere, tum ab oppositis respective Fulcris imaginariis in Axe Rotationis, æstimemus. Neque aliud innuunt, quam quod Gravis partes ita sint inter se sat firmiter cohærentes ut puncti O, ab ipsis A, B, C, &c. distantiæ, eædem maneant: sive id fiat totidem rectis inde in O coeuntibus ibique connexis, sive per curvos circuitus, aliasve, id fiat.

Fulcra vero, quæ punctis A, B, C, &c. supposita intelligimus; considerantur solummodo ut Fulcra, non item ut Retinacula: impedientia scilicet ne quod illis imponitur ibidem Descendat, non autem ne inde Assurgat. Adeoque, utut Fulcrum H (verbi gratia) intelligatur impeditivum Rotationis circa BC, (quoniam non deprimetur O, nisi depresso H;) non tamen intelligitur Fulcrum G, impeditivum rotationis circa AB, quoniam ut hæc fiat rotatio (descendente O) non fiet Fulcri G depressio, sed sursum assurget quod illi incumbit; cui Fulcrum non obstat.

Si vero, quod huic impositum est, non tantum subjecto fulcro incumbat, sed cum eo ita connexum sit ut nonnisi rupta copula possit assurgere; (aliove quovis Retinaculo, aut Impedimento, vel onere superimposito idem eveniat:) Hoc quicquid est Retinaculi, Impeditivum erit Rotationis circa AB, fulcrisque C, H, I, suppetias feret: (quippe, stante recta AB, non poterit O descendere nisi ascendente

Gra-

Gravis puncto G; propter rectam OG quam supponimus inflexilem, seu totum Grave ita compactum ut non luxetur; per Schol. prop. 1. Cap. 4.) Cujus quidem Retinaculi vires si ponantur r; sustinebunt illæ, pondus in O, quod sit ad r, ut GF ad FO, (per prop. 1. vel 3. hujus,) puta $\frac{GF}{FO}r$. Adeoque jam, non modo, si O non sit majus quam $\frac{CF}{FO}c + \frac{HA}{AO}b + \frac{IL}{LO}i$, (ut prius;) sed si majus non sit quam $\frac{CF}{FO}c + \frac{HA}{AO}b + \frac{IL}{LO}i + \frac{GF}{FO}r$; Satis valebunt Fulcra C, H, I, una cum Retinaculo in G, impediendæ rotationi Oneris O circa AB. Simileque erit in reliquis judicium.

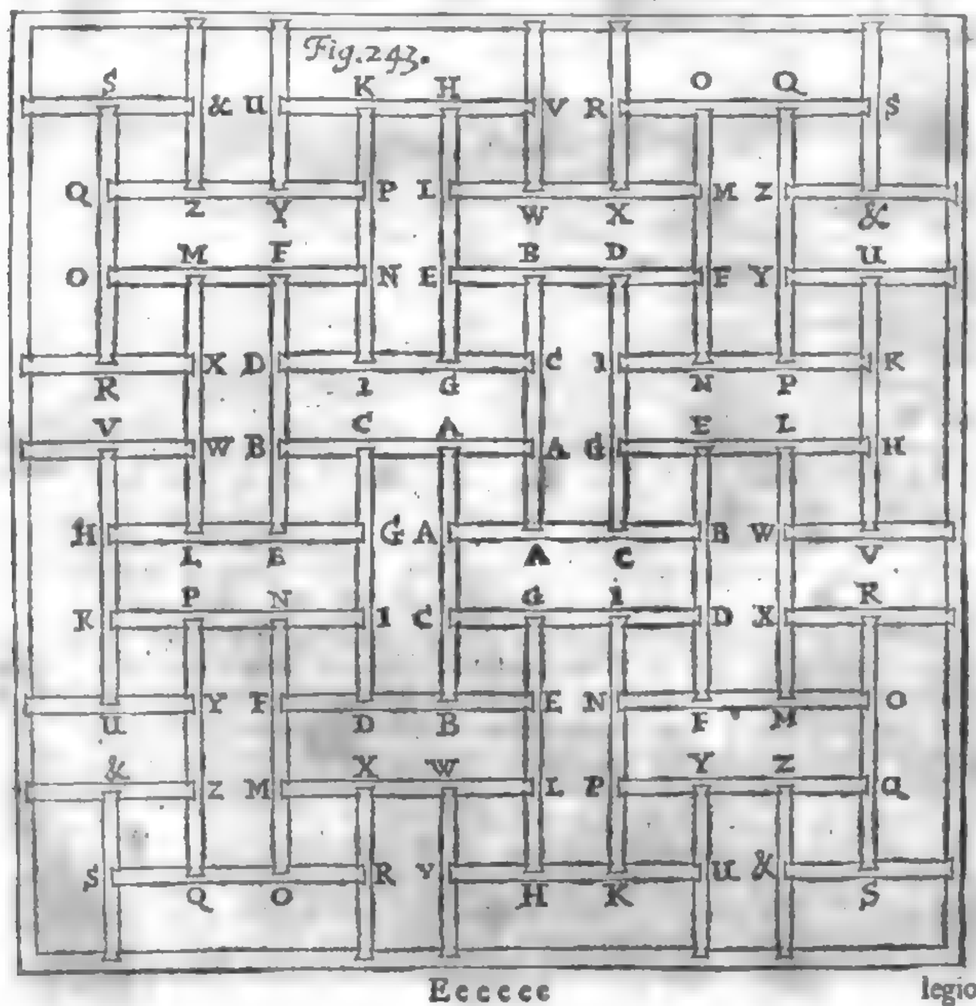
Rotationes autem nonnisi Tres in Calculo consideravimus; nempe circa AB, AC, BC: non quod plures esse non possint, (ut circa AG, GB, &c.) sed quoniam instituto sufficiant hæ tres; in quibus considerandis Fulcrorum omnium vires sub calculo veniunt. Quippe si saltem tria puncta, (ut A, B, C,) intra quæ sit ipsum Grave ejusve Centrum gravitatis O, satis sustineantur, (sive suis singula fulcris, ut in fig. 241. sive cum succenturiatorum subsidiis, ut in fig. 242.) totum sustinebitur Grave: per prop. 1. Cap. 4.

PROP. X.

Contignationem planam ex Tignis multo Brevioribus quam sit Areæ Latitudo invicem conjunctis construere: Et computo æstimare, Quantum cuique Juncturæ Onus incumbat.

Contignationis seu Tabulati Constructio.

Potest quidem hoc variis modis fieri. Eam vero formam præ cæteris seligendam putavi, quam jam olim Anno 1644. *Cantabrigiæ* primum delineabam, in Col- Fig. 243.



legio *Reginensi*, in quo tum temporis *Socius* eram: & quam non ita multo post Tigillis ligneis construendam curabam, (quo manifestius indicarem Theoriam posse in Praxin reduci:) eamque in Vesperiis Comitiorum *Oxoniæ* Anno 1652. (postquam ad munus illud quod etiamnum sustineo vocatus eram) solenni Prælectione exponebam; ejusque Calculum Vesperiis Comitiorum Anni sequentis, 1653. similiter explicabam: Quamque ex eo tempore tum Nostratium tum Exterorum non pauci satis approbarunt, aliqui etiam imitati sunt: Quam & Serenissimus Rex noster, *Carolus* Secundus, post auspicatum suum in *Angliam* reditum, oblatam sibi Octobr. 18. 1660. inter Κειμήλια sua dignatus est reponere.

Specimen exhibet Areæ quadratæ, cujus Latitudo est fere quadrupla longitudinis Tignorum longissimorum; quæ ita sunt invicem intertexta, ut se mutuo sustineant. Et quidem, quo supra planitiem non assurgant, qua parte tignum quodvis aliud sibi superne impositum sustinet (quod sui partibus intermediis fit) superne (ad mediam quasi partem) excavatur: qua parte vero alii impositum sustinetur, (quod in sui extremis fit) tantundem quasi excavatur inferne: quo fit, ut, sibi mutuo impacta, aream planam faciant. Si tamen metuendum videatur, ne, propter ligni naturam flexilem, partes mediæ, onere pressæ, nonnihil subsidant: huic incommodo cavebitur, si excavationes non præcise ad mediam tigni crassitiem pertingant, sed paulo citra medium desinant. Quippe, hoc pacto, assurget paululum in singulis juncturis contignatio, quo compensetur illa exigua depressio quæ ex curvatura oriatur.

Fig. 244, 245. Faciem lateralem Tigni Longioris, exhibet fig. 244. Brevioris, fig. 245. Facies superna in ipsa fig. 243. satis apparet.

Fig. 243. Quo autem ordine disponantur; ex Schematis intuitu (fig. 243.) facilius intelligatur, quam possit multis verbis explicari.

Videre enim est, si ab Extremis ordiri libeat, totam Aream *Muro* circumseptam; vel etiam (siquis id malit) Muri loco, totidem quot opus erit *Columnis*, quibus imponantur Trabium sive Tignorum exteriora Capita. Quorum capita altera, introrsum spectantia, Tignis aliis imposita sustinentur; atque horum porro, ab aliis; atque hæc ab aliis; & sic deinceps donec ad oppositos muros perveniatur.

Verbi gratia, Tigni S &, extremum alterum muro sustinetur, alterum tigno & Z: Hujus alterum extremum muro itidem sustinetur, reliquum tigno Q P. Sed & tigni U Y, extremum alterum muro sustinetur; reliquum eodem Q P tigno. Hujus vero Q P, sed & tigni ON, extrema altera tigno S R, altera tigno K I sustinentur. Atque horum item extrema (uti videre est) tignis alteris superimposita sustinentur; horumque alteris; & sic porro, prout ex inspecto Schemate luculentius patet quam ut multis verbis explicatu opus sit.

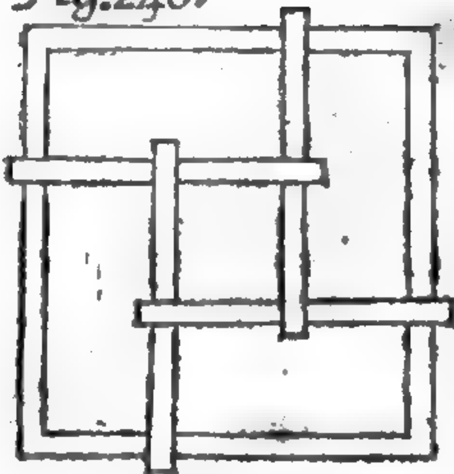
Similiter; si à medio libeat ordiri, quodlibet Tignorum A B, ut & tignorum C D, sustinentur alteris extremis in altero A B, alteris in tigno E F: atque hujus item, ut & tigni L M, extrema altera tigno G H, altera tigno N O: atque horum, aliis; & sic porro usquedum ad muros perveniatur; ut ex Schemate liquet.

Notandum interim, eadem methodo, aream istiusmodi construi posse vel ex paucioribus, vel etiam ex pluribus tignis; sed & in alia forma, (puta oblonga, non minus quam quadrata;) prout res postulaverit.

Verbi gratia; poterit ibidem continuus Murus collocari, ubi jam habentur Tigna SR, VU, & S; aut ubi Tigna & Z, M L, P Q; quo area reddatur minus lata, ut paucioribus tignis à muro in murum perveniatur: idque eousque ut

Fig. 246, 247. non nisi *Quaternis* tignis opus sit; ut in fig. 246. Vel etiam (quæ est forma omnium simplicissima) *Ternis* tignis; ut in fig. 247.

Fig. 243. Verum etiam, si id opus erit, poterunt tigna X R, W V, (cæteraque quæ reliquis breviora sunt, atque hic in muro terminantur,) ad parem cum reliquis longitudinem protrahi, tignaque secunda (ipsis S R, V U, parallela, & extra hæc posita) sustinere; eorumque sic protractorum extrema, vel muris (extra promotis)



promotis) ibidem transeuntibus sustineri, vel etiam (ampliata adhuc area) tignis aliis, (ipsis ML, PQ, parallelis;) atque sic porro prout opus videbitur.

Hoc autem ne in infinitum protrahi possit, impediunt, non tam rationes Mathematicæ, (quæ in contrarium non eunt,) quam Materiæ Physicæ conditio. Quippe in protracta area, aucta Tignorum multitudine, augetur Onus; donec eo tandem perveniatur, ut majus evadat, quam ut, quæ sustinendo paria sint, Tigna conquiri possint, quæque sub tanto onere non fatiscant & rumpantur.

Quousque autem tuto liceat hac ratione procedere; ex calculo facienda est æstimatio. Quippe si constet tum quanto oneri ferendo sufficiant Tigna quæ adhibenda veniant; (quod periti Architecti, experimento docti, docebunt:) tum quantum oneris, prout situs ratio postulat, cuique Tigno ferendum imponatur; (quod calculus indicabit:) hinc optime fiet judicium, quid tuto fieri possit. Qui quidem calculus, in tignis numero paucioribus, facilius instituetur; operosius autem in pluribus.

Quo autem qua methodo fieri possit ostendam; expositæ contignationis juncturas singulas calculo subjeci; perplexo quidem, propter tignorum multitudinem; sed qui in paucioribus tignis multo citius ad exitum pervenisset.

Calculus, expositæ Contignationi accommodatus.

Quo calculus (Synopsi sequente tradendus) rectius intelligatur; notandum est (quod oculi judicium satis indicabit,) Tignorum alia aliis longiora; atque ita quidem ut longiora sint breviorum quasi sesquialtera. Et propterea, cum Tigni cujusque ex longioribus pondus designemus symbolo T; cujusque ex brevioribus symbolum erit $\frac{2}{3}T$. Fig. 243.

Onus autem cuique Tignorum juncturæ incumbens, ea litera indicatur quam sibi in Schemate ascriptam habet ea junctura.

Notandum porro erit; cum manifestum sit, (Schema vel mediocriter consideranti,) quaterna semper puncta esse, quæ (propter similem situm respectu totius contignationis) æqualiter onerata censenda sint: ea semper (ne, præter necessitatem, symbolorum numerus cresceret, & calculus proinde redderetur multo perplexior,) eisdem symbolis designamus. Unde habeantur quatuor A, (similiter sita, atque æqualiter onerata,) atque totidem B, & sic de reliquis.

Cum itaque habetur, verbi gratia, (ad Num. 2. seu Æquationem secundam,) $B = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}C + \frac{1}{3}A$; tantundem est atque si diceretur, subjecti Tigni AB, punctum B, (præter eam firmitatem quæ ibidem requiritur ne suo pondere rumpatur tignum, quam hæc æquatio non involvit,) tantum onus impositum sustinere, quantum est tum $\frac{1}{2}T$ (semissis ponderis incumbentis tigni longioris AB,) tum $\frac{2}{3}C$ (bessis oneris eidem AB tigno impositi in C puncto; utpote quod in C, A, punctis trifariam sectum intelligitur;) tum $\frac{1}{3}A$, (trientis oneris eidem AB tigno, in A, impositi.) Item ubi habetur (ad num. 21.) $W = \frac{1}{3}T + \frac{1}{2}V$: innuit hoc, Tigni, LM, puncto W, onus impositum tantum esse, quantum est tum $\frac{1}{3}T$ (semissis incumbentis tigni brevioris, qui idem est atque tigni longioris triens,) tum

 $\frac{1}{2}V$

$\frac{1}{2}V$ (semissis oneris quod incumbentis tigni puncto medio V super-imponitur.) Quæ omnia singulatim demonstrantur ex prop. 5. vel 7. hujus Capitis. Quod similiter obtinet in Æquationibus primoribus Viginti-quinque.

Æquatio 26. & quæ sequuntur; ex præcedentibus derivantur, (quas per numeros æquationibus illis adscriptos citavimus, quo dilucidior esset totius processus ratio.) Quæ inserviunt partim ad abbreviandas fractiones, (quoties tum numeratores tum denominatores possunt communi aliquo divisore dividi,) partim vero (& quidem potissimum) ad reducendas & exponendas æquationes præcedentes (substituto symboli alicujus valore, aliis symbolis explicato,) quo, dispunctis subinde aliquot symbolis, symbolorum numerus residuorum sensim minuatur, donec tandem unum aliquod symbolorum à principio ignotorum, per notam quantitatem T (pondus unius tigni longioris, simpliciter considerati,) exponatur; ejusque demum ope (repetendo præcedentium aliquot æquationum vestigia) reliquorum etiam symbolorum (onerum primitus ignotorum) valores innotescant.

Verbi gratia; cum habeatur (num 1.) $A = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}C$; manifestum est (propter A in æquationis utraque parte repertum) sublato utrinque $\frac{2}{3}A$, superesse $\frac{1}{3}A = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}C$; hoc est (utrinque per 3 multiplicando) $A = \frac{3}{2}T + C$; quam itaque Æquationem (num. 26.) habemus, tanquam derivatam ex Æquatione prima, (num. 1.) quam itaque citamus.

Similiter; cum sit (num. 2.) $B = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}C + \frac{1}{3}A$; sitque (per num. 26.) $A = \frac{3}{2}T + C$; adeoque $\frac{1}{3}A = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}C$; erit $B\ (= \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}C + \frac{1}{3}A = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}C + \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}C) = T + C$. Quam itaque æquationem ($B = T + C$) habemus num. 27. tanquam ex num. 2, 26, derivatam. Et similiter in aliis.

Nonnunquam vero (ut modo dictum est) sola fit Fractionis abbreviatio (seu ad minores terminos per communem divisorem reductio.) Ut, cum (num. 64.) habeatur $H = \frac{6912\,T + 672\,G + 552\,I + 279\,O.}{2907 = 3 \times 969}$; possintque omnia membra per 3 dividi: habetur, num. 65. (tanquam ex num. 64 derivata) æquatio, $H = \frac{2304\,T + 224\,G + 184\,I + 93\,O}{969}$. Et sic alibi.

Quoniam autem has omnes Æquationum reductiones atque abbreviationes singulatim exponere (prout has paucas exposuimus) Lectori tædium crearet, (cum illud possit suo marte quilibet præstare:) contenti sumus omnes una Synopsi breviter exhibere; indicatis iis æquationibus antecedentibus ex quibus quæque immediate dependeat.

Calculi Synopsis.

1 | $A = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}C.$
2 | $B = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}C + \frac{1}{3}A.$
3 | $C = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}G + \frac{1}{3}I.$
4 | $D = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}I + \frac{1}{3}G.$
5 | $E = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}D.$
6 | $F = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}D + \frac{1}{3}B.$
7 | $G = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}E + \frac{1}{3}L.$
8 | $H = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}L + \frac{1}{3}E.$
9 | $I = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}N + \frac{1}{3}P.$
10 | $K = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}N.$
11 | $L = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}W + \frac{1}{3}X.$
12 | $M = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}W.$
13 | $N = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}F + \frac{1}{3}M.$
14 | $O = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}M + \frac{1}{3}F.$
15 | $P = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}Y + \frac{1}{3}Z.$
16 | $Q = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}Z + \frac{1}{3}Y.$
17 | $R = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}O + \frac{1}{3}Q.$
18 | $S = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}Q + \frac{1}{3}O$
19 | $V = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}H + \frac{1}{3}K.$
20 | $U = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}K + \frac{1}{3}H.$
21 | $W = \frac{1}{3}T + \frac{1}{2}V.$
22 | $X = \frac{1}{3}T + \frac{1}{2}R.$
23 | $Y = \frac{1}{3}T + \frac{1}{2}U.$
24 | $Z = \frac{1}{3}T + \frac{1}{2}$&.
25 | & $= \frac{1}{3}T + \frac{1}{2}S.$

Per Prop. 5. vel 7. hujus Cap.

26 | $A = \frac{3}{2}T + C.$ per 1.
27 | $B = T + C.$ per 2, 26.
28 | $B = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}G + \frac{1}{3}I.$ per 27, 3.
29 | $E = \frac{15\,T + 5\,G + 4\,I}{9}$. per 5, 28, 4.

Fig. 243.

30 $F = \frac{12T + 4G + 5I}{9}$. per 6, 4, 28.

31 $W = \frac{7T + 4H + 2K}{12}$. per 21, 19.

32 $X = \frac{7T + 4O + 2Q}{12}$. per 22, 17.

33 $Y = \frac{7T + 2H + 4K}{12}$. per 23, 20.

34 $\& = \frac{7T + 2O + 4Q}{12}$. per 25, 18.

35 $Z = \frac{7\frac{1}{2}T + O + 2Q}{12}$. per 24, 34.

36 $L = \frac{39T + 8H + 4K + 4O + 2Q}{36}$. per 11, 31, 32.

37 $M = \frac{39T + 4H + 2K + 8O + 4Q}{36}$. per 12, 31, 32.

38 $P = \frac{39\frac{1}{2}T + 4H + 8K + O + 2Q}{36}$. per 15, 33, 35.

39 $Q = \frac{20T + H + 2K + O + 2Q}{18}$. per 16, 33, 35.

40 $Q = \frac{20T + H + 2K + O}{16}$. per 39.

41 $N = \frac{94\frac{1}{2}T + 16G + 2H + 20I + K + 4O + 2Q}{54}$. per 13, 30, 37.

42 $O = \frac{45T + 4G + 2H + 5I + K + 4O + 2Q}{27}$. per 14, 30, 37.

43 $O = \frac{45T + 4G + 2H + 5I + K + 2Q}{23}$. per 42.

44 $G = \frac{213T + 40G + 8H + 32I + 4K + 4O + 2Q}{108}$. per 7, 29, 36.

45 $G = \frac{213T + 8H + 32I + 4K + 4O + 2Q}{68}$. per 44.

46 $H = \frac{48T + G + 4H + 4I + 2K + 2O + Q}{27}$. per 8, 29, 36.

47 $H = \frac{48T + 5G + 4I + 2K + 2O + Q}{23}$. per 46.

48 $I = \frac{658\frac{1}{2}T + 64G + 20H + 80I + 28K + 19O + 14Q}{324}$. per 9, 38, 41.

49 $I = \frac{658\frac{1}{2}T + 64G + 20H + 28K + 19O + 14Q}{244}$. per 48.

50 $K = \frac{294T + 16G + 14H + 20I + 25K + 7O + 8Q}{162}$. per 10, 38, 41.

51 $K = \frac{294T + 16G + 14H + 20I + 7O + 8Q}{137}$. per 50.

52 $G = \frac{1724T + 65H + 256I + 34K + 33O}{8 \times 68 = 544}$. per 45, 40.

53 $H = \frac{788T + 80G + H + 64I + 34K + 33O}{16 \times 23 = 368}$. per 47, 40.

54 $H = \frac{788T + 80G + 64I + 34K + 33O}{367}$. per 53.

55 $I = \frac{5408T + 512G + 167H + 238K + 159O}{244 \times 8 = 1952}$. per 49, 40.

Fig. 243. 56 $K = \frac{608T + 32G + 29H + 40I + 2K + 15O}{137 \times 2 = 274}$. per 51, 40.

57 $K = \frac{608T + 32G + 29H + 40I + 15O}{272 = 8 \times 34}$. per 56.

58 $O = \frac{380T + 32G + 17H + 40I + 10K + O}{23 \times 8 = 184}$. per 43, 40.

59 $O = \frac{380T + 32G + 17H + 40I + 10K}{183}$. per 58.

60 $G = \frac{14400T + 32G + 549H + 2088I + 279O}{544 \times 8 = 4352}$. per 52, 57.

61 $G = \frac{14400T + 549H + 2088I + 279O}{4320 = 9 \times 480}$. per 60.

62 $G = \frac{1600T + 61H + 232I + 31O}{480}$. per 61.

63 $H = \frac{6912T + 672G + 29H + 552I + 279O}{367 \times 8 = 2936}$. per 54, 57.

64 $H = \frac{6912T + 672G + 552I + 279O}{2907 = 3 \times 969}$. per 63.

65 $H = \frac{2304T + 224G + 184I + 93O}{969}$. per 64.

66 $I = \frac{47520T + 4320G + 1539H + 280I + 1377O}{1952 \times 8 = 15616}$. per 55, 57.

67 $I = \frac{47520T + 4320G + 1539H + 1377O}{15336 = 27 \times 568}$. per 66.

68 $I = \frac{1760T + 160G + 57H + 51O}{568}$. per 67.

69 $O = \frac{54720T + 4512G + 2457H + 5640I + 75O}{183 \times 136 = 24888}$. per 59, 57.

70 $O = \frac{54720T + 4512G + 2457H + 5640I}{24813 = 3 \times 8271}$. per 69.

71 $O = \frac{18240T + 1504G + 819H + 1880I}{8271 = 3 \times 2757}$. per 70.

72 $G = \frac{13799040T + 46624G + 529920H + 1977152I}{480 \times 8271 = 3970080}$. per 62, 71.

73 $G = \frac{13799040T + 529920H + 1977152I}{3923456 = 64 \times 61304}$. per 72.

74 $G = \frac{215610T + 8280H + 30893I}{61304}$. per 73.

75 $H = \frac{6917568T + 664192G + 25389H + 565568I}{969 \times 2757 = 2671533}$. per 65, 71.

76 $H = \frac{6917568T + 664192G + 565568I}{2646144 = 64 \times 41346}$. per 75.

77 $H = \frac{108087T + 10378G + 8837I}{41346}$. per 76.

78 $I = \frac{15487200T + 1400064G + 513216H + 95880I}{568 \times 8271 = 4697928}$. per 68, 71.

79 $I = \frac{15487200T + 1400064G + 513216H}{4602048 = 96 \times 47938}$. per 78.

80 | I =

Fig. 243.

80 $I = \frac{161325T + 14584G + 5346H}{47938}$. per 79.

81 $G = \frac{9809571420T + 85929840G + 1350472338I}{61304 \times 41346 = 2534675184}$. per 74, 77.

82 $G = \frac{9809571420T + 1350472338I}{244874 5344 = 162 \times 919 \times 16448}$. per 81.

83 $G = \frac{65890T + 9071I}{16448}$. per 82.

84 $I = \frac{7247976552T + 658470852G + 47242602I}{47938 \times 41346 = 1982044548}$. per 80, 77.

85 $I = \frac{7247976552T + 658470852G}{1934801946 = 18 \times 919 \times 116963}$. per 84.

86 $I = \frac{438156T + 39806G}{116963}$. per 85.

87 $I = \frac{9829607228T + 3610802261}{116963 \times 16448 = 1923807424}$. per 86, 83.

88 $I = \frac{9829607228T}{1562727198 = 4594 \times 340167}$. per 87.

89 $I = \frac{2139662}{340167}T$. per 88.

90 $G = \frac{2542309}{340167}T$. per 83, 89.

91 $C = \frac{2578443\frac{1}{2}}{340167}T$. per 3, 89, 90.

92 $D = \frac{2444094\frac{1}{2}}{340167}T$. per 4, 89, 90.

93 $B = \frac{2918610\frac{1}{2}}{340167}T$. per 27, 91.

94 $A = \frac{3088694}{340167}T$. per 26, 91.

95 $E = \frac{2930522}{340167}T$. per 5, 92, 93.

96 $F = \frac{2772350}{340167}T$. per 6, 92, 93.

97 $H = \frac{1984812\frac{1}{2}}{340167}T$. per 77, 89, 90.

98 $O = \frac{1895418\frac{1}{2}}{340167}T$. per 71, 89, 90, 97.

99 $K = \frac{1690314\frac{1}{2}}{340167}T$. per 57, 89, 90, 97, 98.

100 $V = \frac{2056730}{340167}T$. per 19, 97, 99.

101 $U = \frac{1958564}{340167}T$. per 20, 97, 99.

102 $W = \frac{1141704}{340167}T$. per 21, 100.

103 $Y = \frac{1092671}{340167}T$. per 23, 101.

104 $Q = \frac{879012\frac{1}{2}}{340167}T$. per 40, 97, 98, 99.

Hoc est, ordine Alphabetico.

$A = 9\frac{27191}{340167}T$.

$B = 8\frac{197274\frac{1}{2}}{340167}T$.

$C = 7\frac{197274\frac{1}{2}}{340167}T$.

$D = 7\frac{62925\frac{1}{2}}{340167}T$.

$E = 8\frac{209186}{340167}T$.

$F = 8\frac{51014}{340167}T$.

$G = 7\frac{161540}{340167}T$.

$H = 5\frac{283977\frac{1}{2}}{340167}T$.

$I = 6\frac{98660}{340167}T$.

$K = 4\frac{329646\frac{1}{2}}{340167}T$.

$L = 3\frac{236331\frac{1}{2}}{340167}T$.

$M = 3\frac{181326\frac{1}{2}}{340167}T$.

$N = 7\frac{37757}{340167}T$.

$O = 5\frac{194583\frac{1}{2}}{340167}T$.

$P = 3\frac{50382\frac{1}{2}}{340167}T$.

$Q = 2\frac{198678\frac{1}{2}}{340167}T$.

105 | R =

Fig. 243.	105	$R=\frac{1726700}{340167}$ T. per 17, 98, 104.	$R=5\frac{25865}{340167}$ T.
	106	$S=\frac{1387898}{340167}$ T. per 18, 98, 104.	$S=4\frac{27230}{340167}$ T.
	107	$X=\frac{976739}{340167}$ T. per 22, 105.	$V=6\frac{15728}{340167}$ T.
	108	$\&=\frac{807338}{340167}$ T. per 25, 106.	$U=5\frac{257729}{340167}$ T.
	109	$Z=\frac{517058}{340167}$ T. per 24, 108.	$W=3\frac{121253}{340167}$ T.
	110	$L=\frac{1256832\frac{1}{3}}{340167}$ T. per 11, 102, 107.	$X=2\frac{296405}{340167}$ T.
	111	$M=\frac{1201827\frac{1}{15}}{340167}$ T. per 12, 102, 107.	$Y=3\frac{72170}{340167}$ T.
	112	$N=\frac{2418926}{340167}$ T. per 13, 96, 111.	$Z=1\frac{176891}{340167}$ T.
	113	$P=\frac{1070883\frac{1}{3}}{340167}$ T. per 15, 103, 109.	$\&=2\frac{127004}{340167}$ T.

Onera Columnis seu Muris incumbentia, non erat necesse distincto calculo designare; utpote quæ eadem plane sunt quæ eorundem tignorum alteris capitibus conveniunt. Cum enim (verbi gratia) Tignum X R, non nisi in medio sui puncto R oneretur; sustinet utrumvis Fulcrum (tum quod est ad X, tum quod est in Muro,) tum semissem Tigni, tum semissem oneris in R impositi: per prop. 5. hujus.

Patet, ex hoc calculo, juncturas A, medio proximas, omnium maxime urgeri. Utpote quorum onus peculiare, est plusquam *Novem* Tignorum longiorum; (reliquorum vero, minora saltem quam novem:) Cui quidem adhuc addendum erit (per prop. 7. hujus) semi-onus *Unius* tigni pro firmitate debita ne suo pondere rumpatur: Atque porro semissis oneris juncturæ C incumbentis, (per eandem prop. 7.) fere *Quatuor* tignorum. Adeoque (computatis omnibus) firmitas ibidem requisita ne rumpatur tignum, plus quam æquipollet ponderi Tignorum *Tredecem*, & fere *Quatuordecim*, $9\frac{27191}{340167}+4\frac{394549}{1360668}=13\frac{503313}{1360668}=13\frac{167771}{453556}$: (tigni sui pondere computato.)

Cum itaque nulli dubium esse possit, quin tigna, etiam satis longa, tantæ firmitudinis esse possint, ut valeant Onus longe gravius in eodem sui puncto sustinere quam est Quatuordecuplum sui ponderis; Neque poterit esse dubium, quin hujusmodi Contignatio tuto possit usui accommodari.

Alia Constructionis Forma.

Fig. 248. Aliam formam exhibet, Fig. 248. Quæ à præcedente in hoc differt, quod quæ illic duorum Tignorum Capita Tigno tertio incumbunt, ejusdem duobus distinctis punctis applicantur (quibus trifariam secatur tignum;) ipsaque Tigna sic suffulta ad easdem partes jacent: Hic, ad idem subjecti Tigni punctum medium applicantur utraque; sed ad contrarias partes.

Fig. 249. Tignorum Faciem Lateralem exhibet fig. 249. Facies superna, in ipsa fig. 248. satis apparet. Sunt autem omnia longitudine invicem æqualia atque inter se similia.

Fig. 248. Potest autem hæc, ut præcedens, plus minusve continuari prout opus videbitur; atque materiæ conditio ferre poterit. Quippe hic etiam, prout, protracta area, augetur trabium multitudo; sic & augetur Pondus.

Habet autem hæc forma, præ præcedente, hoc incommodum; quod, propter utrumque ponderum incumbentium eidem substrati tigni puncto applicatum, hoc fortius premitur, (utpote quod sustinet utrumque onus integrum; cum, in forma, præcedente,

Fig. 248.

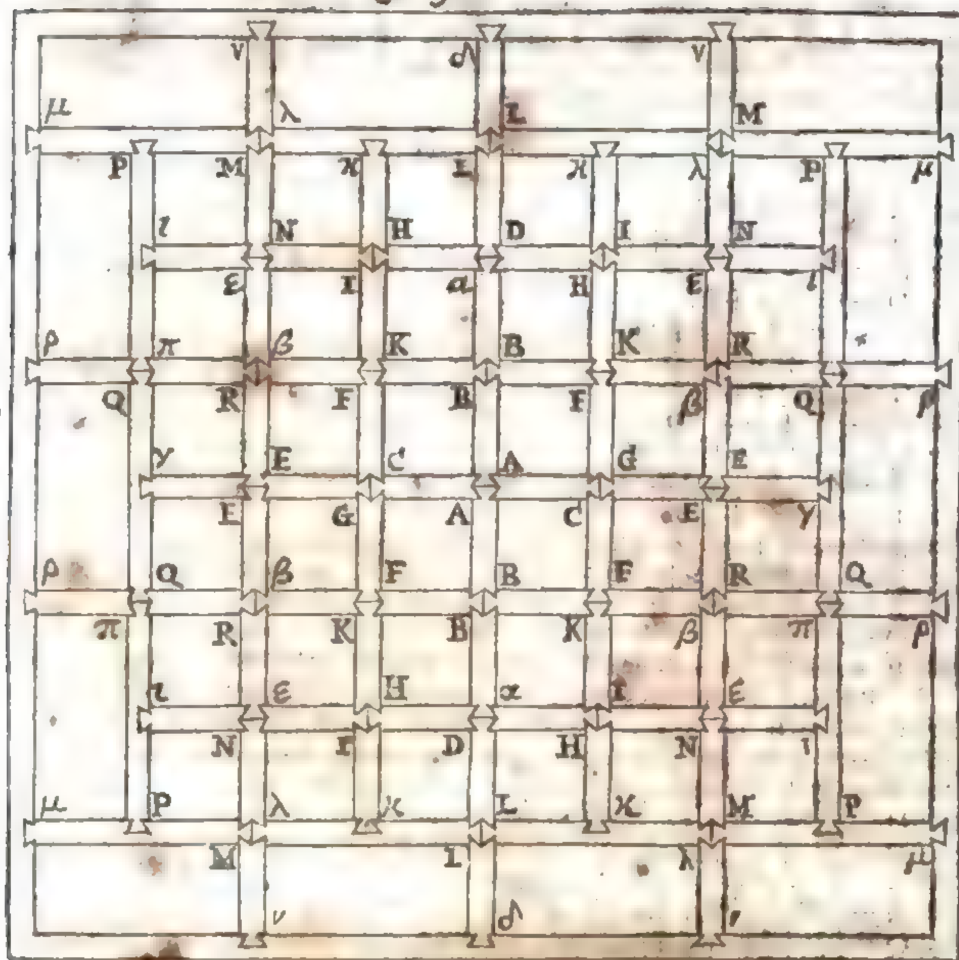


Fig. 249.

præcedente, punctum idem sustinuerit onus alterum integrum, alterum dimidium;) sed & propterea etiam eodem loci plus excavandum erit tignum sustinens, quo admittantur utriusque incumbentium capita. Quod quadantenus forte compensari videatur, propter tigna incumbentia ad contrarias partes posita; quæ, in præcedente forma, jacebant ad easdem partes utraque: Quamquam & hoc non multum intersit; præsertim si incumbentium tignorum capita, non ad subjecti mediam tantum latitudinem, sed usque ad remotiorem marginem, aut etiam ultra, extendantur; quod pro Architecti arbitrio vel fieri potest, vel non fieri.

Sed neque admodum metuendum erit illud incommodum; nam eo non obstante, satis valere poterunt tigna oneri sustinendo; prout ex subjecto calculo patebit.

Aspectum quod attinet; præcedens forte gratior videbitur: tum propter tigna sic disposita ut totius operis textura sit oculo magis conspicua, (quæ in posteriore forma vix aut ne vix observabitur;) tum propter intervalla, ibidem, uniformi difformitate variata; quæ, hic, sunt quadrata omnia. Fig. 243.

Calculus, iisdem principiis nititur in hac forma atque in præcedente: Sed expeditior hic est, propter tigna omnia ejusdem longitudinis, eademque in uno tantum puncto medio onerata, pluraque puncta æqualibus oneribus pressa: Quæ omnia conducunt ad reddendum calculum expeditiorem. Fig. 248.

Calculus huic constructioni accommodus.

Ad calculum hic expeditius instituendum, notandum erit; non tantum ea puncta (sive bina, sive quaterna,) quæ sunt respectu totius Schematis similiter

 sita

sita (& propterea æqualiter onerata) eodem symbolo designari ; (quod in calculo præcedente factum erat :) Sed etiam, propter tigna singula in medio tantum sui puncto onerata, utraque ejusdem tigni capita æquali onere subjecta fulcra gravare, (per prop. 5. hujus ;) quæ itaque analogis symbolis designavimus, onera invicem æqualia indicantibus. Cætera quæ de præcedente Calculo dicta sunt, etiam hic (prout opus erit) locum habent.

Calculi Synopsis.

1 $A = \alpha = \frac{1}{2}T + B$.
2 $B = \beta = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}F$.
3 $C = \frac{1}{2}T + A$.
4 $D = \delta = \frac{1}{2}T + L$.
5 $E = \varepsilon = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}R$.
6 $F = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}G$.
7 $G = \gamma = \frac{1}{2}T + E$.
8 $H = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}D$.
9 $I = \iota = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}N$.
10 $K = \kappa = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}I$.
11 $L = \lambda = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\kappa$.
12 $M = \mu = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}P$.
13 $N = \nu = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}M$.
14 $P = \pi = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\iota$.
15 $Q = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\gamma$.
16 $R = \rho = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}Q$.

Per prop. 5 vel 7 hujus Cap.

17 $C = T + B$. per 3, 1.
18 $D = T + \frac{1}{2}\kappa$. per 4, 11.
19 $F = \frac{5}{4}T + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}E$. per 6, 7, 17.
20 $H = \frac{5}{4}T + \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}\kappa$. per 8, 1, 18.
21 $M = \frac{3}{4}T + \frac{1}{4}\iota$. per 12, 14
22 $N = T + \frac{1}{4}\kappa + \frac{1}{4}P$. per 13, 11, 12.
23 $N = \frac{9}{8}T + \frac{1}{4}\kappa + \frac{1}{8}\iota$. per 22, 14.
24 $Q = \frac{3}{4}T + \frac{1}{2}E$. per 15, 7.
25 $R = \frac{9}{8}T + \frac{1}{4}E + \frac{1}{4}\iota$. per 16, 14, 24
26 $B = \frac{9}{8}T + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}E + \frac{1}{2}K$. per 2, 19.
27 $B = \frac{9T + 2E + 4K}{6}$. per 26.
28 $E = \frac{29}{16}T + \frac{7}{24}E + \frac{1}{8}I + \frac{1}{3}K$. per 5, 25, 27.
29 $E = \frac{87T + 6I + 16K}{34}$. per 28.
30 $H = 2T + \frac{1}{6}E + \frac{7}{12}K$. per 20, 27.
31 $I = \frac{17}{16}T + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{16}I + \frac{1}{8}\kappa$. per 9, 23.
32 $I = \frac{17T + 8\varepsilon + 2\kappa}{15}$. per 31.
33 $K = \frac{31}{15}T + \frac{7}{20}E + \frac{43}{120}K$. per 10, 30, 32.
34 $K = \frac{248T + 42E}{77}$. per 33.
35 $I = \frac{361T + 140E}{3 \times 77 = 231}$. per 32, 34.
36 $E = \frac{11389T + 952E}{34 \times 77 = 2618}$. per 29, 34, 35:
37 $E = \frac{1627T + 136E}{34 \times 11 = 374}$. per 36.
38 $E = \frac{1627}{238}T$. per 37.
39 $G = \frac{1746}{238}T$. per 7, 38.
40 $Q = \frac{992}{238}T$. per 15, 39.
41 $K = \frac{1654}{238}T$. per 34, 38.

Fig. 248.

42	$L = \frac{946}{238}$ T.	per 11, 41.
43	$D = \frac{1065}{238}$ T.	per 4, 42.
44	$B = \frac{2002}{238}$ T.	per 27, 38, 41.
45	$A = \frac{2121}{238}$ T.	per 1, 44.
46	$C = \frac{2240}{238}$ T.	per 3, 45.
47	$F = \frac{2112}{238}$ T.	per 6, 39, 46.
48	$H = \frac{1712}{238}$ T.	per 8, 43, 45.
49	$I = \frac{1358}{238}$ T.	per 32, 38, 41.
50	$P = \frac{798}{238}$ T.	per 14, 49.
51	$M = \frac{518}{238}$ T.	per 12, 50.
52	$N = \frac{851}{238}$ T.	per 13, 42, 51.
53	$R = \frac{1014}{238}$ T.	per 16, 40, 50.

Hoc est.

$A = 8\frac{217}{238}$ T.	$E = 6\frac{199}{238}$ T.	$I = 5\frac{168}{238}$ T.	$N = 3\frac{137}{238}$ T.
$B = 8\frac{98}{238}$ T.	$F = 8\frac{208}{238}$ T.	$K = 6\frac{226}{238}$ T.	$P = 3\frac{84}{238}$ T.
$C = 9\frac{98}{238}$ T.	$G = 7\frac{60}{238}$ T.	$L = 3\frac{232}{238}$ T.	$Q = 4\frac{40}{238}$ T.
$D = 4\frac{113}{238}$ T.	$H = 7\frac{46}{238}$ T.	$M = 2\frac{42}{238}$ T.	$R = 4\frac{62}{238}$ T.

Patet, ex hoc calculo; Ponderum singularium maximum esse $A = 8\frac{217}{238}$ T. Cum itaque eidem puncto (tigni CC medio) incumbant duo A, (utrinque unum,) hoc est $17\frac{196}{238}$ T; idemque porro (ne pondere tigni sui rumpatur) Uno adhuc semitigno onerari censendum sit, (per prop. 7. hujus Cap.) Firmitas ibidem requisita, (ne rumpatur tignum) æquipollet ponderi Tignorum $8\frac{217}{238} + 8\frac{217}{238} + \frac{1}{2} = 18\frac{77}{238} = 18\frac{11}{34}$.

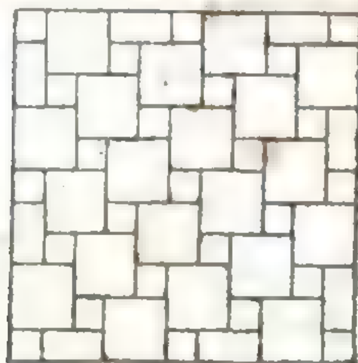
Quod quidem Onus non tantum est ut propterea metuamus ne non ferendo sufficiat tignorum robur: Quippe tigna, etiam satis longa, multo gravius onus sustinere valebunt quam est *Octodecuplum*, seu *Novendecuplum* sui ponderis.

Fit autem gravius quam onus maximum formæ præcedentis; utpote quod ad *Quatuordecuplum* ponderis unius tigni non pertigisse, supra deprehensum est.

Paucioribus interim tignis in hac forma res absolvitur, (utut areæ hujus latitudo intra muros, duodecima sui parte superet latitudinem illius, eadem manente longissimi tigni longitudine:) Quippe hic adhibentur tigna omnino 49 æqualia; illic vero, ex longioribus 40, ex brevioribus 20.

Constructiones adhuc aliæ plures.

Tertia constructionis forma, quam exhibet fig. 250. in hoc potissimum à Prima



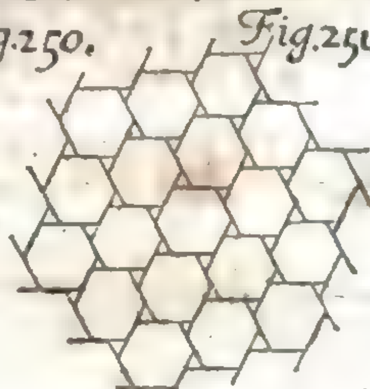
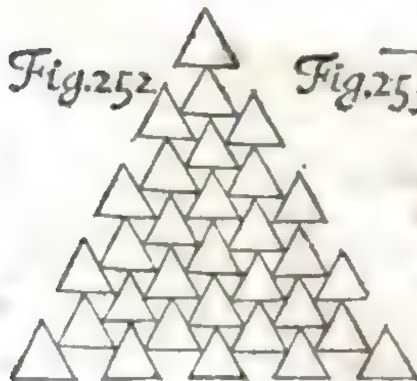


Fig. 250. Fig. 251.



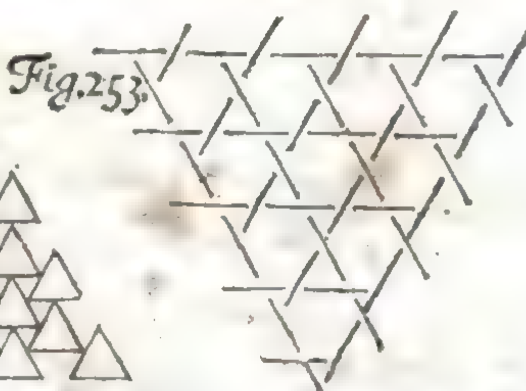


Fig. 252. Fig. 253.

 differt,

differt, quod quæ diversis ejusdem subjacentis tigni punctis sustinentur tigna incumbentia; sint, illic, ad easdem partes posita; hic, ad contrarias.

A Secunda vero, in hoc potissimum differt, quod, quæ ad contrarias partes subjecti tigni jacent tigna incumbentia, applicentur illic ad idem subjecti tigni punctum medium; hic vero, ad diversa puncta, quibus tigni longitudo trifariam secatur.

Quarta, Quinta, & Sexta, similiter ex figura trilatera fig. 247. derivantur; ut, ex quadrilatera fig. 246. derivantur prima, secunda, & tertia.

Forma Quarta, quam exhibet fig. 251. est analoga Tertiæ; mutatis Quadratis (propter angulos non rectos) in Triangula & Hexagona.

Forma Quinta, quam exhibet fig. 252. est magis analoga primæ; propter duo tigna incumbentia, ad easdem partes tigni sustinentis posita: In hoc autem cum secunda convenit, quod ad idem sustinentis punctum medium, applicentur utraque.

Forma Sexta, quam exhibet fig. 253 est Secundæ plane analoga; propter incumbentium ad contrarias partes tignorum capita, eodem subjecti tigni puncto medio suffulta: Atque in hoc potissimum à Quarta differt; quod, hic, ad idem sustinentis punctum applicantur utraque; illic, ad diversa. In Schemate autem, necesse habui tignorum capita amputare, paulo citra tigni sustinentis puncta media, (quibus suffulcienda intelliguntur:) Quippe alias, coeuntibus ad idem punctum tignis contrariis, una fieret continua recta, nec ad oculum pateret tigni sustinentis ab incumbentibus distinctio, nisi vellem in majori forma Schema delineare (ut in fig. 248. factum est) quo possint tignorum oppositorum capita sustinentis medio disterminari.

Possunt autem hæ Formæ (sicut præcedentes) plus minusve continuari, prout opus erit, atque expedire videbitur.

Possuntque, quæ singulis incumbunt juncturis onera sustinenda, similiter ad calculum revocari, ut ad formam primam & secundam factum est.

Sed & aliis mille modis possunt hæc omnia variari, prout vel conditio loci, vel scopus Architecti postulaverit. Nobis, hæc pauca sufficiat exhibuisse specimina.

C A P.

CAP. VII.

De Axe in Peritrochio, & Machinis cognatis.

DEFINITIONES.

DEF. I. Axem in Peritrochio *vocant Machinam, seu Instrumentum Mechanicum, ponderibus levandis aptum; in quo Cylindrus (quem* Axem *vocant,)* Fig. 254 *Fulcris per extrema sustinetur, circumpositum habens Tympanum, (quod* Peritrochium *vocant,) in cujus ambitu, foraminibus ad id factis, infiguntur* Scytalæ; *quibus applicata Vis, Peritrochium una cum Axe vertit, cui convoluti Funes Onus elevant.*

C*Ylindrus* (κύλινδρος) à κυλίνδω seu κυλινδέω dicitur, (atque hoc à κυλίω *volvo*,) ob formam teretem, apte volubilem: quam autem in Geometria figuram sic appellant, notum est.

Cylindri autem, saltem qui pro magnitudine breves sunt, (in Mechanicis præsertim) etiam *Tympana* (τύμπανα) dici solent: ob similitudinem, credo, Instrumentorum Musicorum pulsatilium sic dictorum, quæ & etiamnum in usu sunt. Ea vero sive à τύπτω sic dicantur (unde Scholiastes Aristophanis τύμπανον deducit, cum pro *fuste* sumitur quo quis verberetur;) seu potius ab Hebræo תוף (quod tantundem significat) non disputo. Certe à Syrorum תופים, Græcorum τύμπανα originem traxisse, non videtur ambigendum; quæ Romanis postea aliisque gentibus in usum venerunt. Neque satis convenit inter interpretes num illud ἐτυμπανίσθησαν Hebr. c. 11. innuat quod *fustigati* fuerint seu *fustibus cæsi*, an quod fuerint quasi in equuleo *torti* atque *extensi*, haud secus atque Membranæ Tympanorum capitibus impositæ.

Cylindrum autem (in Mechanico hoc Instrumento) minorem, sed & longiorem, *Axem* (ἄξονα) appellant. *Axis* autem seu ἄξων, ab ἄγω, ἄξω, videtur devenisse; utpote circa quem *agatur* Rota. Quippe de rotarum axe vox ea prima significatione dicitur; atque inde ad Circulorum, Sphærarum, aliorumque Solidorum Axes transfertur.

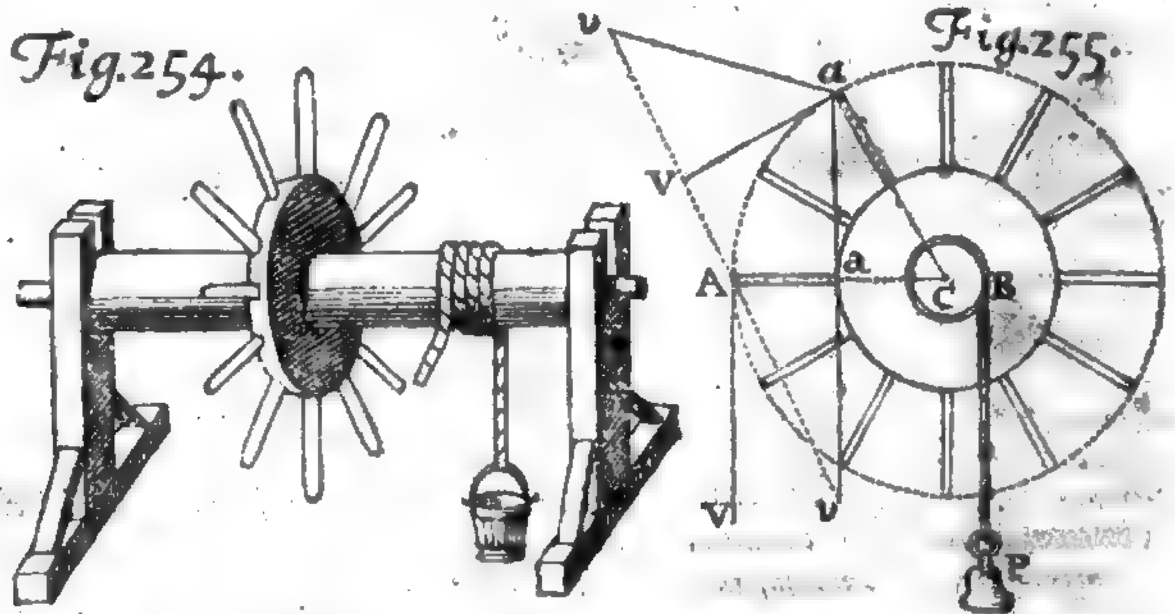
Tympanum vero sive Cylindrum majorem, sed & breviorem, *Peritrochium* (περιτρόχιον) vocant; (quod quin à τρόχος *rota*, atque hoc à τρέχω *curro* dicatur, non est ambigendum;) quod Rotarum instar circa Axem (περιτρέχει) circumcurrit: cum eo tamen discrimine, quod curruum Rotæ circa manentem Axem (hoc est, non conversum,) convertuntur; hoc autem Peritrochium una secum & Axem suum volvit.

Et quidem Axem hunc, utut alibi tornatum, ea tamen parte qua Peritrochio infigitur, quadratum relictum vult Pappus, (aptatum simili in Peritrochio Foramini quadrato,) quo Peritrochio firmius jungatur, certiusque cum eo converso convertatur.

Axis autem Extrema, (que & axis *Capita* dicuntur, aut etiam *Poli*,) in foramina (τρήματα) immoti Pegmatis quo sustinentur immissa, circumpositis axique fixis munimentis æneis armari jubet, quas *Chœnicidas* (χοινικίδας) vocat, (dicitur autem χοινικίς à χοῖνιξ, ob formæ, ut videtur, similitudinem; atque in eodem sensu usurpatur χοίνη:) Sed &, in pegmatis foraminibus, eisdem Chœnicidibus subjectos vult τρίβεις æneos, (sic enim est in nostris codicibus græcis MSS; Commandini versio τρίβους habet;) quod à τρίβω *tero*, dictum videtur: In eum vero finem

 utraque,

utraque, tum ut Axium extrema in Foraminibus expeditius vertantur, tum ut minus terantur utraque.



Idem vero, ubi *Glossocomum* describit, pro Axium extremis, habet *Digitos* æneos *Pyxidibus* æneis acceptos, δακτύλους dicit ob formæ similitudinem; & πυξίδας similiter. Ut enim πυξὶς à πύξος dicatur, quoniam primitus è *buxo*, ut videtur, fiebant *pyxides*; postea tamen non ex quovis ligno tantum sed ex quavis materia cum fierent, idem tamen nomen retentum est.

Eosdem idem ibidem etiam *Tormos* τόρμους videtur appellare: quod sive à τείρω *tero* dicatur, (quod versando teratur,) sive à τερέω vel τορέω *terebro, perforo*, perinde est; sive etiam cognatæ significationis sint τόρμος, τέρμα, τέρμις, τέρμων, & *terminus*. Vitruvius, *Cnodacas* appellat; Hero, κνώδακας; ut ejusdem forte originis sint κνώδαξ, & κνώδων, *mucro* seu *cuspis gladii*, quod à κναίω & ὀδοὺς dictum volunt.

Hi autem sive δάκτυλοι, sive τόρμοι, sive κνώδακες dicantur; non tam videntur fuisse continuati axis (qui ligneus esse solebat) partes, in minorem formam tornatæ; quam Clavi ferrei vel ænei ibidem impacti, adacti, aut etiam implumbati; quo fortius axem sustinerent quam si lignea essent hæc axis Capita. Quare & *Subscudes* quædam seu *subscudicula* rotundæ dicuntur esse. *Subscus* autem à *succudendo* dici perhibetur; quod quasi *cudendo*, mallei ictibus percussa, immittatur.

Scytalæ (σκυτάλαι) dicuntur, Fustes seu Baculi teretes, qui pro Manubriis sunt, in foramina in Peritrochii ambitu facta immissi fixique. A σκῦτος (*corium*) σκυτάλην dictum volunt; eo præsertim significatu quo *Flagrum coriaceum* seu *scuticam* significat. Sed & *clavam corio obductam* significare volunt; (atque, hinc, simpliciter *clavam* vel *fustem*.) Et quidem fieri potest, ut hæc manubria non raro fuerint corio obducta (quo tractantium manus minime læderentur,) indeque *Scytalæ* dicta. Sed (quicquid sit de origine seu causa nominis) *Scytale* vox pro *baculo* seu *ligno tereti* passim adhibetur. Atque hinc Lacedæmoniorum *Scytale*, (à multis passim scriptoribus memorata,) modum innuit occulte scribendi. Quippe Segmentis Membranæ (quod quasi Corii genus est) bacillo tereti circumpositis, sive Spirali forma circumvolutis, Epistolam inscribebant: quibus inde solutis confusæ literæ non legerentur nisi baculo simili similiter circundarentur.

Quæ autem Pappo σκυτάλαι, Aristoteli (in quæstionibus Mechanicis) κόλλοπες vocantur. Habetque & hæc vox, nescio quo pacto, cum Corio connexionem. Quippe κόλλοψ prima significatione Corium durius significat, quod in boum cervicibus & dorsis est; quod ita dictum volunt quod ex eo cocto fiebat κόλλα *gluten*. Hinc & Citharæ *verticilla*, quibus chordæ intenduntur, κόλλοπες dici volunt, *ex materia qua fiebant*: nisi potius dicendum sit, *qua tegebantur*. Hoc utique putaverim potius; quippe corium utcunque durum & callosum, non tantæ firmitatis est ut ex eo fiant hæc verticilla; quæ lignea saltem esse debent, aut si mavis metallina. Sed tum hæc Verticilla tum illa Manubria corio tecta fuisse nihil impedit; atque inde tum κόλλοπες dici, tum & σκυτάλαι.

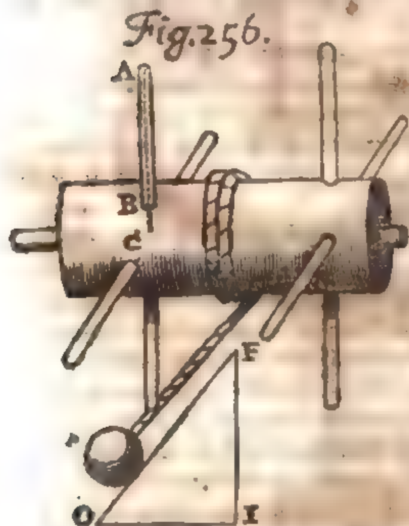
Dum

Dum vero *Collopas* appellat Aristoteles hæc manubria; idem σωπίλας vocat instrumenta quædam alia; Qualia scilicet nos exhibemus fig. 260. item, qualia innuit figura 258, R, S, oneribus trahendis supposita, quo minus in subjectam terram offenlent; eaque vel rotulis quasi capitulus affixis, vel etiam sine his. Cum enim *Scytala* pro *ligno tereti* habebatur, mox ea pluribus instrumentis ex ligno Cylindraceo factis accommodata est.

Funes χοινία, quæ Axi circumposita etiam ad Onus sublevandum (φορτίον dictum) annexa erant, ὅπλα appellat Pappus; hoc est *Arma*; (pro quo in Commandini versione, errore credo Typographi, *Arca* legitur: quod quid sit, nonnullis forsan facessat negotium.) Sic enim & Rudentes seu funes nautici majusculi ὅπλα dicebantur; &, Latine, *navis Armamenta.* Quæ & *Sparta* σπάρτα dicebantur; hoc est, ut quibusdam videtur *Sata*; (tanquam à σπείρω, pro *sero, sevi*;) quia ex *cannabe* aliisque rebus sativis fiebant: malim à σπείρω *necto*, hoc est, *sero, serui.* Nam, ut σπείρω, sic *sero* (quod inde factum videtur) utrumque significatum habet; sed in altero est *sevi, satum,* ubi pro *semino* usurpatur; in altero, *serui, sertum,* ubi pro *jungo*, aut *necto*, dicitur; (qua significatione etiam ab εἴρω *necto* dici poterit; ut & *sermo, series,* &c. & quidem *serere sermones*, fortassis ab εἴρω dico.) Idemque & in compositis videre est; quia ab *insero*, pro diversa significatione, dicitur *insitus,* & *insertus*; à *consero, consitus,* & *consertus*; à *dissero, dissitus,* & *disertus*; à *desero, desitus,* & *desertus*; ab *assero, assitus,* & *assertus*; ab *exero, exertus*; (sed *exitus*, potius ab *exeo.*) *Funis* autem seu *spartum* in hoc & hujusmodi instrumentis, dicitur & *Funis tractorius,* & *Funis ductarius.*

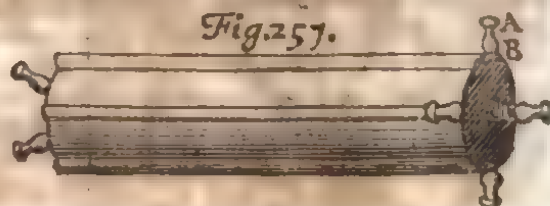
II. *Axem cum Scytalis, sed sine Peritrochio,* Suculam *vocant.*

Fig. 256.



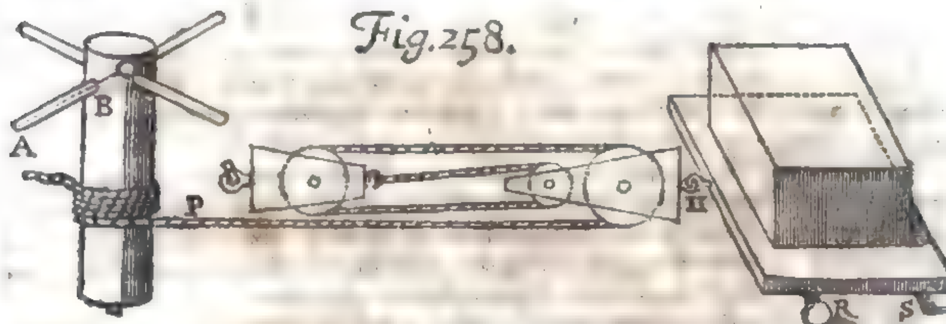
SUculam, sive *Succulam*, (nam utroque modo scribitur,) dici volunt, ob *Suis* nescio quam (volutando forsan) similitudinem. Græcis, ob *Asini* potius (in ferendis oneribus) similitudinem, ὄνος, ὀνίσκος, ὄνιος, appellatur. Scytalas autem vel ad alterum vel ad utrumque extremum, pro arbitrio, habere poterit.

Neque huic absimile est *Jugum* textorum (ζυγὸς) de quo Aristoteles in Mechanicis quæstionibus, aliique ad illum, scribunt. Fig. 257.



III. *Suculam erectam,* Ergatam *vocant.*

SI nomen spectemus, *Machinam Operariam* dixeris; (est utique ἐργάτης *operarius*, ab ἐργάζω:) sed huic speciatim Organo nomen imposuit usus. In quo erecta Fig. 258.

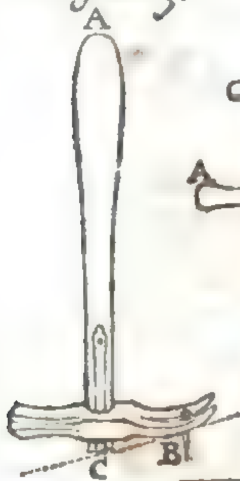


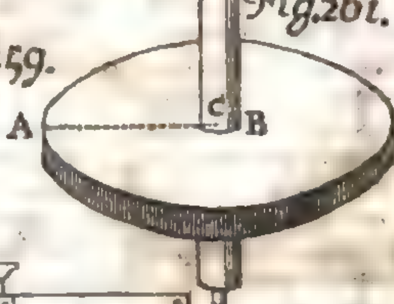
Sucula, vectibus quaternis, (seu, quod tantundem est, duobus transversim positis & utrinque extantibus,) vel etiam pluribus, converti solet; atque ponderibus Attrahendis, (potius quam elevandis aut attollendis,) adhiberi.

IV. *Huc*

Fig. 259, 260, 261, 262, 263. IV. *Huc referenda erunt ejusmodi alia Instrumenta innumera; ex Cylindris seu Tympanis confecta (seu quæ horum instar sunt,) eisque vel Dentatis vel non-Dentatis; & quidem utcunque multiplicatis: idque sive circa eundem motus axem rotentur, sive circa diversos. Talia sunt* Terebra, Tympanum manubrio instructum, Tympanum cum axe, *aut etiam hujusmodi plura invicem commissa, (ut in Automatis fieri solet,)* Geranium, *aliaque multa, quæ vel ex figuris satis intelligantur, vel quæ Lector ex suo penu huc referre possit.*

Fig. 259. ET quidem *Terebra* seu *Terebrum*; à *Tero* dictum, (ut Græcorum τέρετρον à τερέω *perforo*, atque hoc à τείρω *tero*,) vel à Græco τέρετρον immediate; vix aliud est quam vel *Sucula* vel *Ergata* cum *Scytalis binis*; cujus ope acies quæ secat premitur seu protruditur.





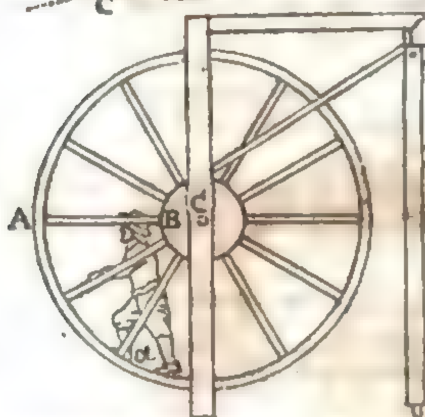


Fig. 260. *Tympanum manubrio instructum,* est instar *Suculæ* cum unica *Scytala.*

Fig. 261. *Tympanum cum Axe,* est *Axis in Peritrochio* sed sine *Scytalis*: (saltem nisi, in *Tympanis dentatis,* ipsi Dentes sint pro Scytalis:) sed & hujusmodi plura invicem committi solent; quo Vis Vi addatur.

Fig. 262. *Geranium* appello, Instrumentum illud cujus in Navigiis onerandis & exonerandis (atque Oneribus alias sublevandis) frequens est usus; (ubi à Rota magna, ab hominibus calcata, porrigitur longa Cervix, unde ad Onus demittitur Tractorius Funis.) Nostrates vocant à *Crane*, (Gruem;) cui respondent Machinæ Græca nomina γέρανος, γεράνιον; &, Latinorum, *Grus.*

Fig. 263. Sed & vulgaris Ferrei *Mallei* usus, evellendis Clavis adhibiti, poterit & huc referri. Aliaque istiusmodi plurima.

PROP.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

In Axe cum Peritrochio, (& cognatis Potentiis, quibus eadem est ratio,) ut est Perimeter Axis, cui applicatur Pondus movendum; ad Perimetrum Orbis Extimi, cui applicatur Vis Motrix; (seu illius Diameter vel Semidiameter, ad Diametrum vel Semidiametrum hujus:) sic, vice versa, Vis æquipollens, ad Pondus Movendum. Quæ itaque vel tantillum aucta movebit; aut etiam, si tantillum minuatur Pondus: Secus; non movebit: Et, si adhuc minor sit, vel Pondus augeatur; ne sustinebit quidem. Fig. 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263.

PRopositionem sic universaliter conceptam, eadem opera pluribus Machinis seu (ut dici solent) Potentiis accommodandam censui (cum in omnibus eadem sit ratio;) potius quam ut eadem de singulis toties repetantur.

Solent autem plerique omnes Mechanicorum scriptores *Potentiam* hanc ad Vectem reducere, (de quo in superiore Capite dictum est:) Neque id incommode. Quippe si C Centrum seu Axis Motus pro Fulcro seu Hypomochlio habeatur; rectæque CA, CB pro Distantiis punctorum applicationis, Virium & Ponderis, ad eandem rectam ceu Vectem ACB: Eadem omnia quæ de Vecte superius demonstrantur, etiam hic locum habebunt. Est utique hoc Organon tantundem atque Vectis continuus, seu alius atque alius continuo ordine subinde succedentes. Quippe ut, vertente Machina, (fig. 254, 255.) aliud atque aliud erit Perimetri axis punctum B cui applicatur Pondus; similiter alius atque alius succedit Vectis ACB, cujus reliquo extremo applicetur Vis motrix. Si vero non quidem ad ipsum A punctum oppositum applicetur Vis, sed ad aliud quodvis extimi Orbis Punctum, ut α: si tamen ad hoc punctum quodvis sic applicetur Vis ut linea directionis suæ, ut αV, sit secundum Tangentem hujus Orbis; res eodem plane recidit, per ea quæ de Libra Demonstravimus, ad prop. 14. Cap. 3. Si autem non secundum rectam quæ Orbem tangat, sed quamvis aliam, ut $\alpha\nu$, applicetur Vis; eadem pro singulis respective casibus locum hic habebunt, quæ illic de Libra demonstrantur. Sive enim ad Libram referatur hæc potentia (quod mihi potius videtur) sive ad Vectem (qui & ipse Libra est,) eodem res recidit.

Verum ego, ut rem ad prima principia revocem, malim ex prop. 5 & 6. Cap. 2. demonstrare; utpote quod universale principium est, ex quo omnium Machinarum vires æstimandæ sunt.

Si itaque intelligatur (quod hic supponimus) in una Machinæ conversione tantundem Elevari (seu contra propensionem suam moveri) Pondus appensum P, quantum tractorii funis illud est quod Axem semel ambiat, (quod itaque ipsius Ambitui æquale supponitur;) unaque tantundem Descendere (seu secundum propensionem suam procedere) Pondus contrarium seu Vim Motricem V, quantus est Extimi Orbis Ambitus cui vis hæc applicatur, (quod pariter intelligendum erit:) Manifestum est sic esse Descensum ad Ascensum, ut est Ambitus hic ad illum, seu ut hujus diameter vel semidiameter ad diametrum vel semidiametrum illius: puta ut m ad n seu mD ad nD. Si itaque ponatur (vice versa) Pondus ad Vim Motricem, ut n ad m, seu ut nP ad mP: Erit Motus illius Magnitudo ad Magnitudinem hujus, (utpote in ratione ex duabus illis rationibus composita, per prop. 5. Cap. 2.) adeoque & Momentum illius ad Momentum hujus (per prop. 7. Cap. 2.) ut $nP \times mD$ ad $mP \times nD$, seu ut $mnPD$

$$\begin{array}{ccc} nP & & mP \\ mD & & nD \\ \hline mnPD & = & mnPD \end{array}$$

mnPD ad *mnPD*; nempe æquale. Hoc est, Virium ut *nP*, Descensus (seu latio secundum directionem suam) ut *mD*, æquipollebit Ponderis ut *mP* Ascensui (seu lationi contra directionem suam) ut *nD*: Qui itaque cum sint contrarii, pro nullo simul vel Descensu vel Ascensu reputandi sunt; per prop. 6. Cap. 2. adeoque (per prop. 7. ejusdem,) Momentum in neutram partem præpollens; & Vires contrariæ se mutuo sustinebunt. Si vero vel Augeatur Vis Motrix, vel Minuatur Pondus; præpollebit Vis Motrix & Pondus elevabit: Sin contra; præpollebit Pondus, & Vis Motrix ne quidem sustinendo par erit: per prop. 8, & 12. Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

SCHOLIUM.

NOtandum hic, si ad Mathematicum rigorem res exigatur, à ratione proposita nonnihil recedendum esse. Nam Funis longitudo quæ una revolutione convolvitur aliquanto major est quam axis ambitus: Tum quia, propter funis crassitiem, extra Axis ambitum supereminet, (adeoque peripheriam majorem efficit;) Tum quia non præcise circularem peripheriam efficit; sed Spiralis circa Cylindrum conversionem, quæ circuli peripheria major est. Item quæ Scytalis applicatur Vis, non in ipsis earundem punctis extimis applicatur, sed paulo citra extremum. Verum hujusmodi minutiæ in Mechanicis negligi solent. Si autem ad Mathematicum rigorem exigere velis; tantus reputandus erit Axis Ambitus, quanta est longitudo funis una conversione convoluti: Atque tantus reputandus ambitus à Scytalis descriptus, quantus ab eo illarum puncto describitur cui Vis censenda erit applicari. Hæc utique supponit Demonstratio.

Notandum porro; Demonstrationem hanc spectare potissimum fig. 254, 255, &c. ubi Pondus dependet, adeoque propter gravitatem suam agit ut Vis contraria; quæ itaque ut Pondus elevetur, superanda erit à Vi motrice; & saltem æquanda, quo sustineatur.

Si vero, ut in fig. 258. Pondus humi jacens Trahendum sit (in Plano Horizontali) non Elevandum; vel aliud obstaculum amovendum sit; (ut fig. 259. ubi lignum Terebra scindendum erit, quo possit Terebra converti; & fig. 263. ubi clavus evellendus est;) considerandum erit hoc Pondus, vel Obstaculum, non ut *Vis contraria*, (quippe ut non horsum sua sponte nititur quo trahitur, sic neque ad partes contrarias,) sed simpliciter ut *Impedimentum*. Quo casu utut Vis major quam quæ æquipolleat requiratur ad Pondus illud vel Obstaculum movendum vel amoliendum: quo tamen sustineatur (hoc est, impediatur ne feratur in oppositum,) nulla Vis requiritur; supponitur utique vel non aliorsum niti, vel (quod tantundem hic erit) aliunde sustineri (puta subjecto pavimento, vel alio quovis modo,) ne eo feratur. Alia siquidem habenda est ratio nudi *Impedimenti*, ut in prop. 11. Cap. 1. alia *Vis contrariæ*, ut in prop. 12. ejusdem.

Si vero, ut in fig. 256. partim Trahatur, partim Elevetur; utriusque habenda erit ratio: Nam, præter amoliendum Impedimentum (ex scabritie terræ vel aliunde ortum quod majus minusve esse potest, prout magis vel asperum vel glabrum sit subjectum, quo nititur, fundamentum;) superanda etiam est Vis contraria deorsum tendens; quæ ascensui non opponitur tantum sed contrariatur. Quæ quidem Vis contraria major minorve erit (eodem manente pondere) prout major minorve fuerit motus acclivitas; secundum ea quæ Cap. 2. tradidimus, prop. 16, 17. & alibi.

Et quidem illud ipsum Impedimentum quod quo Trahatur pondus superandum erit à Vi motrice; quo tamen sustineatur, (ne à Vi contraria in Oppositum moveatur,) Adjumento esse potest: Quippe eadem, verbi gratia, asperitas Terræ quæ impedit tractionem sursum, impediet etiam lapsum deorsum in eodem obliquo plano; & quamquam Vi Tractrici opponatur ut Impedimentum; Retentrici tamen ut Adjumentum associandum erit.

Si autem peragenda sit Tractio in plano (non, ut prius, Acclivi, sed) Declivi: Superandum & hic erit quod à Terræ Scabritie (vel aliunde) oritur impedimentum; sed quæ superetur vis contraria, à Ponderis gravitate orta, nulla est: imo ea ipsa quæ in gravitate illa est Vis Motrix deorsum, Impedimento illi contraria erit; illudque magis minusve minuit, prout major est aut minor declivitas; quæ & tanta esse poterit ut hæc ipsa Impedimentum superet, ut Vi Tractrice opus non

non sit. Utcunque; Vi Tractrici eousque adjumento erit, ut ea nihil ultra superandum relinquatur quam id quo Impedimentum illud, superat hoc ex Gravitate Momentum, pro ea plani declivitate.

Verum hæc omnia sunt extra considerationem hujus Propositionis; quæ (ceteris rite computatis prout ex suis quodque principiis æstimandum erit,) hoc potissimum probatum it; Vim quamlibet in A directe applicatam, ad eandem directe applicatam in B, eam Momenti rationem habere ad Pondus P movendum, quam habet CA distantia, ad distantiam CB, vel eo radio descripta Perimeter ad Perimetrum hoc radio descriptam.

Dico autem *directe applicata*; (hoc est, secundum rectam quæ ad Orbis ambitum in puncto applicationis Tangens sit; ut ad prop. 14. Cap. 3. explicatum est:) quippe si Oblique applicetur; minuitur Vis pro ratione Obliquitatis; secundum Obliquitatis leges Cap. 2. expositas. Nempe, Vis per $\alpha\nu$ oblique applicata, ad eandem per αV tangentem directe applicatam, in ea ratione valebit quam habet αV ad $\alpha\nu$; per prop. 14. Cap. 3. vel prop. 21, aut 25. Cap. 2. Et quidem, Vis per αa, ad Vim eandem per αV vel AV applicatam; valebit ut Ca, ad $C\alpha$ vel CA; per prop. 13. Cap. 3.

Atque hoc, *Geranium* seu *Gruem* speciatim spectat. Ubi Vis motrix adhibita, Fig. 262.
hoc est, hominis calcantis pondus, non directe applicatur secundum Orbitæ tangentem, sed oblique. Et propterea minus agit Pondus calcantis in α, quam si esset in A; Cum enim agat hoc Pondus, propter gravitatem suam, secundum rectam quæ sit Horizonti perpendicularis; adeoque, si ad Horizontalis rectæ CA punctum A applicata foret, orbitam tangeret ea recta; atque æquipolleret calcantis Pondus Oneri in P, quod ad ipsum sit ut CA ad CB, per modo demonstrata: idem ad punctum α applicatum, minus valebit (ob causam jam dictam) quam si in A foret. Et quidem si foret α ipsi C directe subjectum, nihil omnino ageret ad convertendum Tympanum aut Pondus elevandum; sed eo plus agit quo propius ad A promovetur; atque in ea quidem ratione quam jam ostendimus ex prop. 21. Cap. 2. & prop. 13. Cap. 3.

Dico etiam, in ea ratione valere *ad Pondus P movendum*: quoniam ubi ad materiam Physicam perventum erit, nullum erit tam in omnibus expeditum Organum (utcunque affabre detornatum fuerit, omnesque mobilium commissuræ ad glabritiem redactæ, & perfuso Oleo aliasve adjutæ,) quin aliqua supererit scabrities, aliave inæqualitas, aut impedimentum, quod faciet ut Virium nonnihil impendendum fuerit ad ipsum Organum movendum; atque hoc, quantumcunque sit, summæ Virium in A applicatarum detrahendum erit, illudque, quod superest Virium reputandum erit adhibitum ad Pondus movendum quod ad B applicatur.

Quæque hic monemus, alibi prout opus fuerit intelligenda erunt.

Mallei vero usum illum quem innuit fig. 263. cur huc reducimus, ratio mani- Fig. 263.
festa est: Quoniam, etiam hic, virtus in A adhibita, movet in circumferentia radio CA descripta (propter C Centrum motus,) B vero, una cum Impedimento seu Obstaculo, (hoc est clavo evellendo,) in circumferentia descripta radio CB. (Adeoque quo propius sit B ad C, eo fortius aget vis eadem in A.) Atque idem dicendum erit de quovis alio organo consimili, ubi eadem ratio.

Si tamen Mallei usum illum (aliaque similia) ad Vectem referas (aut Libram etiam) cujus Centrum Motus extra Vectem (Libramve) sit: perinde est. Quam rem ad prop. 14. Cap. 3. consideravimus.

PROP. II.

Datum Pondus, data Vi, Axe in Peritrochio (aliove quod hujus instar sit Organo) movere.

Fig. 254, 255, &c.

FIat, ut Pondus *P*, ad Vires *V*, sic (reciproce) hujus distantia CA, ad CB: atque æquipollebunt in hoc situ Vis & Pondus, (utpote in distantiis reciproce proportionalibus,) per præcedentem. Adeoque si distantia CA vel tantillum augeatur; auctum sic erit Virium Momentum, Ponderique præpollebit, illudque movebit: per prop. 11, 12. Cap. 1. Quod erat propositum.

SCHOLIUM.

PAtet hinc; quo minor fuerit Axis ambitus cui applicatur Pondus, vel major ambitus Peritrochii extimus (seu quod hujus instar est) cui Vis Motrix applicatur, eo minori Vi movebitur Pondus.

Verum hic recordandum erit, præsertim vastis Ponderibus exigua Vi movendis, quod in Schol. prop. 18. Cap. 2. monuimus; nempe probe curandum esse, ut omnia, Vi & Ponderi intermedia, sint pro suis respective oneribus sustinendis satis firma: secus, rumpetur ipsa Machina, ejusve aliqua Armamenta, potius quam efficietur motus imperatus.

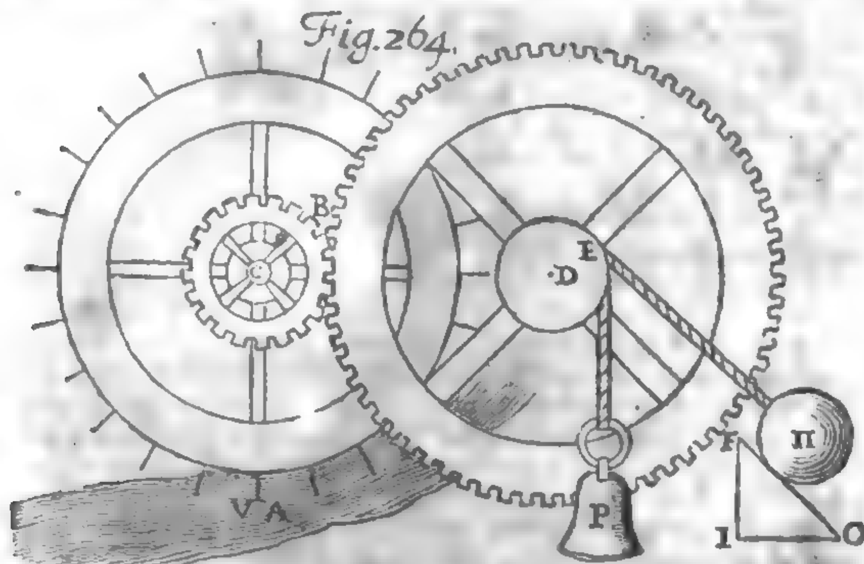
Item, quod ad prop. 28. Cap. 1. monuimus; nempe, motum hunc quo minori Vi peragatur, eo tardiorem fieri; adeoque defectum Virium Temporis impensi longitudine redimendum esse: Quod & in omnibus omnino Organis mechanicis locum habet. Adeoque, ubi Tempori parcendum erit, ut plus Virium addatur necesse est.

Denique; quoniam, ubi Virium & Ponderis magna est inæqualitas, haud commode poterit quod in hujus Propositionis constructione Imperatum est ad praxin redigi una vice (pro Physicæ materiæ imperfectione;) ideo pluribus sive tympanis sive rotulis invicem commissis id præstant. De quo in sequente propositione agitur.

PROP. III.

Si pluribus commissis Rotulis, aliisve Ponderis levandi mediis adhibitis, motus facilitetur: calculo nihilominus constabit, quanta sit illa facilitatio.

ESTo, verbi gratia, Centro (seu motus Axe) C, Tympanum seu Rota CA, cui in ambitu (ut moris est) Asserculi seu Pinnacidia affigantur; quibus impin-



gens in A, Aqua currentis Fluvii, Rotam convertat. Sitque ad eundem motus Axem C, Rota minor CB dentata; quæ ita cum priore conjuncta sit ut circa communem

communem Axem junctim moveantur. Sitque C B ad C A, (verbi gratia,) ut *a* ad *b*, seu ut 1 ad 3: valebit igitur, (per prop. 1. hujus) Vis in A ad æqualem in B; ut *b* ad *a*, seu ut 3 ad 1. Adeoque *Uncia* in A, æquipollebit *Quadranti* (hoc est, tribus Unciis) in B.

Esto porro; Centro (seu motus Axe) D, alia Rota D B; ita dentata, ut dentes sui apte congruant dentibus rotæ C B; eisque sic implicentur ut earum ope convertatur rota D B circa Centrum suum seu Axem D. (Sic autem congruent, si in ea sit ratione Numerus Dentium rotæ D B, ad Numerum Dentium rotæ C B; qua est istius Ambitus, ad Ambitum hujus; seu ut Radius, ad Radium.) Sitque circa eundem motus-Axem D, Rota minor seu Orbita D E; quæ cum D B junctim moveatur; habeatque sibi circumpositum Funem Tractorium E P, quo Pondus P trahatur. Sitque Radius D B ad D E, ut *c* ad *b*; puta ut 4 ad 1. valebit igitur Vis in B, ad æqualem in E (per prop. 1. hujus) ut *c* ab *b*, seu 4 ad 1. Adeoque *Quadrans* in B, æquipollebit *Assi* in E. At (per modo ostensa) *Uncia* in A, æquipollet *Quadranti* in B. Ergo, *Uncia* in A, æquipollebit *Assi* in E, aut etiam (per prop. 18. Cap. 2.) in P. Adeoque *Vis Uncialis* in A, sustinebit *Pondus Assis* in P; eademque Vis, tantillum aucta, movebit.

Vel, universaliter; propter C A ad C B, ut *b* ad *a*; vis V in A tantundem valebit atque $\frac{b}{a}V$ in B: Item, propter D B ad D E, ut *c* ad *b*; vis $\frac{b}{a}V$ in B (seu V in A) tantundem valebit atque $\frac{c}{b}\times\frac{b}{a}V=\frac{c}{a}V$, in E. Hoc est, Vis in A, æquipollebit Ponderi in E, vel P, quod ad illam sit in ea ratione quæ componitur ex C A ad C B, & D B ad D E. Atque eodem modo procedendum erit quotcunque porro fuerint Rotæ invicem Commissæ.

Si vero Pondus illud non ex E directe dependeat, ut in P; sed, ut in Π, obliquo Plano F O incumbat; Pondus in Π, ad idem in P, in ea ratione ponderabit, qua est F I (perpendicularis æque-alta) ad F O; puta ut *c* ad *d*, seu 3 ad 4; (per prop. 21, vel 25. Cap. 2.) Adeoque cum vis V in A, æquipolleat Ponderi $\frac{c}{b}\times\frac{b}{a}V=\frac{c}{a}V$ seu 12 V, in P; eadem æquipollebit Ponderi $\frac{d}{c}\times\frac{c}{b}\times\frac{b}{a}V=\frac{d}{a}V$, seu 16 V, in Π. Hoc est, Ponderi quod ad eum sit in ratione quæ componitur ex A C ad C B, & B D ad D E, & O F ad F I.

Atque ad eandem formam, mutatis mutandis, in aliis casibus Calculo æstimanda est Vis in A, quæ Ponderi in P vel Π æquipolleat; (quæ itaque, tantillum aucta, Pondus movebit.) Quod faciendum erat.

SCHOLIUM.

§ 1. AD hanc formam de quibusvis Machinis, ex Tympanis dentatis confectis, fiet judicium; qualia sunt varia Automatum genera, aliaque instrumenta in usum passim adhibita. Et speciatim *Glossocomum* illud quod ex Heronis Alexandrini *Baruleo* describit Pappus, Collectionum lib. 8. prop. 10. Et quæ sunt istiusmodi.

2. Hanc autem de *Rotulis* doctrinam priusquam dimittam; locus hic haud incommodus erit alias adhuc de Rotis speculationes subjungere; quæ quamquam hujus loci directe non sint, huc tamen quadantenus spectare non immerito videantur.

3. Observatum est in usu communi (quod & Aristoteles attigit in Mechanicis Quæst. 9.) *majores Rotas, Cylindros, Tympana, Sphæras, &c. facilius moveri quam Minores.* Quod utut per omnia verum non sit (limitatione utique opus erit;) rite tamen intellectum, concedi potest. Quippe, dummodo idem sit utrobique Pondus, (id utique manifesto interponendum erit,) id non raro videmus in Curruum Rotis, in Cylindris Sphærisve humi volutis, in Trochlearum Orbiculis, aliisque contingere. Saltem si & Axium siqui sint circa quos moventur, eadem sit utrobique magnitudo; aliaque quæ sunt Impedimentorum loco, sint utrobique æqualiter constituta. Nam nisi hæc ita sint, res omnino secus esse poterunt.

 4. Ubi

4. Ubi autem hoc contingit; si de causa quæratur: quilibet fere proclivis est eam ex hac de Axe in Peritrochio doctrina assignare. Neque hoc prorsus incommode, (quippe & huic considerationi locus erit:) Sed alia etiam in considerationem advocanda erunt, si res penitius inspiciatur. Quippe hæc de Axe in Peritrochio doctrina, non de Rotis separatis invicem comparandis agit; sed de duabus (pluribusve) conjunctis, quarum motus alter ab altero dependet: & quidem ubi Agens secundum unam, Patiens secundum alteram, consideratur.

5. Ut igitur ad suum Principium res referatur; intelligatur primo Cylindrus ejusmodi (*Scytalen* vocat Aristoteles) qualem in Hortis (& alibi) ad complanandam terram volvendo solent adhibere: qualem (si manubrium demas) in fig. 260. exhibuimus. Ex hujusmodi Cylindris, Pondere æqualibus (& longitudine) Majorem facilius volvas (cæteris paribus) quam minorem. Idemque de Rotis intellige, aliisve Tympanis, aut etiam Sphæris.

Fig. 265.

6. Sunto enim ejusmodi duo Cylindri, (vel, si mavis, duæ Rotæ, Sphæræve,) ut A B, $\alpha\beta$, in fig. 265. qui vel Trusione vel Tractione movendi sint, super B β plano.

Manifestum est, si nulla esset medii resistentia superanda, nullumque à scabritie subjecti (super quo movetur) impedimentum, aut quod horum instar sit; pondus idem, ab eadem Vi, eadem facilitate antrorsum propelli, aut retrorsum trahi; per prop. 22. Cap. 1.

7. Si autem Resistentiæ Medii ratio habeatur: Manifestum est, Cylindrum (cæteris paribus) mole majorem, majori Aeris (Aquæve) portioni obviam ire, unde major igitur erit Resistentia; & propterea Major Cylindrus difficilius movebitur: contra quam expectandum erat. (Quod in duobus Globulis, plumbeo puta & ligneo, ejusdem ponderis, per aerem missis, omnino obtinebit.) Adeoque hæc consideratio dissimulanda potius esset, quam in causæ partem advocanda. Sed tantilla potest hæc esse differentia, ut aliunde superari possit.

8. Si vero Subjecti (super quod movetur) Scabrities seu Asperitas in considerationem advocetur.

Dico, primo, hinc potissimum esse (si non solummodo,) quod Rotunda præsertim corpora humi volvantur multo facilius quam labantur vel possint sine volutione trahi. Cum enim nullæ sint tam perfecte tersæ & glabræ Superficies, ut nihil prorsus asperitatis habeant, qua se mutuo impediant detineantque: hinc fit, quod Cylindrus A B, impeditus (contactu plani) ad partes B, sed non item ad partes A; qua potest expedite, præceps fertur; (A celerius quam B moto.) Atque hoc continue: Quod est, Volvi. Haud secus acsi Dentata Rota D B fig. 264. super Dentata superficie movenda esset: ubi ne labatur, impediunt impliciti dentes; (ut ad B videre est;) non item, ne volvatur. Id utique, nisi dentibus vel alterutris vel utrisque ruptis, fieri non potest: hoc potest; ne deferente quidem suum tramitem Centro C. Atque eadem ratio est asperitatum minutiorum utut minus observabilis.

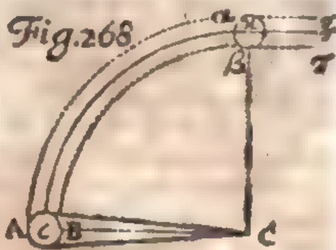
9. Idemque (ob eandem causam) in Curruum Rotis sufflaminatis videre est; quæ multo difficilius ita trahuntur renitentes, (rotæ ambitu, terræque superficie se mutuo radentibus,) quam ubi circa axem volvuntur.

10. Fallor, an non ob eandem causam fit, quod projecta in Aere volvantur etiam; nempe, quia pars aeris ea quæ projecti partibus inferioribus obviam fit, humilior sit adeoque pauxillo crassior, magisque propterea renitatur, quam quæ superioribus.

11. Quamquam, & id etiam aliunde fieri possit; nempe ob impetum in projectione impressum. Cum enim quæ ex Funda (verbi gratia) projiciuntur, circulari motu prius lata fuerint, quam relicta funda per istius circuli tangentem procedant; projecti partes ab hujus circuli centro remotiores, majores propterea circumferentias eo motu descripserant, adeoque velocioris motus conceperant impetum, quam quæ propiores; qui quidem impetus inæquales, ubi ex peripheria

ad

ad rectam tangentem transitur, volutionem inchoant, (projecti centro per rectam pr cedente, partibusque superioribus concitatius reliquis,) eademque cepta, cum nihil impediat, perseverat, (per prop. 11. Cap. 1.) Intelligatur enim (ut Schemate rem exponam,) Funda CBA, versari AB projectile, circa C Centrum motus, in situm αβ; ibique deserta funda, centro suo c (quod prius arcum descripserat cκ) secundum rectam tangentem κτ deinceps ferri. Cum itaque majorem impetum conceperit A, per Aα arcum majoris circuli delatum, quam B per similem circuli minoris arcum Bβ: ubi ad parallelas rectas ατ, βτ, perventum erit; impetus in α velocior quam in β, volutionem protinus inchoabit, circa centrum κ; eademque, non impedita, perseverabit: ut dictum est. Idemque, si non semper, non raro tamen, in aliis projectionibus contingit.



12. Quod autem facit in Cylindris, Rotis, Sphæris, &c. humi volutis Asperitas Soli; idem facit in Trochlearum Orbiculis Asperitas Funis ductarii, ejusque propterea cum Orbiculo cohæsio. Unde fit ut facilius cum Fune convertatur Orbiculus, quam manente Orbiculo solus Funis ducatur. Quod & in aliis similibus conversionibus pariter obtinet.

13. Dico porro; ob eandem quam diximus superficierum Asperitatem esse, quod Cylindri Rotæve aut Sphæræ mole majores, (sed pondere æquales;) facilius volvantur quam minores. Fig. 265.

14. Intelligantur enim in eandem asperitatem seu eminentium PO impingere, AB Cylindrus (vel Rota seu Sphæra) major, atque αβ minor: Quæ quidem eminentia PO (quo possint AB, αβ, procedere) vel superanda erit, vel deprimenda, vel propellenda.

Manifestum primo est, cum sic impingit αβ, propius esse ad P punctum β; quam est punctum B, cum sic impingit AB. Si enim intelligeretur β in B; totus circulus minor (propter mutuum contactum in B) intra majorem esset; adeoque ad O non pertingeret; ut in fig. 267. (& minus adhuc, si esset β ultra B.) Adeoque (quo superetur eminentia PO) Acclivior erit Ascensus (& propterea difficilior, per 25. Cap. 2.) à β ad O, quam à B ad O. Et quidem illic per Circuli minoris Tangentem Oτ; hic per Tangentem majoris OT.

15. Vel etiam sic idem alias colligitur. Facto O centro motus, circa quod (quo superetur punctum O) rotandæ sint AB, αβ; seu, quod tantundem est (per prop. 16. Cap. 4.) eorundem Centra gravitatis C, γ; in peripheriis Cc, γκ: eadem erit Obliquitas motus in punctis C, γ, quæ est Tangentium CT, γτ; (quæ quidem ipsis OT, Oτ, parallelæ sunt.) Adeoque cum major sit Obliquitas in CT quam in γτ; (propter angulum Oγβ, majorem angulo OCB, ut mox videbitur;) etiam facilior Ascensus erit. Et quidem in ea ratione facilius movebitur C, quam γ, (hoc est, AB quam αβ,) quam habet Secans Anguli TCA hoc est COV, vel TOP; ad Secantem Anguli τγα, hoc est γOV, vel τOP; (per prop. 25. Cap. 2.) hoc est (quippe hæc eadem est ratio) in reciproca ratione Cosinuum, seu Sinuum Complementorum; (Nam Secantes Angulorum sunt Complementorum Sinibus proportionales: Nempe in fig. 42. ut FT ad FS, seu FV ad FO, hoc est FV ad FB, sic est FQ ad FR; ut ad prop. 14. Cap. 2. ostensum est:) hoc est, ut Sinus Anguli Oγβ, vel OτP; ad Sinum Anguli OCB, vel OTP. Quæ quidem nec eadem est cum ratione Diametrorum; neque eadem ubique ratio; sed alia atque alia pro varia ipsius PO altitudine. Sed quo minor est altitudo PO, adeoque & minores anguli OCB, Oγβ; eo minor hinc est inæqualitas: eademque, si consideretur P vel O in ipsis B, β, punctis, protinus evanescit.

16. Manifestum item est, Arcum βO majorem esse (proportione ad suam peripheriam integram) quam est (ad suam) BO. Quippe PO, hoc est BV, vel βν, sinus versus erit arcus (proportione) majoris in circulo minore, quam in majore. Adeoque (junctis CO, γO,) major erit Obliquitatis Angulus βγO, quam BCO. Et propterea, si deprimenda sit PO eminentia; fortius ad hoc valebit Pondus idem Cylindri (Rotæve aut Sphæræ) majoris, prementis secundum rectam

CO

C O minus Obliquam; quam minoris, prementis secundum magis Obliquam rectam γ O: per prop. 21, vel 25. Cap. 2. (Quippe ibidem, quoad hoc, censendum erit Grave constitutum, ubi est ipsius Centrum gravitatis; per prop. 16. Cap. 4.) Non quidem in ea ratione quæ est Diametrorum, (ut ubi de Axe in Peritrochio agitur) sed in ea quam habet sinus Anguli C O V, ad sinum anguli γ O V. (per prop. 21. Cap. 2.) quæ alia atque alia erit, pro varia altitudine rectæ P O, manente eadem Diametrorum ratione. Sed inæqualitas continuo minor, prout P O propius est ad puncta B, β; atque, in his, protinus evanescit.

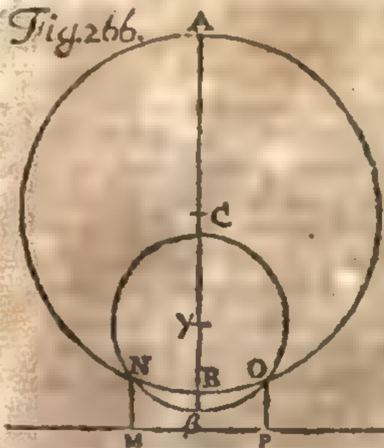
17. Estque hic forsan angulus B C O vel β γ O, quem vult Aristoteles cum dicit, *Angulum majoris circuli, nutum quendam habere ad angulum circuli minoris*: (quod Interpretes alio trahunt; puta, ad Angulum Contactus, vel Angulum Semicirculi, &c. de quibus videantur Monantholius, Baldus, Guevara;) Nam & minor est angulus B C O quam β γ O, adeoque C directius imminet; & obliquior angulus C O P quam γ O P, adeoque C minus offensat. Si vero de Angulo contactus intelligeretur; plus offensaret rota vel sphæra major quam minor, quia pluribus subjectis partibus simul incumbit Cylindrus seu Sphæra Materialis; ut post dicetur.

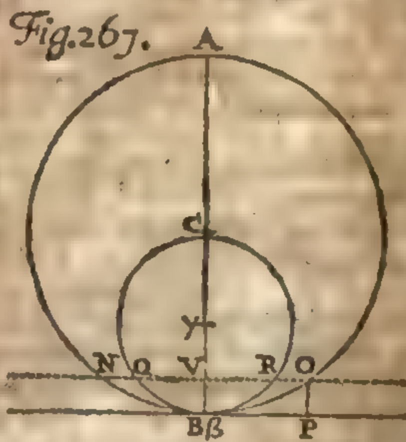
18. Sive igitur Superanda sit, sive Deprimenda, eminentia P O; (quorum, ut plurimum, vel alterum vel utrumque faciendum erit, quo volutio continuetur;) magis ad hoc valebit Cylindrus seu Rota major, cæteris paribus, quam minor. Idque magis in eminentiis majoribus quam in minoribus.

19. Sin abrumpenda esset eminentia P O, vel Propellenda: cum hoc per pulsum lateralem faciendum sit, & potissimum in Horizontali recta, ut V O, secundum quam (vel huic parallelam) fit tractio horizontalis; (quæ magis hic spectanda est quam perpendicularis pressio;) id potius fiet per rectam γ O, (quæ à situ horizontali minus recedit,) quam per C O. Adeoque, hoc respectu, Cylindrus (vel Rota) minor, prævalebit majori. Verum hoc in hujusmodi volutationibus rarius contingit, & vix nisi in altioribus obstaculis. Sed eminentiæ minores, vel deprimi solent, vel superari, potius quam propelli; cui magis conducit (ut jam est demonstratum) major quam minor Rota vel Cylindrus.

20. Sed & alia consideratio est, quæ Majori favet præ Minore: Nempe dum ab eminentia una ad alteram transitur, magis deprimitur minor quam major Rota seu Cylindrus: Adeoque plus illi ascendendum erit (quoniam ex depressiore valle) quo secundam superet. Sunto enim (ut in fig. 266.) eminentiæ duæ, M N, & P O: quarum quum altera superata est sed nondum reliqua; manifestum est (propter majorem in arcu minoris circuli curvedinem) altius depressum iri β quam B, (adeoque & Centrum γ quam C, totumque propterea Solidum; (Adeoque non modo Accliviorem sed & Altiorem ascensum habebit Cylindrus (vel Rota seu Sphæra) minor quam major. Hic itaque facilius volvetur.

Fig. 266.





21. Huc accedit & alia ratio. Utut enim Circulus Mathematicus supponatur Planum in Puncto contingere; in Corpore tamen Physico res secus esse solet. Quippe Corpus grave deprimit gravitate sua subjectam planitiem; & quidem plus minusve pro majore vel minore pondere cæteris paribus. Intelligatur itaque Cylindrus seu

Fig. 267. Rota minor (fig. 267.) planitiem N V O deprimere usque ad B vel β. Necesse itaque

itaque est ut subjectæ materiæ tantundem deprimat seu loco suo pellat (quo sibi locum paret) quantum est Segmentum Q R B. Quo autem major eo penetret, tantundem deprimendum erit seu loco pellendum, quantum est segmentum NOB: quod segmento Q R B majus est. Hoc itaque ut fiat, majore Pondere opus erit. Ponitur autem utriusque Pondus æquale. Non igitur fiet. Non itaque tam alte penetrat Cylindrus seu Rota Major, quam penetraverat minor: Adeoque & hoc nomine facilius volvetur.

Atque hactenus Cylindrum seu Rotam consideravimus ut Grave; pondere suo vel agens vel renitens: Atque ea ratione Majorem facilius motum iri quam Minorem ostendimus: Et quibus de causis id fiat.

22. Potest autem, seclusa illa Gravitatis consideratione, ut Vectis considerari; non quidem quatenus hoc ipsum Solidum, stante Obice, sursum movendum sit quo superetur obex, (quippe hac ratione considerandum erit ut Grave movendum;) sed quatenus amoliendus est Obex iste seu Obstaculum P O. Intelligatur enim (in fig. 265.) A B vectis, cujus fulcrum B; sitque Vis applicata sive in A, sive (ut in Cylindris plerumque fit) in C: & pondus movendum, seu Obex amoliendus, in V; non quidem immediate, sed mediante recta inflexili V O. (Eademque de $\alpha\gamma\upsilon\beta$, quæ de A C V B, intelligantur.) Erit igitur, (per prop. 2. Cap. præced.) ut A B vel C B, ad BV, hoc est P O; sic Vis in A vel C, ad huic æqualem in V, vel O. Atque similiter, ut $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$, ad $\beta\upsilon$, hoc est P O; sic vis in α vel γ, ad eandem in υ vel O. Et consequenter (propter eosdem consequentes) ut A B vel C B, ad $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$; sic vis in A vel C, ad eandem in α vel γ applicatam. In eadem igitur ratione (nempe Diametrorum, vel Semidiametrorum,) facilius movebit vis eadem Cylindrum seu Rotam Majorem A B, quam Minorem $\alpha\beta$; quantum ad amoliendum obicem P O. Atque hoc, ubicunque contigerit obstaculum P O; puta, sive propius sive remotius à puncto B, vel β. Fig 265.

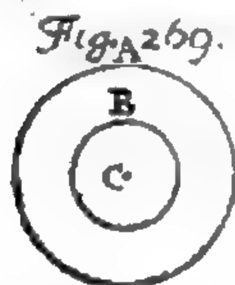
23. Verum hic nulla ratio habita est Ponderis in utrovis Cylindro, (nisi quod hujus ope puncta B, β, fixa sint tanquam ab Hypomochlio seu Fulcro, ne resiliant;) sed rectarum solummodo A B $\alpha\beta$, tanquam vectium nullius ponderis. Neque ad onus movendum, sed ad amoliendum obicem tantummodo spectatur. Sin spectetur Onus ipsum, quod tanquam in C vel γ constitutum (quæ centra gravitatis sunt) intelligendum erit: nihil hinc emolumenti habebitur. Quippe eadem utrobique ratio erit tum A B vel C B ad C B, tum $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$ ad $\gamma\beta$. Adeoque si Vectium A B, $\alpha\beta$, Fulcra intelligantur, B, β, & Pondera movenda in C, γ; Vires autem vel in A, α, vel in C, γ: quæ Ponderi æquipolleat Vis utrobique vel dimidia vel æqualis erit.

24. Sin concipiatur A B vel $\alpha\beta$ ut Libra cujus Centrum motus sit B vel β: Ad quam (utpote per Centrum transeuntem) quæ utrinque ponantur solidi partes æquiponderant; adeoque ipsa A B seu $\alpha\beta$ libra, in neutram partem præponderans, quantumvis parvo pondere (nisi quod medii resistentia, solique inæqualitas qua detinetur, impedirent,) in utramvis partem moveri posset: Vis applicata in A vel C, (utpote à Centro motus remotior,) in eadem ratione plus valebit, quam in α vel γ, qua sunt ipsæ A B vel C B longiores quam $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$: per prop. 12. Cap. 3. Ob quam rationem etiam ostendimus, longiorem Libram exactiorem esse; Schol. prop. 14. § 6. Atque ad hoc respexisse videtur Aristoteles quum eandem hic valere rationem dicit ob quam longiores Libræ sunt brevioribus exactiores. Fig. 267.

25. Estque hæc consideratio etiam Trochlearum Orbiculis communis; sed cum hoc discrimine: in Cylindris Sphærisque humi volutis, Obstacula seu Impedimenta motus (ob soli asperitatem) sunt in ipsarum orbitis, puta prope B, β; quæ itaque pro Fulcro, seu Libræ motusque Centro habentur; ut dictum est: Sed in Trochlearum Orbiculis, quorum ambitus ab offensionibus liberi sunt, motus Impedimenta sunt ad Axem, circa quem immotum volvuntur Orbiculi; & præsertim, in Orbiculis illis qui sunt in Trochlearum parte superiore, ad superiorem Axis partem super quam incumbit Orbiculus, moleque sua & dependentis ponderis eam premit; ad partem vero Axis inferiorem (ob similem rationem) in Orbiculis illis qui sunt in Trochlearum parte inferiore. Quæ hinc oritur Frictio, impedit quo minus Orbiculus circa Axem suum expedite volvatur.

26. Et quidem eo magis, quo Axis major est; propter majorem propterea frictionem. Quod quidem eatenus verum est, ut existimaverit Baldus ob hanc solam causam expeditius moveri Orbiculos majores quam minores, quoniam Majorum

Axes in minori ut plurimum sunt ratione ad Orbes suos quam sunt Axes Minorum: quod si Diameter Axis ad Diametrum Orbiculi sit in eadem ratione in majoribus atque minoribus Orbiculis, nihilo facilius motum iri existimat majores quam minores Trochlearum Orbiculos. Nempe, si intelligatur Orbiculi Centrum pro Vectis Fulcro, Viresque ad supremum diametri punctum applicatas, & Frictionem hanc seu adhæsionem pro Onere submovendo; in ea ratione plus minusve valebit, Vis ad Onus submovendum, qua major est aut minor Semidiameter Orbiculi ad Axis Semidiametrum. Puta; Si sit, ut CB ad CA, fig. 269, sic (reciproce) Vis in A, ad impedimentum à frictione ortum in B; Vis Impedimento æquipollebit, eademque aucta præpollebit: adeoque movebit: Atque hoc perinde sive in majore sive in minore Orbiculo.



27. Quam quidem Demonstrationem ego admitto. Verum hoc addo; Augmentum illud Virium quicquid sit quod supra Æquipollentiam accedit, plus valiturum in Radio majore quam in minore; utpote ad Libram in majori à Centro motus distantia applicatum. Ut modo ostensum est; ex Cap. 3. prop. 12. & Schol. prop. 14. ejusdem.

28. Eademque Frictionis consideratio quæ ad Axem fit, (præter eam quam ante consideravimus Soli Asperitatem,) in Plaustrorum Curruumve Rotis non minus locum habet quam in Trochlearum Orbiculis. Nam Axium extrema quæ Rotarum Modiolis immittuntur, onere pressa, ita premunt foraminum ima, ut non possit sine Frictione converti Rota circa Axem suum, in parte præsertim inferiori. (Quam causam assignat Aristoteles, Mechan. Quest. 11. *Cur super Scytalas*, quales R, S, fig. 258. (nos *Rollers* vocamus) *facilius gestantur onera, quam super currus*; nempe ob evitatam axis frictionem. Et quidem ad Axem majorem major erit Frictio, majusque ex Frictione Impedimentum. Eaque Frictio majorem quæ æquipolleat vim postulat, ubi major est Diametri Axis ad Diametrum Rotæ ratio; ob eandem causam quam in Trochlearum Orbiculis jam ostendimus. Quodque supra æquipollentiam accedit virium Augmentum, perinde in majoribus Rotis, atque in majoribus Trochlearum Orbiculis, plus valebit quam in minoribus; atque ob eandem causam.

29. Neque huic adversatur, quod Trochlearum Axes fixi maneant, Axes Rotarum promoveantur. Quippe, dummodo Centrum Conversionis (quem motum solummodo hic consideramus) in Axe sit; perinde est sive manente Solo promoveatur Axis (ut in Plaustrorum Rotis;) sive (ut in Trochlearum Orbiculis) manente Axe ducatur Funis tractorius; sive etiam utrumque fiat. Quæque de Rotarum Axibus dicta sunt; eadem etiam Cylindris aliisve facile accommodantur, ubi tractiones per Axes fiunt.

30. Superest adhuc alia ratio, etiam à Frictionis hujus consideratione petita, quæ majoribus Rotis (Cylindris, Tympanis, Orbiculis, Sphæris, &c.) præ minoribus favet. Posita nempe eadem utrobique axis magnitudine; quod ex Frictione oritur Impedimentum, non modo difficilius in Rota minore superatur (ob causam jam traditam;) sed & hoc sæpius repetendum erit. Cum enim tantundem tractione promoveri soleat Axis in una Rotæ conversione quantum ipsius Rotæ ambitum proxime æquet; sæpius eodem tractu converti oportebit Rotam minorem quam majorem, totamque integræ conversionis frictionem sæpius repeti: & quidem in eadem ratione sæpius qua minor est rotæ ambitus. Et propterea, ob frictionem sæpius repetendam, difficilius movebitur Rota minor.

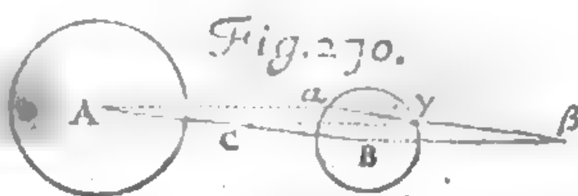
31. Atque hinc est quod Plaustrorum Curruumque Rotæ & Axes anteriores (cum minores esse soleant) citius terantur, sæpiusque reparari debeant, quam majores. (Cui tamen nonnihil conferre potest, quod cum Axis prior minus Altus sit quam posterior, ideo magis premitur, cæteris paribus, ab onere quod utrique incumbit. Ob easdem causas quas Cap. præced. assignavimus, cur duobus Fulcris inæqualiter altis incumbens Vectis, depressius magis premat.) Eademque Trochlearum Orbiculis facile accommodantur: quippe, dum tantundem elevatur pondus, sæpius convertendus erit Orbiculus minor, cæteris paribus, quam major; adeoque & difficilius.

32. Atque hactenus de Cylindrorum, Rotarum, Tympanorum, Sphærarum, &c. conversionibus egimus, tum cur fiant, tum cur in Majoribus facilius fiant

quam

quam in Minoribus, cæteris paribus. Quorum utriusque causas conjecimus in superficierum Asperitatem, atque hinc ortam Cohæsionem; sive qua cum Solo (aut quod hujus instar est) cohæret Orbita exterior; sive qua cohæret Axis cum eo cui immittitur Foramine. Quippe si nihil horum esset; nihil est cur tracta Rota non recta procederet absque volutatione, Funisque ductarius immotos Trochlearum Orbiculos præterlaberetur, atque in reliquis similiter. Et quidem, nisi hoc esset, (nec impediret medii resistentia) Rotam quantumvis gravem, Vis quantumvis exigua, in situ Horizontali, vel traheret vel propelleret: in situ vero Declivi, etiam nulla Vi adhibita, ferretur sponte sua: in Acclivi vero, ea saltem Vi quam postulat tracti Pondus cum Acclivitatis gradu comparatum; (per ea quæ tradimus Cap. 2. prop. 27.) nulla habita ratione vel Magnitudinis vel Figuræ; nullaque volutatione superaddita.

33. Restat alia non absimilis Quæstio; nempe, *Cur Plaustrorum Currumve Rotæ Anteriores sint Posterioribus Minores*: atque cui bono hoc sit.

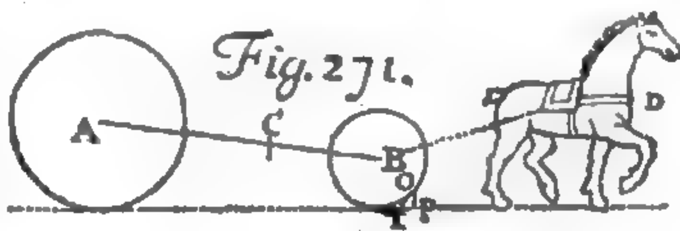


Videri forte possit nonnullis, id fieri propter Declivem Plaustri positionem; quasi cum B rota præcedens humilior sit quam sequens A, Plaustrum per AB rectam descendere proclive sit. Atque hoc quidem valeret, si, manentibus AB rotis, labi oporteret Plaustrum secundum ACB rectam. Quippe tum deorsum ferretur C Centrum, totumque Grave; fieretque Centro terræ propius. Verum ut jam se res habet, omnino secus est. Cum enim simul ferendum sit Plaustrum cum Rotis, puta à situ ACB in situm αγβ, (Centro-gravitatis C describente rectam Horizontalem Cγ,) nullus hoc motu acquiritur Descensus, adeoque nulla est ad illum propter Gravitatem propensio: per prop. 9. Cap. 2. vel prop. 16. Cap. 4.

34. Aliunde igitur petenda est ratio. Et quidem, quantum ad Rotarum posteriorum altitudinem, res ex ante dictis jam satis patet. Quoniam (præterquam quod hac ratione Plaustrum altius ex luto elevetur) Majores Rotæ facilius moventur quam minores; ob rationes jam traditas.

35. Quod vero Anteriores Rotæ minus Altæ sint, duæ saltem sunt causæ. Prima est, quoniam, cum propter viarum flexus Plaustra sint sæpenumero nunc dextrorsum nunc sinistrorsum ducenda; huic conducit multum anteriorum Rotarum parvitas; Quippe si anteriores eadem essent magnitudine cum posterioribus, incommode admodum fierent ejusmodi flexiones, & nonnisi magno circuitu facto. Quod vel Aurigæ, experimento docti, testabuntur: ipsaque Plaustrorum inspectio satis docebit.

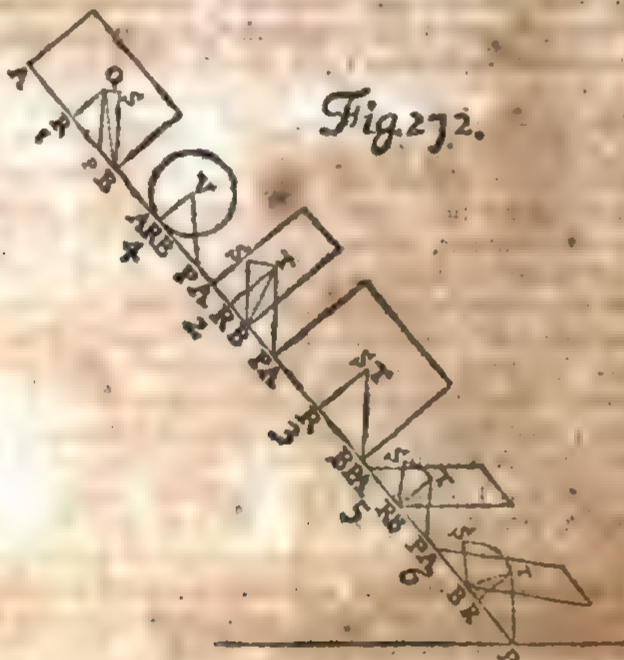
36. Altera paulo altius petenda est. Considerandum itaque est, Lora, quæ Plaustrum Equis alligant, affixa esse (saltem mediate) ad Axem anteriorem ejusve Capita: saltem non inferius quam sit Axis ille. Cumque Applicationum puncta Virium ad Pondus ibidem censenda sint: si Axis ille tam altus sit quam Pectus Equi; linea tractus (secundum quam Vis applicatur) puta BD, Horizontalis esset.



Et propterea, dum per planum Horizontale trahatur Plaustrum, erit ea virium Directa Applicatio, (cum eadem sit *Directio Moventis* seu Virium Applicatarum, & *Directio Motus*.) Sed quoniam non ita complanatæ sint Viæ, quin subinde superandi sint Montes, & Colles, variæque Asperitates & Eminentiæ, (ut TO, vel PO;) quod nisi per acclivem Ascensum fieri non potest: ubi hoc contingit, Directa Applicatio non ea est quæ est Horizonti TP parallela; sed quæ est parallela Acclivitati TO. Cum itaque præter tractum Horizontalem, huic etiam casui prospiciendum sit; idque eo magis, quoniam Pondus per Acclive difficilius trahitur quam per Planitiem: Commodum igitur deprehensum est ut Axis anterior, depressior sit quam Pectus Equi; quo BD recta (secundum quam Vis applicatur) sit parallela potius Acclivitati TO; (saltem, ut propius ad parallelismum accedat quam si tam altus esset Axis quam Pectus Equi,

nedum eo superior.) Sic utique directius eo loci Vis applicabitur, ubi plus opus est Virium; neque Attrahendum tantummodo, sed Attollendum pondus erit, seu Elevandum. Atque hoc eo magis faciendum est, ubi per tesqua & salebras, viasque inæqualiter asperas, quam ubi per Planitiem trahendum est Plaustrum.

37. Atque ad hunc etiam locum spectare poterit, ut reddatur ratio, cur quæ declivi plano incumbunt Gravia, si Rotunda sint, descendendo Volvi soleant; Labi vero, si planis terminentur: atque illa facilius quam hæc moveri.



38. Intelligatur enim Q grave, declivi plano incumbens superficie sua plana AB: sitque à sui Centro Gravitatis perpendicularis ad declive planum QR, ad Centrum Terræ QP, declivi plano occurrens supra B. Manifestum est (ex Schematis inspectu) non posse deorsum Volvi Q grave; nisi, facto B Centro motus, radio BQ describatur peripheria, cujus supremum punctum erit S in recta BS ipsi PQ parallela seu ad Horizontem recta; & Centrum gravitatis Q per QS arcum continuo ascendere; per prop. 20. Cap. 2. Et (ascendente Centro gravitatis) ascendere ipsum grave, per prop. 16. Cap. 4 Non igitur ob Gravitatem Volvetur circa B punctum permanens. Labi vero potest, (lato Q Centro in recta ipsi AB parallela,) quoniam sic labendo descendet Q. Et quidem actu labetur, si tanta sit in ea declivitate Gravitatis Vis ut superare possit impedimentum (de quo supra aliquoties dictum) ex cohærentia, indeque orta Frictione.

39. Si vero, ut in Gravi T, recta à sui Centro Gravitatis ad terræ centrum TP, declivi plano occurrat infra B: Volvendo descendet (& quidem potius quam Labendo, ob vitatam frictionem.) Quoniam peripheriæ Centro B, radio BT, describendæ, supremum punctum S erit in BS recta, ipsi PT parallela; arcusque ST descendens: (per prop. 20. Cap. 2.) adeoque præcipitabitur Grave T. Saltem nisi declivitas plani AB, seu rectæ huic parallelæ à T labente describendæ, tanta sit, ut gravitatis Vis in illa declivitate eo excessu superet impedimentum à frictione ortum, ut excessus hic præpolleat Vi Gravitatis in ea declivitate quam habet arcus ST in puncto T; hoc est, (per prop. 15. Cap. 2.) quam habet Recta arcum in T puncto contingens.

40. Si B & P coincidunt; perinde est ad utrumvis casum referas. Volvetur autem, non Labetur; ob Frictionem Impedientem.

41. Sin grave, ut V, Sphæricum sit; (seu quod hujus instar est;) propter idem punctum AB, recta VP (ad horizontem recta) declivi plano infra B semper occurret; sed & Declivitas Centri V Volventis (propter BV declivi plano rectam) eadem

eadem erit atque V Labentis. Volvendo igitur (ob sic vitatam frictionem) non Labendo descendet.

42. Quodque facilius moveatur V quam Q; manifestum item est. Quoniam, cum eadem sit Declivitas Volventis V, atque Labentis Q; sitque in Q (cum non possit nisi Labendo descendere) superandum Impedimentum à Frictione ortum, sed non item in V: facilius movebitur (cæteris paribus) V quam Q.

43. Sed & facilius quam T: propter Declivitatem Volventis V (eandem utique quæ est declivis plani) majorem quam Volventis T.

44. Intellige; Nisi angulus TBP; vel Rectus sit, (coincidentibus RB;) quo casu eadem erit Volventis T, atque Volventis V, declivitas: vel Acutus, (R infra B cadente) quo casu major erit Declivitas Volventis T, quam volventis V; adeoque & facilius volvetur T quam V.

CAP. VIII.

De Trochlea, seu Polyspasto.

DEFINITIO.

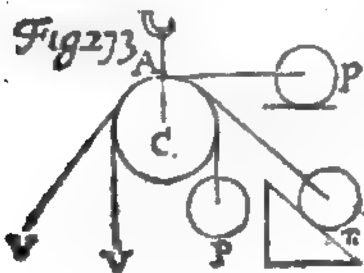
Ex Orbiculis (uno vel pluribus) apte dispositis , circa axes suos volubilibus, quibus circumpositus Funis Ductarius pondus attrahit (seu quod tantundem est) compositum Instrumentum, Trochleam *appellant.*

A Τρέχω, τροχὸς, τροχαλὸς, descendunt τροχίλιον, τροχαλία, τροχιλία, τροχιλαία (qua voce utitur Aristoteles in Mechanicis) ejusdem fere significatus omnia ; atque hinc Latinorum *Trochlea*. Pappo πολύσπαστον dicitur à multiplici tractione. Nostri (à *pull* vello) *Pulley* appellant.

PROP. I.

Si Trochleæ Orbiculus singularis sit, & loco suo fixus ; Vis Funi ductario applicata, Ponderi seu Impedimento amovendo æqualis , æquipollet : Adeoque sustinebit, atque aucta movebit , minuta vero ne sustinebit quidem.

PUta, si Orbiculo C A, circa Centrum seu Axem C volubili , ex Unco dependenti (aliasve sic fixo ut inde non amoveatur,) circumponatur Funis ductarius V A P, cui applicetur Vis in V, Pondus in P : Manifestum est, (nisi solvatur, rumpatur, extendatur funis, aliudve accidat simile, quod non supponimus,) quantum funis extremum V Vi trahitur secundum directionem suam, tantundem ascensurum extremum P cum annexo Pondere , contra suam. Et propterea (per prop. 7. Cap. 2.) si æqualia sint Vis & Pondus æquipollebunt ; sin secus, præpollebit quod majus est. Unde constat propositum, per prop. 11, 12. Cap. 1.



SCHOLIUM.

INtelligitur hæc propositio (ut & sequentes, quod hic moneo ne idem sæpius sit repetendum,) potissimum de Gravi directe dependente, ut P : Ubi scilicet Vis & Pondus agunt ut Vires contrariæ, (juxta prop. 12. Cap. 1.) Si vero Grave, ut π , situ Obliquo ferendum sit : Minuetur Ponderatio pro gradu declivitatis, (juxta prop. 19. Cap. 2.) Atque de Pondere sic minuto procedit propositio. Si vero pondus P movendum Humi jaceat, aut (ut in p) tractu horizontali ducendum sit, (ubi impedimentum ex scabritie ortum solummodo superandum sit,) vel Obex aliquis amoliendus sit, aliudve Obstaculum quod Impedimenti tantum rationem habeat, non Vis contrariæ ; Vi sustentrice in V non opus erit (cum Onus illud intelligatur vel non niti in contrarium, vel ne eo feratur aliunde sustineri :) sed, quo moveatur, non minus requiritur, Vis æquipollente major. Aliaque ejusmodi sic intelligenda erunt ut in Capite præcedente.

Orbiculorum vero usus in Trochleis adhibetur, non tam propter rationem aliquam

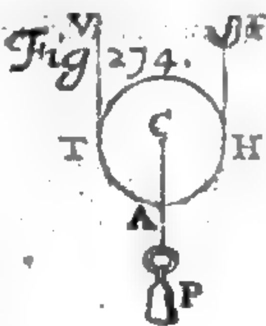
quam pure Mathematicam, quam propter rationem Physicam; ob corporum scabritiem. Quippe si tum Orbiculi tum Funis ductarii superficies essent tam Mathematice Politæ ut nulla foret ad invicem adhæsio; quin posset Funis tam expedite labi, quam Orbiculus converti: Demonstratio non minus procederet de C A Orbiculo (aliove duro corpore) permanente, quam circa C converso. Cum vero (ut ad Cap. præced. ostensum est) hæc corporum Frictio, seu Abrasio mutua, impedimento sit ne expedite moveatur Funis; fitque hæc major, futura si in A permanentem fieret, quam si circa axem C exiguum; (ob rationes in Cap. præced. ostensas:) hinc est, quod Orbiculorum usus sit ad motum expedite faciendum apprime utilis.

Manifestum item est, ob hujusmodi Orbiculum singularem, loco suo fixum, (intellige, ita ut inde non amoveatur, utut ibi circa axem volvatur;) sed neque ob plures sic fixos, (ut post dicetur, & quidem ob eandem rationem;) nullam in V virium requisitarum minutionem inferri: (cum Vis eadem in F, non minus quam in V, si ponderi æqualis sit, sustinebit; si major, movebit.) Potest tamen ob causas alias usui esse hic Orbiculus. Quippe fieri potest, ubi Vis Humana (verbi gratia) applicanda sit, ut, propter commodiorem corporis situm, vis ea possit fortius exeri in V quam in F: Vel etiam, in V, non modo vis nervorum (quæ sola poterit in F applicari) sed ipsum Pondus humani corporis applicari ad contrarium Pondus in P tollendum: Vel denique ob alias circumstantias, (quæ præsenti considerationi omnino sunt extrinsecæ, nec possunt facile numerari,) non parum adjumenti poterit accedere.

Quod autem Orbiculorum magnitudinem aut parvitatem spectat; ex Scholio propositionis ultimæ Capitis præcedentis petendum est.

PROP. II.

Si Trochleæ Orbiculus singularis, Ponderi conjunctus sit, & cum eo trahendus; eique circumpositi Funis ductarii extremum alterum Unco (vel alias) fixum sit, alteri Vis Motrix applicetur: Æquipollebit Ponderi (seu Impedimento amovendo) Vis *Dimidia* (directe applicata:) adeoque sustinebit; atque aucta movebit; minuta vero ne sustinebit quidem.



CUM enim, Ascendente Orbiculo, ejusve Centro C, (una cum annexo Pondere,) tantundem ascendat T punctum contactus Orbiculi Funisque V T, & ob eam rationem tantundem promoveatur secundum directionem suam Vis motrix V: Sed & tantundem ascendat punctum contactus Orbiculi ejusdem cum fune pensili H F (ab F puncto fixo ad orbiculum in H pertingente,) & propterea tantundem abbrevietur funis F H; quantum autem funi F H ita demitur, tantundem vertente Orbiculo transferatur ad funem T V, qui propterea tantundem prolongatur: Hinc fit, quod Ascensus puncti V, (seu promotio Vis motricis secundum directionem suam,) Duplus sit ascensus Centri C, ponderisve P. Quippe tantundem promovetur V propter ascensum puncti T; atque secunda vice tantundem propter prolongatam T V rectam. Sed Ponderis P Ascensui, æquipollet Vis Dimidiæ Ascensio Dupla; per prop. 5. Cap. 2. Ponderi itaque in P æquipollebit Vis Dimidia in V. Adeoque (per prop. 11, 12. Cap. 1.) sustinebit, & aucta movebit, minuta vero nequidem sustinebit.

SCHO-

SCHOLIUM.

Notandum hic est, (præter ea quæ ad prop. præced. monuimus,) ubi *Vim directe applicandam* dicimus; quo hoc fiat, requiri (illud utique hoc loco intellectum volumus) ut rectæ V T, F H, sint ipsi C P (directioni mobilis) parallelæ. Quippe, si parallelæ non sint; erit, pro obliquitate diversa, alia atque alia ratio tum tractionis secundum rectam T V, tum contractionis rectæ H F, ad ascensum C vel P: Et quidem (manentibus F V Punctis per quæ transeat funis) prout altius attollitur C vel P, Obliquitas ea continuo variatur. Verum ea consideratio non tam hujus loci est, quam ad Caput secundum spectat, ubi de motuum Obliquitatibus agitur. In Trochleis enim Chordæ vel parallelæ esse solent, vel tantillum à parallelismo declinare ut pro parallelis habeantur.

PROP. III.

Si Trochleæ Orbiculi plures sint; Calculo æstimabitur, ex Orbiculorum positione, quanta Vis exposito Ponderi æquipolleat; quæ & aucta movebit.

Nempe; Vis ea quæ est ad Pondus in reciproca ratione istius quam habet Virium in V Promotio ad Ascensum Ponderis in P.

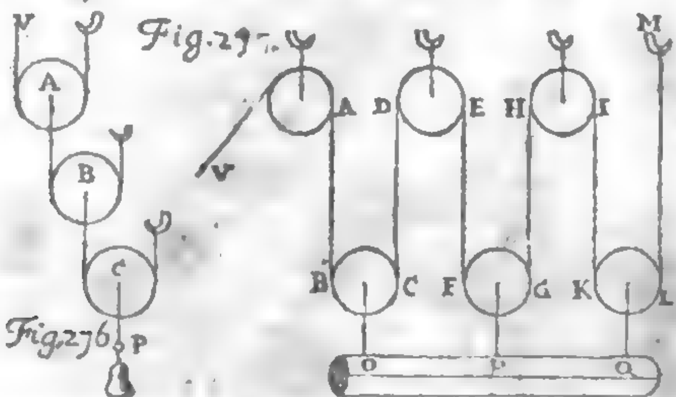
Hoc est; in fig. 276. Vis ad Pondus, ut 1 ad 2, 4, 8, 16, &c. (Geometrice proportionales) prout Orbiculorum numerus est 1, 2, 3, 4, &c.

In fig. 277, 278. (ubi Funis ductarius terminatur in puncto fixo, ut M.) Vis ad Pondus, ut 1 ad 2, 4, 6, 8. &c. prout Orbiculorum infra positorum (cum Pondere tollendorum) numerus est, 1, 2, 3, 4, &c.

In fig. 279. (ubi ductarii Funis extremum cum Pondere trahendo connectitur ut in K,) Vis ad Pondus, ut 1 ad 1, 3, 5, 7, &c. prout numerus Orbiculorum infra positorum est 0, 1, 2, 3, &c.

Casus I.

Nam, in fig. 276. (per prop. 2. hujus) Vis in V æquipollet ejusdem duplo in A: Item, Vis in A, hujus duplo in B: Et Vis in B, ejusdem duplo in C

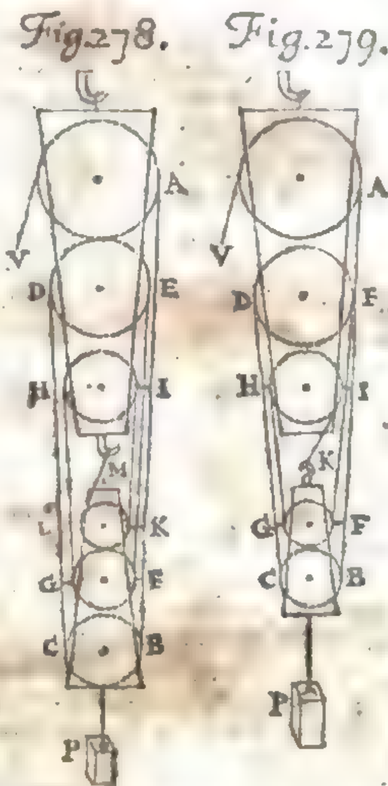


vel P. Atque sic porro quotcunque fuerint Orbiculi. Puta, Si Vis in V dicatur *V*; tantundem valebit, atque 2 *V* in A; vel 4 *V* in B; vel 8 *V* in C vel P: (Atque

que sic porro quousque opus fuerit.) Hoc est, Vis in V, æquipollebit Ponderi in P, quod ad eam sit in rationis duplæ ratione toties multiplicata quot sunt Orbiculi: Nempe, in ratione Dupla, Quadrupla, Octupla, Sedecupla, &c. prout numerus Orbiculorum sit, 1, 2, 3, 4, &c.

Casus II, & III.

In Fig. 277, 278, 279. ubi Funis Ductarius V A B C, &c. singulos Orbiculos circumiens pertingit ad V punctum applicationis Virium: Si intelligatur Pondus pendere ex B (continuato fune A B ad Pondus P vel O P Q, ibique terminato,) Vis æquipollens in V vel A ad Pondus P erit ut 1 ad 1, per prop. 1. hujus.



Si A B orbiculum B C (ex quo dependeat Pondus) circumiens figatur in D; erit (per prop. 2. hujus.) Vis in V vel A ad Pondus P, ut 1 ad 2; eo quod, elevato Orbiculo B C (cum appenso pondere,) tantundem abbreviatur utraque rectarum AB, CD; quantum autem utrique demitur, tantundem per A transit ad V; ut sit virium Promotio, Dupla ascensionis Ponderis. Idemque accideret, si funis V A B C D, orbiculum D E circumiens pertingeret ad F ibique figeretur; (non quidem ad Pondus quod sublevandum est, sed ad clavum aliquem seu palum fixum:) Cum enim, propter F punctum fixum, recta F E neutiquam abbreviaretur, nihilque inde transiret ad D; perinde est ad Vires in V vel A; sive in F vel E figatur funis, sive in D.

Si vero Funis V A B C D E F continuatus, cum Pondere connectatur in F (ut simul cum pondere punctum F elevetur:) propter rectas tres A B, C D, E F, tantundem abbreviatas singulas quantum est Ascensus Ponderis; omnium abbreviationes per A ad V translatas; vel (quod eodem recidit) si abesset orbiculus V A, ultra A protractas; erit Virium Promotio ad Ascensum Ponderis, ut 3 ad 1: adeoque Vis ad Pondus, ut 1 ad 3. per prop. 5. Cap 2.

Similiter ostendetur; continuato fune V A B C D E F G ad H, ibique fixo, Vim ad Pondus (propter abbreviatas quatuor rectas A B, C D, E F, G H,) esse ut 1 ad 4. Et, continuato per I ad K, ibique cum Pondere connexo; ut 1 ad 5. Et, continuato per L ad M: ut 1 ad 6. Atque sic porro prout opus erit. Et quidem, quoties funis extremum cum Pondere connexum est, (ut ad K;) ut 1 ad numerum imparem; quoties extra figitur (ut ad M,) ut 1 ad numerum parem.

SCHOLIUM.

Notandum hic est; Chordas omnes seu Rectas abbreviandas, ut A B, C D, E F, G H, I K, L M, &c. tanquam Parallelas habitas esse. Et quanquam in Trochleis non raro contingat, (ut in fig. 278, 279.) ut à Parallelismo nonnihil recedant; eo quod Orbiculi inæquales esse soleant, quoniam si invicem æquales essent coinciderent Chordæ seque invicem impedirent: tantillum tamen illud est, ut negligi soleat.

Notandum item, Orbiculos superiores, loco suo fixos esse; (quique ad hos, aut horum syntagma, alligatur funis, perinde est acsi ad clavum extra positum figeretur:) Inferiores autem (eorumque syntagma) cum Pondere connexos esse, & juxta cum illo attrahi. Ab horum itaque, non ab illorum, numero determinatur Virium Potentia.

Trochlea fig. 278. tantundem valet cum illa fig. 277. sed ad formam commodiorem redacta; & quæ ad praxin adhiberi solet.

PROP. IV.

Trochleam ita construere, ut Pondus sit ad Vim æquipollentem, in data Multiplorum ratione.

Fig. 278, 279. SI data Multiplorum ratio à numero *Pari* denominetur, (ut Dupla, Quadrupla, Sextupla, &c.) Funis ductarii extremum remotius, extra figatur (puta ad Uncum, Clavum, Palumve, aut quiddam simile :) Si à numero Impari; (ut Tripla, Quintupla, &c. aut etiam Simpla :) cum Pondere trahendo connectatur : Totidemque adhibeantur Orbiculi quot innuit præcedens Propositio. Et fiet quod imperatum est. Per ibidem demonstrata.

SCHOLIUM.

POssunt autem Trochleæ, non tantum superne & situ perpendiculari suspendi, uti cum ad Pondera sursum tollenda adhibentur: sed etiam ad Tractionem Horizontalem, seu in alio quocunque situ positam; aut etiam ad amovendum Obstaculum adhiberi. Possuntque non modo seorsim, sed & conjunctim cum aliis Organis usurpari. (Ut, ad fig. 258. junctim cum Ergata.) Potestque horum Organorum tum singulorum seorsim (pro sua cujusque natura,) tum simul junctorum, Potentia calculo æstimari. Fig. 258.

Exempli gratia. Propter interpositam Ergatam inter A & P, facilitatur Tractio Ponderis in P, (seu augetur valor Virium in A,) in ratione CA ad CB; puta, ut 3 ad 1; adeoque Vis in A ut 1, æquipollebit Ponderi in P ut 3. Item, propter interpositam Trochleam inter P & Π, (cujus Chordæ abbreviandæ sint, verbi gratia, quatuor,) facilitatur porro Tractio Ponderis Π, ut 4 ad 1, respectu Virium in P; adeoque Vis in P ut 1, æquipollebit Ponderi in Π ut 4; seu Vis ut 3, Ponderi ut 12. Ergo, propter utramque interpositam inter A & Π, facilitatur Tractio Ponderis in Π respectu Virium in A, in ratione ($3 \times 4 =$) 12 ad 1: adeoque Vis in A ut 1, æquipollebit Ponderi in Π ut 12. Sed & porro, facilitatur Ponderis Q tractio, propter subjectas Scytalas sive Palangas R, S, (sive Rotulas habeant capitibus adjunctas ut R, sive non habeant ut S,) ob minorem exinde frictionem quam si humi traheretur: At, in qua ratione sic facilitatur, non ita facile est hic determinare; utpote quod dependeat à variis materiæ circumstantiis Physicis; puta, tum Humi, tum Scytalarum, tum Ponderis his proxime incumbentis, Duritie, Lævore, aliisque ejusmodi, quæ prout magis minusve adfuerint, plus minusve facilitant tractionem.

Atque ad eandem formam (mutatis mutandis prout cujusque Organi natura postulat) in aliis conjunctis Organis Potentia calculo æstimabitur.

CAP.

CAP. IX.

De Cochlea.

DEFINITIONES.

DEF. I. *Si in Cylindri Recti superficie, intelligatur Recta, basi insistens circa Axem ferri, motu æquabili: Atque interim, per longitudinem istius rectæ Punctum moveri, motu item æquabili: Quæ à Puncto sic moto describitur Curva, vocatur* Helix (*sive* Spiralis) circa Cylindrum; *Rectum, intellige.*

Angulumque quem facit hæc Curva cum Base Cylindri; Angulum Inclinationis *appellamus: Et, quem facit cum Latere Cylindri, Angulum* Obliquitatis.

PUta; Si circa Cylindrum rectum ABβα, cujus basis ABB, feratur (in superficie Cylindri) recta Aα in situm Bβ, atque sic porro; (ut cum describitur Superficies Cylindrica;) motu æquabili: Atque in ea recta, sic mota, feratur A punctum versus α; hoc est, à B versus β; puta, ad H; motu item æquabili: Adeoque, qua ratione crescant AB, AB, eadem crescant BH, BH, ubique: Curva AHH, est *Helix* sive Spiralis *circa Cylindrum*; intellige, Rectum. Angulumque HAB, vocamus *Angulum Inclinationis*; & AHB, *Angulum Obliquitatis*.

Cylindrum autem *Rectum* innuimus; non quod circa Cylindros alios non possit describi *Spiralis*: Sed quod ea, quæ nobis hic usui est futura, illa sit quæ circa Rectum describitur. Et quidem, ut *Cylindrus* prout in Elementis definitur, est *Cylindrus Rectus*, (Scalenis enim non convenit ea definitio;) sic & *Spiralis circa Cylindrum*, speciatim solet intelligi de ea quæ est circa Cylindrum *Rectum*.

Helix autem seu *Helice*, (ἕλιξ, ἑλικὴ, ab ἑλίσσω *volvo*,) Latine *Spiralis* dici solet, à *Spira*, σπεῖρα, atque hoc à σπείρω *necto*: & *Torsionem* innuit, qualem in Funibus videmus.

II. *Cylindrum Rectum*, Helice *similiter sulcatum*, Cochleam *appellant. Et quidem* Cochleam Marem, *seu Interiorem*, *si sic sulcata superficies Cylindrica* Convexa *sit*: Fœminam, *seu exteriorem*, *si* Concava; *Hoc est, si Solidi cylindrice excavati superficies Concava sic sulcata fuerit.*

DIcitur autem *Cochlea* Latine, Græce Κοχλίας, ob *Limacis* (sic item dicti) aliorumque ejusmodi Testaceorum seu Conchyliorum, similitudinem. Nostri *Screw*, & *Vice*; Galli *Vis*, appellant; Itali, *Vite*; ob Vitis similitudinem ambientis Ulmum, ut Hedera Quercum.

Potissimum adhiberi solent Cochleæ, obicibus propellendis, frangendis, aut durius comprimendis, aliisque motibus Trusione factis. Atque in eum finem, Mas Fœminæ, hoc est Interior Exteriori intrudi.

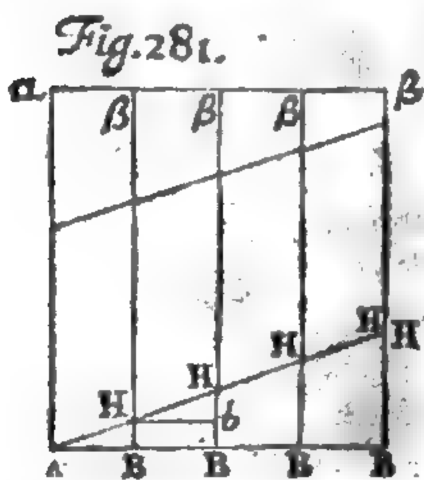
Soletque forinsecus adhiberi Manubrium (aut quod hujus instar est) ut in Ergatis, aliisque similibus Instrumentis: Adeoque Potentia, Axis in Peritrochio, cum hac Cochleæ conjungi.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Helix circa Cylindrum Rectum, est Curva Similaris, seu Uniformis. Intellige; cujus pars quælibet cuilibet (æquali sumptæ) congruat. Eademque, si intelligatur in Planum expandi Superficies Cylindrica, fiet Linea Recta: (aut plures Rectæ.) Idemque, qui prius erant, manebunt, tum Inclinationis, tum Obliquitatis, Anguli.

Fig. 280. SUmpta enim (verbi gratia) arcui AB, æquali BB, hoc est Hb; erit (propter AB ad AB, ut HB ad HB) etiam (dividendo) ut AB ad BB, sic recta HB (hoc est recta Hb) ad rectam bH. Adeoque (propter æquales angulos HBA, HBA,) si intelligatur arcus Hb, arcui AH (simuli & æquali) applicari, congruent; adeoque bH ipsi BH; atque hoc ubique. Et propterea HH, ipsi AH; pars quælibet cuilibet æquali. Quod demonstrandum erat.



Item; si (expansa in Planum superficie Cylindrica) intelligatur arcus ABB fig. 280. in rectam ABB fig. 281. extendi; cui applicentur, ut prius BH, BH rectæ: Cum sit ubique, ut AB ad AB, sic BH ad BH; adeoque ABH, ABH, similia Triangula; erit AHH Linea Recta: Aut etiam, (si dissecta secundum longitudinem superficie Cylindrica, secetur etiam Helix,) Rectæ plures. Quod itidem demonstrandum erat.

Cumque eadem omnino sit superficies ABH plana fig. 281. atque ABH curva fig. 280. nisi quod hic in singulis AH rectis parallelis fiat flexio; quæ Angulos HAB, AHB, neutiquam immutat: Iidem qui prius erant manebunt tum Inclinationis, tum Obliquitatis Anguli. Quod erat ultimo demonstrandum.

SCHOLIUM.

AFfectionum harum, posteriores duæ, etiam Spiralibus circa Cylindros Scalenos conveniunt; aut etiam circa solidum Prismaticum quodvis: quod ex demonstratione satis patet. Nempe si intelligatur ABB, non quidem Cylindri basis circularis, sed planum Ellipticum quod ad Latus seu Axem Cylindri Rectum sit: Aut, in solido quovis alio Prismatico, Planum quodcunque fuerit quod ad Axem ejus, Latusve, Rectum sit: Sitque ut AB ad AB, sic respective HH ad BH, ubique.

Sed non item Prima; quæ, præterquam Circuli Peripheriæ, atque huic circa Cylindrum Rectum Helici, nulli ex lineis Curvis convenit.

Sed neque ita intelligendum est, quasi circa Cylindrum Rectum Helix quælibet cuilibet congruet; (nam neque Circuli Peripheria quælibet cuilibet congruit, sed æqualium tantum circulorum;) aut etiam Helicum cuilibet circa eundem Cylindrum factarum: Sed, pars quælibet cuilibet Helicis ejusdem; vel etiam diversarum, modo Cylindri, circa quos fiunt, æquales bases habeant, sitque idem Inclinationis Angulus quem cum Cylindri base facit Helix, atque ad easdem partes.

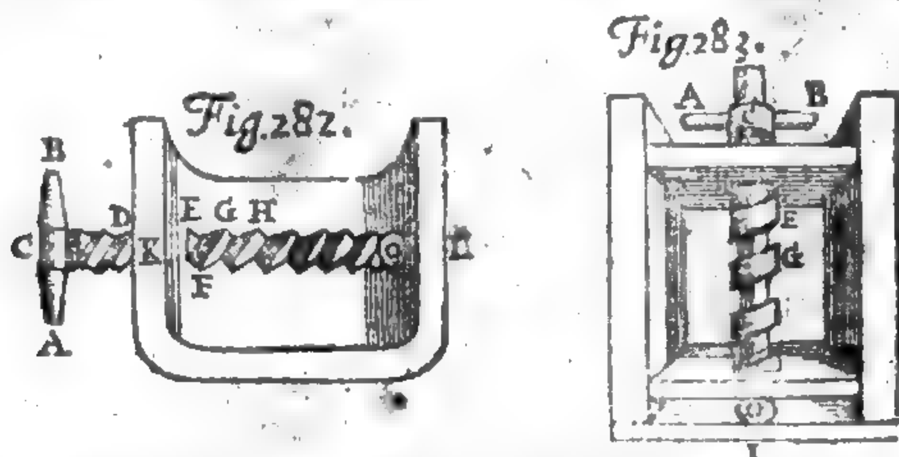
Ab hac autem Helicis similaritate, seu situ uniformi, dependet Cochlearum usus; ut ex propositione sequente patebit.

PROP.

PROP. II.

Si Cochlea Exterior (quam Fœminam vocant) ita Interiori (seu Mari) conformis sit, ut pars parti apte respondeat, (hujus Eminentiis illius Cavitatibus congruentibus, & contra;) per Exteriorem permanentem, Interior tota labetur; (partibus sequentibus in præcedentium loca continue succedentibus:) aut etiam super Interiorem permanentem propelletur Exterior.

SEquitur hæc ex Propositione præcedente. Cum enim, (propter Cochleam Helice sulcatam, & quidem similiter,) Superficies Cochlearis (sive Interior sive Exterior) vel etiam ipsa Cochlearis Soliditas, intelligenda sit, (per def. 1. Cap. 4.) ex Helicibus



circa Cylindrum rectum, adeoque similaribus, conflari: Si ita constitutæ sint Cochleæ Interior atque Exterior, ut illius portio aliqua hujus correspondenti portioni ita congruat, ut illius Eminentiæ hujus Cavitatibus recipiantur, & contra; etiam pars alia quælibet, respective sumpta, similiter congruet; totaque altera per alteram transibit, (succedentibus cujusque Helicis partibus sequentibus in ejusdem præcedentium loca, ut H H in A H, fig. 280.) Unde constat propositum.

SCHOLIUM.

NOtandum hic, utut Cochlearum tum Eminentiæ tum Cavitates ita plerumque fieri soleant, quasi ex Trianguli æquicruris (ut fig. 282.) vel Quadrati aut saltem Parallelogrammi rectanguli (ut fig. 283.) ductu secundum Helicem illam, cui transversim insistat: nihil tamen impedit, quin pro Triangulo illo seu Parallelogrammo quævis alia figura Rectilinea vel Curvilinea substituatur; modo sic feratur (quod & in illis cavendum erit) ut, similem ubique situm ad Helicem illam retineat, quo sulcatio sit ubique sui similis.

Atque etiam, quo Interior Exteriori conveniat, illius Eminentiæ hujus Cavitatibus respondere debent, (& contra,) tanquam ex simili ejusdem figuræ ductu formatæ: ut autem utriusque Eminentiæ ita suis Cavitatibus respondeant, non est necesse.

PROP. III.

Datis in Cochlea, Ambitu Cylindri, cum Inclinationis Angulo, (seu, quod hinc resultat, intervallo, secundum Cochleæ longitudinem æstimato, duarum ejusdem Spiralis conversionum continue proximarum;) & Manubrii cui Vis applicatur longitudine, (seu Ambitu quem Vis peragit in una Cochleæ conversione;) Cochleæ Vis calculo æstimabitur.

Nempe; ut est Intervallum duarum continue proximarum Spiralis conversionum (secundum Cochleæ longitudinem æstimatum,) ad Ambitum quem Vis applicata peragit in una Cochleæ conversione; sic Vis illa Motrix, ad Pondus, Obicem, seu Impedimentum cui æquipollet: quæ itaque aucta movebit.

Adeoque; Quo longius est Manubrium, atque Intervallum illud brevius, eo major est (cæteris paribus) Cochleæ Vis.

Fig. 282. INtelligatur enim Cochlea CO interior seu Mas, per exteriorem seu Fœminam K fixam, ope Manubrii ACB versando protrudi, adversus Obstaculum sive Impedimentum O; quod itaque, protrusa Cochlea, vel propelli debeat, vel (si hoc impediatur per obstinaciam ultra positi L) comprimi aut confringi. Manifestum est, dum Vis in A applicata, una conversione facta, circulum Centro C describit, cujus diameter sit AB; tantundem protrudi Cochleam adversus Impedimentum O, quantum est Intervallum EG; perveniente scilicet D ad E, atque E (circuitu per F facto) ad G, atque G ad H, & sic porro. Si itaque fiat, ut Circuli radio CA vel diametro AB descripti peripheria, ad rectam EG, sic Pondus seu Impedimentum O, ad Vim in A; Vis Ponderi seu Impedimento Æquipollebit: per prop. 5. Cap. 2. Adeoque aucta movebit: per prop. 11, 12. Cap. 1.

Patet hinc; Quo longius est Manubrium CA, vel AB, (in partem alteram vel utramque protractum;) Item, Quo minus est Intervallum EG, (sive id fiat propter minorem Cylindri diametrum, sive propter minorem Inclinationis Angulum, sive propter utrumque;) eo fortius aget Cochlea, cæteris paribus.

Fig. 283. Idem similiter ostenderetur; si fixa Interiore Cochlea CO, puta in trabe lignea L; conversa Cochlea Exterior AB, interjectum quidpiam comprimeret: Seu quod hujus instar fit. Idemque, aliis innumeris Cochleas applicandi modis, pariter accommodabitur.

SCHOLIUM.

AT interim hic nulla ratio habita est Impedimenti quod ex Frictione oritur, quod tamen in Cochleis magnum esse potest; (uti nec in aliis Organis habita est ratio difficultatis quæ est in ipso Organo movendo:) Sed siquis istius etiam rationem habere velit; addendum erit illud ex Frictione Impedimentum, ei quod est in ipso Obstaculo O amovendo, comprimendo, frangendo, aliasve amoliendo: totumque illud Impedimenti loco habendum erit in valore Vis motricis æstimando.

PROP. IV.

Datum Pondus seu Impedimentum, data Vi, Cochlea movere.

Fig. 282, 283. CUM in Cochlea sic constructa, si sit, ut Peripheria Circuli AB, ad rectam EG, ita Pondus, Obex, vel Impedimentum quodvis datum ad datam Vim; Vis Impedimento æquipolleat; (per prop. præced.) Si fiat ea ratio aliquanto major; Vis præpollebit, adeoque movebit. Per prop. 11, 12. Cap. 1.

PROP. V.

Spiralis circa Cylindrum, Longitudinem exhibere.
Et quidem, sive Cylindrus rectus sit, sive Scalenus; sive etiam pro Cylindro substituatur Solidum quodvis Prismaticum.

OStensum est, (ad prop. 1. hujus,) Curvam Spiralem AHH, fig. 280. eandem esse atque AHH rectam, fig. 281. (expansa scilicet in Planum superficie Cylindrica.) Datur autem rectæ AHH fig. 281. longitudo: (utpote, cujus quadratum æquale est duobus simul quadratis rectarum ABB, BH, fig. 281. hoc est, ABB curvæ, rectæque BH, fig. 280.) Datur igitur & curvæ AHH fig. 280. longitudo; (utpote quæ illi rectæ æqualis est.) Quod erat faciendum.

Atque idem similiter ostendetur in Cylindro Scaleno: Aliove Solido Prismatico vel Columnari quovis, sive Rectum sit, sive Scalenum; (dummodo intelligatur, ABB planum, ejusdem Lateri Axive Rectum esse; ipsasque rectas BH, BH, ipsis AB, AB, rectis curvisque aut mixtis proportionales:) per ea quæ ostensa sunt in Schol. prop. 1. hujus.

PROP. VI.

Cochleæ Soliditatem exhibere.

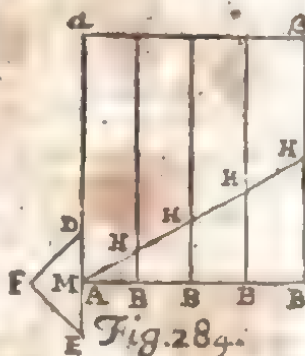


Fig. 289.

INtelligatur Cylindri Cochleæ inscripti superficies Curva, in Planum ABβα parallelogrammum expandi: Atque in eo recta AHH, eadem quæ fuerat, in superficie Cylindrica, curva Spiralis, cujus ductum sequitur Cochlea.

Intelligatur porro, secto per Axem Cylindro, in una aliqua Cochleæ revolutione, Sectio facta DEF; (puta Triangularis, Quadrata, aliave quælibet, pro expositæ Cochleæ natura; cujus Figuræ magnitudinem datam supponimus, ejusque Centrum gravitatis M notum.) Cujus itaque Basin (in latere Cylindri inscripti positam) oblique secet, secundum Obliquitatis angulum HAα, seu AHB.

Si itaque intelligatur, super ABβα planum, in recta DE, ad angulos rectos insistere figura data DEF; atque (eisdem ad planum angulis retentis) super AHH rectam moveri, retento eodem Obliquitatis Angulo: Manifestum est, Prisma describtum iri cujus Basis sit ipsa DEF, Latus autem ipsi AHH æquale, sed Altitudo quanta est recta ABB.

Adeoque (propter Prismata, super æquales bases, altitudinibus proportionalia,) tantundem erit Prisma Scalenum DEFHH, atque Prisma Rectum DEFBB: Nempe, quantum est quod fit ex DEF plano, in altitudinem ABB ducto.

Intelligatur demum, planum illud ABβα, in superficiem Cylindricam (uti prius fuerat) curvatum; manente lineæ ABB longitudine: Manente item ejusdem ad DEF planum positione perpendiculari. Unde fiet, ut recta quam prius descripserat F punctum (ipsi ABB æqualem) protracta jam in arcum majoris circuli similem ipsi ABB, longior jam futura sit (propter curvaturam) quam prius fuerat. Idemque de arcubus qui ab aliis describuntur ejusdem DEF punctis, quæ sunt extra DE rectam, intelligendum erit.

Et propterea majus erit solidum sic curvatum, quam fuerat Prisma. Quantum nempe est, quod fit ex arcu qui ab M (ipsius DEF centro gravitatis) describitur, in ipsam DEF ducto. per prop. 12. Cap. 5.

Cumque hoc perinde valeat, in situ ABB, atque in situ AHH: Si intelligatur DEF figura plana (quam in una aliqua Cochleæ circulatione facit Planum per Axem) in rectam duci quæ æqualis sit arcui circulari quem describeret ejusdem DEF Centrum gravitatis M, secundum ductum arcus ABB latum, (circulatione una vel pluribus, perfectis vel imperfectis prout expositæ Cochleæ Circulationes esse contigerit:) habebitur (quicunque fuerit Obliquitatis Angulus) Cochleæ magnitudo. Et quidem (cum eadem utrobique valeat demonstratio) sive Cochlea Mas fuerit, sive Fœmina. Quod erat propositum.

Sin porro Cylindri, cui adjacet Cochlea, magnitudinem adjungere libeat: id facile fiet ob notam Cylindri magnitudinem: per § O prop. 12. Cap. 5.

SCHOLIUM.

IDem valeret, quod ad Solidi magnitudinem spectat, si, pro vera Cochlea, substitueretur aliud solidum, ex simili ductu ejusdem DEF plani per curvam AHH, aliter constitutam; puta, sumptis BH, BH, non quidem in ipsarum AB, AB, ratione, sed in harum ratione duplicata, triplicata, subduplicata, subtriplicata, aliasve constituta; vel etiam per AHH curvam quamlibet. Quippe, non modo Prisma Scalenum utcunque Inclinatum, sed & utcunque Distortum, æquatur Prismati Recto æque alto: (Quod in Tractatu *de Conicis sectionibus*, prop. 3, 4. ostendimus:) Atque Curvatura Cylindrica utrobique tantundem præstat. Verum de his, aliisque similibus, (cum ad præsens negotium non spectent,) non erit hic expatiandi locus.

CAP.

CAP. X.

De Motibus Compositis, Acceleratis, Retardatis, & Projectorum.

PROP. I.

Si, Mobili in Motu posito, accedat nova Vis, seu novus Impetus, secundum eandem directionem; fit Motus Acceleratio.
Si Impedimentum, seu Vis contraria: fit Retardatio.
Et utrobique pro ratione novi istius sive Impetus, sive Impedimenti, seu Vis contrariæ.
Adeoque si Impedimentum seu Vis contraria sit Vi posita minor; perseverabit Motus ad easdem partes, celeritate minuta.
Si æquale; Motus tolletur: aut etiam si Impedimentum præpolleat.
Sin præpolleat Vis contraria; ponetur etiam Motus ad partes contrarias.

Sit A mobilis, secundum rectam AB moti, Celeritate C, Pondus P: Adeoque Vis seu Impetus quo movetur $V = PC$: per prop. 27. Cap. 1. Idemque Motus eadem Celeritate, nisi accedat Impedimentum, perseverabit; etiamsi non accedat nova causa motrix. per prop. 11. Cap. 1. (Quippe concepto Motui tollendo, tantundem requiritur, quantum ponendo requireretur si non esset.) Accedat autem in B nova Vis seu novus Impetus, secundum eandem directionem, puta ut nV:

Fig. 285.

Adeoque sit Vis tota, ut $V + nV = PC + nPC$. per prop. 8 & 27. Cap. 1. Cum itaque idem sit, quod prius, Moti Pondus P; fiet (diviso $PC + nPC$ per P) celeritas $C + nC$. per eandem prop. 27. Cap. 1. Adeoque acceleratur Motus, in ratione $1 + n$ ad 1. Quod demonstrandum erat. Eademque celeritate (nisi quid aliud intercedat) deinceps movebitur, puta ad D. per prop. 11. Cap. 1.

Sin accedat Impedimentum aut Vis Contraria, ut nV, (quod itaque signo — notandum erit:) Adeoque Momentum seu Vis jam superstes (per prop. 8. vel 10. Cap. 1.) sit $V - nV = PC - nPC$: Et, (propter idem, quod prius, Pondus P,) Celeritas $C - nC$. per prop. 27. Cap. 1. Motus minuitur seu retardatur; utpote cujus Celeritas jam sit ad pristinam, ut $1 - n$ ad 1. Quod itidem demonstrandum erat. Eademque Celeritas (nisi quid aliud intercedat) deinceps perseverabit. per prop. 11. Cap. 1.

Adeoque, si nV minus sit quam V; seu n quam 1: manebit adhuc motus ad easdem partes, sed celeritate minuta, nempe $C - nC$.

Si nV sit ipsi V æquale, seu $n = 1$: Motus tolletur; propter Impedimentum Momento æquale: adeoque $C - nC = 0$, Celeritas nulla.

Atque hæc quidem indifferenter sive nV sit simpliciter Impedimentum, sive sit Vis contraria. per prop. 11, 12. Cap. 1.

Si vero nV majus sit quam V; (adeoque $V - nV$ quantitas negativa; per prop. 8. Cap. 1.) sitque nV simpliciter Impedimentum: adhuc fortius sistetur Motus, (propter Impedimentum Momento præpollens, adeoque potens etiam Majorem Motum sistere:) per prop. 11. Cap. 1.

Sin nV (ipsi V præpollens) sit (non simpliciter Impedimentum, sed) Vis contraria: non modo totus qui prius fuerat motus tolletur, sed ponetur contrarius, per prop. 12. Cap. 1. Celeritate $-C + nC$; per prop. 27. ejusdem. Quæ erant ultimo demonstranda.

PROP.

PROP. II.

Si Vis Motricis, per se æquabilis, continua fiat applicatio; producetur Motus continue Acceleratus.

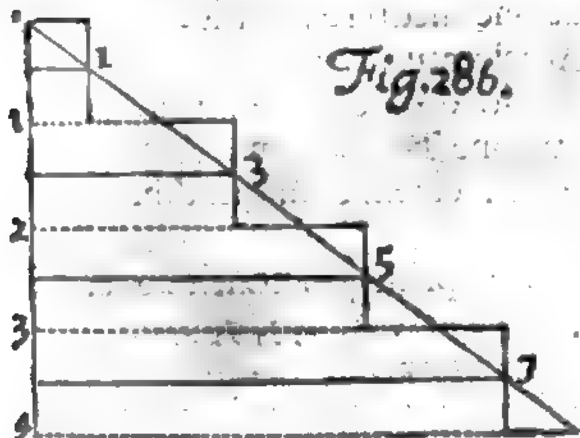
Et quidem ita Acceleratus, ut temporibus æqualibus æqualia concipiat Celeritatis Incrementa: Quem Motum vocant *Æqualiter Acceleratum.*

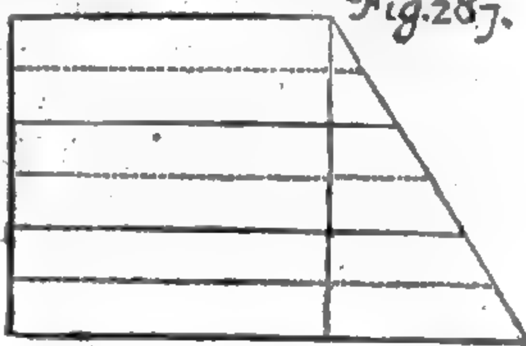
Si Vis Impeditivæ, per se æquabilis, similis fiat applicatio; similis prodibit Motus Retardatio. Quem Motum vocant *Æqualiter Retardatum.*

Et quidem hoc eousque donec totus tollatur; vel etiam (si Impedimentum illud sit à Vi contraria) ponatur contrarius.

INtelligatur enim Causa Motrix aliqua, uno Temporis momento, Mobili imprimere gradum Celeritatis ut 1. Gradus hic, nisi fuerit Impedimento aliquo sublatus, etiam sine nova Causa perseverabit per prop. 11. Cap. 1. Eadem vero Causa, similiter agens, secundo item Momento applicata, tantundem efficiet; per prop. 7. Cap. 1. Adeoque (perseveranti gradui primo) secundum superaddet. Et similiter tertio momento (duobus illis perseverantibus) superaddet tertium. Atque sic deinceps.

Adeoque (sumpto initio Seriei à principio Motus) Celeritatum gradus (adeoque & Longitudines emensæ; per prop. 23. Cap. 1.) Erunt, ut 1, 2, 3, 4, &c. seu (quod in infinite exiguis tantundem valet, per prop. 1. Cap. 5.) ut 0, 1, 2, 3, &c. vel etiam, ut 1, 3, 5, 7, &c. arithmetice proportionales; seu, ut rectæ Triangulum Complentes, per def. 1. Cap. 4. (Respicitur autem illic, figura ex parallelogrammis triangulo Circumscripta; justo Major: illic, Inscripta; justo Minor: hic, intermedia, partim Circumscripta, partim Inscripta; ipsi Triangulo Fig. 286.





Æqualis: ut ad prop. 1. Cap. 5. dictum est.) Adeoque emensæ Longitudines, ab initio computatæ, ut Triangulorum illorum Plana quæ complent illæ rectæ: adeoque in duplicata ratione Temporum.

Si vero, non ab ipso Seriei initio, principium sumamus; sed ab acquisito seu posito aliquo Celeritatis gradu; puta, si à posito Celeritatis gradu ut C initium sumamus; similiter ostendetur, continuis momentis sequentibus, Celeritatis gradus futuros $C+1$, $C+2$, $C+3$, &c. seu $C+1$, $C+3$, $C+5$, &c. Hoc est, ut rectæ in Trapezio, seu Triangulo truncato. Quale autem sumendum erit Trapezium, facile determinabitur ex ratione quam habet Celeritas ultimo acquisita; ad celeritatem primo positam: quippe inde determinabitur ratio parallelorum in trapezio laterum maximi ad minimum; eritque Triangulum super eorum maximo æque altum, ad Trapezium, ut maximum illud ad summam utriusque; Altitudine sumpta qualibet. Fig. 287.

 Eodem

Eodem modo ostendetur, in motu Retardato: Puta, si, posito aliquo celeritatis gradu quo feratur mobile, ut C, intelligatur Vis impeditiva, in se æquabilis, continuo accedere; quæ propterea singulis momentis tantundem demat: Fient celeritatis gradus continue sequentes, ut $C-1$, $C-2$, $C-3$, $C-4$, &c. puta usque ad $C-C=0$, ubi motus primo positus plane absumitur.

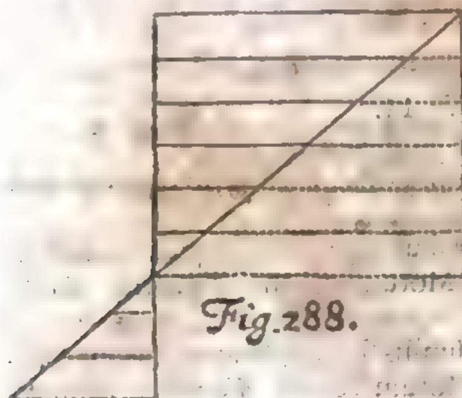


Fig. 288.

Adeoque, si, porro continuetur ablatio, puta ad $C-C-1$, $C-C-2$, $C-C-3$, $C-C-4$, &c. hoc est, ad $0-1$, $0-2$, $0-3$, $0-4$, &c. seu -1, -2, -3, -4, &c. sitque Vis illa Impeditiva, non Impeditiva simpliciter, sed in contrarium Motiva: habebitur Motus in partes contrarias, cum celeritatis gradibus 1, 2, 3, 4, &c. per prop. 12. Cap. 1. Si vero simpliciter Impeditiva sit; ubi ad $C-C$ pervenitur, tollitur Motus; sed quicunque deinceps succedat gradus Impedimenti, utut fortius impediat, non tamen in contrarias partes pellit: Supponitur utique Vim Motricem non habere.

Prioris instantiam habemus in Motu Gravium sursum projectorum (seclusa consideratione impedientis medii;) ubi post superatam à Gravitate Vim sursum projicientem, descendit grave. Posteriorem quadantenus refert motus projectorum (seclusa gravitatis consideratione) in quamcunque partem; Ubi Medii Densitas, vim projectricem obtundit, & sensim minuit, tandemque tollit; sed non in partes contrarias repellit.

PROP. III.

Si consideretur Gravitas tanquam Vis Motrix deorsum, in se æquabilis, atque continue applicata:

Descensus Gravium (seclusa consideratione medii resistentis, & siquid est ejusmodi) est Motus æqualiter Acceleratus.

Adeoque, temporibus quibusvis à principio decidentiæ sumptis, emensæ Longitudines sunt in duplicata ratione Temporum.

Puta, sumptis Temporibus, ut 1, 2, 3, 4, &c. emensæ longitudines erunt ut horum quadrata 1, 4, 9, 16, &c.

Temporibus autem invicem æqualibus, à principio continue consequentibus, primo, secundo, tertio, quarto, &c. ut 1, 3, 5, 7, &c. quadratorum differentiæ, arithmetice proportionales.

Si vero à posito aliquo seu jam acquisito celeritatis gradu initium sumatur; longitudinibus jam dictis addendum erit quantum ea celeritate, æquabili motu, eo tempore acquisitum foret.

Gravium vero sursum projectorum Ascensus, est motus æqualiter Retardatus:

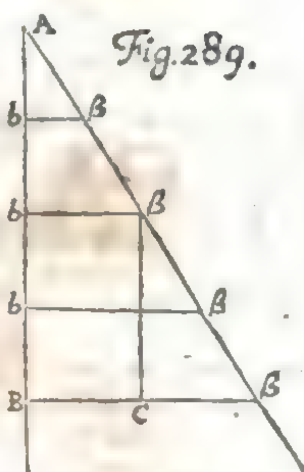
Et Longitudines ibidem emensæ habentur, si auferantur jam dictæ longitudines à longitudine quæ Celeritate prima eodem tempore foret acquisita.

Sequitur ex præcedente. Quippe, si intelligatur Grave in A; sublato fulcro, descensum ob gravitatem suam inchoans; momento primo celeritatis gradum acquisivisse, ut 1; secundo, ut 2; tertio, ut 3; & sic deinceps; (propter tantundem celeritatis singulis momentis additum:) adeoque celeritatum gradus temporibus à principio sumptis ubique proportionales: puta ut Tempus A b, ad Tem-

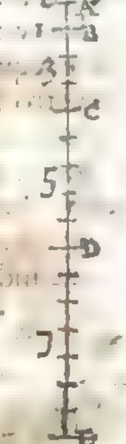
Fig. 289.

pus

pus A B, sic b β (celeritatem in b) ad (celeritatem in B) B β: & sic ubique: Cum Longitudines emensæ, sint Celeritatum gradibus proportionales; erunt omnes longitudines tempore A b transactæ, ad omnes transactas tempore A B; (seu tota longitudo transacta tempore A b, ad totam transactam tempore A B;) ut omnes rectæ complentes A b β triangulum, ad omnes complentes triangulum A B β; Hoc est, ut Triangulum A b β ad ipsum A B β Triangulum; Adeoque in Laterum A b, A B, ratione duplicata (propter figuras similes in duplicata ratione laterum homologorum.) Ideoque si sumantur tempora A b, A b, &c. ut 1, 2, 3, 4, &c. erunt Triangula A b β, A b β, &c. (adeoque & transactæ Longitudines,) ut 1, 4, 9, 16, &c. Et propterea, quæ temporibus æqualibus continue sequentibus, A b, b b, &c. transiguntur; A b β, b β β b, &c. ut eorum differentiæ, 1, 3, 5, 7, &c. Et sic ubique.

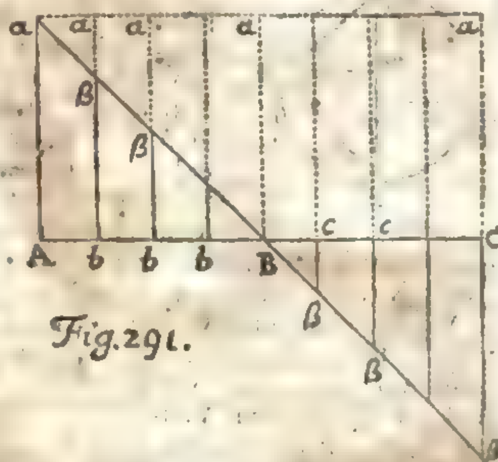


Puta, sumptis in recta A E, Fig.290. partibus AB, BC, CD, DE, &c. ipsis 1, 3, 5, 7, &c. proportionalibus: æqualibus illæ temporibus transiguntur.



Si vero intelligatur, Fig.289, non ab ipso motus initio in A, computus instituendus; sed, à celeritatis gradu jam acquisito, ut b β seu B C; vel quod tantundem erit, si non suapte tantum gravitate motum concipiat Grave, sed à Vi Motrice extrinsecus pellatur seu projiciatur, unde Celeritatis gradum concipiat ut b β, (qua itaque ferretur nisi quid aliud accederet, per prop. 11. Cap. 1.) quæ deinceps ob gravitatis impetum continue applicatum, continue (ut dictum est) æqualiter acceleranda sit: erunt Celeritatis gradus, singulis ipsius temporis b B momentis, ut rectæ trapezium b β β B complentes, & Longitudo per id temporis emensa, ut ipsum b β β B trapezium; quæque temporis illius partibus transiguntur Longitudines, respectivis trapezii partibus proportionales. Et quidem si intelligatur B b β parallelogrammum, repræsentare longitudinem emetiendam tempore b B celeritate ubique ipsi b β æquali: triangulum β C β repræsentabit id quod propter accelerationem accedit.

Similiter si intelligatur Grave, in A, Fig.291. sursum projectum ea Vi quæ Celeritatē imprimeret ut A α; qua perseverante transigendam tempore A B longitudinem repræsentet AB αα parallelogrammum. Ea vero, propter Gravitatem, ut Vim contrariam, contra renitentem; &, propter continuam applicationem æqualem, tantundem singulis momentis dementem; continue minuetur: ablatis rectis α β, α β, triangulum α β B complentibus; relictis b β, residuos celeritatis gradus repræsentantibus; donec tandem, ita crescentibus α β, ut fiat α B ipsi A α æqualis, tota Vis sursum tendens exhauriatur; adeoque in temporis puncto B desinat Ascensus. Sed, crescente porro ob Gravitatem impetu; non modo non feretur sursum, sed incipiet descendere, (Vi deorsum jam præpollente;) & quidem (ob continue crescentem impetum æquabiliter) motu æqualiter accelerato, (ut crescunt c β, c β, rectæ, triangulum B C β complentes;) donec, facto B β C triangulo, ipsi A α B æquali, tantundem descenderit quantum ascenderat prius: atque adhuc ultra nisi quis Obex impediat.



SCHOLIUM.

PRopositionem hanc Hypothetice proponimus: quoniam non inter omnes constat, vel quænam sit Gravitatis Causa, vel etiam secundum quam Regulam agat, (variis varias Gravitatis Hypotheses excogitantibus.) Neque nobis hic in animo est, illam in Physicis quæstionem determinare, in cujuscunque præjudicium. Sed, stante illa Hypothesi Physica, (quam vel reapse veram esse, vel ad veritatem quam proxime accedere, Experimenta testantur;) Theorema Mathematicum, ostensum est.

PROP. IV.

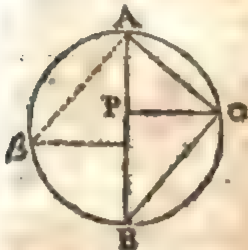
Eædem obtinent accelerandi & retardandi rationes, dum fertur Grave per rectam Inclinatam, seu in plano Inclinato; atque per rectam ad Horizontem Perpendicularem: Sed celeritatibus variis pro varia declivitate.

Hinc sequitur; Eodem tempore per quamlibet circulo inscriptam, diametro Perpendiculari (in Circulo Erecto) vel perpendiculari Succedaneæ (in circulo Inclinato) conterminam, ferri Grave; quo per illam Diametrum.

Item; Eandem celeritatem descendendo acquiri, & ascendendo deperdi, in recta inclinata; atque in perpendiculari æque alta: Adeoque & eundem utrobique impetum, & percussionem eandem.

NAM per prop. 26. Cap. 2. Obliquitas Plani in eadem ratione minuit omnium in eo descensuum celeritates; nempe in ea quam postulat plani declivitas: Hoc est (per prop. 25. ejusdem) celeritates erunt in declivitatum ratione, seu in reciproca rectarum æque altarum. Adeoque quæ erant in A P B perpendiculari, ut 1, 2, 3, 4, &c. erunt in inclinata A O, si hæc sit illius dupla, ut $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}$, &c. si tripla; ut $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}$, &c. & similiter in aliis proportionibus.

Fig. 292.



Vel etiam, idem ab origine demonstrabitur ut in prop. 2, 3. hujus. Nempe si, quod in A B gravitat ut 1, idem in A O (propter obliquitatem) gravitet, verbi gratia, ut $\frac{1}{2}$; unde momento primo, seu tempore exiguo, acquiratur celeritas ut $\frac{1}{2}$: ejusdem applicatione continua tempore secundo, acquiretur alterum $\frac{1}{2}$; tertio, tertium, &c. adeoque (prioribus permanentibus) celeritates erunt, ut $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}$; &c. eadem ratione cum ipsis 1, 2, 3, 4, &c.

Atque hinc colligitur Galilæi propositio illa; Eodem tempore percurri A O, vel O B, subtensas quaslibet circuli Diametro perpendiculari A B conterminas, quo ipsam A B diametrum. Cum enim (per ante demonstrata) celeritates omnes in A O, ad respectivas in A P B, sint in reciproca ratione rectarum æque altarum; hoc est, ut A P ad A O; hoc est (propter similia triangula) ut A O ad A B, (longitudines transactæ ad invicem:) eodem tempore percurrentur A O, A B. Idemque similiter ostendetur de O B, seu huic parallela, (adeoque æquali & pariter inclinata) A β.

(Quodque de A B perpendiculo in circulo erecto ostensum est; similiter obtinet de A B perpendiculi succedaneo, in circulo inclinato: propter omnes in eodem plano descensus in eadem ratione impeditos. per prop. 26. Cap. 2.)

Cumque (ut jam ostensum est) celeritates in A O, ad respectivas in A B, sint ubique proportionales; sintque eodem tempore percursæ A O, A B; erit celeritas in O (lati per A O,) ad celeritatem in B (lati per A B,) ut A O, ad A B. Sed & ita est celeritas in P ad eandem celeritatem in B (lati per A P B.) Nam (per

prop.

prop. 2, 3. hujus,) transactæ longitudines sunt in duplicata ratione temporum; adeoque & celeritatum, utpote quæ sunt temporibus à principio sumptis proportionales. Adeoque Celeritatis in P, ad celeritatem in B, in subduplicata ratione AP ad AB; hoc est, (propter AP, AO, AB, continue proportionales,) ut AO ad AB. Eadem igitur est celeritas in O, quæ in P. (Idemque similiter obtineret, ob rationem modo dictam, si fuerit APO planum inclinatum, & AP perpendiculi succedaneum.) Adeoque & Impetus utrobique æqualis (cum idem sit utrobique tum Pondus tum Celeritas;) & æqualis Ictus seu Percussio: ut in Capite de Percussione ostendetur.

Quæque de Descensuum Accelerationibus hic ostensa sunt: eadem similiter de Ascensuum Retardationibus ostenderentur. Quippe Obliquitas Plani eadem ratione Ascensum adjuvat qua impedit Descensum. per prop. 25. Cap. 2.

PROP. V.

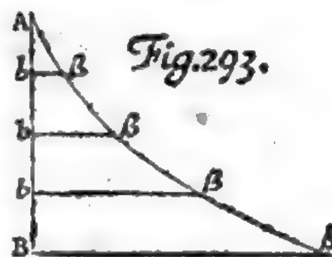
Si, in Motu continue Accelerato, Celeritates (ab initio computandæ) sint in Temporum ratione Duplicata: Longitudines emensæ, erunt in Temporum ratione Triplicata.

Adeoque, sumptis temporibus, ut 1, 2, 3, 4, &c. longitudines transactæ erunt, ut 1, 8, 27, 64, &c. numeri Cubi.

Si Celeritates sint in Temporum ratione Triplicata, Quadruplicata, &c. Longitudines emensæ, erunt in Temporum ratione Quadruplicata, Quintuplicata, &c. Una semper vice plus multiplicata, quam Celeritates.

Adeoque, sumptis temporibus ut 1, 2, 3, 4, &c. longitudines erunt, ut 1, 16, 81, 256, &c. numeri Biquadrati: vel, ut 1, 32, 243, 1024, &c. numeri Supersolidi. Et sic deinceps.

Longitudinesque, continuis temporibus æqualibus transactæ, ut illorum Cuborum, Biquadratorum, Supersolidorum, &c. differentiæ.



INtelligatur enim, Motu ab A inchoato, in Temporis AbB momentis b, B, Celeritates esse in duplicata ratione rectarum Ab, AB; hoc est, ut ipsarum Ab, AB, Quadrata: Puta, ut rectæ bβ, Bβ, complentes ABβ complementum Semiparabolæ. Erunt itaque Longitudines temporibus Ab, AB, emensæ, (per modo demonstrata ad prop. 2. hujus,) ut ipsa Complementi plana Abβ, ABβ; hoc est (propter trilinea Abβ, ABβ, subtripla Parallelogrammorum Abβ, ABβ, per prop. 6. Cap. 5.) ut ipsa Abβ, ABβ, rectangula seu parallelogramma. Sunt autem, propter altitudines ipsis Ab, AB, vel æquales vel saltem proportionales; basesque bβ, Bβ, in earundem ratione duplicata; Parallelogramma ipsa (utpote in ratione ex Basium & Altitudinum rationibus composita) erunt in earundem ratione Triplicata.

Et propterea, sumptis ab initio temporibus Ab, Ab, &c. ut 1, 2, 3, 4, &c. respective Celeritates erunt, ut 1, 4, 9, 16, &c. & longitudines ab initio transactæ, ut 1, 8, 27, 64, &c. Adeoque, temporibus æqualibus, continue à principio sumptis, 1, 7, 19, 37, &c. Cuborum differentiæ.

Similiter ostendetur; sumpto Complemento Paraboloeidis Cubicalis (in quo rectæ bβ, Bβ, sunt in rectarum Ab, AB, ratione Triplicata;) Longitudines emensas (trilineis Abβ, ABβ, proportionales,) esse in earundem ratione Quadruplicata.

Atque sic deinceps, pro potestatibus aliis, si sumantur Paraboloeides respective conformes. Constat itaque propositum.

PROP. VI.

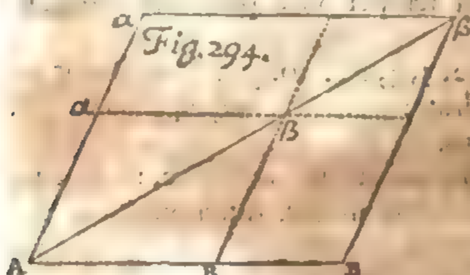
Si mobile, ob duas causas Motrices, duos concipiat directos impetus; puta secundum duas rectas positione datas, angulum facientes; Celeritatibus in se æqualibus, ad invicem vero eisdem rectis, ut parallelogrammi lateribus longitudine datis, proportionalibus: feretur Mobile per Parallelogrammi diagonium, ea celeritate quæ sit ad datas, ut diagonium illud ad respectiva latera.

Adeoque tantundem est, lationem quod spectat, sive feratur Mobile motu ex duobus composito qui directiones habeant secundum Parallelogrammi latera, & celeritates ipsis proportionales; sive Motu simplici, secundum ejusdem diagonium, & celeritate proportionali. Quippe, utrovis modo, eodem tempore, per eundem tramitem, eadem celeritate feretur.

Idemque Motui ex pluribus composito accommodabitur; sive Directiones habeant in eodem plano omnes, sive secus.

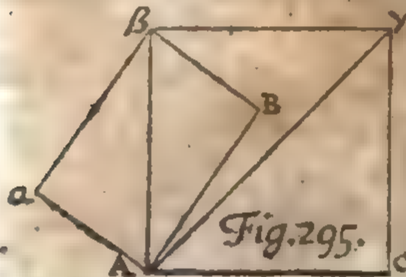
Potestque idem propterea Motus infinitis modis componi.

Intelligatur A Mobile, ob causam aliquam Motricem, Impetum concipere secundum Directionem A α; aliumque, ob causam aliam Motricem, secundum Directionem A B; sitque illius Celeritas ad Celeritatem hujus, ut A α recta ad rectam A B. Et compleatur parallelogrammum, cujus Diagonium sit A β.



Manifestum est, quo tempore A, secundum directionem A α, feratur ad rectam α β; eodem ferri secundum directionem A B, ad rectam B β; adeoque fore in puncto β. (Et sic ubique.) Et, propter eandem ubique celeritatum rationem, adeoque eandem ubique rationem laterum A α, A B, & communem Directionum Angulum A; similia fore inter se omnia A β parallelogramma. Et propterea in eadem recta fore omnia β puncta. Cumque eodem tempore per A β rectam feratur A mobile; quo simul ferri intelligatur tum secundum directionem A α, Celeritate A α; tum secundum directionem A B, celeritate A B: Celeritas motus per A β, ad celeritates illas respective sumptas; erit ut recta A β (diagonium) ad ipsas A α, A B, rectas, latera parallelogrammi. Adeoque tantundem erit, lationem quod spectat, sive feratur motu simplici secundum directionem A β celeritate A β; sive motu composito, secundum directionem A α celeritate A α, atque secundum directionem A B celeritate A B, simul. Quippe eodem tempore, eadem celeritate, atque in eodem tramite, feretur Mobile ab A ad β.

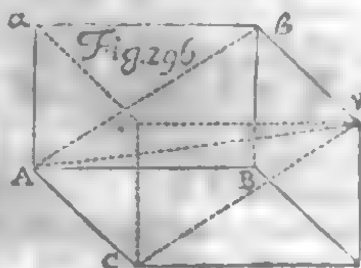
Cumque eadem A β recta possit esse Diagonium Parallelogrammorum infinitis modis variatorum, totidem Motuum Compositiones innuentium, quarum singulis æquipollet (per jam demonstrata) idem Motus simplex: Manifestum est eundem posse Motum infinitis modis componi. Quod etiam ulterius patebit, ex casibus sequentibus.



Intelligatur deinde, idem A mobile, ob totidem Causas Motrices, secundum tres in eodem Plano Directiones A α, A B, A C; celeritatibus ipsis A α, A B, A C, proportionalibus. Ostendetur, ut prius, motum ex duobus illis secundum A α & A B compositum; tantundem esse atque motum simplicem secundum A β celeritate A β. Sed & similiter ostende-

oſtendetur, motum compoſitum ex hoc (duobus æquipollente) atque ex eo ſecundum A C celeritate A C, tantundem eſſe atque ſimplicem per Diagonium A γ celeritate A γ. Ergo, qui ex tribus illis per A α, A B, A C, (cum ſuis reſpective Celeritatibus,) componitur; æquipollet ſimplici per A γ Celeritate A γ.

Idem ſimiliter oſtendetur, ſi intelligantur tres illæ Directiones A α, A B, A C, non in eodem plano omnes, ſed in diverſis; puta, ut tria ejuſdem Parallelepipedi Latera communi puncto angulari coeuntia, (quo Caſu A γ erit Parallelepipedi Diagonium;) aut etiam, ſi plures adhuc fuerint Directiones, utcunque ab eodem A communi puncto prodeuntes, ſecundum quas A Mobile feratur. Conſtat itaque propoſitum.



SCHOLIUM.

Quæ de Motibus per A α, A B, A C, æquabilibus oſtenſa ſunt; ſimiliter oſtenderentur ſi eſſent illi omnes ſimiliter Accelerati vel ſimiliter Retardati; non autem ſi diſſimiliter.

PROP. VII.

Si Motus Æquabilis, cum Accelerato vel Retardato componatur; vel Motus Accelerati aut Retardati, ſed diſſimiliter, componantur: Alia atque alia linearum ſpecies emerget, per quam feretur Mobile, pro varia compoſitionum ratione.

Exempli gratia. Si Motus Æquabilis, cum Æqualiter (ſeu in ratione Temporum) Accelerato componatur; (adeoque motus acceleratus in duplicata ratione motus æquabilis:) Latio erit in Curva Parabolica: Et (ſi Motuum Directiones ſint ad invicem rectæ) longitudines emenſæ, erunt ut reſpectiva plana Hyperbolica, Curvæ & conjugato Axi interjecta.

Si Motus Æquabilis componatur cum Accelerato in temporum ratione Duplicata, (ut hic ſit ad illum in ratione Triplicata:) Latio erit in Curva Paraboloeidis Cubicalis: Et Longitudines emenſæ, ut reſpectivæ iſtius curvæ particulæ, ſeu ſpatia plana ipſis proportionalia.

Si Motus Æqualiter Acceleratus (ſeu acceleratus in ratione Temporum) hoc eſt, qui ſit in Duplicata ratione temporum, cum motu qui ſit in Temporum ratione Triplicata (ſeu accelerato in temporum ratione Duplicata,) componatur: Latio erit in Curva Paraboloeidis Semi-Cubicalis: Et (ſi Motuum Directiones ſint ad invicem rectæ) Longitudines emenſæ, ut reſpectiva Spatia Parabolica, Axi & Curvæ interjecta.

Simileque in aliis caſibus Calculo determinabitur.

IN-

INtelligatur A T T recta, secundum quam, Vi aliqua Motrice, propellatur A mobile, Motu Æquabili; adeoque, sumptis temporibus ut 1, 2, 3, 4, &c. emensæ longitudines A T, A T, &c. erunt item ut 1, 2, 3, 4, &c. per prop. 26. Cap. 1.

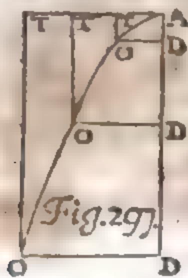


Fig. 297.

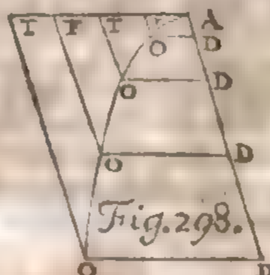


Fig. 298.

Atque intelligatur idem Mobile, alia Vi Motrice, impelli, secundum directionem A D, motu æqualiter accelerato; adeoque, sumptis temporibus ut 1, 2, 3, 4, &c. emensæ longitudines A D, A D, &c. erunt ut 1, 4, 9, 16, &c. eorum quadrata. per prop. 2, 3. hujus.

Si itaque; dum, motu illo, fertur A mobile, Longitudine A T; hoc est, ab A D ad huic parallelam T O; feratur, motu hoc, longitudine A D; hoc est, ab A T ad D O; & sic ubique: Erunt ubique A D, A D; hoc est, T O, T O; in rectarum A T, A T; hoc est, D O, D O; ratione duplicata. Adeoque (propter naturam Parabolæ) quæ, per omnia O, O, puncta, transit Curva, (quæ est Lationis via, utpote in qua mobile semper erit,) est Parabola. Quod demonstrandum erat.

Atque hoc perinde obtinet sive ad angulum rectum coeant in A rectæ A T, A D, (ut ubi A est vertex Axis,) sive ad alium quemvis (ut ubi A vertex est cujusvis alterius diametri:) Et quicunque fuerit utrobique Celeritatis gradus; hoc est, quodcunque habeat Parabola illa Latus Rectum. Quippe semper erunt T O, T O, rectæ, in rectarum A T, A T, ratione duplicata; ob naturam Parabolæ.

Fig. 297. Si vero A sit Vertex Axis, erunt longitudines A O, A O, per quas fertur mobile; Spatiis Hyperbolicis, Curvæ & Conjugato Axi interjectis, respective sumptis proportionales. Per ea quæ alibi, in Tractatu *De Curvarum* Εὐθύνσει, demonstravimus; ubi de Parabolæ Εὐθύνσει agitur.

Fig. 297, 298. Similiter; positis A T, A T, (pro motu æquabili) in ratione Temporum; & (pro motu accelerato in Duplicata ratione Temporum) A D, A D, in earundem ratione Triplicata, (per prop. 5. hujus:) Ostendetur, curvam A O O fore Paraboloeidem Cubicalem: Propter T O, T O, hoc est A D, A D, in rectarum A T, A T, hoc est D O, D O, ratione Triplicata. Quod itidem demonstrandum erat.

Et Curvæ particulis A O, A O, plana proportionalia exhibentur, per ea quæ generaliter ostendimus in Schol. prop. 38. *Arithmeticæ Infinitorum.*

Idemque aliis Accelerationum speciebus accommodabitur, sumptis Paraboloeidibus aliis, prout res postulaverit.

Intelligantur demum rectæ A T, A T, non in ipsa Temporum ratione, sed (pro motu æqualiter accelerato, per prop. 2. hujus) in Temporum ratione Duplicata; adeoque Tempora in earundem ratione Subduplicata: Item rectæ A D, A D, (pro motu accelerato in Duplicata ratione temporum) in temporum ratione Triplicata, (per prop. 5. hujus;) adeoque in rectarum A T, A T, ratione Subduplicatæ-Triplicata. Erit (propter istius paraboloeidis naturam) Curva A O O, paraboloeides quam *Semi-cubicalem* appello; cujus Index seu Exponens sit $\frac{3}{2}$ (Puta, in qua rectæ A D, A D, hoc est, T O, T O; sint in rectarum A T, A T, hoc est D O, D O, ratione Subduplicatæ-Triplicata.) Per illam itaque Curvam feretur Mobile, quod Motu ex sic acceleratis composito fertur. Quod item erat demonstrandum.

Istius autem Curvæ partes A O, A O, spatiis Parabolicis proportionales esse, demonstratum est in Tractatu modo memorato, de *Curvarum* Εὐθύνσει, ubi de *Curva Semiparaboloeidis Cubicalis* agitur, cui æqualem rectam exhibemus.

Eodem

Eodem modo de aliis Motuum Compositionibus judicandum erit (mutatis mutandis) Curva sic posita ut Calculus indicaverit.

PROP. VIII.

Motus Projectorum (exclusa consideratione resistentis Medii) est in curva Parabolica.

Intellige; Nisi fiat Projectio illa vel directe Sursum, vel directe Deorsum: Quo casu motus erit in linea Recta; Sursum, Retardatus; Deorsum, Acceleratus.

SEquitur ex praecedente. Esto enim Vis à Projectore impressa, secundum directionem A T T; Mobile impellens Motu Æquabili, adeoque eadem ubique Celeritate: per prop. 11. Cap. 1. Interea dum Gravitas motum imprimit deorsum, puta secundum directionem A D D, aequaliter acceleratum: per prop. 3. hujus. Adeoque, qui ex utrisque componitur, est per A O O Curvam Parabolicam: per praecedentem. Fig. 297.

Sin fieri intelligatur projectio directe sursum, vel directe deorsum: degenerabit Parabola in lineam Rectam; (propter projectionis motum, & motum gravitationis, in eadem recta;) in qua fiet motus vel Retardatus sursum, vel Acceleratus deorsum; de quibus supra dictum est.

SCHOLIUM.

HUc spectant motus projectorum ex Bombardis, Arcubus, Balistis, aliisque Machinis projicientibus, aut ex projicientis manu, aliave Vi qualibet, ubi projecta Gravia, postquam à projiciente separantur, impresso Impetu feruntur.

Dico autem, *exclusa consideratione resistentis medii*: Quoniam, ob hanc resistentiam, Motus secundum directionem projicientis, qui supponitur Æquabilis, revera minuitur, & sensim extinguitur, ob continuam cum medio resistente luctam: & propterea sensim deficit à linea Parabolica.

Atque hinc fit, quod Globuli ex Bombardis, in majori distantia minus feriunt. Si enim, revera, eadem celeritate procederet latio secundum rectam A T, (quicquid sit de motu descensus secundum A D,) eadem violentia feriret objectum Murum (cui A T recta sit) sive longius, sive in propinquo positum: (per prop. 21. Cap. 1.) contra quam experientia compertum est.

CAP. XI.

De Percussione.

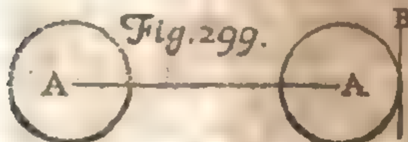
PROP. I.

Si Grave motum, tanquam perfecte Durum consideretur; atque in Obicem sive Obstaculum firmum directe impingat, quod itidem perfecte Durum sit; Sitque Vis Gravi sic moto æquipollens, Minor quam est Vis Obstaculi motui resistentis, vel etiam ipsi æqualis: Motus sistetur.

Sin Major fuerit: continuatur motus, superato Obice; sed ea ratione tardatus seu diminutus, quam exigit Obicis resistentia; quam Calculus indicabit.

Nempe, Si ex Momento (quod ex Pondere & Celeritate componitur) tantundem auferatur quantum Obici amoliendo æquipolleat; residuumque, si quod sit, per Pondus dividi intelligatur: prodibit gradus Celeritatis residuæ.

Esto Gravis Moti A, perfecte Duri, Pondus mP, Celeritas rC, cui æquipolleat Momentum seu Vis $mrPC$, per prop. 27. Cap. 1. Atque Obstaculum B cui directe impingit, Vim resistendi habeat ut $nsPC$.



Si Minor sit $mrPC$, quam $nsPC$; præpollebit Impedimentum: Sin Æqualis; saltem æquipollebit Impedimentum: Et Motus utroque casu sistetur. (Erit utique, si æquales sint, $mrPC - nsPC = mrPC - mrPC = 0PC$, vis nulla: Si Impedimentum præpolleat, pro impedimento reputandum est.) Per prop. 10, 11, Cap. 1.

Sin Major sit $mrPC$, quam $nsPC$; præpollebit Vis; adeoque superabitur Impedimentum: Motusque continuabitur, sed Diminutus. per prop. 10, 11. Cap. 1.

Quantus autem deinceps futurus sit Motus, & quanta Celeritas; Calculo sic colligitur. Vis præpollens, $mrPC$; una cum Impedimento contrario, $nsPC$; tantundem valet atque Vis $mrPC - nsPC$, per prop. 10. Cap. 1. (Absumitur utique in Obice rumpendo, prostrando, seu utcunque amoliendo, tantundem Virium seu Momenti, quantum Obicis Firmitati seu resistendi Vi æquipolleat: reliquumque, si quod est, Ponderi ultra ferendo impenditur.) Estque Gravis Moti pondus (idem quod prius) mP: Ergo Celeritas futura (ut quæ oritur ex Momento per Pondus diviso) $\frac{mr - ns}{m} C$; per prop. 27. Cap. 1.

SCHOLIUM.

Perfecte Durum, appello, quod ictui nequaquam cedit; Adeoque nec Molle, nec Elasticum.

Molle, appello, quod ictui ita cedit ut pristinam figuram amittat: Ut Lutum, Cera, Plumbum, aliaque similia quæ ictu deformantur; aut etiam Corpora Fluida. Ubi enim hoc contingit, Virium pars aliqua in deformando Corpore absumitur, nec tota in Obstaculum impenditur: Cujus itaque seorsim est habenda ratio.

Elasticum

Elasticum appello, quod, utut ictui aliquantisper cedat, se tamen in pristinam formam suopte marte restituit: ut sunt Elateres Chalybei, Lignei, aut cujuscunque materiæ; (nostrates *Springs* appellant;) & Corpora istiusmodi quæ pressa resurgunt, aut quocunque modo à situ debito detorta vim habent semet restituendi. Qua de re post agetur Cap. 13. ubi de Resilitione agetur.

Addi etiam hic poterit, ut non tam Fragile sit aut Friabile Corpus Motum, ut ictu frangatur. Quippe tum, Virium pars aliqua frangendo Corpore absumitur.

Eademque, quam hic supponimus, Durities, etiam in propositionibus sequentibus intelligenda est. Quod hic monitum esto, ne opus sit sæpius id repetere.

Sin objiciat quis (quod & fortasse verum est) ejusmodi corpus nullum esse, quod nihil habeat vel Mollitiei vel Elasticitatis; neque tam firmum aliquod Obstaculum quod ictu vel levissimo non aliquantulum loco moveatur; quasi Lapilli quantumvis exigui ictu, modica Vi jacti, Alpina rupes loco nonnihil dimoveretur, aut etiam quæ huic conjuncta est, ipsa Telluris moles; utut tantillum id sit ut sensu percipi nequeat. Hoc neutiquam obest præsenti negotio. Quotcunque enim fuerint hujusmodi accidentia in complexo subjecto; id nihil impedit, quin abstractione mentis separari possint; atque hæc quæ præ manibus est consideratio, quasi ea non essent, tractari; eaque, si tanti sint ut negligi non debeant, seorsum considerari poterunt.

Directe impingere, hic dicimus, cum recta secundum quam movetur, per moti Corporis Centrum-Gravitatis & punctum Contactus ducta, sit, superficiei corporis in quod impingitur, perpendicularis: aut etiam, si non in puncto, sed linea vel superficie se tangant mutuo, cum recta illa sit huic communi seu lineæ seu superficiei perpendicularis. Si autem Oblique vel Indirecte impingat; sive ideo fiat quod recta secundum quam movetur, per Centrum gravitatis transiens, ad punctum tactus non pertingat; sive quod, quæ sic pertingit, superficiei corporis in quod impingitur non sit perpendicularis; advocanda hic erunt in considerationem quæ supra de Motuum obliquitate traduntur Capite II.

PROP. II.

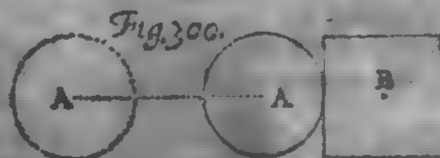
Si Grave motum, Gravi Quiescenti directe impingat, sed ita constituto ut aliunde ne moveatur non impediatur: utrumque junctim movebitur, ea celeritate quam Calculus (Ponderum rationibus & pristina Celeritate rite computatis) indicabit.

Nempe; si Momentum (ex Moti Gravis Pondere & Celeritate compositum) per utriusque simul Pondus dividatur; habebitur futura Celeritas.

Seu (quod eodem recidit) ut simul utriusque Pondus, ad Pondus prius moti; sic pristina Celeritas, ad post futuram.

(Et quidem, si Quiescens Moto sit pondere æquale, ferentur deinceps celeritate dimidia.)

Quæ quidem Celeritas futura, in utriusvis Pondus ducta, exhibebit istius momentum post futurum.



Esto A, Grave motum, secundum rectam A A ipsius Centro-gravitatis descriptam, quæ ad Quiescentis B (cui directe impingat) Centrum Gravitatis pertingat; (nam & hoc requirimus quo Gravia junctim movenda dicantur directe impingere.) Sitque Gravis A, pondus mP, celeritas rC, adeoque Momentum seu Vis impellens $mrPC$: Et Gravis B, pondus nP, (celeritas, utpote quiescentis, nulla in utramvis partem;) Adeoque simul utriusque pondus $mP + nP$. Movenda autem deinceps erunt utraque eadem celeritate. Quippe B segnius moveri non poterit, propter insequens A: Sed neque celerius;

celerius; cum non moveri aliunde intelligatur quam quod ab A sequente propellatur: (Et siquod aliud accedat quod celerius propellat; ut Vis Elastica, de qua alibi dicetur, aut aliud quidpiam; id non est hujus considerationis, sed alterius loci.) Cum itaque Vi mPC, movendum sit Pondus $mP+nP$; id fiet celeritate $\frac{m}{m+n}rC$: (diviso scilicet Momento $mrPC$, per Pondus $mP+nP$:) per prop. 27. Cap. 1. Quod erat propositum. (Et quidem si pondera sint æqualia, hoc est $m=n$, erit $\frac{m}{m+n}rC=\frac{1}{2}rC$, ut patet.)

Momentum itaque Ponderis nP, prius quiescentis, jam moti celeritate $\frac{m}{m+n}rC$, erit $\frac{m}{m+n}nrPC$ seu $\frac{n}{m+n}mrPC$; Ponderisque mP, prius moti celeritate rC, jam vero celeritate $\frac{m}{m+n}rC$; jam fit $\frac{m}{m+n}mrPC$. Adeoque momentum hinc demptum (gravi prius quiescenti collatum) est $mrPC-\frac{m}{m+n}mrPC$ $=\frac{mn}{m+n}rPC$.

SCHOLIUM.

MAnifestum hinc est, ex quovis minimo cujusvis exigui Gravis impulsu, etiam maximo cuivis quiescenti, motum inferri posse; Uti etiam ex sequentibus patebit, etiam maximi Gravis motum, cujusvis exigui objectu, quadantenus impediri posse seu retardari; vel etiam hujusmodi accessu, quadantenus accelerari.

Verum hoc tantillum esse potest, ut omnem sensuum perceptionem fugiat: adeoque negligi soleat. Unde fit, ut pro absolute quiescentibus reputentur aut immobilibus, quæ, si secundum Mathematicum rigorem æstimanda forent, dicenda forsan essent aliquantillum moveri. Dato enim, quod tota Telluris moles fluido Æthere suspensa, cum saltu pulicis percussa sit, dicenda esset loco suo tantillum dimoveri; aut etiam translato de loco in locum (quod sæpe fit) acervo satis gravi, Tellurem totam, propter mutatum Centrum Gravitatis, similiter mutare sedem; (quod quidni fieri possit haud facile dixeris; nedum ubi majores terrenæ molis concussiones seu mutationes contingunt:) Cum tamen hæc tantilla sint ut sensum omnem fugiant; minime mirandum est, si, hisce non obstantibus, immota censeatur. Præsertim cum ipsa Aeris sive Densitas sive Gravitas (utut sensui non plane imperceptibilis) negligi non raro soleat in motibus æstimandis.

PROP. III.

Si Grave subsequens, segnius secundum eandem rectam præcedenti, directe impingat: utriusque deinceps eadem erit celeritas; quæ calculo exquiretur.

Nempe; si simul utriusque Momentum, per simul utriusque Pondus dividatur; habebitur communis utriusque futura Celeritas.

(Et quidem, si pondera sint æqualia; erit semi-summa utriusque Celeritatis.)

Eaque Celeritas futura, in utriusvis pondus ducta, exhibet ejusdem momentum post futurum.

Fig. 301.

SI Grave A, segnius præcedenti B directe impingat; (*segnius* dico, nam si B eadem celeritate præcederet, subsequens A non illud esset assecuturum; nedum si velocius fugiat B, quam insequatur A;) sitque Gravis A, Pon-

A, Pondus mP, Celeritas rC, adeoque Momentum $mrPC$; Gravis B, Pondus nP, Celeritas (minor) sC, adeoque Momentum $nsPC$; Adeoque simul utriusque Momentum $mrPC+nsPC$: Diviso hoc per summam Ponderum $mP+nP$; habebitur communis utriusque futura Celeritas $\frac{mr+ns}{m+n}C$: per prop. 27. Cap 1. (Et quidem si pondera sint æqualia; hoc est, $m=n$; erit $\frac{mr+ns}{m+n}C=\frac{r+s}{2}C$.) Quod erat propositum.

Ideoque, præcedentis nP momentum, quod prius fuerat $nsPC$, jam fit $\frac{mr+ns}{m+n}nPC$; & subsequentis mP momentum, quod fuerat $mrPC$, jam fit $\frac{mr+ns}{m+n}mPC$. Adeoque Momentum hinc demptum, & reliquo collatum, est $mrPC-\frac{mr+ns}{m+n}mPC=\frac{nr-ns}{m+n}mPC=\frac{mr-ms}{m+n}nPC=\frac{r-s}{m+n}mnPC$.

PROP. IV.

Si duo Gravia, secundum eandem rectam, contrariis motibus occurrentia, sibi mutuo directe impingant: eadem deinceps celeritate, atque ad eas partes ferentur; quas calculus indicabit.

Nempe; Si Momentorum Differentia (quoniam ad contrarias partes) per Summam Ponderum dividatur; habebitur communis utriusque Celeritas post futura; & quidem ad eas partes ad quas tendebat Vis præpollens.

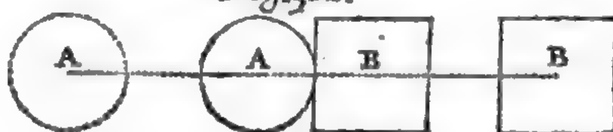
Et quidem, si pondera sint æqualia; erit Celeritatum Semi-differentia.

Sin æquipolleant contraria Momenta, (propter æqualia invicem tum Pondera, tum Celeritates; aut has illis reciproce proportionales:) ad neutras partes ferentur; sed quiescent utraque.

Futura autem celeritas, in utriusvis pondus ducta, exhibet ejusdem momentum post futurum.

Sit Gravis A, Pondus mP, Celeritas $+rC$, adeoque Momentum $+mrPC$ (prorsum:) cui occurrat motu directe contrario Grave B, cujus pondus nP,

Fig. 302.



celeritas $-sC$, adeoque Momentum $-nsPC$ (retrorsum:) & utriusque simul Momentum (seu Momentorum, utpote ad contrarias partes, Differentia,) $mrPC-nsPC$, (prorsum vel retrorsum, prout signum $+$ vel $-$ prævaluerit; per prop. 8. Cap. 1.) Hoc itaque per summam ponderum $mP+nP$ divisum; exhibet communem utriusque celeritatem deinceps futuram, $\frac{mr-ns}{m+n}C$ (prorsum vel retrorsum, prout signum $+$ aut $-$ prævaluerit:) per prop. 27. Cap. 1. (Adeoque, si Pondera sint æqualia; erit, propter $m=n$, celeritas $\frac{r-s}{2}C$: Si vero tum $m=n$, tum $r=s$; vel m, n, ipsis r, s, reciproce proportionales; quo fiat $mr=ns$: nulla futura erit in utramvis partem celeritas; sed se mutuo sistent æquales vires contrariæ.) Quod erat propositum.

Ideoque Gravis A momentum, quod prius fuerat $mrPC$, jam fit $\frac{mr-ns}{m+n} mPC$; & Gravis B momentum, quod fuerat $-nsPC$, jam fit $\frac{mr-ns}{m+n} nPC$. Adeoque momentum ex præpollente demptum & in reliquum collatum, est $mrPC - \frac{mr-ns}{m+n} mPC = \frac{nr+ns}{m+n} mPC = \frac{mr+ms}{m+n} nPC = \frac{r+s}{m+n} mnPC$.

PROP. V.

Ictus magnitudo æquipollet duplo momenti ablati in directe impingentium (si quod sit) fortiori.

SI intelligatur enim Motorum (si quod sit) fortius, (vel, si sint momentorum æqualium, utrumvis,) ut Percutiens; reliquum ut Percussum: Quantum Momenti Percutienti decidit, Percussum recipit, (puta; Vel resistendo seu sustinendo Vim; ut, si firmus Obex sit, cedere nescius; aut motum contrario impetu æquali: Vel suscipiendo novum impetum; ut, si prius quiesceret; aut in easdem partes moveretur: Vel denique partim hoc, partim illud; ut, si occurrat motu contrario debiliori: quæ singulatim suis locis ostendentur;) quorum cum utrumque sint effectus Ictus, Ictus utrique æquipollet; hoc est, duplo momenti ablati in fortiori. Quod erat propositum.

Designo autem Ictus magnitudinem, per momentum fortiori ablatum; quoniam effectus ictus in fortiori, uniformis est, (nempe sola semper momenti deperditio,) adeoque facilius & simplicius verbis exprimitur: effectus autem in reliquo est, nonnunquam impetus deperditio, nonnunquam acquisitio novi impetus, nonnunquam utrumque; sed, quicquid sit, æquipollet motui in fortiori deperdito.

PROP. VI.

Si Grave motum firmo Obici directe impingat: Ictus æquipollet duplo momento gravis impingentis.

Sin Obex minus firmus sit quam ut sustinendo valeat: Ictus æquipollet duplo Vis restitivæ in Obice.

Fig. 299. PUta; si Gravis moti A, pondus sit mP, celeritas rC; adeoque Momentum seu Vis impellens $mrPC$: huic æqualis est in Obice Resistentia (utpote quæ Vim totam impactam immota sustinet atque hanc solam:) Cum utraque sint ab Ictu, Ictus utrique simul æquipollet, hoc est, duplo momenti impingentis, seu $2mrPC$. Quod propositum erat.

Dico autem, Vi impellenti æqualem esse *Resistentiam*, potius quam *Vim Restitivam*. Quippe Vis Restitiva major esse potest; nempe, si Obex majori vi impingenti sustinendæ par sit: sed quicquid virium superest, est hic inutile, (uti & vis tota esset si nihil impingeret;) quo enim sustineatur vis impacta, sufficit vis æqualis; nec motum alteri inferre potest, quoniam resistit tantum per modum impedimenti, non vis agentis contrariæ. per prop. 11, 12. Cap. 1.

Similiter ostendetur propositionis pars altera. Quippe quantacunque sit Obicis infirmi vis restitiva, puta $nsPC$; tanta impenditur ei amoliendo vis impellens; (&, quæ superest, est hic superflua:) adeoque utriusque aggregatum (qui est effectus ictus) $2nsPC$, duplum vis restitivæ, est Ictus magnitudo. Quod itidem erat propositum.

Aliter.

Idem ostendi posset (sed mutato propositionum ordine) ex prop. seq. Quippe Obex

Obex firmus, ictum quod spectat, tantundem resistit quantum directe occurrens impetu æquali, (utrobique enim sistitur impingens Grave:) verum illic ictus æquipollet utriusvis duplo; per prop. seq. Ergo & hic.

Similiter.

Ostendetur idem ex prop. 14. Nempe, si duo Gravia utcunque inæqualia, quibuscunque celeritatibus, directe occurrant; ostenditur ictus magnitudo $\frac{r+s}{m+n} 2mnPC$: adeoque si intelligatur Obicis celeritas $sC = 0C$ (quippe nulla;) seu quantumvis exigua; adeoque pondus $nP = \infty P$ infinitum (nam nisi hoc ponatur, propter $s = 0$, momentum $nsPC$ non sustinebit vim impactam,) erit $\frac{r+s}{m+n} 2mnPC$ $= \frac{\infty}{\infty + m} 2mrPC = 2mrPC$ (nam propter ∞ infinitum, tantundem erit $\frac{\infty}{\infty + m}$ atque $\frac{\infty}{\infty} = 1$:) hoc est, vis impingentis duplum. Quod erat propositum.

PROP. VII.

Si duo Gravia Æqualia, æqualibus celeritatibus; vel Inæqualia, celeritatibus reciproce proportionalibus; sibi mutuo directe occurrant: Ictus magnitudo æquipollet momentis simul utriusque; seu utriusvis duplo.

PUta, si sit Gravis A, pondus mP, celeritas rC, adeoque momentum $+mrPC$ (prorsum:) atque Gravis B, pondus item mP & celeritas $-rC$; vel pondus rP & celeritas $-mC$; adeoque (utrovis casu) momentum $-mrPC$ (retrorsum:) Cum, quod Ictus hoc in casu efficiat, sit (propter æquales impetus contrarios) utriusque sublatio, per prop. 4. hujus; erit Ictus magnitudo $2mrPC$ (momentis simul utriusque æquipollens) per prop. 5. hujus. Fig. 302.

PROP. VIII.

Si duo Gravia communi aliquo motu ferantur; tantundem est, quantum ad Ictus magnitudinem, atque si utrobique abesset.

Adeoque communis motus, additus vel demptus, Ictus magnitudinem non immutat.

SI enim B præcedens eadem celeritate fugiat (aut etiam majori) qua sequitur A, nulla fit motus obstructio seu impeditio, utut conjuncta fuerint A B, (nedum si disjuncta;) adeoque nullus Ictus. Si vero A celerius sequatur, puta celeritate $rC = sC + tC$; & B præcedat segnius, puta Celeritate sC: saltem quantum ad celeritatem utrique communem sC, nulla fit impeditio; quippe eatenus se subducit antecedens, ictum declinans; totumque illud motus cui ulla fit obstructio, est quod ex tC celeritatis excessu oritur. (Idemque eadem analogia ostendetur de aliis motibus communibus.) Adeoque ob additum vel demptum communem motum (utpote qui, hoc respectu, nullius instar est) nulla fiet Ictus immutatio. Fig. 301.

SCHOLIUM.

HInc est, quod duorum in eadem Navi placide latorum alter alterum eadem vi percutit acsi uterque in littore staret; motu navis, utpote utrique communi, ictum nec adjuvante nec impediente. Item, projectionum & percussionum Phænomena

Phænomena eadem contingunt omnia apud nos in terra positos, sive cum terra junctim ferantur omnia communi motu, sive una cum terra quiescant; quippe communis eorum cum terra sive motus sive quies hæc Phænomena non immutat, sed projectiones & percussiones æstimandæ sunt ab iis motibus qui rebus hic in terra existentibus peculiares sunt, & non cum ipsa terra communes. Adeoque, quæ afferri solebant objectiones à projectionibus inæqualibus eadem vi faciendis, prout vel ad Orientem vel ad Occidentem fierent; atque inæqualibus percussionibus à Tormento Bellico globulum emittente futuris, prout in has aut illas partes explosio fieret; & quæ sunt hujusmodi; etiam ipsis nunc dierum fatentibus qui motum Terræ negant, nihil in utramvis partem probant sive de Quiete Terræ sive de Motu. Hinc item qui ictum Gladii quadantenus declinans accipit, minori vulnere afficitur, quam si immotus acciperet, nedum si obviam iret. Aliaque multa hujusmodi.

PROP. IX.

Si Grave motum, æquali quiescenti, (non impedito,) directe impingat: Ictus magnitudo, momento gravis moti æquipollet.

Fig. 300. Esto Gravis moti A, pondus mP, celeritas rC, adeoque momentum $mrPC$; quod in æquale B quiescens directe impingat; ferentur deinceps utraque celeritate dimidia, $\frac{1}{2}rC$; adeoque momentum A quod prius fuerat $mrPC$, jam propter pondus mP, fiet $mP \times \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}mrPC$, amisso momenti dimidio $\frac{1}{2}mrPC$; & momentum B, quod prius (utpote quiescentis) nullum erat, jam, propter itidem mP pondus, fiet $mP \times \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}mrPC$, de novo acquisitum; per prop. 2. hujus. Cum itaque deperdat A momentum $\frac{1}{2}mrPC$, atque acquirat B momentum itidem $\frac{1}{2}mrPC$, utriusque aggregato $mrPC$ (quod momentum fuerat gravis A) æquipollet Ictus magnitudo, per prop. 5. hujus.

Idem Aliter.

Esto, ut prius, Gravis A, pondus mP, celeritas rC, adeoque momentum $mrPC$, quod in æquale B quiescens directe incurrat. Atque intelligatur utrique accedere communis motus celeritate $-\frac{1}{2}rC$ (retrorsum.) Quo casu feretur A celeritate $rC - \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}rC$ (prorsum,) & B celeritate $oC - \frac{1}{2}rC = -\frac{1}{2}rC$ (retrorsum;) Eritque Ictus magnitudo $2mP \times \frac{1}{2}rC = mrPC$, per prop. 7. hujus. Sed eadem erit (per prop. præced.) Ictus magnitudo, dempto illo qui addebatur communi motu; qui est casus propositus. Ergo, & hic, Ictus magnitudo est $mrPC$; ut prius.

PROP. X.

Si duo Gravia Æqualia, celeritatibus Inæqualibus, in easdem partes ferantur; & sequens antecedenti directe impingat: Ictus æquipollet momento utriusvis, Celeritatum Differentia lati.

Fig. 301. Sit Gravis A, pondus mP, celeritas $rC = sC + tC$, adeoque momentum $mrPC$; quod in æquale B, celeritate sC præcedens (cujus itaque momentum $msPC$) directe impingat. Ferentur deinceps utraque (per prop. 3. hujus) celeritate $\frac{r+s}{2}C$; adeoque utriusvis momentum (propter utriusque pondus mP) $\frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}msPC$. Deperdit itaque A (propter s minorem quam r) momentum $mrPC - \frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mtPC$. Atque tantundem Gravi B acquiritur, propter $\frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}msPC - msPC = \frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mtPC$. Ergo, utriusque Aggregatum $mtPC$ est (per prop. 5. hujus) Ictus

Ictus magnitudo. Hoc est, momentum ponderis utriusvis mP, celeritatum differentia tC lati, (per prop. 27. Cap. 5.) quod erat propositum.

Aliter.

Sit, ut prius, Gravis A, pondus mP, celeritas $rC = sC + tC$; quod in æquale B celeritate sC præcedens directe impingat. Tantundem erit (ictum quod spectat) atque si (sublato utrobique communi sC) ferretur A celeritate tC, in B quiescens, (per prop. 8. hujus.) Adeoque (per prop. præced.) ictus magnitudo $mtPC$, ut prius.

PROP. XI.

Si duo Gravia Æqualia, celeritatibus utcunque Inæqualibus, ad contrarias partes lata, sibi mutuo directe occurrant: Ictus æquipollet momento utriusvis, Aggregato celeritatum lati.

Sit Gravis A, pondus mP, celeritas $+rC$ (prorsum,) adeoque momentum $+mrPC$; & huic æqualis B, celeritas $-sC$ (retrorsum,) adeoque momentum $-msPC$, sitque $r+s=z$; atque intelligatur $mrPC$ momentum præpollens. Erit (per prop. 4. hujus) utriusque deinceps celeritas $\frac{r-s}{2}C$; adeoque utriusvis momentum $\frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC$. Deperdit itaque A, momentum $mrPC - \frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mzPC$. Et Grave B (propter A præpollens) deperdit totum suum momentum retrorsum $msPC$; sed & acquirit momentum prorsum $\frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC$: Quæ duo simul sumpta sunt $msPC + \frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mzPC$. Ergo, omnium Aggregatum, $mzPC$ est (per prop. 5. hujus) ictus magnitudo. Hoc est momentum ponderis utriusvis mP, celeritatum aggregato zC lati. Fig. 301.

Aliter.

Sit, ut prius, Gravis A, pondus mP, celeritas $+rC$ (prorsum;) & huic æqualis B, celeritas $-sC$ (retrorsum;) sitque $r+s=z$. Intelligatur utrique conferri motus communis celeritate $+sC$ (prorsum;) Unde fiet celeritas A, $rC + sC = zC$; & celeritas B, $-sC + sC = 0C$. Hoc est, feretur A, celeritate zC in B quiescens. Eritque ictus magnitudo (per prop. 9. hujus) $mzPC = mP \times zC$. Tantusque erit ictus in casu proposito, per prop. 8. hujus.

PROP. XII.

Si Grave motum, Gravi quiescenti, utcunque inæquali, directe impingat: Erit Ictus magnitudo, ad momentum Gravis moti, ut quiescentis pondus duplum ad ponderis utriusque aggregatum.

Sit Gravis A moti, pondus mP, celeritas rC, adeoque momentum $mrPC$; quod directe impingat in quiescens B, cujus pondus nP, (momentum, utpote quiescentis, nullum.) Erit (per prop. 2. hujus) celeritas deinceps utriusque $\frac{mr}{m+n}C$: Adeoque momentum A (propter pondus mP,) $\frac{mr}{m+n}mPC$; & momentum B (propter pondus nP.) $\frac{mr}{m+n}nPC$. Deperdit itaque A, momentum $mrPC - \frac{mr}{m+n}mPC = \frac{mnr}{m+n}PC$. Atque tantundem (ut ostensum est) acquirit B, (utpote cujus momentum prius nihil erat.) Ergo (per Fig. 300.

prop. 5. hujus) utriusque aggregatum $\frac{2mnr}{m+n}PC$ est ictus magnitudo. Est autem illud ad $mrPC$ expositum momentum gravis moti, ut $2n$ ad $m+n$; hoc est, ut duplum pondus expositi quiescentis, ad simul utriusque pondus. Quod erat propositum.

Aliter.

Sit, ut prius, Gravis A, pondus mP, celeritas rC, adeoque momentum $mrPC$; quod directe impingat in B quiescens, cujus pondus nP. Intelligatur celeritas rC in duas partes dividi, ponderibus reciproce proportionales; puta, $\frac{n}{m+n}rC$, quæ respiciat pondus mP; & $\frac{m}{m+n}rC$, quæ respiciat pondus nP. Atque conferatur utrique motus communis celeritate $-\frac{m}{m+n}rC$ (retrorsum;) quo fiat celeritas A, $rC-\frac{m}{m+n}rC=\frac{n}{m+n}rC$ (prorsum;) & celeritas B, $0C-\frac{m}{m+n}rC=-\frac{m}{m+n}rC$ (retrorsum;) adeoque celeritates ponderibus reciproce proportionales, ad partes contrarias; ictusque magnitudo (per prop. 7. hujus) $mP\times\frac{n}{m+n}rC+nP\times\frac{m}{m+n}rC=\frac{2mn}{m+n}rPC=\frac{2n}{m+n}\times mrPC$; quod itaque est ad $mrPC$ expositum momentum moti A, ut $2n$ ad $m+n$, (ut prius:) Tantusque erit ictus in casu proposito, per prop. 8. hujus.

PROP. XIII.

Si duo Gravia, vel æqualia vel inæqualia, celeritatibus quibuscunque, ad easdem partes ferantur, & Sequens Antecedenti directe impingat: Erit Ictus magnitudo, ad momentum gravis Sequentis celeritatum differentia lati; ut duplum ponderis Antecedentis, ad simul utriusque pondus: ad momentum vero Antecedentis eadem celeritatum differentia lati, ut duplum Sequentis, ad simul utriusque pondus: Hoc est, ad momentum utriusvis differentia celeritatum lati; ut duplum reliqui ad simul utriusque pondus.

Fig. 301. Esto Gravis A Sequentis, pondus mP, celeritas rC, adeoque momentum $mrPC$; Antecedentis B, pondus nP, celeritas (minor) sC, adeoque momentum $nsPC$; sitque $r=s+t$. Erit (per prop. 3. hujus) utriusque deinceps celeritas $\frac{mr+ns}{m+n}C$; adeoque momentum A (propter pondus mP,) $\frac{mr+ns}{m+n}mPC$; & momentum B (propter pondus nP,) $\frac{mr+ns}{m+n}nPC$. Deperdit itaque A, momentum $mrPC-\frac{mr+ns}{m+n}mPC=\frac{mnr-mns}{m+n}PC$. Atq; tantundem acquirit B, propter $\frac{mr+ns}{m+n}nRC-nsPC=\frac{mnr-mns}{m+n}PC$. Adeoque (per prop. 5. hujus) utriusque aggregatum est ictus magnitudo. Hoc est $\frac{2mnr-2mns}{m+n}PC=\frac{r-s}{m+n}2mnPC=\frac{2mn}{m+n}tPC=\frac{2n}{m+n}mPtC$ $=\frac{2m}{m+n}nPtC$: Hoc est, ad momentum Sequentis mP celeritatum differentia

tC lati, ut $2n$ ad $m+n$; hoc est, ut duplum pondus Antecedentis ad simul utriusque pondus: atque ad momentum Antecedentis nP eadem differentia tC lati, ut $2m$ ad $m+n$; hoc est, ut duplum pondus Sequentis ad simul utriusque pondus. Hoc est, ad momentum utriusvis, celeritatum differentia lati, ut reliqui pondus duplum ad simul utriusque pondus. Quod erat propositum.

Aliter.

Esto, ut prius, Gravis A sequentis, pondus mP, celeritas rC; atque antecedentis B, pondus nP, celeritas sC; sitque $r = s + t$. Intelligatur autem, motu communi, utrique detracta celeritas sC. Quo facto, B ad quietem redigitur, propter $sC - sC = 0C$; eique impingit A, tanquam quiescenti, celeritate $rC - sC = tC$. Eritque ictus magnitudo (per prop. praeced.) $\frac{2mn}{m+n} tPC = \frac{2n}{m+n} mtPC = \frac{2m}{m+n} ntPC$, ut prius. Idemque erit ictus magnitudo in casu proposito, per prop. 8. hujus.

PROP. XIV.

Si duo Gravia, æqualia vel inæqualia, quibuscunque celeritatibus, motibus contrariis sibi mutuo directe occurrant: Erit ictus magnitudo, ad momentum alterutrius gravium, celeritatum Aggregato lati, ut reliqui pondus duplum ad simul utriusque pondus.

Sit Gravis A, pondus mP, celeritas $+rC$ (prorsum,) adeoque momentum $+mrPC$; & Gravis B, pondus nP, celeritas $-sC$ (retrorsum,) adeoque momentum $-nsPC$; quæ sibi mutuo directe impingant; sitque $r+s=z$; atque intelligatur momentum $mrPC$ præpollens. Erit (per prop. 4. hujus) utriusque deinceps celeritas $\frac{mr-ns}{m+n}C$. Adeoque gravis A (propter pondus mP) momentum $\frac{mr-ns}{m+n}mPC$; & gravis B (propter pondus nP) momentum $\frac{mr-ns}{m+n}nPC$. Deperdit itaque A momentum $mrPC - \frac{mr-ns}{m+n}mPC = \frac{nr+ns}{m+n}mPC$. Et B deperdit (propter A præpollens) totum quod habuerat momentum retrorsum $nsPC$; & simul acquirit momentum prorsum $\frac{mr-ns}{m+n}nPC$; quæ duo simul sumpta sunt $nsPC + \frac{mr-ns}{m+n}nPC = \frac{mr+ms}{m+n}nPC = \frac{nr+ns}{m+n}mPC$, (quantum scilicet perdiderat A.) Adeoque omnium aggregatum $\frac{r+s}{m+n}2mnPC = \frac{2mn}{m+n}zPC = \frac{2m}{m+n}nzPC = \frac{2n}{m+n}mzPC$, est (per prop. 5. hujus) ictus magnitudo. Quod itaque est ad $mzPC$ ut $2n$ ad $m+n$, & ad $nzPC$ ut $2m$ ad $m+n$; hoc est, ad momentum alterutrius gravium aggregato celeritatum lati, ut reliqui pondus duplum ad simul utriusque pondus. Quod erat propositum. Fig. 302.

Aliter.

Sit, ut prius, Gravis A, pondus mP, celeritas $+rC$ (prorsum;) & Gravis B, pondus nP, celeritas $-sC$ (retrorsum;) quæ sibi mutuo directe occurrant; sitque $r+s=z$. Intelligatur autem utrique addi, motu communi, celeritas $+sC$ (prorsum:) Quo fiat gravis A celeritas $rC+sC=zC$; & B quiescens (propter

$-sC+sC=oC$;) Adeoque ictus magnitudo (per prop. 12. hujus) $\frac{2n}{m+n}mzPC=\frac{2m}{m+n}nzPC$; ut prius. Idemque est ictus magnitudo in casu proposito, per prop. 8. hujus.

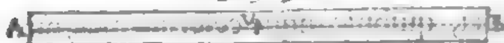
PROP. XV.

Percussiones particularum Gravis percutientis, pro varia ejusdem Figura & Positione; calculo æstimantur.

Adeoque & *Centrum Virium*, seu *Percussionis*. Quod ipsum est Punctum Percussionis maximæ.

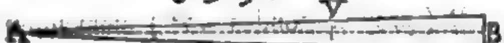
INtelligatur AB, Pertica, Cylindrus, Prisma, aut istiusmodi corpus quodpiam; parallelo motu latum: Erunt ejus Partes infinitesimæ, (secundum longitudinem æquales,) ut 1, 1, 1, 1, &c. series Æqualium: Earumque respectivæ Celeritates (utpote æquales, propter motum parallelum,) item ut 1, 1, 1, 1, &c. series Æqualium: Adeoque &, quæ inde resultant, Momenta seu Vires, erunt itidem ut 1, 1, 1, 1, &c. series Æqualium. Et propterea, si per mediam longitudinem secetur Axis in V; erit utrinque tantundem Virium, & in distantiis Æqualibus. Adeoque V, *Centrum Virium*, seu Percussionis.

Fig. 303.



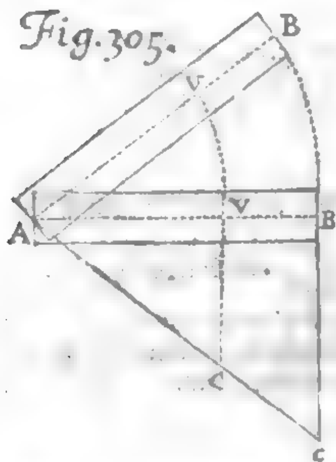
Quod quidem non aliter differt à Centro Æquilibrii, (de quo Cap. 3. dictum est,) quam quod (sumpto Axe prismatis pro Libra,) momenta, seu Libræ Gravamina, sunt illic (potissimum) nuda Pondera, (quamquam nec alia gravamina ibidem excludantur,) hic vero Pondera cum Impetu, ex celeritate contracto.

Fig. 304.



Idem similiter obtinet quæcunque sit figura Gravis AB, parallelo motu lati: Nempe, Centrum Virium V, idem esse atque Centrum Gravitatis figuræ. Quippe cum Celeritates sint series Æqualium; eadem erit Virium series quæ Ponderum: per Schol. prop. 1, 2. Cap. 5.

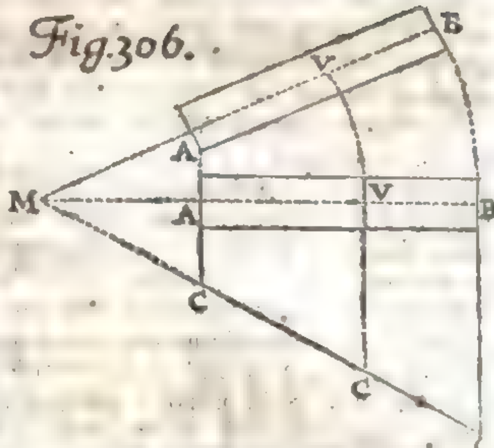
Fig. 305.



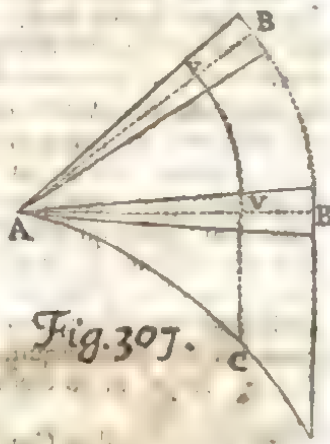
Intelligatur deinde idem Cylindrus seu Prisma AB, circa Axis extremum A rotari. Cujus itaque Particulæ (ut prius) erunt ut 1, 1, 1, 1, &c. seu $1P$, $1P$, $1P$, $1P$, &c. series Æqualium. Celeritates autem respectivæ, (ab A centro Motus inchoando) ut Arcus BB, & huic paralleli, sectorem BAB complentes; (quippe, propter æqualia Tempora, Celeritates erunt ut transactæ Longitudines; per prop. 23. Cap. 1.) hoc est, ut eorum Radii, seu Distantiæ ab A; hoc est, ut Rectæ Triangulum ABC complentes, (ipsi BC parallelæ:) Nempe, ut 1, 2, 3, 4, &c. seu $1C$, $2C$, $3C$, $4C$, &c. series Primanorum. Adeoque, propter Pondera invicem æqualia, Vires itidem erunt ut series Primanorum; puta ut $1PC$, $2PC$, $3PC$, $4PC$, &c. seu ut eædem rectæ Triangulum complentes. Quæ itaque si ad AB latus Trianguli, tanquam ad Libram, applicari intelligantur; quæ per Trianguli Centrum gravitatis applicatur VC recta, designat in AB libra Centrum Æquilibrii V. Et propterea, si similiter in V secetur AB axis Cylindri seu Prismatis; erit V Centrum Virium: Quippe quæ Rectis illis sunt proportionales.

Sin

Sin Cylindrus idem seu Prisma, Centro Motus M, in Axe ultra A continuato rotari intelligatur: Pondera erunt (ut prius) ut 1 *P*, 1 *P*, 1 *P*, 1 *P*, &c. series Æqualium: Celeritates autem, ut Arcus descripti, seu eorum Radii; hoc est, ut Distantiæ ab M; seu rectæ complentes Trapezium ACCB: puta ut *aC*, *aC*+1*C*, *aC*+2*C*, *aC*+3*C*, &c. Series Æqualium aucta Serie Primanorum. Adeoque Momenta, seu Vires, aut libræ Gravamina, (propter Pondera invicem æqualia,) ut *aCP*, *aCP*+1*CP*, *aCP*+2*CP*, *aCP*+3*CP*, &c. series item Æqualium aucta serie Primanorum; seu ut eædem rectæ Trapezium complentes. Per cujus itaque Centrum gravitatis si ad AB latus trapezii ut Libram applicetur VC; erit V Centrum Æquilibrii: Et similiter, in V, secto axe AB, erit V Centrum Virium; utpote rectis illis proportionalium.



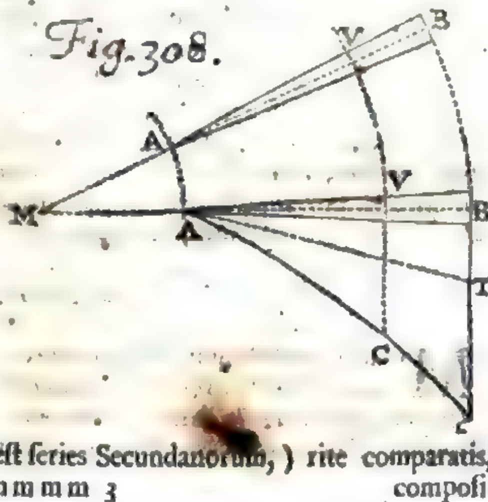
Intelligatur demum AB Cuneus, seu Asserculus Triangularis (æquabiliter crassus:) Cujus itaque (ab acie A computando) particulæ (secundum longitudinem in axe AB æstimatam æquales) sunt ut 0*P*; 1*P*, 2*P*, 3*P*, &c. series Primanorum: Celeritates (rotatione circa A facta) ut 0*C*, 1*C*, 2*C*, 3*C*, &c. (distantiis ab A proportionales) series itidem Primanorum: Vires itaque (in ratione ex utrisque composita) ut 0*PC*, 1*PC*, 4*PC*, 9*PC*, &c. series secundanorum; seu ut rectæ complentes ABC complementum Semi-parabolæ: (aut Plana Conum seu Pyramidem complentia.) Per cujus itaque Centrum gravitatis si ad Libram AB applicetur VC; atque similiter, in V, secetur AB axis Cunei; erit V Centrum Virium; utpote rectis illis proportionalium.



Si autem circa rectam B (basin trianguli) rotetur Triangulum vel Cuneus AB: distantiæ à B erunt rectis huic parallelis, æqualiter à medio distantibus, reciproce proportionales; adeoque respectiva Momenta (utpote in ratione ex magnitudinum & distantiarum rationibus composita) invicem æqualia; & propterea Centrum Virium in axis AB medio.

Si vero intelligatur AB grave, ultra A (Centrum motus) continuari; id non impedit quin V ut prius sit Centrum virium seu percussionis (ad partes B faciendæ;) sed vis augebitur ab impetu partium ultra A. Et similiter alibi.

Sin sit M Centrum Motus seu Rotationis in axe ultra A protracto: Erunt Pondera (ut prius) ut 0*P*, 1*P*, 2*P*, 3*P*, &c. series Primanorum: Celeritates autem (distantiis ab M proportionales,) ut *aC*, *aC*+1*C*, *aC*+2*C*, *aC*+3*C*, &c. series Æqualium serie Primanorum aucta. Et propterea Vires, seu Momenta, aut libræ Gravamina, ut 0*aPC*, 1*aPC*+1*PC*, 2*aPC*+4*PC*, 3*aPC*+9*PC*, &c. series Primanorum aucta serie Secundanorum. Puta, ut rectæ complentes Trilineum ABC, ex Triangulo ABT (quæ series est Primanorum,) & semiparabolæ Complemento ATC (quæ est series Secundanorum,) rite comparatis,



 compofi-

compositum. Per cujus itaque Trilinei Centrum gravitatis quæ ad Libram applicatur V C, designat in A B libra Centrum Æquilibrii V: & similiter, in V, secto axe Trianguli, sive triangularis Cunei, habetur Centrum Virium; utpote rectis illis proportionalium.

Fig. 307. Intelligatur demum A B Conus seu Pyramis: Cujus itaque Particulæ (ab A vertice numeratæ) erunt ut $0P$, $1P$, $4P$, $9P$, &c. series Secundanorum: Celeritates autem (rotatione Centro A facta) ut $0C$, $1C$, $2C$, $3C$, &c. series Primanorum: Adeoque Momenta seu Vires, ut $0PC$, $1PC$, $8PC$, $27PC$, &c. series Tertianorum: Puta ut rectæ complentes Semi-paraboloeidis Cubicalis Complementum A B C. Per cujus itaque Centrum gravitatis si applicetur (ut prius) V C; habebitur (ut supra) V Centrum Virium.

Fig. 308. Sin M Centrum Motus seu Rotationis sit in axe ultra A protracto: Pondera erunt (ut prius) ut $0P$, $1P$, $4P$, $9P$, &c. series Secundanorum: Celeritates vero (distantiis ab M proportionales) ut aC, $aC+1C$, $aC+2C$, $aC+3C$, &c. series Æqualium serie Primanorum aucta. Et propterea; Vires, ut $0aPC$, $1aPC+1PC$, $4aPC+8PC$, $9aPC+27PC$, &c. series Secundanorum aucta serie Tertianorum: Puta, ut rectæ complentes Trilineum A B C, ex A B T complemento Semi-parabolæ, & A T C complemento Semi-paraboloeidis Cubicalis, (sic invicem aptatis ut casus postulaverit,) compositum. Per cujus itaque Trilinei Centrum gravitatis ducta V C; habebitur V Centrum Virium, ut prius.

Atque ad eandem formam mutatis mutandis, procedendum erit, quæcunque fuerit figura Gravis moti, (sive ordinata, sive utcunque inordinata,) & ubicunque ponatur Centrum Rotationis. Nempe; Quæcunque fuerit Magnitudinum seu Ponderum series; cum ea componenda erit series Celeritatum (utcunque acquisitarum;) ut habeatur series Virium seu Momentorum. Atque hæc momenta, si considerentur ut Libræ Gravamina; eisdem legibus hic exquirendum erit Centrum Virium; quibus, in Cap. 3. Centrum Æquilibrii; &, in Cap. 4, 5. Centrum Gravitatis. Nos casus aliquot ex simplicioribus selegimus quæ speciminum instar sint; & in quibus Axis solidi saltem Rectam determinat in qua sit illud Centrum Virium; ut nihil hic opus sit aliud quam ut datæ Libræ (momentis virium gravatæ) Centrum Æquilibrii inquiratur; secundum tradita Cap. 3. Si vero illud non esset; determinanda esset ea recta, eisdem methodis quibus determinandus est Axis Æquilibrii (in ordine ad Centrum Gravitatis inquirendum) Cap. 5. Atque in eo tandem Centrum Virium. Sed singulis casibus immorandum non erat.

Denique; Quod in Centro Virium sit maxima Percussio; sequitur ex prop. 8. & 18. Cap 3. (ampliato sensu expositis.) Quippe Centrum Virium, est Libræ sic gravatæ (non nudis Ponderibus, sed Ponderibus cum Impetu) Centrum Æquilibrii; in quo si sustineatur Libra (quod hic fit à corpore percusso) totarum Virium impetus sustinetur, (quippe, propter Æquilibrium, in neutram partem rotando feretur;) si vero extra hoc Virium Centrum (à percusso) sustineatur; ad eas partes rotando propendebunt Vires qua est Virium Centrum; adeoque nec totus impedietur Motus; sed ea saltem sui parte qua Rotando minus procedit Centrum Virium seu Æquilibrii, quam si (non impeditum) recte procederet. Quod, locis citatis, generali demonstratione ostenditur.

Si vero, percussione non in V puncto facta, manu tenentis, puta in A, impediatur ne fiat Rotatio circa punctum ictus in corpore percusso: Res referenda erit ad Vectem cum duobus Fulcris. Quippe motus Virium (seu, quod tantundem est, Centri Virium, per prop. 9. Cap. 3. vel prop. 16. Cap. 4.) partim Corpore Percusso, partim Manu Percutientis, tanquam duobus Fulcris, (utroque inferius posito, si Centrum Virium sit inter illa duo Fulcra; vel, si extra, altero inferius altero superius posito;) sustinetur: Secundum leges Cap. 6. (de Vecte duobus Fulcris sustento) traditas.

SCHOLIUM.

MOnendum hic non incommodum duxi; processum à dato corporis percutientis Centro Gravitatis, ad ejusdem (circa Axem datum rotati) Centrum Virium inquirendum; alium non esse quam à dato plani Centro gravitatis ad Ungulæ eidem insistentis (datam in eodem plano aciem habentis) Centrum gravitatis

vitatis inquirendum. Quippe, ut illic, cum serie magnitudinum in Plano, componenda erit series altitudinum super istius plani respectivas particulas, (quæ quidem altitudinum series alia non est quam Distantiarum ab illa Acie data,) & seriei compositæ commune Centrum inveniendum, (quod est Ungulæ Centrum gravitatis:) ita hic, cum serie magnitudinum in corpore percutiente, componenda erit series Celeritatum in respectivis istius corporis particulis, (quæ itidem series alia non est quam Distantiarum à dato Rotationis axe,) & seriei compositæ commune Centrum (quod est Centrum Virium) inveniendum. Quo pacto autem ea seriei Distantiarum cum serie Magnitudinum compositio fiat, ut seriei compositæ Centrum habeatur; ostenditur (tum alibi, in casibus simplicioribus; tum, in abstrusioribus,) ad prop. 10. Cap. 5. Quæ sæpius in Ungularum Centris gravitatis inquirendis (per totum illud caput) in auxilium advocatur; atque hic, pro inquirendis Centris Virium, similiter (ubi opus fuerit) advocanda erit. Quod generatim monuisse sufficiat; ne sit necesse ad particulares casus descendere (quod longum esset, & tædii plenum;) quos cujusque industriæ, ubi res postulaverit, calculo determinandos permitto, & ad generalem Methodum exigendos.

Notandum porro; cum Centrum Virium, uti illud jam determinavimus, sit (ut plurimum saltem) intra ipsum Solidum; Percussio autem, à Solido illo facta, sit in superficiei puncto aliquo: Si quis quærat, in quo superficiei puncto (pro hoc aut illo solidi percutientis situ) id contingat: Dicimus, in eo superficiei puncto contingere quod est in ipsa Directione Centri Virium in ictus instanti. Hoc est, si Centrum illud per rectam feratur, in ea recta per quam fertur: si vero per curvam, in recta curvam illam (in ipso Virium Centro) tangentem, eo instanti quo fit Ictus; (puta, in recta VT, seu VG, fig. 307. quæ curvam VV tangat in V:) eandem enim directionem esse Curvæ cujusvis (pro dato in ea puncto) atque Rectæ ibidem tangentis; ostendimus ad prop. 15. Cap. 2.

Moneo etiam (quod & supra insinuatum est,) Qua ratione Grave (Ponderationem si spectes) perinde se habere acsi totum ibidem esset ubi est ipsius Centrum Gravitatis, per Schol. prop. 16. Cap. 4. Eadem & (Percussionem quod spectat) perinde se habere Corpus percutiens, acsi totum ibidem esset ubi est Centrum Virium.

Atque hinc ad Funipendula æstimanda, via patet: Nempe, cujuscunque figuræ sit suspensum solidum, (puta Cylindricum, Conicum, aliudve,) tantæ longitudinis (vibrationem quod spectat) reputandum esse, quanta est distantia à suspensionis puncto ad Centrum Virium. Adeoque, verbi gratia, (dato quod Funipendula ejusdem longitudinis, æqualibus temporibus vibrent, quod præsumi solet,) si Conus vertice suspensus (cujus Centrum Virium, ut ex Calculo superius insinuato colligitur, à vertice distat, $\frac{4}{5}$ totius Axis seu Altitudinis;) cum Globulo ex tenuissimo filo (cujus itaque consideratio hic non habetur) suspenso, cujus longitudo sit (à puncto suspensionis ad Globuli *Centrum Virium*) ad longitudinem seu altitudinem Coni, ut 4 ad 5; æqualibus temporibus vibrabitur uterque: utpote quorum Centrum Virium æqualiter à puncto suspensionis distant. (Est autem Globuli *Centrum Virium*, non ipsum *Globi* Centrum, sed aliud ab hoc; & quidem aliud atque aliud, prout propius aut remotius distat Globus, ille à Puncto suspensionis.) Atque similiter in aliis judicandum erit.

MONITUM.

Monendum denique; Id quod nos *Centrum Virium*, seu *Centrum Percussionis*, aut etiam *Vibrationis*, hic appellamus; id ipsum est quod Clar. *Hugenius*, opere post edito (de *Horologio Oscillatorio*) appellat *Centrum Oscillationis*. Quippe idem est (utut sub diversis Nominibus) quod uterque inquirimus. (Quod, qui utriusque Inquisitionem rite consideraverit, facile perspiciat.) Ille quidem sua Methodo, ego mea. Lector utramlibet ut potiorem eligat. Estque ejus *Oscillatio*, quæ nobis *Vibratio* dicitur.

CAP. XII.

De Cuneo.

DEFINITIONES.

Def. I. Cuneum, *plerumque adhibent, ex Ferro seu duriorum aliquo metallo; forma Prismatis (non admodum alti) cujus opposita Bases sint Triangula Æquicrura Acutangula: Quorum utriusvis Altitudinem, appello* Altitudinem Cunei, (*non, Prismatis;*) *ejusdem Basem,* Cunei Crassitiem *appello; Rectamque quæ Triangulorum illorum Æquicrurorum Vertices conjungit,* Cunei Aciem: *quodque eorum Bases conjungit Parallelogrammum;* Cunei Dorsum.

II. Malleum, *seu* Tuditem, *adhibent plerumque ex Ligno duriore, forma Cylindrica (vel ad eam proxime accedente,) adjuncto ad Latus* Manubrio, *cujus ope Percussor Ictum infligit.*

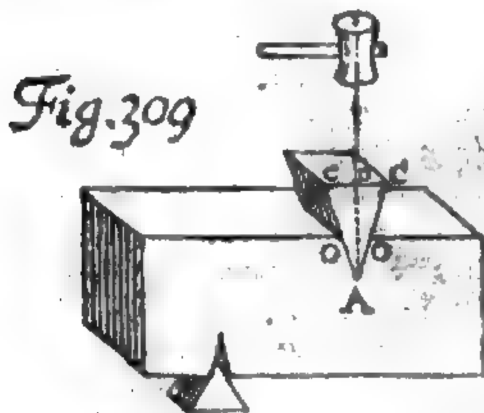
III. *Eodem etiam referenda sunt,* Malleus Ferreus *quo Clavos adigimus;* Ascia, *vel* Securis, *quibus Ligna Dolamus, aut Dissecamus; prægrandes* Tudites, *seu* Arietes, *quibus Pila, Palos, Sudes, (aliaque similia,) in Terram adigimus: aliaque non absimilia Organa innumera.*

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Datis Mallei Pondere & Celeritate Cuneum percutientis, Cuneique Forma: Vis Cunei, sic percussi, Calculo æstimabitur.

Intelligatur Ligni Tenacitas seu Firmitudo, Cuneo divellenda; aut quorumvis Obicum, Cuneo dirimendorum, Resistentia, ut *O.*



Dico primo; si adhibeatur in Cunei Dorso D, vis *V* quæ sit ad *O*, ut CC cunei Crassities, ad ejusdem Altitudinem DA; (puta, ut *c* ad *a*:) Vis illa in D, æquipollebit Obici; Adeoque, aucta superabit. Cum enim, per prop. 5. Cap. 2. Motus in ea ratione polleant quæ ex rationibus Virium Motricium, & Progressuum Regressuumve secundum lineam directionis suæ componitur: Sitque amolitio Obicis (contra directionem suam) ad progressum Virium (secundum directionem suam,) ut CC ad DA, seu ut *c* ad *a*, (quippe dum detruditur Cuneus per totam suam Altitudinem DA dirimitur Obex per totam ipsius Crassitiem CC, & in toto processu proportionaliter;)

naliter;) Si vires V, O, sint ipsis a, c, (progressibus suis,) reciproce proportionales; æquipollebunt motus, (propter ex Reciprocis compositam rationem Æqualitatis, per prop. 6. Cap. 1.) Hoc est, si sit ut a ad c sic O ad V; seu $V = \frac{c}{a} O$. Adeoque, si V major sit, movebit: per prop. 9, 11. Cap. 1.

Dico secundo; si sit Mallei ferientis Pondus, P; Celeritas, in percussionis instanti utcunque acquisita, C; (puta, sive id fiat ob Gravis motum naturaliter Acceleratum, sive etiam ob porro additam à Percussore vim;) adeoque Mallei Momentum seu vires PC; sitque $PC = V = \frac{c}{a} O$: Vis Mallei Cuneo directe applicata, Obici æquipollebit; adeoque aucta movebit.

Et quidem (ob eandem causam) eousque amovere seu amoliri perseverabit, donec sic impensa Vis PC, particulis Cuneo propioribus rumpendis aut flectendis per æquipollentiam absorbeatur.

Idemque Momentum secundo adhibitum, tantundem præstabit; & tertio, tantundem: atque sic porro prout opus fuerit.

SCHOLIUM.

Sunt qui Cuneum, ad geminum Vectem referunt: quibus Vis in C, C, applicetur: Fulcra autem alii in O, O, ponunt; Oneraque in A utrinque protrudenda. Alii potius Fulcrum commune in A ponunt, & Onera in O, O; (eo potissimum quod, in Lignis aliisve diffindendis, Cunei Acies non semper rem diffindendam attingit uspiam, sed medio suspensa pendet; adeoque non potest ibidem dici onus depellere.) Ego vero (ut alia taceam incommoda) rem simplicius exponendam duxi ex ipsis Motuum Elementis: uti factum est.

PROP. II.

Eadem similiter accommodari poterunt, *Malleo ferreo,* Clavum adigenti; *Tuditi prægrandi,* Pila, Sudes, Palosve præacutos in Terram altius defigenti; *Asciæ, Bipenni,* aut *Securi*, Ligna aliave dolanti, dividenti, aut dissecanti; aliisve Instrumentis non absimilibus.

Quippe *Clavi, Pila, Sudes, Palive,* præacuti; Cunei sunt: qui Malleo vel Tudite adiguntur. *Ascia, Bipennis, Securis,* & similia; sunt Malleus cum Cuneo connexo. Atque de aliis istiusmodi simile fiet judicium. Eademque quæ ad prop. præced. habetur Demonstratio; pariter ad hanc valebit.

CAP. XIII.

De Elatere, & Resilitione seu Reflexione.

DEFINITIONES.

DEF. I. *Vim* Elasticam *appello, eam qua Corpus de figura sua Vi detrusum, seipsum in figuram pristinam Restituere satagit.*

II. Elaterem *appello, Corpus (aut etiam Partem Corporis) ea Vi praeditum.*

VIs ἐλαστικὴ, ab ἐλαύνω, *Agito, Abigo, Excutio, Expello,* descendit: ut & (ejusdem originis) ἐλατήρ. Vim eam insinuantes qua Corpus, resiliendo, alia ab se Abigit.

Latinis (quantum scio) deest Vox propria qua hoc significetur: unde factum est ut Vocabula Græca in usum sint recepta.

Elaterem Nostri *a Spring* vocant; à Verbo *to spring*, ea significatione qua *Salire* seu *Exsilire* significat, (ut Germanicum & Danicum *Springen*, Belgicum *Springhen*,) quæ est Vocis illius significatio primaria. Significat etiam (& forte frequentius) sensu Metaphorico, *Germinare*; eo quod Germina de surculo quasi *Exsiliant*: Atque hinc tempus Vernum *the Spring* dicitur; quo scilicet potissimum omnia Germinant. Sed & Aquæ Fons seu Scaturigo (Aqua Saliens dicta) *a Spring* dicitur; ob salientem Aquam. Item, *to spring a Mine*, dicimus, quando Cuniculum, pulvere pyrio instructum, admoto igne accendimus, & *Exsilire* facimus.

Hinc Corpus Elasticum, *a springy body* dicimus; hoc est, Corpus Elatere instructum: &, Vim Elasticam, *Springyness*.

Unde sit in Corporibus hæc Vis Elastica; non hic inquiro: Sed neque ipsius Naturam suscipio me ita explicaturum, ut vel Lectori, vel mihi ipsi, per omnia satisfaciam. Neque enim id necesse est ad rem præsentem. Sufficit, ut undecunque fuerit, Vim istiusmodi in rerum natura esse certum sit: Cum & pressa resurgere; Corporaque suo nisu restituta, ab se alia abigere, nemo non videat. Atque de hac Vi, undecunque fuerit, jam agimus.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si Grave motum, in firmum Obicem, directe impingat; sitque vel alterum vel utrumque Corpus Elasticum: Eadem celeritate resiliet, seu repercutietur, qua advenerat; & per eandem rectam.

Fig. 299. ESto enim A Grave (cujus pondus *mP*, celeritas *rC*, adeoque momentum *mrPC*,) quod, per A A rectam, in firmum Obicem Π directe impingat. Sitque

que non ita perfecte Durum; ut nulla ratione ictui cedat, vel Corpus latum, vel Obex. Sed neque ita Molle, ut figuram pristinam ictu deperdat (quod in Cera, Plumbo, Luto, aliisque ejusmodi Corporibus vel fragilibus vel ductilibus fieri solet,) sed vim habeat Elasticam (alterum vel utrumque Corporum) qua se restituere valeat in figuram pristinam, quamprimum Vis Comprimens cessaverit.

Atque intelligatur Obicis pars percussa, Vi Corporis impellentis introrsum pressa; quæ itaque insita Vi Elastica se restituere conabitur.

Dico primo; Pressionem hanc eousque continue fieri, donec Vis Elastica, compressioni adversa, Vi Comprimenti æquipolleat. Quippe quamdiu Vis Comprimens, fortior est quam Elateris Resistentia, etiamnum Elaterem flectere seu comprimere perseverabit. per prop. 12. Cap. 1.

Est autem ea Vis comprimens, dupla momenti Gravis impingentis. Nam vis ab impingente Gravi illata, est ipsius momento æqualis (utpote cujus motus totus sistitur,) puta $m r P C$. Sed &, propter æqualem Obicis resistentiam, (quæ tantundem ad compressionem confert acsi æqualis vis contraria occurreret,) tantundem inde advenit, puta alterum $m r P C$; (sed cujus hic minor habenda ratio, utpote quod aliunde compensatur:) Adeoque vis tota compressiva, $2 m r P C$.

Dico porro; Vim Impellentem seu Comprimentem, ubi ad Æquipollentiam res redigitur, cessare; (utpote quæ tota flectendo Elatere impensa est.) Vis enim extrinsecus impressa, qualem supponimus Impellentem, (secus quam Vis insita, qualis est Gravitas, & Vis Elastica compressa,) ubi semel ad quietem redigitur, perit; neque valet seipsam restituere: ut neque se accelerare, ubi retardatur. Utut enim Corpus in motu, nisi impediatur, eo ipso perseverat: non acceleratur tamen, aut ex quiete in motum reducitur, absque causa positiva. per prop. 11. Cap. 1.

Dico itaque tertio; cessante (ut dictum est) motu Impellente, seu Comprimente, Vim Elasticam, jam liberam, & (ut modo demonstratum est) Vi pridem comprimenti æqualem, æqualiter utrinque se explicare nitentem, vim dimidiam seu alterum $m r P C$ in Obicem impendere (utut irrito conatu,) alterum vero $m r P C$ in advectum Grave. Quod itaque eadem Vi, adeoque & eadem Celeritate, Corpus A repellit, qua advectum fuerat. (Nempe, Vi $m r P C$; adeoque, propter pondus $m P$, Celeritate $r C$) Nam vis Æqualis, eidem Ponderi applicata, eadem Celeritate movet; per prop. 27. Cap. 1.

Dico denique; per eandem rectam repercussum iri. Cum enim à corpore directe impingente introrsum flectatur Elater, idemque Vi Elastica in figuram pristinam se restituat, per def. 1. hujus, (adeoque eadem via redeat qua premebatur,) eandem Directionem Corpori repercusso impertit quam inde acceperat, nisi quod sit ad partes contrarias. Quod itaque per eandem rectam redibit.

Quodque jam demonstratum est, posita in Obice Vi Elastica: perinde obtinet si Vis illa sit in Corpore impingente; vel etiam in utroque. Quippe illud utcunque obtinet; Non prius sisti Vim Impellentem, quam æquipolleat Elateris (sive Singularis, sive Gemini,) adversa Resistentia; sed neque ultra perseverare. Unde reliqua sequuntur.

Idem aliter.

Si Elater nullus esset; sisteretur motus A, ad quietem redactus: per prop. 1. Cap. 11. Totus igitur qui deinceps est motus, est ab Elateris Vi restitutiva. Ea vero semper æqualis est Ictus Vi, (Cap. 11. prop. 5. & seqq. traditæ.) Vis enim Elateri illata, Ictui (quem totum sustinet) æqualis est: quæ itaque Elaterem eousque comprimit donec hujus resistentia illi æquipolleat. Et quidem si resisteret ut nudum Impedimentum; quiesceret adhuc advectum Grave: Cum vero Elater resistat, non ut nudum Impedimentum, sed ut Vis contraria, & quidem tantundem renitendo agens quantum compressus pateretur; fitque hoc quod patitur, Ictui seu Vi illatæ æquipollens: etiam eidem æquipollet Vis restitutiva. (Quod & in propositionibus sequentibus non minus locum habet, adeoque & ibidem pro demonstrato habeatur.) Est autem, hoc casu, (posito Gravi A, pondere $m P$, & Celeritate $r C$,) Ictus magnitudo (per prop. 6. Cap. 11.) $2 m r P C$: tanta igitur erit Vis Elateris restitutiva: Quæ itaque cum utrinque se explicare satagat, adeoque Vi dimidia seu $m r P C$ in Obicem, utut irrito conatu; & in advectum A, vi

item dimidia $mrPC$ repellendo: Erit, propter pondus mP, Celeritas (retrorsum) rC. Quod erat propositum.

Adhuc aliter.

Cum nullus forte sit tam firmus Obex quin aliquatenus percussioni cedat; utut tam exigua possit esse ea cessio ut omnem sensum fugiat, adeoque merito negligatur & pro nulla habeatur, & Obex pro immobili; (ut, verbi gratia, si musca vel pulex in telluris molem in aere pendulam insultum faceret:) Si res ita concipiatur; demonstrabitur idem (mutato propositionum ordine) ex prop. 8. hujus: Ubi supponitur A motum, in B quiescens, sed non impeditum, impingere. Quippe si illic sit A, ponderis mP (exigui) cum celeritate rC; B vero ponderis nP (immense magni) quiescens: Erit impingentis A celeritas post contactum $\frac{m-n}{m+n}rC$ prorsum, (per prop. 8. hujus;) hoc est, (propter prævalentiam signi $-$, ponitur enim nP multo majus quam mP,) $\frac{n-m}{m+n}rC$ retrorsum; quod (propter exiguam & plane contemnendam ponderis mP magnitudinem respectu immensi ponderis nP) tantundem erit, hoc casu, atque $\frac{n}{n}rC = rC$ retrorsum: Reliqui autem gravis B (per eandem prop. 8.) celeritas post contactum $\frac{2m}{m+n}rC$; quæ (propter exiguam & plane contemnendam rationem m seu $2m$, ad n nedum ad $m+n$,) instar nullius erit; ut non immerito dici possit B immotum quiescere.

Sin ea suppositio non admittatur, sed Obex B censeatur plane immobilis; censenda erit ejus firmitas æquipollere ponderi quiescenti sed non impedito nP infinito, (pondus enim finitum non impeditum, nonnihil saltem movebitur, per eandem prop. 8.) Adeoque impingentis A, Celeritas post contactum (ibidem exhibita) $\frac{n-m}{m+n}rC$ retrorsum, erit $\frac{\infty-m}{m+\infty}rC$; quod tantundem est (propter finiti m ad infinitum ∞, rationem infinite exiguam sive nullam,) ac $\frac{\infty}{\infty}rc = rC$. Et quiescentis pridem B, Celeritas post contactum $\frac{2m}{m+n}rC$, erit $\frac{2m}{m+\infty}rC$; quod tantundem est (propter m finitum, & n infinitum) atque $\frac{2m}{\infty}rC$, seu $\frac{2}{\infty}rC$, celeritas nulla; quare & B etiamnum quiescet. Prout alias ante demonstratum fuerat.

SCHOLIUM.

NON ignoro; plerosque Mechanicorum Vim nescio quam in Motu incepto ponere, qua (si procedere non possit) mutata directione (etiam absque nova causa) resiliat. Cum vero hoc Gratis dictum videatur, (ut novus motus absque nova causa incipiat,) & Postulatum; atque multis porro incommodis urgeri possit: Id me potissimum movet, quod, utut nudum Impedimentum Motui tollendo sufficiat, (adeoque inceptum motum impedire valeat ne procedat;) quo tamen contrarius ponatur, Vi Positiva videtur Opus: (per prop. 11, 12. Cap. 1.) Cumque ea in Vi Elastica præsto sit, cur illam respuamus non video. (Præsertim cum in Molli Corpore, vel etiam Fluido, in Solidum impacto, motum Sisti videamus, sed non Reflecti.)

Si tamen ejusmodi Corpus sit, ut nec ita Molle sit quin aliquid habeat Elasticæ Virtutis; nec ita interim Elasticum plane quin fractis Elaterum fibris aliquot (nec tamen omnibus) figuram quadantenus immutari patiatur: Resilitio quidem fiet, sed imperfecta. (Supponit enim Demonstratio, tam Validam esse Vim Elasticam, ut Vi Impellenti sustinendæ par sit, absque aliqua sui ruptione.) Sed & idem quadantenus accidit ob Medii resistentiam: quæ Motum tum Directum, tum Reflexum, sensim imminuit. Item, ob naturalem gravium Descensum; qui se cum reliquis motibus sensim insinuabit. Sed eas considerationes, & (si quæ sint) extrinsecas alias, hic secludimus.

Notandum

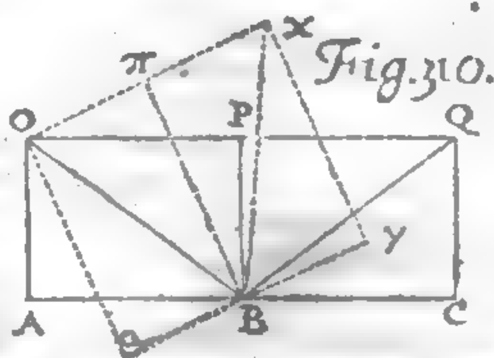
Notandum etiam; utut Vim Impellentem, quasi totam extrinsecus Impressam supponamus; adeoque cessare totam ubi ad Æquipollentiam res redigitur: Fieri tamen posse, ut ea partim naturalis sit, à Gravitate orta; uti cum deorsum projicitur corpus impactum, aut etiam deorsum cadens motu naturaliter accelerato cum acquirit Impetum quo in Obicem impingit. Quod ubi contingit, moderatione opus erit. Separanda utique est Vis extrinsecus impressa, ab ea quæ Gravitatis est simpliciter consideratæ: Eaque tota perit; dum hæc permanet, & Vim Elasticam eatenus obtundit, quo Resilitio imperfectior evadat & minori cum celeritate; Quin & tanta esse potest ut Elasticam Vim ita superet, ut quamvis aliquantulum resurgat (ob sublatam Vim extrinsecus impressam, qua etiam primitus comprimebatur,) non valeat tamen impactum corpus ab se abigere.

Sed & qui accelerando acquiritur Celeritatis gradus, separandus erit à nativa gravitate: Quippe Grave acceleratum, ubi Objecto Obice ne procedat impeditur, nativam quidem Gravitatem retinet, sed acquisitam Celeritatem deperdit; atque deinceps tanquam à Quiete incipiens procedit, nulla ratione habita Celeritatis pridem acquisitæ sed jam deperditæ.

Sin (contra hanc de Vi Elastica hypothesin) objiciatur; Omnia omnino Corpora Dura, hujusmodi Resilitionem seu Reflexionem admittere; & quidem ea fortius quæ Duriora sunt & firmiora: Fieri quidem id omnino potest, nec interim adversari huic de Vi Elastica doctrinæ; Nempe, si & illa omnia Dura Corpora, sint etiam Elastica. Quod quidni dicendum sit, non video. Et quamquam quo Duriora sunt, eo minus pressui cedant: cedunt tamen; &, quo minus cedunt, eo fortius resistunt, adeoque & repercutiunt. Et quamquam Cap. 11. (ubi de Percussione agitur) Duritiem præclusa Elasticitate consideremus; (ut quid inde sequeretur demonstremus si nulla esset Vis Elastica:) Non tamen id volumus ut Vim Elasticam de Duris simpliciter negemus; cum nulla forsan sint Corpora ita simpliciter Dura ut illam non habeant: (Utut, ita Mollia, forsan esse possint.) Et quidem ego (ut dicam quod res est) omnino existimo; Vel nulla esse Dura Corpora, quæ non sint Elastica; vel saltem (siqua sint) ea, invicem commissa nullam Reflexionem pati; sed observare leges Capitis XI. Et quidem in Marmore, Vitro, Ligno, Fictilibus, Metallis durioribus, aliisque duris innumeris, Vim Elasticam inesse; non tantum ex sono edito (Bombo vel Tinnitu, prout repercussio tardior est vel expeditior,) auribus percipimus; sed Oculo, & Tactu, observare licet, ob tremorem utique notabilem.

PROP. II.

Si Grave motum, in firmum Obicem Oblique impingat; sitque vel Alterum vel utrumque Elasticum: Resilitio, eadem Celeritate (& in eodem Plano) ita fiet, ut Angulus Reflexionis sit angulo Incidentiæ æqualis.



INtelligatur, in ABC planum firmum, per OB rectum obliquam, impingens Grave; Angulum Incidentiæ faciens OBA. Componetur hic motus Obliquus per OB, ex duobus motibus (per prop. 6. Cap. 10.) altero Parallelo, ut OP seu AB; altero Perpendiculari, ut PB. Quorum quidem ille (utpote parallelus) in ABC planum neutiquam offensat, neque ab eo impeditur: adeoque eadem Celeritate qua prius procedet; puta, quo tempore ferebatur ab OA ad PB, eodem vel æquali feretur (æquali longitudine) à PB ad QC. Altero vero (utpote perpendiculari) per PB in ABC planum directe impingit; adeoque, propter Vim Elasticam (sive alterius sive utriusque Corporis) in B puncto Incidentiæ, eadem Vi, adeoque & eadem celeritate, directe repercutitur per BP. per prop. præced. Hoc est, eodem seu æquali tempore feretur ab AC ad OQ quo ab OQ ad AC ferebatur; hoc est,

est, eodem quo à PB ad QC. Adeoque per rectam BQ, per prop. 6. Cap. 10. Et propterea, propter OP ipsi PQ æqualem, & PB seu BP communem, (omnesque æquali tempore transactas,) erit BPO triangulum triangulo BPQ simile & æquale, (& quidem, propter OPQ unam rectam, in eodem plano utraque:) Adeoque tum PBQ angulus æqualis angulo PBO, tum (reliquus ad rectum) QBC angulus Reflexionis, (reliquo item ad rectum) OBA angulo Incidentiæ, æqualis. Quæ erant demonstranda.

SCHOLIUM.

SIquis autem ex Tironibus (aut alius quispiam Tirone major) quiritet, Cur simplicissimum motum rectum OB, ex duobus compositum affirmem Gratis? Aut etiam, si compositum esse velim; cum tamen mille modis aliis, æquo jure, dici possit componi; cur ego, reliquis posthabitis, hoc præ cæteris modo compositum, affirmem Gratis; (nec Probem, tum Compositum esse, tum hoc non alio modo compositum?) Respondeo, Nullum ita simplicem esse motum posse, quin in plures componentes resolvi possit. Dum autem hunc præ cæteris modum seligo; utor ego meo jure, qui (cum quamlibet possim) eam adhibeo compositionem quæ præsenti negotio sit accommoda. Neque probandum erit, Compositionem hanc, unicam esse possibilem; sed, ex multis unam. Liberum utique est, pro suo cujusque constructoris arbitrio, ex Veris innumeris ea seligere quæ ad rem præsentem conducant.

Atque hoc perinde obtinet (ut aliis compositionibus rem illustrem) in aliis atque in præsenti casu. Notum utique est, numerum 12, componi ex 3×4, sed & ex 2×6, item ex 1×12, (aliisque modis innumeris per numeros fractos.) Si itaque exponatur numerus 12, dato Divisore 2 dividendus, & quæratur Quotiens: Asseram ego protinus, numerum 12 ex 2×6 compositum; adeoque sumpto Divisore 2, Quotiens erit 6. Sin oggerat aliquis, Numerum hunc Duodenarium de quo fit sermo, nulla hujusmodi compositione constructum fuisse; sed nuda Unitatum collectione; (puta, si totidem homines viritim collecti fuerint:) Cur itaque velim ego, numerum (additione mera constructum) multiplicando compositum affirmare Gratis? Et quidem, si velim esse multiplicando compositum, cur sic compositum (ex 2×6) affirmem Gratis, cum possit eodem jure ex 3×4, vel 1×12, &c. componi dici? nec probem, eo potius modo fuisse compositum? Num audiendus, inquam, est hic Objector? Annon reponendum statim videas, Non eo minus numerum 12 ex factoribus 2×6 compositum esse, vel in eos resolubilem, quod fuerit (hac vice) additione constructus? Quippe cum constitutus est numerus, utcunque constituatur, non ideo deperdit proprias affectiones. Quod autem non dixerim ex 3×4, vel 1×12, Compositum, (utut hæc vera sint, atque alias, ubi opus fuerit, dicenda,) sed ex 2×6: ratio in promptu est: Nempe, non quod reliquæ compositiones non sint veræ, sed quod ad præsens negotium sint inutiles. Quippe non quærebatur numerus qui cum 1, vel 3, vel 4 compositus, sed qui cum 2 compositus constituat 12.

Similiter; cum possit Ratio A ad B, mille modis componi; puta ex A ad C & C ad B; vel ex A ad D & D ad B; vel ex A ad E & E ad B; &c. Si tamen datis rationibus A ad B (puta 1 ad 2) & A ad C (puta 1 ad 3) quæratur, quæ sit ratio C ad B: Dicendum erit, non quidem rationem A ad B compositam esse ex A ad D & D ad B; aut ex A ad E & E ad B; (quippe hæ compositiones, utut veræ sint, ad rem præsentem non faciunt;) sed, ex A ad C & C ad B: Adeoque, si ex ratione A ad B eximatur (altera componentium) A ad C, habebitur (reliqua) C ad B; (puta 3 ad 2.)

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{C} \times \frac{C}{B} = \frac{A}{D} \times \frac{D}{B} = \frac{A}{E} \times \frac{E}{B} \text{ \&c. } \left.\frac{A}{C}\right) \frac{A}{B} \left(\frac{C}{B} \quad \left.\frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right.\right.$$

Siquis autem quærat; cur velim ego rationem simplicissimam, 1 ad 2, compositam esse gratis affirmare? Et quidem, Cur sic compositam, cum aliis mille modis non minus componi possit? Omnino imprudenter atque imperite hoc quæritur: Cum nulla sit tam simplex ratio quæ non possit in plures resolvi: Neque, cur, reliquis posthabitis, hanc selegerim compositionem; aliam reddendam esse causam, quam quod hæc sit præsenti negotio reliquis accommodatior.

Pariter; si expositi Gravis, datum sit Momentum $mrPC$, & datum Pondus $2mP$, quæratur autem Celeritas: Respondendum, non quidem $mrPC = mP \times rC$, vel $= rP \times mC$ (quæ quidem vera sunt, & alias dicenda, sed nihil ad rem præsentem,) sed $mrPC = 2mP \times \frac{1}{2}rC$; (adeoque Celeritatem quæsitam esse $\frac{1}{2}rC$:) Non utique quærebatur, qua Celeritate pondus mP, seu rP, sed qua $2mP$ ferendum sit ut momentum habeatur $mrPC$.

Atque similiter omnino in casu præsenti. Quippe cum constet motum OB, eundem esse cum eo qui componitur ex OP & PB, (neque enim hoc negabitur;) quidni dicam motum OB ex OP & PB componi, aut (quod tantundem est) in hos resolubilem esse? (eodem jure quo, si constet numerum 12 eundem esse cum eo qui componitur ex 3×4, dixerim 12 ex 3×4 componi?) Et quamquam multis adhuc aliis modis componi possit; dum hunc præ cæteris seligo ut negotio præsenti accommodum; utor ego meo jure: Eodem usurus, si, exposito plano alio, aliam selegero compositionem. Quippe si pro ABC exponeretur planum $\alpha B\gamma$; eundem OB motum, compositum dicerem (non, ex OP & PB, sed) ex $O\pi$ & πB. Adeoque, propter æquales $O\pi$, $\pi\chi$, in eadem parallela recta; & $B\pi$ ipsi πB vel æqualem vel eandem; Reflexionem futuram esse in $B\chi$ recta; Angulumque Reflexionis $\chi B\gamma$, angulo Incidentiæ $OB\alpha$ æqualem. Has autem (respective) compositiones adhibeo, non quasi aliæ non essent veræ; sed quod, ex veris multis, ea seligenda sit (utrobique) quæ ad rem propositam conducat. Id autem hic loci est; ut totum illud motus Obliqui OB cui adversatur planum ABC, vel $\alpha B\gamma$, ab eo separem cui non adversatur: quod non aliter obtinetur, quam resolvendo motum obliquum in Parallelum & Perpendicularem.

Estque res hæc tam Clara, ut nulla illustratione putaverim indiguisse, si non hoc ipsum serio objectum viderim à Viro cum tironibus non numerando: Nempe ab *Honorato Fabri*, Dialog. Physic. 2. p. 195; & Tract. de Motu. lib. 6. & alibi.

PROP. III.

Si duo Gravia invicem Æqualia, æquali Celeritate sibi mutuo directe occurrant; sintque (alterum vel utrumque) Corpora Elastica:

Aut etiam, si Gravia illa sint Inæqualia, sed Celeritates habeant reciproce proportionales, (quo saltem Momenta sint æqualia:)

Resiliet utrumque eadem Celeritate qua accesserat, & per eandem rectam.

INtelligantur, sic occurrentia, A, B, gravia: quorum utriusque Pondus sit mP, Celeritas rC: Vel, illius quidem Pondus mP, Celeritas rC; hujus vero Pondus rP, Celeritas mC: Adeoque (utrovis casu) Momentum utriusvis $mrPC$, & simul utriusque $2mrPC$. Quorum cum utriusque Vim sustineat Elater (sive singularis sive geminus,) nec prius flecti cesset quam hujus resistentia eorum utrique æquipolleat, (per demonstrata ad prop. 1. hujus;) tum vero Vis impellens (ad quietem redacta, adeoque destructa,) urgere cesset: Elater Vi sua (impellentibus æquali) æqualiter utrinque se expedire satagens, utrinque eadem Vi (totius dimidia) $mrPC$ repellit gravia; hoc est, eadem qua advehebantur; adeoque & eadem respective Celeritate; per prop. 27. Cap. 1. Hoc est, si utrinque sit pondus mP, celeritate utrinque rC, (sed ad contrarias partes:) Sin secus; pondus mP Celeritate rC, & pondus rP celeritate mC: (propter $mrPC = mP \times rC = rP \times mC$:) Hoc est, eadem Celeritate utrumque qua advenerat. Et quidem per eandem rectam (contrariis motibus) propter Elaterem eadem Directione redeuntem qua premebatur; utpote ad figuram pristinam se restituere satagentem. Quod & in sequentibus propositionibus pariter intelligendum erit; adeoque & ibidem pro demonstrato habeatur. Fig. 302.

Idem aliter.

Si Elater nullus esset; sisteretur motus uterque, ad quietem redactus; per prop. 4. Cap. 11. Adeoque totus qui deinceps est motus, est ab Elateris Vi restitutiva:

Quæ

Quæ tanta semper est quanta est Vis Ictus; (ut ad prop. 1. hujus, ostensum est:) Hoc est, in casu præsenti, (per prop. 7. Cap. 11.) $2mrPC$. Quæ utrinque æqualiter se expedire satagens, agit utrobique ut $mrPC$: Adeoque repellit Pondus mP celeritate rC, & pondus rP celeritate mC: ut prius.

PROP. IV.

Si duo Gravia Elastica (non ab invicem compressa) vel quiescant utraque; vel utraque per eandem rectam ad easdem partes æquali celeritate ferantur; vel denique Antecedens Celeritate majore; (sive invicem contigua sint, sive disjuncta:) Nullus Impulsus fiet, aut Elateris compressio; adeoque nulla propterea motuum immutatio.

Quare &, si, Gravibus alias motis, communis addatur (vel auferatur) Celeritas; nulla fit inde impulsus mutatio, (aut quæ hinc sequuntur) sed perinde est (Impulsum quod spectat, aut Elateris compressionem,) sive adsit sive absit communis illa celeritas.

PRopositio patet. Quippe, si utraque quiescant, nulla Vis utrivis infertur, nullus obstruitur motus, neutrum impellit reliquum, nullaque fit quæ ab impulsu esset Elateris compressio, aut quæ ab utrovis procederet motuum immutatio, (puta, quæ vel Celeritatem spectet, vel Directionem,) utut contigua fuerint ea Gravia; nedum si disjuncta.

Similiter, si ferantur utraque ad easdem partes eadem Celeritate. Quippe, si disjuncta sint, manebunt adhuc disjuncta, (& quidem eodem intervallo,) propter eandem utriusque Celeritatem; adeoque ne quidem se contingent mutuo, nedum impellent. Sin contigua sint; dum tamen Antecedens eadem Celeritate fugit qua sequitur Insequens; utcunque nulla Vis infertur, nulla motus obstructio; adeoque nullus impulsus, nulla compressio, nullaque inde motus immutatio.

Sin Antecedentis Celeritas sit major: tantum abest ut à segnius Insequente prematur, ut hoc à tergo relinquatur, facto intervallo si fuerint contigua, & aucto ubi disjuncta fuerint.

Addo tamen, *modo ne sint ab invicem compressa*: Quippe, si hoc contigerit, Vis Elastica, quamprimum poterit, se exseret, motusque immutationem efficiet.

Atque eadem ratione constabit Corollarium. Quippe, qua Celeritate fugit Antecedens, adeoque se subducens declinat ictum; eatenus sequenti non obstat, ejusve motum obstruit, unde sequeretur impulsus vel compressio, (non magis utique quam ubi sequenti contiguo se subducit antecedens;) sed tota Vis impulsiva seu compressiva, æstimanda est, ab excessu Celeritatis sequentis suprà Celeritatem antecedentis ad easdem partes moti; qui idem utcunque erit quicunque vel addatur vel auferatur motus utrique communis.

Aliter.

Vel sic; Ob motum communem, nullus fit Ictus, vel ictus immutatio; per prop. 7. Cap. 11. Ergo, nulla Elateris compressio (aut quæ hinc sequuntur) ut quæ Ictui æquipollet; per demonstrata ad prop. 1. hujus.

PROP.

PROP. V.

Si Grave motum, Æquali Quiescenti (nec impedito tamen) directe impingat; sitque vel alterum vel utrumque Elasticum: Motum quiescet; & Quiescens movebitur, ea Celeritate quæ fuerat prius moti.

Esto Gravium hujusmodi invicem æqualium, A, B, pondus utriusvis mP. Quorum B quiescat; eique directe impingat A, Celeritate rC, adeoque Momento seu Impetu $mrPC = mP \times rC$. Vim huic æquipollentem Imprimeret Elateri, (eadem seipsum exuens) qua (retenta) Elater post repelleret ipsum A (ad quietem redactum,) modo B firmum esset: per prop. 1. hujus. (Ut taceam id quod est ab Obice atque in Obicem rependitur.) Sed, propter non impediti B cessionem, quam ab A recipit Vim Elater, eandem cedenti B protinus impertit, (nec in se retinet, ut in casu prop. 1. quo possit A post repellere.) Unde factum est, ut impellens A (vi sua destitutum quam in Elaterem impenderat) Quiescat; eaque Vi $mrPC$ (Elateris interventu in B collata) propellatur B; adeoque (propter mP pondus) Celeritate rC (prorsum,) quæ fuerat impellentis. Fig. 300.

Demonstratio alia.

Sunto hujusmodi Gravia æqualia A, B, quorum utriusvis Pondus sit mP. Atque, in B quiescens, directe impingat A, Celeritate rC; adeoque Momento seu Impetu $mrPC$. Quo itaque, propter cessionem non impediti B, utraque junctim ferenda essent (si Vis Elastica abesset) Celeritate dimidia, $\frac{1}{2}rC$ prorsum (propter $mrPC = 2mP \times \frac{1}{2}rC$,) per prop. 2. Cap. 11. Sed (propter Vim Elasticam) Elateri imprimitur Vis restitutiva ipsi $mrPC$ æquipollens. (Nam quamdiu Elateris flexio facilius fiat quam utriusque Gravis processus, Elater porro flectitur; & qua Vi flectitur, eadem propter Vim Elasticam se restituit.) Elater itaque, utrinque se explicare satagens (diremptis invicem Gravibus) Repellit A, Vi $\frac{1}{2}mrPC$; atque eadem Vi $\frac{1}{2}mrPC$ Propellit B; Adeoque (propter pondus utrobique mP,) A quidem Celeritate $-\frac{1}{2}rC$ (retrorsum;) B vero, Celeritate $+rC$ (prorsum:) Sed ferendum erat A alio nomine (ut dictum est) Celeritate $+rC$ (prorsum;) Ergo, cum hoc nomine accedat Celeritas $-rC$ (retrorsum;) quiescet A (seu nulla in utramvis partem Celeritate movebitur) propter $+\frac{1}{2}rC - \frac{1}{2}rC = 0C$. Ferendum autem erat B alio nomine (ut item ostensum est) Celeritate $\frac{1}{2}rC$ (prorsum;) sed & hoc nomine propellitur item Celeritate (prorsum) $\frac{1}{2}rC$: Ergo, tota Celeritas est $\frac{1}{2}rC + \frac{1}{2}rC = rC$ (prorsum;) hoc est, ea quæ fuerit prius moti.

Vel sic brevius.

Positis ut prius; ferenda essent utraque si Elater nullus foret, Celeritate $\frac{1}{2}rC$ prorsum; adeoque utrumvis momento seu Vi $\frac{1}{2}mrPC$; per prop. 2. Cap. 11. Est autem (per prop. 9. Cap. 11.) ictus magnitudo $mrPC$; atque huic æqualis Vis Elateris restitutiva, (per demonstrata ad prop. 1.) quæ se utrinque explicare satagens, dimidia Vi tum Repellit A, tum Propellit B; adeoque ipsi A impertit Vim $-\frac{1}{2}mrPC$ (retrorsum,) & B, Vim $+\frac{1}{2}mrPC$ (prorsum:) quæ si prius positis respective addantur, fiet Vis in A, $\frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}mrPC = 0PC$; quod itaque quiescet; in B vero $\frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}mrPC = mrPC$; (prorsum;) quod itaque (propter pondus mP;) feretur prorsum Celeritate rC quæ fuerat ipsius A.

Adhuc alia.

Sunto ea Gravia æqualia (ut prius) A, B; & quiescenti B, directe impingat A, Celeritate rC prorsum. Intelligatur autem utrique superaddi motus communis, Celeritate $-\frac{1}{2}rC$ (retrorsum;) quo fiat Gravis A Celeritas $rC - \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}rC$ (prorsum,) & Gravis B Celeritas $-\frac{1}{2}rC$ (retrorsum.) Quo casu, ferretur A, post contactum Celeritate $-\frac{1}{2}rC$ (retrorsum,) & B Celeritate $+\frac{1}{2}rC$ (prorsum,) per prop. 3. hujus. Sed (propter communem motum nullius instar, impulsum quod spectat, per prop. præced.) idem erit impulsus effectus in casu præsenti. Si

itaque in statum pristinum restituantur, dempta utrinque quæ addebatur Celeritate $-\frac{1}{2}rC$, (seu, quod eodem recidit, addita Celeritate $+rC$ prorsum,) habebitur Gravis A Celeritas $-\frac{1}{2}rC+\frac{1}{2}rC=0C$; & Gravis B, Celeritas $+\frac{1}{2}rC+\frac{1}{2}rC=+rC$. Hoc est, quiescet A, & feretur B prorsum, ea Celeritate quæ fuerat ipsius A.

SCHOLIUM.

PLures hic demonstrationes congessi (ut & in aliis propositionibus,) non quod diffidam singulis (velimque Numero supplere quod Vi deest,) inest enim singulis sua Vis: Sed, cum pro vario lectorum gustu modo hic modo ille demonstrandi modus placeat magis, ut quam magis velit Lector eligat. Prima quidem, aut etiam secunda (ut ad prop. 1. & 3.) Physicam rei causam magis explicant; quam tamen in sequentibus parcius prosequor, ut quæ ab his dependent. Penultima (quæ ex Vi quæ foret si Elater nullus esset, eaque quæ ex Elateris Vi restitutiva, ictui semper æquali, colligit Vim integram,) meis hypothesibus Cap. 11. traditis maxime accommodata est, & demonstratio Geometrica (uti mihi videtur) maxime genuina. Adjunxi tamen ultimam, in eorum præsertim gratiam quæ hypothesibus illis meis (vix dum receptis) difficilius forsan sint assensuri. Ea quippe methodo (quam, una cum præcedente, sequentibus item propositionibus accommodo,) quæ, missis aliis, ex solis prop. 3. & 4. hujus admissis (quas alii postulant, potius quam probant, tanquam per se claras, aut experimentis Physicis satis comprobatas) sequentes solo calculo elicit: ut (quicquid sit de illis hypothesibus, quas tamen ego maxime genuinas existimo) nullus sit de propositionum illarum veritate dubitandi locus; ut quæ non aliter à meis hypothesibus dependeat, quam quod ego inde probem propositionem tertiam hujus, quam alii gratis postulant. Sed & existimavi non abs re fore, utriusque methodi consensum indicare: Adeoque Phænomena Motuum in Hypothesi nostra, (utut sint ex aliis principiis deducta; ipsaque Hypothesis nostra, in *Transactionibus Philosophicis* postmodum vulgata, *Societati Regiæ* prius fuerit exhibita & Regestis inserta, quam eorum vel vulgatæ fuerint vel exhibitæ;) eadem plane sint cum Phænomenis Hypothesium D. *Christophori Wrenni* nostri, & D. *Christiani Hugenii* Batavi. Id utique interest; quod, quæ illi vel postulant vel ex observatis nulla habita Elateris ratione supponunt; nos, Elateris ope, ex primis Principiis deducimus: Phænomenis interim quæ nos inde ratiocinando colligimus, iisdem provenientibus quæ ex factis Experimentis observarunt ipsi. Ut inde minus dubitandum sit, (cum singuli, clam reliquis, à diversis principiis, & diversis methodis ad eadem Phænomena pervenerimus,) quin in veritate Phænomenum consentiamus omnes.

PROP. VI.

Si duo Gravia (Elastica) invicem æqualia, ferantur (per eandem rectam ad easdem partes) Celeritatibus inæqualibus, & consequens (majori Celeritate latum) antecedenti directe impingat: Ferentur, post contactum, ad easdem partes utraque, celeritatibus alternatis, seu invicem permutatis.

Fig. 301. SIt Gravium illorum æqualium A, B, utriusvis pondus mP; celeritas illius, $rC=sC+tC$; hujus sC: adeoque momentum illius, $mrPC$; hujus, $msPC$; prorsum utraque. Eritque propterea Vis Elateris restitutiva (utpote Ictui æqualis, per demonstrata ad prop. 1.) $mrPC-msPC=mtPC$; per prop 10. Cap. 11. Quæ æqualiter utrinque se explicare nitens, vi dimidia $\frac{1}{2}mtPC$, tum Repellit A, tum Propellit B; adeoque (propter pondus utrobique mP) confert illi celeritatem $-\frac{1}{2}tC=-\frac{r-s}{2}C$ (retrorsum;) huic, $+\frac{1}{2}tC=+\frac{r-s}{2}C$ prorsum. Sed & aliunde (si Elater nullus esset) ferendum foret utrumque Celeritate

$r+s$

$\frac{r+s}{2}C$; per prop. 3. Cap. 11. Qua utrobique addita, fit Gravis A, celeritas $-\frac{r-s}{2}C+\frac{r+s}{2}C=sC$; & Gravis B, celeritas $+\frac{r-s}{2}C+\frac{r+s}{2}C=rC$: Hoc est, prorsum utraque & celeritatibus permutatis.

Aliter.

Sint Gravia illa æqualia A, B; sitque antecedentis B, celeritas sC; insequentis A, celeritas (major) $rC=sC+tC$. Cum itaque sit utrique communis celeritas sC, tantundem est (compressionem quod spectat) atque si utrobique abesset; (per prop. 4. hujus.) Adeoque sequens A, celeritatis excessu tC, impingeret in B quiescens. Quo casu ferretur B, post contactum, celeritate tC (quæ fuerat insequentis A,) A vero (quiescens utique) celeritate oC; per prop. 5. hujus. Si itaque utrique restituatur, quæ communis fuerat, celeritas sC (modo dempta;) habebitur celeritas A, $oC+sC=sC$; & celeritas B, $tC+sC=rC$: Hoc est, ferentur utraque ad easdem partes, celeritatibus permutatis.

PROP. VII.

Si duo Gravia (Elastica) invicem æqualia, Celeritatibus inæqualibus (per eandem rectam ad contrarias partes) sibi mutuo directe occurrant: Ferentur deinceps ad partes contrarias, Celeritatibus invicem permutatis.

Sit Gravium æqualium A, B, utriusvis pondus mP; illius vero celeritas, rC (prorsum;) hujus vero $-sC$ (retrorsum;) sitque $r+s=z$. Erit momentum illius, $+mrPC$; hujus, $-msPC$: Adeoque Elateris (qui utrumque sustinet) Vis restitutiva (Ictui æqualis) $mrPC+msPC=mzPC$: per prop. 11. Cap. 11. Quæ, æqualiter se utrinque explicans, vi dimidia $\frac{1}{2}mzPC$ utrumque repellit; adeoque, propter pondus mP utrobique, confert Gravi A celeritatem $-\frac{1}{2}zC=-\frac{r+s}{2}C$ (retrorsum;) & Gravi B celeritatem $+\frac{1}{2}zC=+\frac{r+s}{2}C$ prorsum.) Sed & ferenda erant utraque (si Elater nullus esset) celeritate $\frac{r-s}{2}C$; per prop. 4. Cap. 11. Quæ si utrobique addatur; habebitur celeritas A, $-\frac{r+s}{2}C+\frac{r-s}{2}C=-sC$ (retrorsum;) B vero, $+\frac{r+s}{2}C+\frac{r-s}{2}C=+rC$ (prorsum:) Hoc est, ad partes contrarias, celeritatibus permutatis. Fig. 302.

Aliter.

Sit Gravis A celeritas (prorsum) $rC=sC+tC$; & Gravis B (eidem æqualis) celeritas $-sC$ (retrorsum;) quæ sibi mutuo directe occurrant. Cumque habeatur utrinque celeritas sC, sed ad contrarias partes; ferrentur post contactum (propter has celeritates) A quidem, celeritate $-sC$ (retrorsum;) B vero, celeritate $+sC$ (prorsum;) per prop. 3. hujus. Sin demi intelligantur celeritates hæ; relinquetur Gravi A, celeritas tC, qua feratur in B ut quiescens: Et, propter hanc celeritatem, ferretur B (prorsum) celeritate tC; & A (quiescens) celeritate oC: per prop. 5. hujus. Quæ si prius memoratis respective addantur; habebitur Celeritas A, $-sC+oC=-sC$ (retrorsum;) & celeritas B, $+sC+tC=+rC$ (prorsum;) Hoc est, ad contrarias partes, celeritatibus permutatis.

Adhuc aliter.

Sint Gravia æqualia A, B, quæ sibi mutuo directe occurrant; A quidem celeritate $rC=sC+tC$ prorsum; & B, celeritate $-sC$ (retrorsum.) Intelligatur

autem utrique conferri (motu communi) celeritas $+sC$ prorsum; quo fiat Celeritas A, $rC+sC$ (prorsum;) B vero, $-sC+sC=oC$: (ut feratur A celeritate $rC+sC$, tanquam in B quiescens.) Quod si ponatur; erit, post contactum, celeritas A, oC; B vero $rC+sC$ (prorsum;) per prop. 5. hujus. Sed & idem erit (impulsum quod spectat) in casu proposito. Si itaque utrinque dematur (quæ adjecta fuerat) celeritas $+sC$: habebitur ipsius A celeritas $oC-sC=-sC$ (retrorsum;) & B, celeritas $rC+sC-sC=rC$ (prorsum:) Hoc est, ad contrarias partes, celeritatibus permutatis.

PROP. VIII.

Si Grave motum, quacunque Celeritate, in Grave quiescens (æquale) vel inæquale) directe impingat; (sintque Elastica, alterum vel utrumque:)

Celeritas, post contactum, Gravis Impingentis, ad eam quæ prius fuerat, est, ut differentia ponderum, ad eorundem summam; (& quidem prorsum vel retrorsum, prout Pondus impingentis majus est aut minus Pondere quiescentis; sin ea sint æqualia, quiescet:)

Celeritas autem Quiescentis, fiet (post contactum) ad eam quæ fuerat Impingentis, ut duplum ponderis impingentis ad eandem ponderum summam. Adeoque si pondera fuerint æqualia, ea celeritate quæ fuerat prius moti.

Fig. 300. Esto Gravis A moti, Pondus mP, Celeritas rC, adeoque Momentum $mrPC$: Et quiescentis B (cui directe impingit A) Pondus nP. Erit Elateris vis restitutiva (ictui æqualis) $\frac{2mn}{m+n}rPC$, per prop. 12. Cap. 11. Quæ æqualiter utrinque se explicans, Celeritate dimidia $\frac{mn}{m+n}rPC$ tum Repellit A, tum Propellit B; adeoque confert illi (propter pondus mP) Celeritatem $-\frac{n}{m+n}rC$ (retrorsum;) huic (propter pondus nP) Celeritatem $+\frac{m}{m+n}rC$ (prorsum.) Sed & aliunde ferenda erant utraque (si Elater nullus esset) communi Celeritate $\frac{m}{m+n}rC$ (prorsum;) per prop. 2. Cap. 11. Quæ si utrinque addatur, habebitur Celeritas A, $-\frac{n}{m+n}rC+\frac{m}{m+n}rC=\frac{m-n}{m+n}rC$ (prorsum vel retrorsum prout m vel n majus fuerit; neutra vero si fuerint æqualia, propter $m-n=o$:) & Celeritas B, $+\frac{m}{m+n}rC+\frac{m}{m+n}rC=\frac{2m}{m+n}rC$: Et quidem, si $m=n$, Celeritate rC. Quæ demonstranda erant.

Aliter.

Sit Gravis A, pondus mP; & Gravis B, pondus nP: atque intelligatur A, Celeritate rC, directe impingere in B quiescens. Intelligatur item dividi Celeritas rC, in partes ponderibus reciproce proportionales; Nempe, $\frac{n}{m+n}rC$, quæ respondeat ponderi mP; & $\frac{m}{m+n}rC$, quæ respondeat ponderi nP. Atque

que intelligatur porro utrique subtrahi Celeritas (quæ B respicit) $\frac{m}{m+n} rC$, seu tantundem retrorsum addi; (Quæ communis vel additio vel subductio impulsus valorem non immutat, per prop. 4. hujus:) Quo fiat Celeritas A, $rC - \frac{m}{m+n} rC = \frac{n}{m+n} rC$; & Celeritas B, $o C - \frac{m}{m+n} rC = -\frac{m}{m+n} rC$; quæ itaque sunt Ponderibus reciproce proportionales. Repercutientur itaque (per prop. 3. hujus) eisdem Celeritatibus utraque quibus accesserant: Hoc est, A, Celeritate $-\frac{n}{m+n} rC$, (retrorsum;) & B, Celeritate $+\frac{m}{m+n} rC$ (prorsum.) Idemque erit impulsus ratio in Casu præsenti. Adeoque si restituatur utrobique (quæ modo ablata est) Celeritas $\frac{m}{m+n} rC$ prorsum; habebitur Gravis A futura Celeritas $-\frac{n}{m+n} rC + \frac{m}{m+n} rC = \frac{m-n}{m+n} rC$ (prorsum vel retrorsum prout m vel n majus fuerit; neutra vero si sint æqualia;) & Gravis B, Celeritas $\frac{m}{m+n} rC + \frac{m}{m+n} rC = \frac{2m}{m+n} rC$ (prorsum.) Ut prius.

PROP. IX.

Si duo Gravia (Elastica) utcunque vel Æqualia vel Inæqualia, & quibuscunque Celeritatibus, ferantur utraque per eandem rectam, ad easdem partes; (ita tamen ut Insequens, majore Celeritate latum, in Antecedens directe impingat:) Ferentur utraque, post contactum, eis Celeritatibus, & ad eas partes, quas subjectus Calculus indicabit.

Sit Antecedentis B, pondus nP, Celeritas sC prorsum: Sequentis A, pondus mP, Celeritas (major) $rC = sC + tC$. Erit Elateris Vis restitutiva (Ictui æqualis) $\frac{2mn}{m+n} tPC$; per prop. 13. Cap. 11. Quæ utrinque se æqualiter explicans, adeoque vi utrinque dimidia, $\frac{mn}{m+n} tPC$; Gravi A, propter pondus mP, Celeritatem confert $-\frac{n}{m+n} tC$ (retrorsum;) & Gravi B, propter pondus nP, Celeritatem $+\frac{m}{m+n} tC$ (prorsum.) Sed & aliunde ferenda erant (si Elater nullus esset) Celeritate communi $\frac{mr+ns}{m+n} C$, per prop. 3. Cap. 11. Quæ itaque si utrobique addatur; habebitur Gravis A futura Celeritas, $-\frac{n}{m+n} tC + \frac{mr+ns}{m+n} C = \frac{mr+ns-nt}{m+n} C = \frac{mr-nr+2ns}{m+n} C$ (prorsum vel retrorsum, prout signum + vel − prævaluerit, adeoque neutra si æquipolleant;) & Gravis B, Celeritas $\frac{m}{m+n} tC + \frac{mr+ns}{m+n} C = \frac{mt+mr+ns}{m+n} C = \frac{2mr-ms+ns}{m+n} C$ prorsum. Quod ostendendum erat. Fig. 301.

Aliter.

Sit Gravis A, pondus mP; Gravis B, pondus nP: & ferantur utraque per eandem rectam ad easdem partes; puta, prorsum utraque: B quidem, Celeritate sC; A vero, Celeritate (majore) $rC = sC + tC$, atque in B directe impingat. Intelligatur autem, motui communi, utrique detracta Celeritas sC, (Quæ, cum communis sit, impulsum non mutabit, per prop. 4. hujus.) Quo facto, B ad quietem redigetur (propter $sC - sC = 0C$;) eique directe impinget A, Celeritate $rC - sC = tC$. Quo casu, ferretur post contactum A Celeritate $\frac{m-n}{m+n}tC$ (prorsum vel retrorsum prout m vel n major fuerit) B vero Celeritate $\frac{2m}{m+n}tC$ (prorsum;) per prop. præced. Cum itaque eadem sit ratio (impulsum quod spectat) in casu præsenti: Si restituatur utrobique, quæ modo ablata est, Celeritas sC prorsum; habebitur futura Celeritas Gravis A, $\frac{m-n}{m+n}tC + sC = \frac{mt+ms-nt+ns}{m+n}C$ $= \frac{mr-nr+2ns}{m+n}C$ (prorsum vel retrorsum, prout signum + vel − prævaluerit, adeoque neutra si æquipolleant;) & Gravis B, Celeritas $\frac{2m}{m+n}tC + sC$ $= \frac{2mt+ms+ns}{m+n}C = \frac{2mr-ms+ns}{m+n}C$ prorsum. Ut prius.

PROP. X.

Si duo Gravia (Elastica) utcunque vel Æqualia vel Inæqualia, & quibuscunque Celeritatibus, per eandem rectam, sibi mutuo directe occurrant: Ferentur utraque, post contactum, eis Celeritatibus, & ad eas partes, quas calculus indicabit.

Fig. 302. Sit Gravis A, pondus mP, Celeritas $+rC$ (prorsum;) & Gravis B, directe occurrentis, pondus nP, Celeritas $-sC$ (retrorsum;) sitque $r+s=z$. Erit Elateris Vis restitutiva (utpote Ictui æqualis) $\frac{2mn}{m+n}zPC$; per prop. 14. Cap. 11. Quæ æqualiter utrinque se explicare satagens, utrinque distribuit Vim dimidiam $\frac{mn}{m+n}zPC$. Adeoque Gravi A, propter pondus mP, celeritatem confert $-\frac{n}{m+n}zC$ (retrorsum;) & Gravi B, propter pondus nP, celeritatem $+\frac{m}{m+n}zC$ (prorsum.) Sed aliunde ferenda erant utraque (si Elater nullus esset) celeritate $\frac{mr-ns}{m+n}C$, per prop. 4. Cap. 11. Quæ itaque si utrobique addatur; habebitur Gravis A futura celeritas $-\frac{n}{m+n}zC + \frac{mr-ns}{m+n}C = \frac{mr-nz-ns}{m+n}C = \frac{mr-nr-2ns}{m+n}C$ (prorsum vel retrorsum prout signum + vel − prævaluerit, adeoque neutra si æquipolleant;) & Gravis B, celeritas $\frac{m}{m+n}zC + \frac{mr-ns}{m+n}C = \frac{mr+mz-ns}{m+n}C$ $= \frac{2mr+ms-ns}{m+n}C$ (prorsum item vel retrorsum, prout prævaluerit signum + vel −, adeoque neutra si æquipolleant.) Quod ostendendum erat.

Aliter

Aliter.

Sit Gravis A, pondus mP; Gravis B, pondus nP; quæ sibi mutuo directe occurrant: A quidem celeritate rC (prorsum,) B vero celeritate $-sC$ (retrorsum:) sitque $r+s=z$. Intelligatur autem (motu communi, qui itaque impulsum non immutabit, per prop. 4. hujus,) addita utrique celeritas $+sC$ (prorsum;) quo redigatur B ad quietem (propter $-sC+sC=0C$;) cui ut quiescenti impingat A celeritate $rC+sC=zC$. Quo casu ferretur, post contactum, A celeritate $\frac{m-n}{m+n}zC$; B vero, celeritate $\frac{2m}{m+n}zC$, per prop. 8. hujus. Adeoque, dempta utrobique, quæ modo addebatur, celeritate sC; habebitur Gravis A, futura celeritas $\frac{m-n}{m+n}zC - sC = \frac{mz-ms-nz-ns}{m+n}C = \frac{mr-nr-2ns}{m+n}C$ (prorsum vel retrorsum prout signum + vel − prævaluerit; neutra si æquipolleant:) & Gravis B, celeritas $\frac{2m}{m+n}zC - sC = \frac{2mz-ms-ns}{m+n}C = \frac{2mr+ms-ns}{m+n}C$ (prorsum item vel retrorsum, prout signum + aut − præpolleat; neutra si æquipolleant.) Quod ostendendum erat.

C A P.

CAP. XIV.

De Hydrostaticis.

PROP. I.

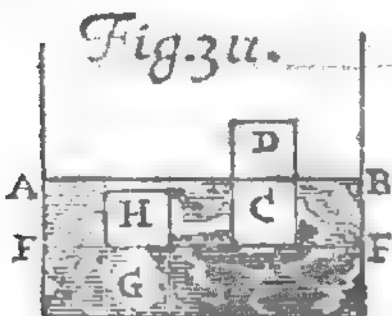
A. Si Grave Fluidum (à latere ex omni parte & fundo ne effluat, conclusum; & ab alia Vi liberum;) superne vel non prematur, vel æqualiter prematur ubique: Retinebit illud, supernam superficiem quod spectat, situm Horizontalem, seu potius Sphæricum, Telluri concentricum: (quæ hic pro eodem habentur.) Atque inde deturbatum, suapte se Gravitate eo restituet.

B.

C. Sin superne prematur Inæqualiter, (plus alibi, alibi minus;) ea parte qua majori pressu urgetur, Descensus fiet; partibus ita pressis, alias, quæ vel non pressæ sunt, vel minus pressæ, loco suo detrudentibus; quæ itaque, pro illo descensu, assurgent.

D. Quodque de Superficie suprema dictum est; alii cuivis (intra fluidum) parallelæ, similiter accommodabitur.

A. Esto Gravis Fluidi (vase conclusi, & ab alia Vi liberi,) superficies A B plana Horizontalis, (considerato scilicet Terræ Centro tanquam in infinita distantia, adeoque rectis perpendicularibus ut invicem parallelis;) seu potius Sphærica Telluri concentrica, (quæ hic pro eodem habentur,) quo partes ejus omnes sint æqualiter altæ, seu à Terræ Centro remotæ, (per prop. 3. Cap. 2.) Sitque superne vel non pressa, vel æqualiter ubique pressa. Cum itaque partes inferne positæ sursum (propter Gravitatem suam) non nitantur, (per prop. 1. Cap. 2.) quo possit superficiei hujus pars ulla elevari; nec locus infra sit (utpote qui æque gravibus jam occupatus est) quo possit descendere; neque sit quod superne deprimat, si non prematur; vel saltem quod hic magis quam alibi deprimat, si æqualiter prematur; nullusque ea propter fiat motus, (per prop. 8. Cap. 2.) nihil est quod superficiem illam deturbet, quin retineatur.



B. Et quidem, si extra hunc situm, externa Vi, deturbetur; ut sit pars alia, puta D, cæteris altior: se ipsum, ad situm debitum, gravitate sua reducet Fluidum. Quippe pars illa D, partim deprimet (cum gravis sit) subjectas partes (ut post dicetur,) partim (cum fluida sit) diffluet in partes humiliores (propter Descensum qui sic obtinebitur, nec à partium connexione impeditur, utpote fluidum) per prop. 1. Cap. 2. Atque hoc (ob eandem causam) quamdiu pars ulla manet reliquis altior. Redigetur igitur ad situm Horizontalem, seu (quem diximus) Sphæricum.

Sin aliquid hic accidentarium contingat, sive propter Fluidi tenacitatem seu lentorem; sive quod superne premens non ita commode se possit omnibus partibus accommodare, (quæ causa esse potest cur Hydrargyrum in vase vitreo protuberet;) sive ejusmodi aliud: id hujus loci non est; sed à præsenti consideratione præcludendum.

C. Si qua vero sui parte præ cæteris magis prematur, ut in C; puta propter incumbens D Grave (quod saltem gravius sit quam tantundem incumbentis Aeris, aliusve

aliusve quicquid sit æqualiter prementis,) aut aliam utcunque vim adhibitam: deprimentur fluidi partes in C, surgentibus alibi aliis, quo locus fiat depressis. per prop. 8. Cap. 2.

Quodque de superficie AB ostensum est, similiter ostendetur de quavis alia intra fluidum eidem parallela, ut EF; quæ scilicet sit Sphærica Terræ concentrica, seu (quod nobis hic tantundem significat, ut & in sequentibus,) Planum Horizontale, (considerato scilicet Terræ centro tanquam in infinita distantia.) Nempe, si æqualiter ubique prematur, (à fluidi parte superiore, & siquod aliud est superne, vel intra fluidum, vel fluido innatans,) situm retinebit; sicubi vero magis premitur, puta in G, ab incumbente H, (quod gravius sit quam Fluidi tantundem cujus locum occupat,) ibi deprimetur, surgentibus partibus minus pressis, per prop. 8. Cap. 2. ut prius. D.

Atque hinc, ut totidem Corollaria, inferuntur propositiones sequentes.

PROP. II.

Si Grave D, summæ fluidi superficiei AB horizontali, in C incumbens, æque gravitet atque tantundem Aeris circumpositi, (aut quicquid sit quod Aeris instar est, æqualiter prementis;) retinebit AB situm horizontalem. Fig. 311.

(Quod de Aere hic dicitur, & similiter in sequentibus, similiter intelligendum erit de alio quovis quod Aeris instar est, puta si Aquæ supernatet Oleum, vel Spiritus vini, vel horum aliquod Hydrargyro, aut aliquod simile; nam & hic eadem est ratio.)

SEquitur ex præcedente. Quippe cum C tantundem præcise prematur ab incumbente D, acsi hoc sublato tantundem Aeris circumpositi (aut quod Aeris instar est) eundem locum occuparet; æqualiter ubique premitur.

PROP. III.

Sin illud D minus gravitet quam tantundem circumpositi Aeris, aut quod Aeris instar sit, (nec avolet tamen, aut ab Aere circumposito sursum pellatur;) Assurgent subjectæ partes C, (utpote minus pressæ,) subsidentibus aliis. Fig. 311.

Qui quidem Ascensus partium C subjectarum eousque perseverabit (nec diutius) donec fluidi partes sic ascendentes compensant ipsius D levitatem, ut aggregatum ipsius D partiumque sic ascendentium æque gravitet atque tantundem Aeris, aut quod Aeris instar est.

SEquitur ex prima hujus. Quippe dum (propter incumbens D levius quam tantundem Aeris, aut quod Aeris instar est, ut ad prop. præced. expositum est,) minus premitur C quam superficiei AB partes reliquæ; assurgent partes C subjectæ, utpote minus pressæ: (per prop. 1. hujus;) subsidentibus aliis. Idque eousque donec quod fluidi sic ascendit, ut K, una cum D, tantundem simul gravitent, quantum circumpositi Aeris (aut quicquid aliud sit ita circumpositum) tantum, quantum utriusque locum impleret. Donec enim id fit, minus premitur: tum vero, æqualiter cum cæteris ipsius AB partibus premetur. Fig. 312.

Dico autem, *Si non avolet D, aut ab Aere circumposito sursum pellatur.* Quoniam si à circumposito aere non aliquo modo defendatur, D levius sursum feretur,

retur, (sive à levitate sua, ut dici solet; sive à circumposito aere sursum pulsa, quod potius dicendum est;) deferens eam cui incumbebat superficiem A B; neque propterea sic ascendent fluidi partes subjectæ, Aere ipso (depulso D) æquilibrium restituente. Si vero ita ab aere circumposito defensum intelligatur D ne hoc fiat; demonstratio locum habet.

PROP. IV.

Fig. 311. Si illud D plus gravitet quam tantundem circumpositi Aeris (aut quod Aeris instar est,) minus autem quam tantundem fluidi subjecti: innatabit D; sed depressis eousque partibus C subjectis, donec eum situm obtinuerit D, ut æquigravitet aggregato Aeris & subjecti Fluidi quorum locum occupat.

SEquitur item ex prop. 1. hujus. Deprimentur enim partes C subjectæ, quia (propter D gravius quam tantundem Aeris) magis premuntur, assurgentibus quæ minus premuntur, utpote ab his depulsis: idque eousque donec situm assignatum obtineat; quippe tamdiu minus premuntur subjectæ partes. Ubi vero eousque perventum est ut ipsum D æque gravitet atque tantundem subjecti Fluidi quantum impleret locum immersæ partis K, atque tantundem circumpositi Aeris quantum impleret locum partis eminentis I: non ultra subsidet, sed innatabit; quippe jam contigua superficies horizontalis E F, tantundem premitur in G, atque si locum I occuparet Aer, & locum K subjectum Fluidum; adeoque superficies E F est æqualiter ubique pressa.

PROP. V.

Si illud D, vel H, non modo plus gravitet quam tantundem circumpositi Aeris, sed & quam tantundem subjecti Fluidi: Mergetur penitus, ad fundum usque subsidens.

Fig. 311. SEquitur & hoc ex prop. 1. hujus. Sive enim in summo intelligatur, ut D premens partes C; sive intra fluidum ubivis, ut H premens partes G; utcunque deprimet partes subjectas. Nempe partes C, quoniam gravius est quam tantundem aeris, & partes G (in quacunque fluidi profunditate) quoniam gravius est quam tantundem istius fluidi; adeoque C vel G magis premitur quam si abesset D vel H, ejusque locum suppleret tantundem fluidi; & propterea magis quam superficiei E F partes aliæ. Atque hoc, donec ad ipsum fundum pervenitur.

SCHOLIUM.

FIeri quidem potest, (si fluidum illud non sit in omnibus sui partibus æque grave, sed prope fundum gravius quam prope summum,) ut non ad fundum usque mergatur H; utpote gravius quam fluidum in summo, sed levius quam fluidum in imo. Verum hoc demonstrationem non turbat, quoniam ubi eo pervenitur, non jam plus gravitat H quam tantundem *subjecti* fluidi. Idemque alibi intellige ubi opus erit; aut quod huic æquipolleat: ne opus sit istiusmodi monitum sæpius insinuare.

PROP

PROP. VI.

Si immersum H, minus gravitet quam tantundem fluidi cui immergitur; magis autem quam tantundem aeris (seu quod aeris instar est:) Sursum propelletur; idque eousque donec eum obtinuerit situm, ut æque gravitet atque tantundem Fluidi & tantundem superpositi Aeris (seu quod hujus instar est,) quorum respective locum obtinet simul sumpta. Fig. 311.

Sin præcise quantum tantundem Aeris (seu quod hujus instar est,) aut eo minus: assurget ad fluidi summam superficiem, aut etiam altius.

SEquitur item ex prop. 1. hujus. Dummodo enim immersum H, minus Gravitat quam tantundem circumpositi fluidi; minus premitur G quam superficiei contiguæ E F partes aliæ; adeoque partes ad G, simul cum H, sursum pellentur à partibus plus pressis. Atque hoc eousque donec ad situm assignatum perveniatur; quoniam tamdiu minus premitur G. Ubi vero eo perventum est, ut ipsius H seu D, pars extra fluidum ita emineat, ut totum simul tantum præcise gravitet quantum tantundem Fluidi istius cujus locum occupat pars immersa K, & tantundem Aeris cujus locum occupat pars emersa I, (qui casus est propositionis quartæ;) ibi perstabit: quippe jam, superficiei E F contiguæ, partes omnes æqualiter premuntur. Fig. 313.

Sin æque gravitet atque tantundem incumbentis aeris, (aut quod aeris instar est:) feretur ad summam fluidi superficiem, ibique consistet; (qui est casus prop. 2.) nam eousque minus premuntur partes subjectæ.

Sin minus adhuc gravitet: aut avolabit, aut sursum pelletur: per prop. 3. hujus.

SCHOLIUM.

NOtandum interim erit; id tantum hic in considerationem venire quod ex Gravitate simpliciter considerata provenit, non vero quod aliunde ex Impulsu seu præconcepto Impetu oritur. Si enim id in considerationem veniat, res omnino secus erit. Quippe Grave, utut levius quam est tantundem subjecti fluidi; si Vi dejiciatur aut deprimatur, vel, propter acceleratum gravium descensum, vim cadendo conceperit; non statim in fluidi superficie hærebit, sed altius immergetur, pro impetu quo prius ferebatur. Et similiter, si submersum Grave, utut levius sit quam tantundem fluidi, & gravius quam tantundem superpositi aeris; dum tamen vel Vi sursum pellitur, vel, propter inceptum motum, impetum conceperit; etiam extra superficiem fluidi altius in aerem prosiliet. Sed eam Impetus considerationem hic loci præcludimus; ut & in sequentibus. Quanquam enim certum sit rem ita fore; tamen, post vibrationes aliquot hinc inde ab impetu factas, ubi ad quietem redacta res est, eum situm obtinebit quem indicamus; & quem, si impetus ascititius abesset, statim assequeretur.

PROP. VII.

Si immersum H, æque gravitet atque tantundem Fluidi cui immergitur: situm quem habet retinebit, absque vel ascensu vel descensu.

SEquitur item ex prop. 1. hujus. Quippe cum tantundem gravitet acsi, eo absente, locus fluido suppleretur; subjecta superficies neque magis premitur in G, quo hic ab H deprimeretur; neque minus, quo hic assurgeret ipsumque H propelleret. Fig. 311.

SCHOLIUM.

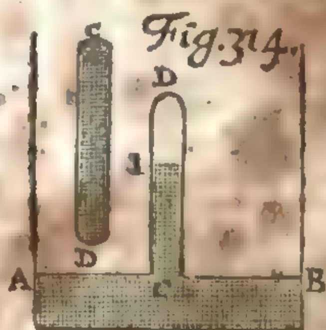
SEcundum has leges; reddenda erit ratio variorum in Experimento, *Torricelliano* dicto, Phænomenum. Et quidem, in eam causam, hæc olim scripta erant, & *Societati Regiæ Londini* exhibita, Augusti 13 & 20. 1662. quo plurium Experimentorum, ibidem tum temporis agitatorum, ratio Statica redderetur: Qualia sunt quæ sequuntur.

PROP. VIII.

Sit Hydrargyri, subjecto vase contenti, superficies Horizontalis A B externo Aeris pressui exposita, atque Tubus C D, (clausus in D, & apertus in C,) hydrargyro impleatur, & dein invertatur, immerso ejus Orificio C infra superficiem subjecti hydrargyri A B; (obturato aliquandiu orificio C donec sic immergatur, ne Hydrargyrum invertendo effluat, atque tùm recluso;) atque in eo situ sustineatur. Quibus positis:

Si Hydrargyrum tubo contentum, quod superficiei A B eminet, plus gravitet in subjectas partes C, quam pressus incumbentis aeris in reliquas ejusdem A B partes; fiet descensus in C, depulsis quæ à latere sunt partibus minus pressis, etiamsi à pressu superincumbentis aeris, clauso in D tubo, defendatur Hydrargyrum tubo contentum.

Qui quidem descensus eousque perseverabit; donec, effluente Hydrargyri parte (relicto intra tubum spatio D I vacuo Hydrargyri,) & surgentibus (propter hunc effluxum) superficiei A B partibus reliquis; quod in Tubo reliquum est I C tantundem premat C quantum Aer partes reliquas ipsius A B: eumque situm retinebit.



PAtet ex præcedentibus. Quippe dum Hydrargyrum tubo contentum (utut ab Aere superne defensum) plus premat C quàm ab aere premuntur partes reliquæ, deprimetur C (hydrargyro effluente;) ubi vero eo perventum est ut hydrargyri reliquum C I tantundem premat C, quantum premuntur ab aere partes reliquæ; (propter æqualem ubique pressum,) situm illum retinebit. per prop. 1. hujus.

SCHOLIUM.

DIco autem, *Spatium* D I *vacuum Hydrargyri*: non enim hic libet (neque opus est ad præsens negotium) disputare, num sit simpliciter vacuum, necne. Siquis enim vel gratis afferat, vel aliunde probatum eat, materia aliqua repletum esse, quod vel pondus nullum habeat, vel nullum quod in sensuum nostrorum observationem incurrat; nobis illud hac in re neque obest neque prodest.

Dico etiam *plus gravitat*, & *tantundem gravitat*, potius quam plus aut æque Grave est: Quoniam quæ in se æque gravia sunt, possunt tamen pro vario situ inæqualiter gravitare.

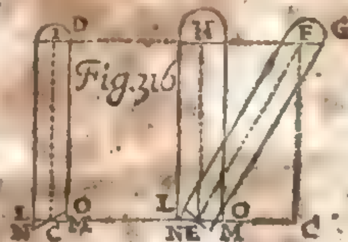
Atque

Atque hic occurrit primo expedienda difficultas; Cur, si Tubus erectus DC, in situm obliquum reclinetur ut GE, Hydrargyrum nihilominus inibi contentum EF in situ obliquo, in eadem altitudine perpendiculari consistet atque CI in situ erecto; cum tamen (propter FE longiorem quam CI) suspensum Hydrargyrum FE plus sit (adeoque gravius) quam CI.

Hæc autem difficultas facile solveretur si non subesset latentior alia. Quanquam enim verum sit, Cylindrum reclinatum EF majorem esse erecto CI, & plus Hydrargyri continere: tamen non minus interim verum est, Basin etiam ampliari; nam ejusdem Cylindri sectio Obliqua E (Elliptica) longior est (nec latior tamen) quam sectio recta (circularis) C; adeoque basin E in eadem ratione majorem esse base C, qua recta E (ellipseos Axis major) longior est, quam C recta, Circuli diameter, eademque Ellipseos axis minor.

Sed & (quod mox demonstrabimus) in eadem ratione prolongatur C in E, qua prolongatur CI in EF: Ut non sit mirum super majore base (elliptica) plus hydrargyri sustineri (& quidem in eadem ratione plus) quam super minore (circulari) C; utut C & E sint ejusdem Cylindri sectiones. Si autem intelligatur, super eadem base E, Cylindrus EK; invenietur ejus portio æque alta EH, tantundem hydrargyri continere atque EF; propter Cylindros (aut Prismata) super eadem base æque altos, invicem æquales. At vero jam, Cylindrus (seu Prisma) EH (propter majorem basin) major erit quam CI; atque in eadem ratione major, qua basis base major est.

Quod autem eandem rationem habeat C ad E, quam CI ad EF, sic ostenditur. Intelligatur Cylindrus CD situ erecto sectionem horizontalem habens LCM Circularem, obliquam vero NCO ellipticam: atque reclinetur Cylindrus hic in situm EG, ut sectio illa NCO jam fiat in situ NEO horizontalis, cui insistat Cylindrus EF inclinatus erecto EH æqualis (propter eandem utrobique tum basin tum altitudinem,) ipsique CI æque altus. Manifestum est (demissa, in NEO rectam, perpendiculari FC,) propter æquales angulos FEC, LNE, (quorum alter cum LEN, alter cum huic verticali, complet rectum,) adeoque similia triangula rectangula FEC, ENL; eandem habere rationem EF ad FC, hoc est, ad CI; quam habet NE ad EL, seu NO ad LM; hoc est, quam habet basis E ad basin C. Quod demonstrandum suscepimus.



Sed nova hinc suboritur difficultas. Quippe cum super eadem base E, Cylindrus EH in situ erecto, tantundem contineat Hydrargyri quantum in situ obliquo EF; quidni magis in basin illam gravitet EH quam EF, propter Descensum illic Decliviorem, (gravitant autem æqualia Pondera in ratione Declivitatum, seu reciproca rectarum æque altarum, per prop. 19. Cap. 2.) adeoque, quidni basis E in situ obliquo EF plus hydrargyri sustinere valeat (& propterea Cylindrum altiorem) quam in situ erecto EH.

Verum & hic paria paribus compensanda sunt. Quippe, ut Hydrargyrum per descensum obliquum FE minus deorsum premit quam per FC vel HE (perpendicularem) premeret; sic & vis sursum in E (quæ Hydrargyrum sustinet) minus premit sursum per EF quam per EH premeret; & quidem in eadem utrobique ratione, propter eundem utrobique obliquitatis angulum EFC seu FEH. Adeoque non minus valet Vis sursum in E secundum directionem suam EH directe sursum premens, sustinere pondus Hydrargyri secundum directionem suam HE deorsum prementis, quam Vis eadem per EF directioni suæ EH obliquam, pondus idem per FE directioni suæ FC pariter obliquam deprimens sustinere; propter vires utrobique in eadem ratione diminutas.

Vel sic idem explices. Qua ratione impeditur descensus hydrargyri, recta tendentis deorsum, à latere MO (producto) pondus illud partim sustinente, eadem

dem ratione impeditur ascensus Vis recta sursum tendentis in E, à latere (producto) N L eundem partim coercente superne; (propter eandem utrobique obliquitatem;) adeoque eadem, quæ prius erat, manebit ratio pressuum contrariorum.

Superest adhuc alia difficultas expedienda, quæ non tam ex Situ, quam ex Figura tubi seu vasis superpositi oritur. Consideravimus enim hactenus Tubos superpositos tanquam Cylindros seu Prismata, ejusdem ubique Crassitiei; (quod erat necessarium ubi de mole seu pondere suspensi hydrargyri agebatur:) Potest autem superponi Tubus seu Vas cujuscunque figuræ, quod vel plus vel minus hydrargyri continebit quam Cylindrus seu Prisma super eadem base æque altum; altitudo tamen suspensi hydrargyri in omnibus eadem erit.

Verbi gratia; In tubo Capitato C H, atque in Acuminato C K, eadem erit Hydrargyri C I altitudo, atque in Cylindro illic inscripto huc circumscripto.

Causa est, quod illud Hydrargyri quod in C H extra Cylindrum est, non tam à C sustinetur quam à tubi partibus seu lateribus sibi subjectis; quippe quibus sic manentibus non poterit illud nisi à latere latum iri quo descendat: Ne autem ad latus ferantur Hydrargyri partes, (sive quæ in Cylindro C H, sive quæ extra illum,) se mutuis occursibus & contrario nisu impediunt, ut nihil à C sustineatur præterquam quod est intra Cylindrum C H. Dummodo enim quod intra Cylindrum est ab æquipollente Vi in C sustineatur ne decidat; & quod extra est, similiter à Tubi lateribus: perinde est acsi solido fundo, sed minime plano, coercerentur utraque; quo posito, superficiem supernam Horizontalem fore ad prop. 1. hujus ostensum est.

Simili modo; quanquam, in tubo Acuminato C K, minus contineatur Hydrargyri in trunco C I quam in Cylindro huic circumscripto; attamen non altius ascendet in illo quam in hoc Hydrargyrum. Quippe, quantum ad eas basis partes ubi libero ascensui locus patet, ad justam altitudinem ascendet C I; non ultra tamen, ne quæ subjectæ sint superficiei A B partes plus cæteris premerentur, & pressæ descenderent donec ad justam altitudinem perveniretur: quantum vero ad eas ipsius C partes quibus convergentia tubi latera liberum ascensum non permittunt, quod deest in pondere hydrargyri supereminentis, suppletur à coercentibus tubi lateribus; quippe quæ, utut non deprimant ut vis contraria, coercent tamen ut impedimentum, ne altius possit à vi inferne sursum premente Hydrargyrum protrudi.

Atque simile in aliis casibus fiet judicium.

Si vero vasa superposita, non tantum figura sint diversa à Cylindrica seu Prismatica, quod hic supponitur; sed etiam obliquo situ ponantur, quod supponebatur in difficultate priori: quæ utrobique reposita sunt; hic, conjuncta, locum obtinebunt: adeoque quæcunque sit vasis forma, & quocunque situ ponatur, ad eandem semper altitudinem (quatenus coercentia vasis latera non impediunt.) hydrargyrum ascendet.

Nos autem tum hic tum in sequentibus (præsertim ubi moles suspensi hydrargyri consideratur aut calculo subjicitur) Cylindricam tubi formam potissimum spectamus: Inde autem, vi illorum quæ in hoc Scholio tradidimus, utut non quo ad eandem molem seu pondus, quo ad eandem tamen altitudinem suspensi hydrargyri, ad vasa cujuscunque formæ, utcunque inclinata, eadem transferentur.

PROP.

PROP. IX.

Positis ut prius; Si Tubus sic inversus vel ex se tam brevis sit, vel Orificium infra superficiem AB tam alte immersam habeat, vel denique ita inclinetur tubus, ut quod inibi (supra AB) continetur Hydrargyri, minus gravitet in partes subjectas, quam aer in reliquas: Non effluet Hydrargyrum. Fig. 318.

Sed &, si (manu vel alias) Tubus elevetur, ascendet etiam intus Hydrargyrum; idque donec ad eam stationem perveniat, ut tantundem in partes sibi subjectas gravitet quantum in reliquas Aer.

Si vero non aliunde elevetur Tubus; non ab Hydrargyro propelletur sursum: sed deprimetur potius (si locus infra sit quo recipiatur) ab incumbente aere; nisi aliunde ab aeris vi defendatur.

SI enim tubus E brevior sit, vel ita immergatur orificium ejus ut quod superest C E brevius sit, quam ut inibi Contentum Hydrargyrum tantundem premat subjectum C quantum ab aere premuntur partes reliquæ; vel etiam, si tubus F, utut satis Hydrargyri continere censeatur, ita tamen inclinetur ut non satis gravitet: Non deprimentur partes subjectæ, utpote non magis pressæ quam reliquæ; (supponimus enim Tubos manu vel alias ita sustentos ut ab Aere Tubis incumbente nulla vis hydrargyro inferatur.)

Quinimo si elevetur tubus; assurget inibi Hydrargyrum, (loco jam facto quo recipiatur,) propter partes subjectas minus pressas quam quæ aeri exponuntur. Idque eousque donec ad altitudinem C I perveniatur, (qua statione supponimus partes subjectas æque cum reliquis pressas;) quippe tamdiu minus premuntur, adeoque Hydrargyrum à partibus plus pressis intro pellitur.

Si vero altius elevetur tubus, ut ad D; illud tubi quod est supra I, manebit hydrargyro vacuum; quippe, cum partes subjectæ jam æque cum reliquis premantur, cessabit illa sursum protrusio; (nec ob decantatam olim Fugam Vacui sursum altius trahi, experimentis nunc dierum ubique gentium notis abunde comprobatum est.)

Similiter si tubus F inclinatus, erigatur; ascendet simul Hydrargyrum, tubum replens: ita tamen ut si altius erigatur quam est C I; quod superest, ut I G, manebit hydrargyro vacuum; ob causas modo dictas.

At vero si tubus ille brevior, ut E, sibi permittatur; non tamen ab Hydrargyro ascensum moliente sursum propelletur; sed, contra, detrudetur ad fundum usque; (nisi quatenus ob Tubum minus gravem quam tantundem Hydrargyri impeditur.) Non quod Hydrargyrum alibi ab aere pressum non valeat illud in tubo & sustinere & sursum pellere; sed quoniam (nisi tubus alias sustineatur aut ab externo aere defendatur,) non tantum ab eminente hydrargyro, sed & à supereminente aere tubum cum hydrargyro deprimente, premuntur partes subjectæ; adeoque fortius quam reliquæ, propter hydrargyrum in tubo plus gravitans quam tantundem aeris: Quamdiu autem manu vel alias sustinetur tubus; eo impeditur aer ille (ob tubum in summo clausum) ne gravitet in partes tubo inclusas aut illi subjectas.

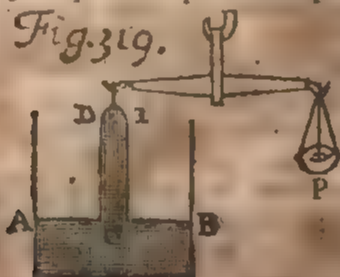
Sin alias, quocunque modo, defendatur tubus ille brevior à superno aere; non modo sustinebitur, sed & sursum propelletur (donec ad Altitudinem I perveniat) ab hydrargyri partibus reliquis plus pressis quam quæ Tubo subjiciuntur; propter superficiem A B eo loci minus pressam.

Tota demonstratio dependet ex prop. 1. hujus varie pro variis casibus applicata.

PROP. X.

Positis ut prius; Si tubi sic inversi altitudo (supra AB planum) CD, tanta sit quanta est CI, aut ea major; quo Hydrargyrum inibi contentum tantundem gravitet in partes subjectas quantum aer in reliquas: non minori Vi sustinebitur tubus, nedum elevabitur, (sive id manu fiat; sive libra, positis ponderibus in adversa lance; sive utcunque alias;) quam quæ potis sit sustinere seu elevare (præter ipsum tubi pondus) totum superincumbentem aerem, seu (quod eodem recidit) tantundem hydrargyri quantum æquet Cylindrum CI.

Fig. 319. DUmmodo enim tanta sit tubi intus altitudo ut retinere possit tantum hydrargyri quantum valeat ita premere subjectas partes quantum reliquæ ab aere premuntur; (vel etiam major; quod tamen casum non mutabit, quippe plus inibi non retinebitur, quæcunque fuerit altitudo tubi, sed quod superest spatii ID relinquetur hydrargyro vacuum; ut supra ostensum est;) adeoque non adjuvetur vis elevans à vi partium hydrargyri extra tubum tanquam plus pressarum sursum pellente quod partibus C supereminet, tanquam minus pressis: Sustinendum jam erit vel elevandum, non modo tubus ipse cujuscunque fuerit ponderis, sed & totum illud aeris quod tubi cavo superincumbit; (*Tubi*, inquam, *Cavo*; nam quod Tubi lateribus utcunque crassis supereminet, ab Hydrargyro Tubi labiis subjecto sustinebitur.) Nam nisi hoc fiat, tubus (qui hydrargyrum jam deserturus est, ut quod altius non propelletur,) non sustinebitur vel elevabitur. Cui quidem, cum Hydrargyrum, ex pulsu sursum, jam nihil ferat auxilii; (ut prius tulerat, cum ad justam altitudinem nondum pervenerat;) nec possit aer (propter tubi orificium, quod supponimus, in hydrargyro infra AB submersum,) ut alibi fieri solet, circuitu facto, à tergo in locum derelictum succedere, (adeoque, quod ex prop. 1. hujus facile demonstrabitur, tantundem quasi sursum propellere, quantum superne deprimit; dempto saltem pondere quo res elevanda superat tantidem aeris pondus:) tantundem virium in sustinente vel elevante requiretur, quantum (præter ipsum tubi pondus) totum illud aeris quo cavum premitur sustinere aut elevare poterit; (dummodo enim Vis sustinens aut elevans vi deprimente minor est, non sustinebit aut elevabit, per prop. 12 Cap. 1.) Id autem aeris quod sustinendum aut submovendum est, æquipollet hydrargyri Cylindro CI, (saltem dempto tantidem aeris pondere cujus locum occupat CD, propter Atmosphæræ minorem altitudinem supra D quam supra C; quod merito tamen negligi possit: ut & submersa tubi labia minus gravia quam tantundem hydrargyri; cujus differentia auferenda erit, si stricte agas, à pondere elevando. Sed hæc negligimus.) Cum enim, Vis aeris extra Cylindrum hydrargyrum deprimens, tantum premat partes sibi subjectas quantum hydrargyrum in tubo premit subjectas sibi (quo superficiei partes omnes æqualiter premantur,) tantundem valet pondus aeris incumbentis quantum Cylindrus hydrargyri altitudinis CI: ut igitur tubus elevetur, adeoque submoveatur Vis aeris deprimens, vis ea requiritur quæ potis sit (præter excessum ponderis tubi supra pondus tantidem aeris cujus locum occupat, quod est ipsum tubi pondus in aere,) etiam tantundem hydrargyri elevare quantum est Cylindrus CI: &, quo sustineatur, quæ hydrargyri tantundem potis est sustinere. Quod demonstrandum erat.



Adeoque si intelligatur tubi fundus D (fili ope) de libra pendere, atque ex adverso pondus P: quo hoc tubo Gravato æquiponderet, requiritur ut æquet pondere tum tubi pondus (demptis saltem, quas diximus, minutiis,) tum tantum hydrargyri quantum æquet Cylindrum CI.

PROP.

PROP. XI.

Positis ut prius; Si tubi sic inversi, altitudo (supra AB planum) CD, minor sit quam CI, (quo, si locus esset, pertingeret hydrargyrum;) adeoque, qui partibus reliquis eminet, aer præponderet: Quantum valet hæc præponderantia, tantundem pressui in C sursum concedendum est; quod æquipollet sublationi tantidem ponderis incumbentis, aut ponderi æquali in adversa lance posito: Adeoque tanto minor Vis (sive in tenentis manu, sive ponderis in adversa lance positi, sive alias similiter applicata,) requiretur ad tubum sustinendum in hoc casu, quam in casu propositionis præcedentis. Fig. 319.

Quæ vero in ea altitudine sustinere potis est Vis, non tamen altius elevabit; propter pondus elevando auctum, seu minutum subsidium Vis sursum prementis: sed neque in majore altitudine sustinebit.

Cum enim Vis sursum in C, potis sit sustinere tantundem ponderis quantum est Cylindrus Hydrargyri, super ea base, altitudinem habens CI; sitque CD eo pondere minus: Sustinere valebit (&, nisi aliunde impediatur, elevare) præter illud hydrargyri quod incumbit, tantundem ultra ponderis, quantum illic à justo pondere deest; Adeoque tanto onere sublevare sustinentis manum (seu quod hujus instar est;) & propterea tanto minus virium requiretur, quam (qui casus est propositionis præced.) si Hydrargyri Cylindrus justam altitudinem CI obtineret.

Et quidem subsidium illud à vi sursum premente propter Hydrargyri altitudinem justa minorem, tantundem est atque additamentum illi æquipollens sustinentis viribus additum, seu pondus æquipollens in adversa lance positum. Et, si, quod porro deest ad pondus prop. præced. requisitum, in lancem illam immittatur; sustinebitur tubus (cum incumbente aere) pariter atque si, in casu prop. præced. totum illud pondus immitteretur.

At vero, utut tubum sic sustinere possit, non tamen elevare poterit, quoniam prout elevatur tubus (donec ad justam altitudinem CI pervenit) assurget intus Hydrargyrum (propter locum jam factum quo recipiatur) adeoque minuitur quod prius erat subsidium, adeoque vis (debilior facta) tubum sustinere in ea altitudine non potis erit.

Et quidem, si alia vi altius elevetur, sibi tamen permissa; ad eam altitudinem deprimetur; Sin infra detrudatur; eo assurget: ut nempe, præter illud oneris quod ponderi P æquipollet, reliquum quicquid sit æquipolleat Hydrargyri Cylindro CI. Quæ omnia, per prius demonstrata constant.

SCHOLIUM.

Summa rei huc redit. Æquabilis aeris alibi incumbentis pressura, potest (per æquiponderantiam suam) sustinere in C; Vel Columnam Aeris æqualtam; Vel Columnam Hydrargyri eidem æquipollentem; Vel partem hujus partem illius (quæ simul earum alteri æquipolleant:) Non autem utramque totam, aut plus quam quod earum alteri æquipolleat.

Adeoque, Si pars C, externo Aeri exponatur: sustinebitur hic, ut in partibus reliquis, Columna incumbentis Aeris. Sed tunc nihil ultra Hydrargyri sustinebit vis ea; nedum elevabit.

Si ab incumbentis Aeris pressu (inversi tubi fundo, vel alias,) defendatur: sustinebit, istius vice, Columnam Hydrargyri eidem æquipollentem; aut etiam (si locus sit quo recipiatur) tantundem elevabit. At vero jam nihil Aeris sustinet; quippe à quo defenditur ab inverso tubo, qui aliunde sustineri intelligitur; puta à tenentis manu, vel pondere in adversa lance.

Si vero ab incumbentis aeris pressu defendatur quoad partem, sed non quoad totum; puta à pondere P in adversa lance quod minus sit quam ut totius aeris pressui æquipolleat: potis erit, propter hoc subsidium; sustinere, non tantum totum aerem incumbentem, (quem quidem sine auxilio sustineret,) sed & tantundem Hydrargyri quod isti auxilio æquipolleat; neque sustinere tantum, sed & (si opus sit) eousque tubum impellere donec tantundem recipere possit.

Sin denique pondus P in adversa lance majus sit quam ut aeris pressui æquipolleat: proripiet tubum (nisi aliunde impediatur) in altum, etiam extra subjectum Hydrargyrum.

Exempli gratia. Intelligatur superficiei A B, pars C (inverso tubo inclusa,) tantæ amplitudinis esse, ut quæ, aperto aeri exposita, columnam aeris sustineret Ponderis unciarum 12 unius Libræ; (adeoque pars alia quælibet huic æqualis, propter æqualem aeris pressum, tantundem sustinere intelligenda est;) & propterea, si ab hoc aeris pressu penitus defendatur, tantundem Hydrargyri, istius vice, sustinere poterit; hoc est, columnam hydrargyri Unciarum 12 unius Libræ.

Cumque Tubus, quo sic ab aere defenditur C, suum pondus habeat; Ponatur hoc, Unciarum 2. (Pondus aeris, qui tubi lateribus supereminet non computamus; quoniam id ab Hydrargyro tubi labiis subjecto sustinetur.)

Totum igitur Onus (tubi cum superincumbente aere) erit Unciarum 14; quod aliunde sustinendum erit, quo pars C toto pressu aeris tubique liberetur. Quod factum intelligatur, posito, in adversa lance, pondere P, unciarum 14.

Sustinebit igitur C (ab omni alio pondere sic liberata) columnam Hydrargyri Unciarum 12, (utpote vi sursum in C prementi æquipollentem;) atque ad illam altitudinem (si opus sit) tubum sic liberatum propellet. Donec enim hoc fiat, minus premetur C quam partes reliquæ; nec huic ascensui quicquam officit Tubus cum incumbente aere, utpote qui sunt cum P pondere in æquilibrio positi. Verum jam, Contraponderans P, gravius esse debet (puta unciis 2, propter pondus tubi,) quam est suspensa Hydrargyri columna; (utut Hydrargyrum illud non à P pondere, sed à vi sursum in C, sustineatur.)

Si vero a Pondere P auferantur, verbi gratia, unciæ 4, ut nonnisi 10 supersint, non poterit hoc pondus, Tubi aerisque incumbentis pressum sustinere (utpote unciarum 14,) sed istius tantum 10 uncias; adeoque reliquis unciis 4 adhuc urgetur pars C; quæ itaque (cum non possit plusquam 12 uncias omnino sustinere) non ultra 8 uncias hydrargyri (quæ cum illis 4 conficiunt 12) sustinere poterit. Sed & ad hoc requiritur contraponderans P, unciarum 10, quod gravius sit (puta 2 unciis) quam suspensum Hydrargyrum, unciarum 8: utut hoc, non à P, sed à Vi in C sustineatur.

Sin, pro demptis unciis 4, tolleretur totum Pondus P unciarum 14, vel saltem inde demerentur unciæ 12: Subsideret Hydrargyrum omne cum onusto Tubo; vel demptis 2 unciis; quippe jam pars C onere saltem unciarum 12 (quo majus ferre non potest) Oneratur. (Saltem si tubi partem subsidendo demersam ponderi eximamus; atque etiam, si omnes minutias sectari velimus, excessum ponderis Hydrargyri supra pondus demersæ partis tubi: Quæ tanta non sunt quin hic merito possint negligi.)

Si jam ex demptis illis Unciis 4, restituantur unciæ 2, (quo Pondus P jam fiat unciarum 12; adeoque ex omnibus 14, nonnisi unciis 2 prematur C;) Assurget Tubus donec supra A B emergant Hydrargyri unciæ aliæ duæ: Adeoque sustineat C, à pressu aeris tubique Uncias 2, atque Hydrargyri uncias 10; quæ simul faciant ipsius justum onus unciarum 12. Sed & adhuc pondus P unciarum 12, majus est (puta unciis 2) quam suspensi Hydrargyri unciarum 10; utut hoc, non à P sed à Vi in C sustineatur.

Atque si adhuc restituantur aliæ 2 Unciæ, quo fiat Pondus P (ut prius) unciarum 14: Ascendet Hydrargyrum ad justam altitudinem C I, (tubumque, si opus sit, eo propellet,) quo pars C (ab alio onere penitus libera) sustineat Hydrargyri Uncias 12, quæ pressui aeris in reliquis partibus æquipolleat.

At vero si porro augeatur pondus P, ut fiat, verbi gratia, Unciarum 16: Sursum adhuc in altum proripietur tubus (propter ponderis præpollentiam;) sed non simul Hydrargyrum, (utpote quod jam ad summam altitudinem ascenderit quam ferre potest C;) sed relinquetur superna tubi pars hydrargyri vacua. Idque eousque, donec vel obice impediatur descensus ponderis aut ascensus tubi; vel

vel saltem donec, emersis extra subjectum hydrargyrum tubi labiis, Hydrargyrum inibi contentum (via jam patente) totum decidat, eique protinus succedat Aer irruens, tantundem quasi subtus propellens sursum, quantum superne deprimit tubum; ut jam nihil aliud sustinendum restet quam ipsum tubi pondus.

Quod autem Experimenta his Demonstratis respondebunt; tantum abest ut metuam, ut ea jam ante in *Societate Regia* administrata fuerint (& quidem cum hoc eventu) quam hæc primo scriberentur (Anno scil. 1662, ut supra insinuatum est.) Nempe, præter notiora Experimenti Torricelliani phænomena; (quæ recensere non erit opus,) observatum erat, 1. Si tubus ad justam altitudinem C I extenderetur; opus erat in adversa lance quo sustineretur tubus, pondere aliquanto majore quam erat Hydrargyri suspensi pondus; (& quidem tanto majore quantum conjectando æstimabant ipsius tubi pondus.) Idemque accideret, si altius adhuc elevaretur D; relicto I D, hydrargyri vacuo. 2. Si infra justam altitudinem C I, subsideret C D; minori opus esset pondere in adversa lance, quo (propter æquilibrium) sustineretur tubus; & quidem tanto minori quanto minus erat pondus hydrargyri suspensi. 3. Si tamen superfluum illud pondus aut ejus pars aliqua (ultra quam quod necessarium erat) in lance relinqueretur; ascenderet Tubus, una cum hydrargyro, donec fieret æquilibrium. 4. Denique, si plusquam illud superfluum pondus lanci eximeretur; subsideret tubus, una cum hydrargyro, ad æquilibrium. Et quidem, universim, (prout in Regiæ Societatis Commentariis res summatim colligitur) *Pondus in adversa lance contraponderans, æquipollebat suspensi Hydrargyri, cujuscunque altitudinis, atque simul (quantum conjectando æstimabant) suspensi Tubi ei parti, quæ stagnantis in subjecto vase hydrargyri superficiei supereminebat.*

Quæ quidem res, cum primo aspectu incautis nonnullis, atque ad rem Staticam minus attentis, facile imponeret; quasi ab adverso pondere P sustineretur, non tantum Tubus ipse, sed (propter nescio quam cum tubo connexionem, seu Vacui fugam) contentum inibi Hydrargyrum: Quo scrupulus ille facilius tolleretur; ea statim scripsi quæ in hoc Capite hactenus habentur, (eisdem fere verbis, nisi quod jam in Propositionum & Demonstrationum formam redacta sint;) eademque *Regiæ Societati* enarravi, Augusti 13. 1662. quo Observata illa libero sermone exponebantur; atque deinde (id rogatus) scripto etiam Aug. 20. quo die etiam Observatorum illorum summa ab ipsis Observatoribus scripto exhibebatur. Quibus ostenderem, ex Principiis Hydrostaticis, rem ita omnino accidere debere, si suspensus Hydrargyri Cylindrus poneretur à Vi in C sursum premente sustineri, dummodo inverso Tubo ab incumbente Aere defenderetur, Tubusque ille sustineretur aliunde.

Si vero jam quæratur, Quanta sit illa altitudo C I; ubi, propter pressum aeris in partes reliquas, consistet suspensum Hydrargyrum supra subjecti superficiem A B:

Dicendum est, Altitudinem illam neque omnibus Locis, neque omnibus Temporibus, eandem esse; sed, pro varia Aeris Gravitate, subinde mutari.

Hic autem *Oxonii*, quomodo se res habet, quantum ex propriis Observatis colligere licuit, sic habeto. Jam ante Sex Annos, Tubum (Quatuor pedes longum cum semisse) implendum curavi Hydrargyro, ab intermisto Aere diligenter purgato, (non summa tamen diligentia;) cumque sic impletum inverti, obturato primum diligenter orificio, nec prius recluso quam infra superficiem Hydrargyri in subjecto vase contenti demergeretur; dein, facta subtus exeundi potestate, effluxit Hydrargyri tubo contenti pars magna, cum impetu notabili; factisque propter impetum illum vibrationibus aliquot, subsistebat tandem ad altitudinem Unciarum pedis Anglicani (plusminus) 29. Tubumque cum subjecto vase (cujus fundo nitebatur apertum tubi orificium, sed ita ut intrandi & exeundi à Vase in Tubum Hydrargyro via non intercluderetur) in pegma quoddam prius ad id paratum intuli, atque in hunc diem in eo statu conservo.

Nec ita multo post; scilicet à Calendis Januariis Anni (exeuntis 1664, sed) ineuntis 1665, Ephemeridem continuam Altitudinis Hydrargyri in Tubo contenti, supra stagnantis in subjecto vase superficiem, institui, (nisi cum forte me domo abesse contigerit,) atque etiamnum instituo.

Observavi autem, ut plurimum, infra triginta Uncias pedis Anglicani subsidere, sed supra Uncias Viginti octo; intra hos limites subinde nunc ascendendo, nunc descendendo. Semel autem iterumque tantillo supra 30 ascenderat, semelque subsiderat infra 28, (sed vix aut ne vix decima unius Unciæ parte, utrovis casu,) ut altitudo media sit Unciarum 29.

Verum quidem est, me aliquoties comparasse altitudinem in Tubo meo, cum altitudine in Tubo similiter inverso Honoratissimi D. *Boylii*, dum hic Oxonii ageret; atque altitudinem illius, altitudine mea, aliquanto majorem deprehendisse, (quasi octava parte unius unciæ, si rite memini,) sive quod in variis ejusdem urbis locis positi fuerint Tubi, sive quod Hydrargyrum ejus meo fuerit aliquanto levius, sive quod alterum altero fuerit ab intermisto aere aliquanto depuratius, sive quod non eadem fuerit utrobique proportio inter diametrum tubi & latitudinem subjecti vasis, sive quod non in eadem aeris temperie impleti fuerint utriusque tubi, non dixerim: sed exiguum quicquid est discriminis innuere visum est, quo perspiciatur tantillum discriminis ex minutis & non observatis circumstantiis ornari posse.

Observo etiam, à Scriptoribus Gallis, altitudinem assignari solere Unciarum 27 pedis Parisini. Quod non tam altitudinum hic atque illic differentiæ dandum est; quam differentiæ pedis Parisini, atque Londinensis seu Anglicani. Quippe Pes Parisinus superat Pedem nostrum Anglicanum, quasi quatuor quintis unciæ nostræ, (quod ego, collato semipede nostro, cum semipede Parisino ut dicebatur accuratissimo, memini me satis accurate observasse;) Adeoque Unciæ Parisinæ 27, respondent nostris 29 quam proxime. (Nam $12 \, . \, 12\frac{4}{5} :: 60 \, . \, 64 :: 27 \, . \, 28\frac{4}{5}$.) Ut vix ulla inde inferri possit differentia altitudinis istius apud illos observatæ ab altitudine media Oxonii observata; quin eadem hic & illic (præter propter) altitudo censenda sit.

At interim, eadem manente Aeris (quoad gravitatem) constitutione, aliam atque aliam deprehensam fuisse, eodem tubo æstimandam, altitudinem Hydrargyri, non tantum in ejusdem Montis, sed & ejusdem Turris, summo & imo, observatum fuit: minorem utique esse in summo quam in imo altitudinem Hydrargyri, propter breviorem illic quam hic incumbentis aeris Cylindrum, & leviorem pressum: quod, una cum Honoratissimo *Boylio*, ego aliique experimentis aliquoties factis deprehendimus. Sed quâ proportione decrescat, altior est inquisitio quam ut eam hic expedire locus sit.

Atque hactenus consideravimus pressum incumbentis Aeris, nullo facto discrimine, sive ab Aeris Gravitate, sive ab ejusdem Elatere procedat: Et quidem perinde est ad rem hactenus traditam utrovis modo fiat, modo pressus fiat.

Verum aliunde certum est, ab innumeris Experimentis hoc seculo institutis, tum in *Organo Pneumatico Boyliano*, tum alias: Et Aeri inesse *Gravitatem*, quâ deorsum premit; & Vim *Elasticam*, qua se vel à Gravitate sua vel aliunde compressum restituere conatur.

Quibus positis; necesse erit, propter Aeris Gravitatem, ut superiores ejusdem partes proxime subjectas deprimant, & deprimendo comprimant, adeoque Elateri vim undiquaque restitutivam imprimant gravitati partium incumbentium æquipollentem, (donec enim æquipollet renitentia, porro flectetur;) & quidem eadem vi undiquaque se expedire satagentem; (Quod enim ad prop. 1. Cap. præced. ostensum, de Elatere, puta recto, se prorsum atque retrorsum æqualiter porrigente: pariter valet de Corpore Elastico se in Orbem explicante; Nempe, siqua parte minus vel prematur vel coerceatur, ea se expediet, pressum alibi declinans; idque eousque donec undiquaque comprimatur æqualiter.) Eademque vis, una cum harum pondere; in partes adhuc subjectas propagatur: Atque sic porro ad imum usque, aucto continue pressu ob auctum pondus incumbens. Unde fit ut partes Aeris inferiores sint superioribus magis compressæ; adeoque & (propter plus aeris intra easdem dimensiones) graviores superioribus.

Haud secus atque Lanæ Vellera accumulata, quæ sunt & Gravia simul & Elastica. Vellus supremum, gravitate sua premit secundum; cui vel Vim imprimit restitutivam sursum gravitati comprimenti æquipollentem (secus enim adhuc ultra comprimeretur;) quæ cum sursum se liberare non possit (propter urgens onus quod compresserat) eadem Vi deorsum nititur; addita tamen gravitate sua; quibus cum premitur tertium, tantundem est atque utriusque gravitate premi: Vel, quod

quod eodem recidit, (quodque omnino dicendum esset si Elateres abessent,) secundum sustinet supremi pondus; & tertium, utriusque; seu secundi primo gravati. Utut enim secundum à primo quantum potest comprimatur, id tamen non impedit quin sic compressum adhuc deprimatur, & utriusque onus à tertio sustineatur. Id saltem interest, quod, propter compressionem secundi, primum tertio propius quidem, sed eodem pondere, incumbat. Atque sic porro, Quartum à trium illorum Gravitate (sive interveniente, sive non interveniente, vi Elastica,) premitur; & Quintum ab illorum quatuor; & sic porro ad Sextum, & quæ sequuntur: Ut perinde omnino sit, sive à superiorum omnium Gravitate per se, sive interveniente Vi Elastica, comprimi dicamus. Dummodo saltem Vellera perfectè Elastica ponamus, nec simpliciter-Mollium naturam quadantenus participare; quippe, quatenus hoc obtinet, ad Gravitatem simpliciter recurrendum erit.

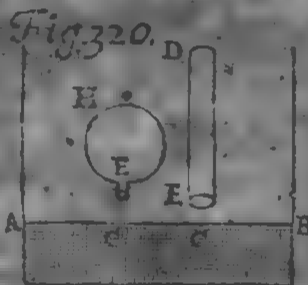
Sed &, propter Vim Elasticam, sive in Vellere sive in Aere, ad latera etiam undiquaque se expedire satagentem (siqua parte debilior fit resistentia;) eadem Vi Elastica (quæ incumbenti Gravitati, in quacunque altitudine, æquipolleat,) ad latus undiquaque premit, qua deorsum; haud secus atque alia fluida, quæ (propter facilem partium separationem) siqua fortius premantur, ea quà minus premuntur se expediunt; sive id deorsum sit, sive à latere, sive etiam sursum.

Dato igitur, quod Aer sit corpus elasticum, (de quo non ambigendum est,) quaquaversum à pressu se liberare satagens, procedimus ad propositionem sequentem.

PROP. XII.

Vis Aeris Elastica Vase inclusi, ejusdem tenoris cum ambiente, tantundem præstat atque onus incumbentis aeris aperti.

Atque hinc ex *Experimentis Boylianis* plurima (nempe quæ ex Aeris Elatere dependent) explicationem facilem sortientur, & Phænomenum causa reddetur. Quod de aliorum item Experimentis Hydraulicis, aliisque innumeris, pariter intelligendum est.



INtelligatur Tubus D, seu Vas quodpiam H (cujuscunque formæ, & quocunque situ,) orificium habens E apertum, quo cum aere externo communicet internus. Si adjacentes aeris externi partes minus premantur quam quæ sunt intra vas, hæ dilatabunt sese donec ad æquipollentiam res redigatur, (per prop. 1. hujus.) Si vero partes extra adjacentes (ob pressum aeris incumbentis) magis premantur quam quæ intus sunt, seu quam harum vis elastica potis sit sustinere, comprimentur adhuc quæ intus sunt (per candem prop. 1. hujus,) eousque donec æquipolleat earum Vis Elastica Vi extra comprimenti, hoc est oneri incumbentis aeris. Re itaque sic ad Æquipollentiam redacta (ut ejusdem tenoris seu tensionis sit aer internus cum externo, adeoque Elateris vis eadem utrobique, ea scilicet quæ Oneri incumbentis aeris sustinendo par sit,) si firmetur orificium E, Vis Elastica (propter eandem quæ prius tensionem) etiamnum æquipollebit oneri incumbentis aeris externi.

Atque hinc, ex D. *Boylii* aliorumque Experimentis Pneumaticis, Hydraulicis, aliisque, plurimorum ratio facile assignabitur. Quippe si, ad ea quæ alias pressu vel trusione fieri possent, istius vice adhibeatur vis Aeris Elastica æquipollens, idem effectus consequetur. Quod in singulis prosequi supervacaneum esset, cum Theorematis generalis ad particulares casus applicatio facilis sit: sintque ea fere omnia vel hinc orta quod Aeris inclusi compressio (adeoque Vis Elastica) major fiat quam est exterioris aeris, (unde plurima in Hydraulicis Phænomena derivantur à compresso aere orta;) vel, quod aeris exterioris compressio & vis elastica debilitetur minorque fiat quam est aeris conclusi, (quod in *Antlia Boyliana* sæpe fit; puta si Antliæ *Recipienti* immittatur Vesica seu Phiala vitrea Aerem ordinariæ tensionis continens, atque Recipientis Aer quadantenus saltem exhauriatur; qui, utut respectu aeris liberi Internus sit, respectu tamen aeris in Vesica illa seu

Phiala contenti est Externus; cujus itaque exhaustione partis debilitetur Vis: idem fit acsi, hoc in statu suo permanente, fortius comprimeretur ille:) Utroque enim casu aer qui reliquo magis compressus est vim suam Elasticam in eum qui minus est compressus exercebit.

SCHOLIUM.

Dici quidem potest, aliud esse Externi aeris pondus ad E, quam ad H vel D, quoniam E premitur, non tantum ab aeris partibus quæ ipsis H vel D supereminent, sed & ab interjectis. Quod quidem verum est; utut in exigua altitudine tantillum id sit ut merito negligatur. Sed hoc, quicquid sit, præsentem speculationem non turbat; quippe idem intra vas evenit. Nam & hic partes E (infimæ) plus premuntur, quam (supremæ) H vel D, quoniam illæ partium interjectarum pondus sustinent. Adeoque Vis Elastica interni aeris in E, æquipollet pressui externi in E; atque interni in H, externi itidem in H. Quod utut in vastis altitudinibus fieri possit alicujus momenti, in minutis tamen negligendum est.

PROP. XIII.

Si inversi Tubi, aliusve Vasis, D vel H, aere pleni (ejusdem tenoris cum ambiente) Orificium apertum, Hydrargyri plano A B applicetur: Hydrargyri nihil inibi vel assurget, vel deprimetur.

Fig. 320. INtelligatur enim Tubi seu Vasis D vel H (aere pleni) orificium E, superficiei Hydrargyri A B admoveri in C. Cum Vis Elastica aeris inclusi, æquipolleat oneri incumbentis externi, (per prop. præced.) æque premitur A B in C atque in reliquis ejusdem partibus; (vas ipsum enim aliunde sustineri supponimus:) Adeoque nulla propterea Hydrargyri inibi vel ascensio vel depressio: per prop. 1. hujus.

SCHOLIUM.

PRopositiones has duas de aeris Vi Elastica, ejusque effectu, apponendas censui, ut obviam eatur scrupulis quorundam inde ortis quod huic non attenderint.

Puta, Si inversus Tubus D C, aere plenus ejusdem tenoris cum ambiente, Hydrargyro in C superponatur; Tuboque (aliunde sustento) impediatur pressus superincumbentis aeris; adeoque pars C aere tantum qui tubo includitur (modicæ altitudinis) prematur, reliquæ autem toto onere aeris incumbentis (altitudinis immensæ:) Certum est, pondus aeris prementis C, longe minus esse quam alibi prementis partem huic æqualem; adeoque, si pondus tantum spectetur, assurgere deberet Hydrargyrum in C; (neque huic obstaret aer tubum occupans, ut qui compressionis capax est, & reapse comprimeretur si elater debilior esset quam vis in C sursum prementis:) Sed, propter Elateris vim æquipollentem ponderi externi aeris, non minus ab aere qui includitur tubo premitur C, quam ab aperto aere partes reliquæ.

Similiter in *Antlia Pneumatica*, seu *Organo Pneumatico Boyliano*, si pondere tantum, non elatere, ageret inclusus aer; immissa animalia, etiam absque aeris exsuctu, paria fere paterentur (utpote minus pressa quam in aperto aere) atque jam post exsuctum aerem.

Item, in eadem Antlia, si intromittatur Vas hydrargyrum continens, cui ita ut supra dictum est immergantur inversi Tubi (hydrargyro prius repleti) labia: postquam undique occluditur Antlia ne ulla fiat communicatio cum externo aere, manet adhuc hydrargyrum in tubo eadem qua prius altitudine suspensum, puta ad uncias pedis Anglicani plus minus 29; non quod eodem quo prius pondere prematur subjecti vasis hydrargyrum, sed quod inclusi aeris vi elastica externi aeris ponderi æquipollente prematur; nec prius subsidit, quam vis illa debilitetur. Ubi vero, propter exsuctam aeris partem, reliqui (utpote jam minus compressi)

pressi) Elater debilitatur, subsidit Hydrargyrum ad minorem minoremque continue altitudinem prout plus plusque Aeris exsugitur: Idque eousque, me spectante, aliquando factum fuit, ut vix ultra pedis Unciam unam altitudinis suspensum manserit: (Sed &, si intruso aere fortior redderetur elateris vis, adhuc altius ascenderet Hydrargyrum quam extra Antliam.) Quod & inter Experimenta *Boyliana, Physico-Mechanica* occurrit; *Experimento*, 17. Sed &, ex eo tempore, vase jam commodius præparato, observavit idem Honoratissimus *Boylius* aliquoties (quod ab eo ipso accepi;) Hydrargyrum in Tubo contentum, eadem operatione præstita, ad ipsam usque stagnantis infra Hydrargyri superficiem subsidisse, neque supra illam omnino eminuisse.

Atque similis ratio assignanda erit in variis istiusmodi phænomenis quæ non ab aeris gravitate immediate dependent, sed ab ejus vi elastica à gravitatis pressu impressa. Quippe nisi foret hæc vis Elastica, gravitas aeris ubi non posset directe applicari (ut in vase clauso) non id præstaret: Sin autem Gravitas non foret, nec esset ea vis Elastica, à pressu ponderis aeris incumbentis orta; Elater enim, utcunque in se fortis, nisi comprimatur nil agit, utpote cujus tota Vis activa est tantum conatus se restituendi in situm unde detrusus fuerat.

Ex eodem principio (de conclusi Aeris Elatere) reddenda est ratio, *Cur Aeris pondus non sentiamus.* Quippe si tanti ponderis sit Aer quanti jam perhibetur (cum antehac, non modo nullius ponderis censeretur, sed positive levis,) mirum videri possit quod tantum onus sustinentes non eo nos premi sentiamus.

Item, *Cur Aqua immersi non sentiant Aquæ pondus.* Cum enim, non modo nunc dierum, sed & in veteri Philosophia, Aquam gravem esse non dubitetur; eo magis mirandum videatur, quod, Aquæ suppositi, incumbentis gravitatem non sentiant; cum interim minorem aquæ molem alibi impositam ferentes opprimerentur. Quodque de Aqua hic dictum est, de aliis item fluidis intelligendum est: imo & quæ fluidorum instar sunt; puta, siquis Arenæ seu Farinæ cumulo penitus immergeretur, non magis ille (credo) Arenæ seu Farinæ, quam Aquæ, pondus sentiret.

Ratio est, (non, quod dici solet, quod Aqua non gravitet in suo loco; puta supra aquam, aut gravius quiddam; contrarium utique dicendum est, nam superiores aquæ partes premunt inferiores, ut ex multis Experimentis seu Observatis satis liquet; sed) quoniam Aer vel Aqua ex omni corporis immersi parte æqualiter premens, partium positionem non turbat. Comprimit quidem (propter Aerem in sanguine aliisque humoribus compressionis capacem) quod observavit Honoratissimus *Boylius* (*Paradox. Hydrostat.* in fine) in Gyrinis (nostrates, alibi *Tad-poles* appellant, alibi *Hob-nails*,) aqua inclusis valide compressa, ubi satis vivide se movebant, sed magnitudine imminuta: Sicut, ex adverso, Animalia, Antlia Pneumatica inclusa, subducto aere, augeri solent; propter aerem humoribus contentum insigniter dilatatum; neque id sine dolore, propter insignem vasorum continentium & fibrarum seu membranarum distentionem, forte & lacerationem.

Aerem autem, seu quod Aeris instar est, (*Spiritus* forte dicas,) magna copia in Sanguine contineri, certissimum est, potestque ad oculum demonstrari: Sanguinem enim, in aperto vase contentum, si *Antliæ Pneumaticæ Boylianæ* immiseris; subducto aere (quod ipse aliquoties vidi) spumescit protinus, & non in spumam tantum sed amplissimas bullas se expandit, (aere sanguini immisto, propter sublatam ab extra compressionem, se insigniter ampliante;) & quidem plus quam speraveris, ita ut saponis inter lavandum expansio in bullas, huic aeris in sanguine expansioni cedat.

Quodque inde rumpantur fibræ, videtur hinc saltem existimandum, quod Sanguis ille, post innumeras istiusmodi bullas turgente aere sic inflatas ruptasque, per aliquot dies postea reservatus, non (ut fieri solet) in grumosam massam coaluerit, sed liquidus permanserit. (Quod ipse vidi, & inter Experimenta *Boyliana* alicubi, si bene memini, memoratur.)

Contra vero; ubi ex omni parte (pro fluidorum natura) æqualiter premitur immersum Corpus; aerisque particulæ, in minutissimas quasque partes sese cum humoribus insinuantes, & pridem fuerant æqualiter pressæ (nam nisi sic fuissent, partes minus pressæ reliquis locum concederent quo ampliarentur, per prop. 1. hujus,)

hujus,) &, nova pressione jam accedente ab incumbente aqua, æqualiter item (ob eandem rationem) porro comprimuntur; manent partes similiter ut prius ad invicem sitæ, nec ulla fit fibrarum seu membranarum distractio aut laceratio, adeoque nullus dolor seu sensus oneris.

Contrahuntur quidem hac ratione fibræ membranæque sed non renitentes; (quippe jam ante in statu tensionis erant; quod patet ex fibrarum aut membranarum, siquando secantur, spontanea contractione;) adeoque nec dolor inde oritur seu sensus oneris. Et quidem, dummodo nulla fit inæqualis pressio seu partium dislocatio, nec caro ossium (utcunque conjunctorum) nec ossa carnis ullam ex sensu perceptionem habent; sed sicubi inæqualis pressio aut dislocatio fiat, qua partes extra situm suum detrudantur, tum tandem fit tactus perceptio. Sed hoc in immersis fluido (ut jam ostensum est) non contingit; adeoque nec sensus Oneris, sive ab Aere sive ab Aqua (aliove liquore) incumbente.

Possunt hæc ex *Antlia Boyliana* confirmari. Quippe, si Antliæ *Recipienti* immiseris Vesiculam, flaccidam quidem (utpote parum aeris inibi habentem,) sed stricto collo probe obturatam (nequid effluat;) dummodo eadem ubique maneat aeris Compressio, adeoque & Vis Elastica, omnia ut prius perseverant.

Sin ex Recipiente aliquid aeris exhaurias, adeoque compressionem & vim elasticam aeris in Recipiente minuas; aer in Vesica (utpote magis compressus adeoque & magis elasticus quam qui est extra Vesicam in Recipiente) se expandet, vesica interim (tanquam inflata) turgente. Idque cousque fiet quamdiu Vesicæ latera ita extendi possint ut aeri intus contento expansionem similem concedant ei quam habet aer Recipientis. Ubi vero non ita possit extendi Vesica, si Recipientis aer reddatur adhuc minus elasticus, qui itaque pressui interno minus æquipolleat; violenter distenditur vesica, (nempe pro eo gradu vis Elasticæ quo superat interior aer exteriorem;) quod quidem, si adesset sensus, non sine dolore fieret; eaque violentia, si major sit quam quæ laterum Vesicæ firmitati æquipolleat, rumpetur vesica. Quod & in phialis vitreis, tenuis corticis, sæpius observatum est.

Si vero inflata sic vesica (nec rupta tamen) aerem in Vas *Recipiens* denuo admittas; flaccescet iterum vesica atque in minorem locum (fibris se retrahentibus) recipiet: quod, etiamsi adesset sensus, sine dolore fieret, cum nulla vis fibris inferatur. Quodque in hac vesicula unica videre est, idem de innumeris in corpore vesiculis sive bullis (exiguas Aeris seu Spirituum particulas continentibus) intelligendum est; quarum pressio ex aere æquabiliter incumbente vix major erit quam quæ fibrarum extensio prius fuerat se jam retrahentium.

Verum quidem est, si vesicæ loco phialam vitream immiseris, cujus latera rigida sint, neque se (ut fibræ) contrahant, (modo vitri tenuitas & forma tales sint ut externæ pressionis excessum supra internam sustinere non valeant,) rumpetur phiala, partibus corticis intra trusis: at hoc in immersis fluido secus est, ubi vesicularum cortices flaccidi sunt, & pressuum sine violentia capaces. Si vero eo usque urgeretur (ob immensam puta aquæ profunditatem) compressio, ut non possent vesicularum cortices se ulterius sine dolore contrahere; non dubito quin oneris & doloris sensus tum futurus esset. Ossa vero, & cartilagines, in compressionibus minoribus, utut flaccida non sint, dolorem à pressu illo non sentiunt, eo quod partes illæ corporis duræ, sint perceptionis minus (si omnino) capaces; sitque sensatio tantum in nervis, fibris, membranis, aliisve corporis partibus mollioribus.

Quanta vero sit ea sive Compressio sive Dilatatio cujus capax est Aer, non facile dictu est. Magnam certe esse, ultra quam quis putaverit inexpertus, experimentis plurimis compertum est.

Illum Aeris statum qui nobis ordinarius est, naturalem esse (quem sponte sua subiret aer non vi compressus,) non est existimandum. Quippe, nisi compressus esset, nulla foret in eo statu vis Elastica, (quam esse experimur;) ut quæ ab Elateris compressione tota pendet, in situm ampliorem conantis se restituere.

Quousque vero, si omnis compressio tolleretur, se ampliaturus esset Aer, (qui ex innumeris corpusculis Elasticis varia figura varioque situ videtur componi,) tentatum potius quam penitus exploratum est.

Mersennus olim, Æolipilæ ope, ingenti caloris vi adhibita, (quantam ejusmodi

vasa

vasa sine fusione ferre possent,) Aerem se ita dilatasse affirmat ut spatium *Septuagecuplum* illius quod prius habuit occupaverit.

Honoratissimus *Boylius* noster, absque caloris ope, sola vi sua elastica Aerem se dilatasse expertus est, in locum pristino majorem vicibus primum 9; tum, vicibus saltem 31, (sed majoris adhuc expansionis capacem esse si spatium esset quo reciperetur :) deinde, plusquam vicibus 60 : tum, vicibus plusquam 152; (quæ plusquam dupla est expansionis Mersennianæ, vi caloris obtentæ, quæ tamen tantum non incredibilis existimata fuerat :) Quæ recenset ille, inter *Experimenta* sua *Physico-Mechanica de Aeris Elatere*, &c. Experim. 6.

Post id temporis, sed jam ante Octennium vel Novennium plus minus, (ut idem refert in Experimentis nuper Editis *de Admiranda Aeris Rarefactione*,) Expansionem illam, aliis mediis, multo adhuc promovit; nempe, usque ad vices saltem 8000, (vi sua Elastica sola, absque caloris ope :) atque, iterato experimento etiam adhuc major inventa erat : quibus Experimentis etiam ipse interfui.

Idemque, Experimento adhuc aliter instituto, (prout ibidem recensetur) ad vices pervenit plusquam 10000, (seu plusquam *Decies Millecuplum* loci quem prius occupaverat idem Aer,) imo ad locum occupandum vicibus 13769 majorem.

Et quidem, inter ingeniosa illa atque subtilia *Experimenta Florentina* ante paucos annos edita, inventus est Aer, non modo absque *Caloris* ope, sed & absque ope (quam *Boylius* adhibuerat) *Antliæ Pneumaticæ*, solius *Experimenti Torricelliani* auxilio, expansus in molem saltem 173 vicibus pristina majorem.

At quis interim spondere possit, etiam in expansionum harum actu præstitarum maximis, compressionem omnem penitus sublatam esse ? Quod ni factum fuerit, etiam adhuc majoris Expansionis capax censendus erit Aer. Quem itaque judicemus, ex tenuissimis, eisque maxime convolutis, particulis, & Elatere forti præditis, compositum esse. Quippe secus, vix cogitari potest quomodo in tam vastam amplitudinem, sola sua Vi Elastica (sublata vi extrinsecus comprimente) se dilatare posset exiguus Aer.

Cumque se ita sponte dilataturus foret (si abessent impedimenta) quem hic habemus Aer; manifestum inde est, quod parem huic Compressionem jam sustineat. Sed majoris adhuc Compressionis capacem esse, non est quod dubitemus; imo quotidie experimur.

Huc referri possunt *Scopeti Pneumatici* dicti, seu *Spiritalis*, (nostri *Wind-gun* appellant) Experimenta, à *Mersenno* recensita; ubi, à compresso Aere, globulus magna vi projicitur, tanquam à pulvere Pyrio. In quo tamen summa qua potuerunt industria non in minorem quam partem quindecimam, ejus quem prius occupaverat loci, aerem vi comprimere valuerunt : & quidem etiam de hoc dubitat, qui illa instituit, *Mersennus* ipse (*Phænom. Pneumat.* prop. 32.) an in partem $\frac{1}{15}$, an $\frac{1}{8}$ potius dicendum fuerit, ob fallaciam aliquam quam Experimento subesse suspicatus est.

Item quæ in *Machina Compressiva* (à *Societate Regia Londini* in hunc usum parata) instituta sunt Experimenta : in qua compertus est Aer in soliti spatii partem $\frac{1}{10}$, vel etiam $\frac{1}{12}$ (*decimam*, vel *duodecimam*,) vi coerceri.

Eaque quæ habet *Boylius* idem (à quo & cætera desumpsi) *Experimenta Condensationis Aeris a Frigore*. Alterum quidem; in quo, quum Glaciem Sale mixtam circumposuerat undiquaque vasi vitreo quo continebatur conclusus Aer, (eo modo qui in congelanda aqua adhiberi solet,) contractum deprehendit in spatium quod ad pristinum erat ut 147 ad 158 plus minus; (quæ multo minor est quam quæ vi mechanica obtineri solet ; quippe hic non nisi $\frac{11}{158}$ pristini spatii amittitur, hoc est, $\frac{1}{14}$ fere; cum illic adhibita vi mechanica vix tantundem retineretur : dum tamen frigus sic adhibitum tantum fuerit ut aquæ congelandæ abunde sufficeret, summumque hyemis apud nos rigorem superaverit.) Alterum ; quo quum Glaciem vel Nivem Sale mixtam vasi similiter circumposuerat, cui Aeris exiguum & Aquæ multum includebatur; Aqua vi frigoris expansa (utpote congelationi proxima) Aerem sic compressit ut intra partem *Quadragesimam* seu $\frac{1}{40}$ pristini spatii concluderetur ; fortius adhuc eundem compressura si non (quod contigit) vas ipsum rumperetur. Quæ quidem Contractio, seu Condensatio, utut minor sit quam modo dicta Expansio seu Rarefactio, (eo quod Aer jam fuerat, in statu ordinario, insigniter compressus;) multo tamen major est quam vel hybernum Frigus, (aut illud artificiale, hyberno fortius,) vel vis Mechanica hactenus adhibita, potuerit efficere.

Si vero utramque (summæ Rarefactionis summæque Condensationis supra quam est in statu aeris apud nos ordinario) considerationem componamus: Cum spatium quod occupat Aer sic Dilatatus, sit ad spatium quod occuparet Aer nobis Ordinarius, ut 13769 ad 1; atque quod Aer Ordinarius occupat ad spatium quod occupat sic Compressus, sit ut 40 ad 1; erit spatium Aeris sic Dilatati ad spatium ejusdem sic Compressi, ut ($13769 \times 40 =$) 550760 ad 1; vel, numero rotundo, ut 550000 ad 1, seu ut *Quinquies Centena & Quinquaginta Millia*, ad *Unum*. Et, quanto, per media olim forte excogitanda, removeri adhuc possit ab invicem uterque terminus; conjicere non valemus.

Unicum adhuc ex iisdem D. *Boylii* (de Aeris Rarefactione & Condensatione, seu Dilatatione & Contractione,) Experimentis monendum duxi. Nempe, quod, utut Aerem in statu admodum laxo seu dilatato conclusum detinuerit in vase vitreo per Menses aliquot, imo per aliquot Annos; non tamen hactenus observare potuit, quin Elaterem suum retinuerit, & quidem in eodem quo prius vigore; nec ob laxitatem illam languorem contraxerit. Cum tamen non raro observemus, Corpora Elastica (puta, laminam Ensis, aliamve chalybeam) ubi aliquandiu in situ indebito detenta fuerint, Elaterem suum deperdere, nec vi sua se in pristinum situm restituere; Sed & Magnetem, Acumve Magnete incitatam, si extra situm suum longo tempore detineas, vel polos mutare, vel sensim deperdere verticitatem suam. Tantus scilicet est, etiam in rebus inanimatis, diuturnæ in eodem situ positionis effectus.

Verum hic loci dissimulandum non est Experimentum aliud, illustre quidem & satis stupendum, quodque me de Phænomeni causa solicitum tenuit.

Nempe; *Si Hydrargyrum inverso Tubo* (ut dictum est) *suspensum, sit ante inversionem ab omni Aere accuratissime depurgatum* (quod nonnisi summa cura & diligentia fiet,) *atque inversione caute facta, Tubus in loco firmo ab omni concussione liber constituatur; Hydrargyrum* (*aperto infra orificio*) *suspensum permanebit, etiam longe ultra altitudinem supra indicatam: Si vero, Hydrargyro sic suspenso, vel tantillum Aeris admittatur, vel concutiatur Tubus; statim præcipitabitur Hydrargyrum usque ad solitam altitudinem, ibique* (post reciprocationes aliquot factas) *consistet*.

Phænomenon hoc, Experimentis quibusdam, in *Organo Boyliano* primum, deinde in aperto aere factis, debemus. Observaverat utique Honoratissimus *Boylius* (quod ex ejus *Experimentis Physico-Mechanicis*, Anno 1660. editis, *Exper.* 17. ante monuimus,) Hydrargyrum, intra Antliam suam Tubo suspensum, subducto Aere gradatim descendere, uti expectaverat, non ita tamen quin, quamcunque adhibuerit diligentiam, supra stagnantis inferius Hydrargyri superficiem (contra quam speraverat) extaret adhuc ad altitudinem *Unciæ* vel saltem *Semi unciæ* (præsertim si ab aere prius depuratum fuerit,) cui in Aqua respondent pedis Unciæ saltem 7 aut 8. Idemque in Aqua expertus, immissis in Antliam tubis brevibus (puta, 5 aut 6 unciarum pedis) ea repletis, Aquam reperit (saltem si ab Aere prius depurgata fuerit) non descendere. Quæ quamquam Organo minus præcise obturato, quam ut potuerit Aer omnis inde exhauriri, imputari posse videretur; rem tamen cum iis è *Societate Regia* qui tum temporis solebant convenire communicavit, ut altiore dignam examine.

Cumque, post Librum illum editum, Organumque ipsum *Londini* 1661 conspectum, variis adhibitum usibus, id eousque approbavit Clar. *Hugenius*, ut domum reversus aliam sibi ad ejusdem Antliæ formam parandam curaverit: id ipsumque in Aqua expertus similiter evenire deprehendit, (nescius, credo, D. *Boylium* id pridem deprehendisse:) Nempe; immisso in Antliam tubo breviusculo aqua repleto ab aere depurata, post Aerem ex Antlia quantum potuit exsuctum, Aqua adhuc suspensa mansit.

Idemque (suis literis) ut notabilem in doctrina *Boyliana* (de Aeris Pondere & Elatere) difficultatem objecit.

Cui (literis suis) reponebat D. *Boylius*, rem plane ita esse, atque ab ipso jam ante observatam, tum in Aqua (ut D. *Hugenio*) tum etiam in Hydrargyro; agnitamque difficultatem, & cum Societate Regia communicatam, ut ulteriori adhuc examine dignam. Interea tamen solvi difficultatem videri posse ob Antliam non ita penitus exhaustam quin ut residuus Aer exiguum illud pondus sustinere po-

tuerit;

tuerit; & siquando Aqua illa brevium suborum, aut huic æquipollens Hydrargyrum, ab aere nondum depuratum, subsideret, id imputari posse latenti intus Aeri elatere suo depellenti vim Aeris extra tubum jam valde debilitatam.

Quod quidem responsum, utut Objectioni (prout tum res erant) satisfacere videretur; non tamen fecit quin *Societati Regiæ* visum fuerit in rem illam altius inquirere. Experimentis tum coram ipsis publice, tum alibi privatim, præsertim ab Honoratissimo Præside D. Vicecom. *Brounckero* & D. *Boyle*, (quorum præsertim curæ res ea demandata fuit;) sive in Organo *Boyliano* sive in aperto Aere, faciendis.

Postque varia facta tentamina, retulit tandem Societati Regiæ D. *Præses*, se Hydrargyrum sic suspensum detinuisse, ultra solitam altitudinem ad Æquipondium necessariam (puta unciarum 29 aut 30,) nempe ad pedis uncias usque 34: Posteaque D. *Boylius*, se idem expertum in altitudine unciarum 52: Iterumque D. *Præses*, se idem ad pedis usque uncias saltem 55; pollicitus porro se rem ulterius adhuc prosecuturum. Quæ ex Regiæ Societatis Regestis Annorum 1662 & 1663 liquent.

Idemque ex eo tempore, frequenti experientia, in aperto Aere (absque Antliæ ope) Experimentis Honoratissimorum *Brounckeri*, *Boylii*, aliorumque, crebro iteratis (quibus & ego aliquando interfui) confirmatum est; Hydrargyrumque, non tantum ad solitam altitudinem (quo Æquilibrium cum externo Aere heret,) puta, ad pedis Anglicani Uncias 29 circiter, sed etiam ad Uncias usque 40, 50, 60, imo & 72, suspendi deprehensum est, atque ita suspensum per dies aliquot consistere; sed concussione facta, vel tantillo Aeris admisso, statim præcipitari ad Æquilibrium usque: Ut de Phænomeni certitudine jam dubitandum non sit.

Atque hoc quidem Experimentum, illustre & insperatum, cum leges Staticas supra positas quadantenus turbare videatur, in Gravitatis naturam altius inspiciendum monet, eoque facem non contemnendam præferre forte deprehendetur olim.

Interim, donec certius aliquod à Viris Eruditis conclusum fuerit, hæc mihi ratio videtur non improbabilis. Nempe; Cum olim, in veteri Philosophia, Terra, Aqua, aliaque ejusmodi Corpora, Gravia censerentur; Aer autem Levis; videri possit contrarium quadantenus hinc dicendum; omnemque Gravitationem actualem ab Aeris Ætherisve pressu vel Elatere (expansionem moliente, cæteraque propterea loco suo deturbante,) provenire: Absque quo, sequia hæc Corpora, quæ Gravia dicimus, in quiete posita sic permanerent, sine Gravitatione actuali sive descensû; neque magis essent ad motum deorsum proclivia quam ad lateralem. Hydrargyrum itaque ab omni intus Aere depuratum, atque ita ut dictum est suspensum, etiam ultra consuetam altitudinem ad æquilibrium necessariam, cum ab omni Aeris pressû liberum sit, nec ejus vel gravitate vel elatere urgeatur, (quippe, qui intus deprimeret, nullus est; quique extra est, si omnino premeret, sursum premeret; nempe, per Tubi orificium, qua solum patet aditus; nam à pressû aeris superno vel laterali à Tubo defenditur;) in quiete positum immotum manet, suumque statum retinet. Si vero, propter Tubi concussionem aliquam, aliquamve intus commotionem ab Aeris elatere, vel prius inibi relicti vel jam demum admissi, in motu ponatur; motum illum (pro ratione quantitatis materiæ, vel densitatis partium, vel quicquid id sit quod *Ponderis* nomine vulgo insinuamus,) prosequitur, deorsum (qua via patet) vergens. Adeoque, quicquid id sit quod in Hydrargyro (aliisque similibus) *Pondus* dicimus, utut absque Elatere vel pressu aeris aut quod hujus instar sit non inchoaret motum, motu tamen undecunque orto rationes Staticas deinceps observat. Atque hæc est quæ mihi videtur Phænomeni hujus non improbabilis ratio.

Addo tamen, Tubi superficiem utcunque politam (quod de aliis superficiebus pariter intelligendum) non ita ab omni asperitate seu inæqualitate immunem censendam esse, quin etiamnum aliquid asperitatis supersit, unde corporis adjacentis cohæsio aliqua & (si moveatur) frictio oriatur, (ut supra aliquoties insinuatum est,) qua motus aliquatenus impediatur, atque ob quam mota corpora alii contigua Volvi facilius quam Labi deprehenduntur. Atque hinc, si post omnem adhibitam diligentiam nonnihil aeris utut exiguum permanere censeatur, compensatio fieri possit ne Hydrargyrum excutiat.

Fateor interim mihi ne sic quidem penitus satisfactum esse, scrupulosque adhuc superesse & difficultates quibus respondendis necdum sufficio, quin aliquid adhuc mecum

 mecum

mecum habeat. Et quidem fieri potest (quod D. Vicecom. *Brounckerus* suspicatur) Aeris pondus multo majus adhuc esse quam ut altitudini Hydrargyri unciarum plus minus 29 respondeat; sed ab aere intus latente (nisi expurgetur) ad eam usque altitudinem depressum esse Hydrargyrum: At ubi expurgatur Aer, nihilque tum supersit quod externi aeris ponderi se opponat præter nudum Hydrargyri pondus, rem secus deprehendi, hydrargyrumque ab aeris æquipondio altius sustentum iri.

Sunt qui idem explicare satagunt, propter Aerem quendam subtiliorem (quam est Communis Aer) Aeri nostro crassiori immistum; qui quidem tam subtilis sit ut per Antliam Pneumaticam expurgari non possit, nec ita tamen ut possit per vitri poros transire: (qualem revera reperiri, aliis aliunde Experimentis confirmatum eunt:) Hunc Aerem subtilem, utut vitrum penetrare non possit, posse tamen (post concussionem Tubi factam, aut Undulationem aliunde ortam) ita per internam tubi superficiem se sensim insinuare existimant, ut (prætereito & superato quod intus est Hydrargyro) culmen consecutus, Hydrargyrum depellat.

Sed nihil certi hic ausim determinare, severiori adhuc disquisitione rem dignam censens.

PROP. XIV.

Quæ de Hydrargyro propositionibus superioribus ostensa sunt eadem in aliis Fluidis, servata Gravitatum proportione, pariter obtinent.

CUm enim omnium Demonstrationes Hydrargyro speciatim applicatæ, procedant ex generali Fluidorum natura, eædem pariter obtinebunt in fluidis aliis, pro sua cujusque gravitate.

Verbi gratia: Cum pondus Aquæ ad pondus Hydrargyri, æqualis magnitudine, sit ut 1 ad 14 (numero rotundo,) seu potius (quod D. *Boylius* ex suis Experimentis accuratius judicat) ad $13\frac{3}{4}$ circiter; (*Getaldus*, in suo *Archimede promoto*, ponit ut 1 ad $13\frac{3}{5}$:) Quo Cylindrus Aquæ æquipolleat externi Aeris pressui, requiritur ut altior sit Cylindro Hydrargyri æquipollente, vicibus 14, saltem $13\frac{3}{4}$, aut $13\frac{3}{5}$; prout hæc, illa, vel ista proportio sit accuratior, & quidem pro diverso sive Aquarum sive Hydrargyrorum pondere, poterit nunc hæc nunc illa esse accuratior, potest enim & Aqua aqua & Hydrargyrum Hydrargyro levius esse graviusve. Adeoque quam posuimus altitudinem GI, (fig. 314.) in Hydrargyro, unciarum plus minus 29; ponenda erit, in Aqua, pedum plus minus 33.

Huic consonum est D. *Boylii* Experimentum (cui & ipse cum aliis interfui) cujus meminit in *Continuatione Experimentorum Physico-Mechanicorum*, Experim. 15. Qui, experimento quærens quousque posset Aqua Suctione elevari in tubo, supra superficiem infra stagnantis aquæ cui insistebat, invenit (summa adhibita diligentia) maximam ad quam tunc temporis elevari posset altitudinem fuisse pedum 33 & unciarum 6, hoc est pedum $33\frac{1}{2}$; quo tempore altitudo Hydrargyri propter Atmosphæræ æquipondium suspensi, fuit unciarum pedis $29\frac{1}{4}$ proxime; quæ quidem Hydrargyri altitudo per $13\frac{3}{4}$ multiplicata, exhibet uncias 402 proxime, hoc est pedes 33 cum 6 unciis. Atque, eadem analogia, quo tempore assurgeret Hydrargyrum ad pedis Anglicani uncias 30 (qui ascensus est quasi maximus,) assurgeret Aqua ad altitudinem unciarum $412\frac{1}{2}$, hoc est pedum 34 & unciarum $4\frac{1}{2}$: Quo tempore vero Hydrargyri ascensus esset nonnisi unciarum 28 (qui quasi minimus est,) ascenderet aqua ad altitudinem unciarum 385, seu pedum $32\frac{1}{12}$. Ut maximam Aquæ ascensionem ob Suctionem (seu, quod tantundem est, ob Atmosphæræ æquiponderantiam) obtinendam, rite judicemus, nunc pedum $34\frac{1}{3}$, nunc pedum 32, (proxime,) nunc his intermediam, prout maxima minima vel intermedia fuerit Atmosphæræ gravitatio: saltem ab his limitibus quam parum recedendum erit.

Verum non opus est, ad hoc de Aqua Phænomenon probandum, (quod non ultra certam altitudinem suctione possit elevari,) ut ad idem in Hydrargyro tenta-

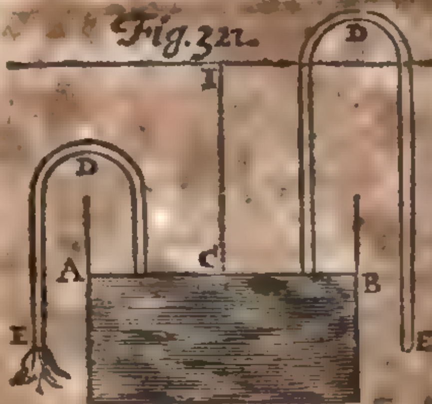
tentatum recurramus. Quippe illud in Aqua primo deprehensum est. Utut enim, qui ob Fugam Vacui suctiones fieri existimaverint, putaverint etiam (nec quidem inconsequenter) ad quantamcunque altitudinem sic posse Aquam elevari; nec dubitarint quin Antliarum atque Siphonum ope posset aqua etiam supra altissimas Turres nedum Montes suctione trahi: Deprehenderant tamen Antliopoei, cum ad praxin deventum esset, rem non succedere; omnesque aquam supra certam altitudinem his mediis elevandi conatus frustra esse. Atque hoc ipsum est quod *Galileo* primum in animum induxit, Vacui Fugam illam non infinitam esse, sed intra certos limites coerceri; Aerisque Æquipondium illius loco substituendum. Indeque *Torricellio* ansa data est idem in Hydrargyro tentandi. Quippe non imprudenter conjecit ille, si ob Aeris Æquipondium nonnisi ad certam altitudinem elevaretur Aqua, ad minorem adhuc elevandum fore Fluidum aqua Gravius: atque, in Hydrargyro tentata, res successit ex voto. Atque exinde, Torricellio praeeunte, res jam redacta ab altitudine pedum plus minus 33, ad altitudinem tubi breviusculi, unciarum puta 29 plus minus, facta est magis tractabilis; (cum tubi tot pedes alti, liquoribus aerique impervii, nec facile obtineri possent, nec commode tractari:) Unde tot tantique momenti Experimenta profluxerunt, profluuntque indies.

Quodque in Aqua ostensum est, in Fluidis aliis, servata proportione gravitatum, perinde obtinere censendum est.

PROP. XV.

Quæ de Hydrargyro, aliisve Fluidis, in Tubo suspensis ostensa sunt; eadem Siphonibus, Antliis, aliisque ejusmodi organis, accommodanda sunt.

ESto enim, verbi gratia, Siphon seu Tubus incurvus CDE (utrinque apertus,) cujus alterum extremum C Aqua aliove Fluido immergatur, alterum E extra propendeat. Notum est Experimentum (ut in deplendis vasis vinariis, Fig. 321.



aliisve,) si sugendo in E proliciatur liquor donec effluat, omissa deinceps suctione continuabitur effluxus, donec liquor in vase vel penitus exhauriatur, vel à justa altitudine deficiat: Ea tamen lege, ut orificium E inferius sit quam AB liquoris in vase superficies.

Hujus Phænomeni causa, à Fuga Vacui peti solebat olim; nempe, quod exsucto in E aere qui in Siphone fuerat, ascendat (contra gravitatis suæ propensionem) Fluidum in C, ne daretur (quod naturam omnibus modis aversari putabatur) Vacuum in Siphone. Et, consequenter, hujusmodi artificio etiam supra altissimos montes in oppositas valles aquam transferri posse putabatur.

Postquam vero experimento compertum est, non posse aquam (aliudve fluidum) ultra certam altitudinem suctione attrahi, eamque in altitudinem immensam sic elevandi spes fuisse fallaces; cœpitque in Fugæ Vacui locum succedere (Galilæo id primum suggerente, & promovente Torricellio,) Aeris Æquipondium: ad

ad leges Staticas deventum eſt, quo altitudines illæ pro cujuſque Fluidi gravitate determinentur.

Exſucto igitur Aere in E, (ſeu potius, loco facto in ſugentis Thorace dilatato quo recipiatur aliunde protruſus aer,) ſubjectum Fluidum ab aeris extra incumbentis preſſu in Siphonem protruditur (eadem ratione qua, ſupra, in Tubum rectum) in C; idque euſque (nec ultra) donec fiat Æquilibrium cum externi Aeris preſſu, (per ante demonſtrata;) puta, ad altitudinem C I, (hoc eſt, in Hydrargyro, Unciarum quaſi 29; in Aqua, Pedum quaſi 33, plus minus; atque in aliis liquoribus proportionaliter pro ſua cujuſque gravitate.) Si itaque Siphonis ſummum D, altius non ſit quam I; aſſurget fluidum ad ſummum uſque; exituque illic invento per crus deſcendens D E, effluet ex E; atque hoc continue, cauſis perſeverantibus. Ea tamen lege, ut inferius ſit E quam C (ſuperficiei A C B:) Secus enim, cum æquali Atmoſphæræ preſſu urgeantur C & E, ſi Cruris D E altitudo minor ſit quam Cruris D C, adeoque fluidum quod illo continetur minus gravitet quam quod in hoc, contrario curſu feretur fluidum ab E per D ad C, ſuccedente Aere in E: Saltem, niſi Siphonis amplitudo tanta ſit ut poſſit Aer ſimul aſcendere (per fluidi latera) dum defluit fluidum cruris D E; quo caſu, partiri poterit fluidum in D, deſcendente parte altera per D C, altera per D E, aſcendente Aere per fluidi D E deſcendentis latera; in Siphonibus vero ſtrictioribus retro feretur fluidum in E, per E D C, ab aere in E urgente propulſum.

Sin D altius ſit quam I, ſurſum propelletur Fluidum (ob cauſas ſupra traditas) à C ad I uſque, ſed non ultra; adeoque ad D non pertinget: Adeoque tantum abeſt ut ceſſante ſuctione continue profluat per D ad E, ut nulla ſuctione ad E protrahi poſſit. Cum enim ſuctio non aliter agat quam (aperto Thorace, aut quod Thoracis inſtar eſt,) locum faciendo quo recipiatur fluidum (non ſuctionis vi tractum, ſed) ab externi aeris preſſu (ſeu quod hujus inſtar eſt) propulſum; ſi, utut loco facto, non valeat tamen externus aer eo propellere Fluidum (propter D altius quam I,) Fluidum ad I conſiſtet, neque altius feretur quo per D ad E poſſit pertingere. Et quidem, ſi totus fluido impleatur Siphon C D E; aperto utrinque orificio, facta partitione in D, quod eſt in crure D C deprimetur ſaltem uſque ad I, (ne plus prematur C quam ſuperficiei A C B partes reliquæ,) quodque eſt in crure D E effluet per E (aere in illius locum ſuccedente;) ſaltem niſi tam ſtrictum ſit crus D E ut non commode poſſit aſcendens Aer deſcendens fluidum præterire; quo caſu, poſtquam deſcenderit fluidum in D E uſque ad altitudinem I, ſuſpenſum illic detinebitur donec ſe poſſit Aer ſenſim inſinuare; viaque tandem facta qua poſſit externus Aer libere per E intrans vim ſuam exercere, deprimetur quod erat reſiduum in crure D E ad C uſque.

Fig. 322.

Idemque in Antlia (ſeu Organo Cteſibico) obtinet; Cujus ſtructura ad hunc fere modum fieri ſolet; Lignum oblongum (vel ex pluribus, ſi opus ſit, compoſitum) intus excavatum Cylindrice, in puteum demittitur, (extante parte ſuperiore,) infra ſuperficiem aquæ in putei fundo; quæ quidem Aqua intelligenda eſt, non libera ab aeris preſſu, ſed eidem obnoxia (ſecus enim non ſurſum propelletur aqua;) Atque alicubi in Antliæ cavo repagulum tranſverſum figitur in cujus medio eſt foramen D per quod aſcendat Aqua; & huic foramini incumbens operculum ſeu valva E, tranſverſario ita fixa ut aperiri aut claudi poſſit prout infra ſupra ve premitur; Item, Situla à manubrio ſuperne demiſſa, (ita Cavi lateribus aptata ut non poſſit Aer per latera ſe inſinuans tranſire,) quæ ſimiliter in fundi medio foramen habeat F, eique ſic aptatam valvam G, ut E ad D.

His ita conſtructis; dum manubrium verſando Situla ſurſum trahitur, cumque illa incumbens Aer, quo minus ſubjecta intra Antliam aqua eo prematur, impelletur in Antliæ cavum aqua aliunde preſſa per C ad D, & per foramen (valvam E aperiens) ad fundum uſque ſitulæ (modo altior non ſit quam C I ſumma æquilibrii altitudo,) utpote à preſſu ſuperne libera, atque infra propulſa: Contra vero; dum manubrium

brium alias versando deprimitur Situla, deprimatque proxime subjectam aquam quæ per D ascenderat; clauditur hac depressione valva E, atque aperitur G; per quam aqua, situlam supergressa, cum retracta situla (clausa G valva) sursum trahitur, viaque illic inventa per orificium H effluit, succedente ut prius in retractæ situlæ locum aqua per D denuo assurgente: atque hoc continue.

At vero, si altitudo C D major sit vel non minor quam C I (qua fieri supponimus æquilibrium cum externi aeris pressu) Aqua per D non ascendet (ne plus premeretur C quam superficiei A C B partes reliquæ,) totusque Antliæ labor incassum erit. Sin D sit infra I, ascendet aqua per D ad I usque, modo non impediatur; saltem ad usque fundum situlæ, nisi altior sit hic quam I. Si vero eousque sursum trahatur situla ut F vel G superet altitudinem I, deserta situla infra subsistet aqua ad I; ita tamen ut si situla, dum infra I fuerat, aquam per F G hauserat, hanc secum (clausa G valva) elevabit atque per H effundet; sed cum majore exantlantis vi, utpote cui nihil subsidii conferat aqua inferne premens.

Hinc est, quod Hydrargyrum non possit Siphone, Antlia, Syringa (nam & illic eadem est ratio,) aliove Suctionis Organo quocunque, ultra pedis Uncias 29 aut 30 in altum trahi; nec Aqua, ultra pedes 33 aut 34, circiter; aliaque Fluida pro sua cujusque gravitatis ratione. Causa utique in omnibus eadem est; Nempe, Ea quæ Suctione fieri videntur omnia, Pulsione revera fiunt; puta, ab aere extra gravitante, aliove pressu; suctione nil aliud faciente quam ut locus pateat ad recipiendum id quod pressu aliunde pellitur.

CAP.

CAP. XV.

Epilogus, ex Miscellaneis.

CUM tandem ad umbilicum perveniendum sit, ne opus in immensum crescat, (utut pro materiæ copia satis arctum;) nonnulla in caput hoc strictim congerere visum est, quæ vel suis locis omissa fuerant, vel consulto huc rejecta.

PROP. I.

Quæ hic proponebantur (de *Spatiis Hyperbolicis*) Addenda; jam habentur (suo loco) ad calcem Prop. 31. Capitis Quinti.

PROP. II.

Quæ hic proponebantur (de *Spatio Cissoidali*) Addenda; jam habentur (suo loco) ad calcem Prop. 29. Capitis Quinti.

PROP. III.

Inflata Vesica pondus elevare.

EXperimentum hoc primum vidi *Oxoniæ* institutum Anno (si recte memini) 1651. (saltem non anno integro serius citiusve) in Conventu studiosorum qui tunc temporis ibidem convenire solebamus stato die singulis septimanis, ad studia communicanda, instituenda experimenta, & rem Philosophicam promovendam. Verum non tum primum inventum erat, sed (ut res jam ante cognita) repetitum. Idemque post id tempus in Societate Regia *Londini* repetitum fuit. Sic autem instituitur.

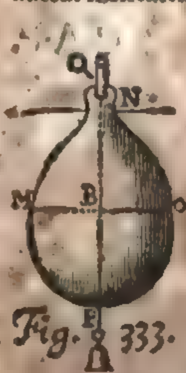


Fig. 333.

Sit B vesica; cujus cervix N pegmati seu fulcro alicui firmo figatur; ita tamen ut per calamum seu fistulam Q inflari possit: fundoque affigatur pondus P. Experimento compertum est, flatu spiritus humani, inflata vesica, adeoque lateribus distentis & longitudine contracta, pondus librarum 50, 60, 70, aut etiam plurium (pro viribus pulmonum flantis) notabiliter elevari posse.

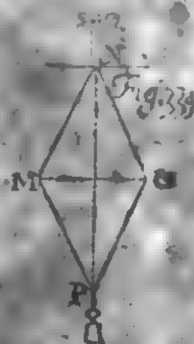
Id autem ne incredibile videatur; considerandum primo erit; vim spiritus humani, præsertim ubi summo nisu intenditur, non ita exiguam esse ut quis prima vice existimet. Quod manifestum erit si consideremus, ad quantam distantiam, & quam celeri fortique motu, globulus argillaceus flando expelli soleat ex Tubo oblongo, quali in occidendis avibus utuntur, etiam ad distantiam non exiguam.

Considerandum porro erit, (quod hic præsertim spectamus,) quam accommode ad motum hunc præstandum adhibetur vis illa; quippe non nisi magna spiri-

tus inflantis copia in vesicam immissa pondus ad exiguam altitudinem elevatur.

In hunc finem consideranda erit Vesica Bubula, utut irregularis sit figuræ ad Sphæroeidem tamen proxime accedens, Ellipseos MNOP circa longiorem Axem NP conversione factam; cujus quidem Ellipseos Perimeter si eadem intelligatur vel sibi semper æqualis, Ellipseos Species continue mutabitur prout vesica plus inflatur; aucta solida capacitate, propter auctum axem breviorem MO, dum longior NP contrahitur, sphæroeide facta latiore, sed breviore, atque ad sphæram magis accedente. Quod cum fieri non possit retracta cervice, ut quæ intelligitur stabili fulcro firmiter alligari, fit elevato Pondere. Cujus elevatio itaque tanta erit quanta est longitudinis NP contractio.

Hanc autem longitudinis contractionem, adeoque elevationem ponderis, quo aliquatenus æstimemus; seposita aliquantisper Ellipsi, substituamus Rhombum MNOP; adeoque, pro Sphæroeide, Rhombum Solidum; intellige, Solidum conversione Rhombi circa longiorem axem NP factum; adeoque ex duobus conis similibus & æqualibus compositum, quorum communis basis sit MO circulus, & vertices N, P. Non quod hæc figura propius ad Vesicæ formam accedat; sed quod ad calculum sit accommodatior, nec ita ab vesicæ forma recedat quin præsenti negotio satis sit accommoda; non enim propter peculiarem vesicæ formam res ita miranda videtur, sed propter pondus tantum tantilla vi elevatum.



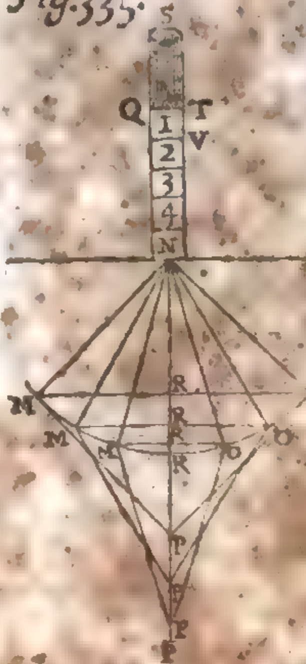
Rectam NP (Rhombi diagonalem longiorem) appello *Solidi Altitudinem*: quæ quoniam pro varia positione varia est, *positionem primam* eam suppono qua, nulla adhuc inflatione facta, lineæ NMP, NOP, in rectas extenduntur, adeoque cum NP recta coincidunt; quo casu NP recta æqualis erit duobus Rhombi lateribus, puta NO, OP, vel NM, MP. Distantiamque punctorum N, P, in hac positione prima appello *Primam Altitudinem*.

Calamus seu Fistula Q (per quam fit inflatio) intelligatur Cylindrice excavari, Cavique diameter ponatur, verbi gratia, $\frac{1}{100}$ (pars Centesima) Primæ Altitudinis.

Vim Flatus (quo aer in vesicam impellitur) quasi æqualem reputo vi Musculorum pectus comprimentium, adeoque aerem ex pectore in vesicam impellentium. Utut enim Flatus humanus in libero aere imbellis videatur, eo quod quam primum spiritus ex ore in aerem transeat undiquaque expandatur; quum tamen per fistulam impellitur, cujus lateribus cohibetur ne diffluat, vis ejus in Fistulam eadem quasi est et qua ex Pectore detrudebatur. Dico tamen *quasi eadem* potius quam *eadem præcise*; quoniam non negaverim quin virium aliquid pectus comprimentium impendi potuerit in comprimendo expulso aere, reliquumque tantum in expellendo.

Vim Flatus hanc (sive major fuerit sive minor) ponamus æquipollentem pressui ponderis in S (cavi Summo) incumbentis, subjectum aerem in Fistulæ spatiis 1, 2, 3, 4, &c. deprimentis, adeoque impellentis in Vesicam; unde, Vesicæ lateribus distentis, capacitas augetur pro ratione ingesti aeris; seu pro ratione descensus ponderis S. Nam dum pondus S per spatia 1, 2, 3, 4, &c. descendit (quæ sunt in Cylindro altitudinibus proportionalia) tantundem aeris in vesicam intruditur quantum illis spatiis continebatur, atque tantundem augetur vesicæ capacitas.

Quoniam vero negandum non est, quin aer, propter elaterem quem habet, compressionis capax sit; adeoque vesicæ extensio minor aliquanto sit quam spatium quod S descendens occupat, (virium parte aliqua in comprimendo aere impensa, reliquaque tantum in extendenda vesica:) Descensum ponderis S, utut revera aliquanto major sit, tantum jam reputabimus quanta est illa Vesicæ extensio; hoc est, quantum oporteret descendere propter illam extensionem si aer non esset capax compressionis. Quod tamen facio potius ne sit objectioni color aliquis, quam quod sit præsenti instituto necessarium. Nam (præterquam quod Calculo summe exquisito hic opus non sit,) quicquid id sit, non tam Quantitatem spectat quam Celeritatem ascensus ponderis P.



His ita Calculo præstructis; Altitudinem Primam NP, hoc est NM + MP in quolibet Rhombo, ponamus $= n$; adeoque $NM = \frac{1}{2}n$. Item NP pro particulari aliquo Rhombo, $= a$; adeoque $NR = \frac{1}{2}a$. Erit itaque in Rhombo illo $MR = \sqrt{:} NMq - NRq: = \sqrt{:} \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{4}a^2 := \frac{1}{2}\sqrt{:} n^2 - a^2$: Adeoque $MO = \sqrt{:} n^2 - a^2$: cujus quadratum $MOq = n^2 - a^2$ in $NR = \frac{1}{2}a$ ductum, exhibet $\frac{1}{2}n^2 a - \frac{1}{2}a^3$ æquale Parallelepipedo circumscripto Cono NMO; hujusque duplum $n^2 a - a^3$ æquale Parallelepipedo quod toti solido Rhombo MNOP circumscribatur; Cui parallelepipedo si intelligatur Cylindrus inscribi, erit hic Triplus Rhombi solidi.

Intelligantur porro, Cylindri QN spatia 1, 2, 3, 4, &c. totidem esse Cylindros æque altos & super æquales bases; Et ponamus Basis diametrum $QT = u = \frac{1}{100}n$; atque altitudinem item $TV = u$, quæ in diametri basis quadratum ducta, exhibet u^3 æqualem Parallelepipedo circumscripto Cylindro QV.

Est autem, ut Parallelepipedum ad Parallelepipedum, sic Inscriptus Cylindrus ad inscriptum Cylindrum (propter æquales altitudines & bases proportionales:) Estque (per prius posita) Cylindrus QV æqualis solido Rhombo qui fit descensu ponderis S per spatium QV; hoc est, æqualis trienti Cylindri huic Rhombo circumscripti: Ideoque & Parallelepipedum circumscriptum Cylindro illi, æquale trienti Parallelepipedi Cylindro huic circumscripti. Sed, per modo ostensa, Parallelepipedum circumscriptum Cylindro QV est u^3; & Parallelepipedum circumscriptum respectivo Rhombo solido MNOP, $n^2 a - a^3$; cum itaque illud sit hujus trienti æquale, erit $u^3 = \frac{1}{3}n^2 a - \frac{1}{3}a^3$; adeoque $3u^3 = n^2 a - a^3$. Quæ quidem Æquatio respondet solido Rhombo facto ex descensu ponderis S per primum spatiorum 1, 2, 3, &c.

Et, consequenter; (cum, propter illa spatia æqualia, æqualia etiam sint Rhomborum solidorum respectiva incrementa,) $6u^3 = n^2 a - a^3$ respondebit descensui per spatia duo; $9u^3 = n^2 a - a^3$ descensui per tria; & sic de cæteris. Hoc est, (posito $n = 100$ & $u = 1$)

Dum S descendit per spatia.		Æquationes respectivæ erunt $n^2 a - a^3 =$		Vel, $10000\,a - a^3 =$	
	1		$3u^3$		3.
	2		$6u^3$		6.
	3		$9u^3$		9.
	4		$12u^3$		12.
	5		$15u^3$		15.
	6		$18u^3$		18.
	7		$21u^3$		21.
	8		$24u^3$		24.
	&c.		&c.		&c.

Quibus æquationibus resolutis, propter cognitas quantitates n, u, reperietur quantitas a; hoc est, respectiva altitudo NP pro quolibet Rhombo: Et consequenter, quantum ea deficit ab altitudine prima, hoc est, quantum ascenderit interea pondus P supra primam ejus positionem.

Æquationes illæ sic resolutæ exhibebunt nobis subjectam Tabellam. In qua Columna S numerat spatia per quæ descendisse supponitur vis seu pondus S. Æ exhibet respectivas æquationes his spatiis respondentes. A, respectivas altitudines NP pro illis descensibus. P, harum complementa ad altitudinem primam 100; hoc est, mensuram ascensuum ponderis P, descensibus illis respondentium. D, differentias complementorum continue consequentium; hoc est, quantum ascenderit P propter descensum S per singula spatia 1, 2, 3, &c. respectiva. Nempe,

S	Æ	A	P	D
Dum S deſcendit per ſpatia	Æ[illegible] correſpondentes ſunt, [illegible]	Adeoque reſpectivæ altitudines, N P = A	Quarum complementa ad 100 (altit. primam) ſeu Elevatio ponderis ſupra poſitionem primam.	Complementorum differentiæ, ſeu elevatio P pro ſingulis ſpatiis.
1	3	99.999,849,999,66	00.000,150,000,34	00.000,150,000,34
2	6	99.999,699,998,6	00.000,300,001,4	00.000,150,001,06
3	9	99.999,549,997,0	00.000,450,003,0	00.000,150,001,6
4	12	99.999,399,994,6	00.000,600,005,4	00.000,150,002,4
5	15	99.999,249,991,6	00.000,750,008,4	00.000,150,003,0
6	18	99.999,099,987,9	00.000,900,012,1	00.000,150,003,7
7	21	99.998,949,983,4	00.001,050,016,6	00.000,150,004,5
8	24	99.998,799,978,3	00.001,200,021,7	00.000,150,005,1
9	27	99.998,649,972,6	00.001,350,027,4	00.000,150,005,7
10	30	99.998,499,966,2	00.001,500,033,8	00.000,150,006,4
11	33	99.998,349,959,2	00.001,650,040,8	00.000,150,007,0
12	36	99.998,199,951,	00.001,800,049,	00.000,150,008,
13	39	99.998,049,943,	00.001,950,057,	00.000,150,009,
14	42	99.997,899,935,	00.002,100,067,	00.000,150,010,
15	45	99.997,749,923,	00.002,250,077,	00.000,150,010,
16	48	99.997,599,913,	00.002,400,087,	00.000,150,010,
17	51	99.997,449,902,	00.002,550,098,	00.000,150,011,
18	54	99.997,299,890,	00.002,700,110,	00.000,150,012,
19	57	99.997,149,878,	00.002,850,122,	00.000,150,012,
20	60	99.996,999,865,	00.003,000,135,	00.000,150,013,
49	147	99.992,649,25	00.007,350,75	
50	150	99.992,499,22	00.007,500,78	00.000,150,03
99	297	99.985,146,69	00.014,853,31	
100	300	99.984,996,62	00.015,003,38	00.000,150,07
149	447	99.977,642,503,	00.022,357,497,	
150	450	99.977,492,402,	00.022,507,598,	00.000,150,101,
199	597	99.970,136,624,	00.029,863,376,	
200	600	99.969,986,489,	00.030,013,511,	00.000,150,135,
299	897	99.955,119,789,	00.044,880,211,	
300	900	99.954,969,589,	00.045,030,411,	00.000,150,200,
399	1197	99.940,096,184,	00.059,903,816,	
400	1200	99.939,945,914,	00.060,054,086,	00.000,150,270,
499	1497	99.925,065,795,	00.074,934,205,	
500	1500	99.924,915,455,	00.075,084,545,	00.000,150,340,
999	2997	99.849,811,822,	00.150,188,178,	
1000	3000	99.849,661,143,	00.150,338,857,	00.000,150,679,
4999	14997	99.241,542,959,	00.758,457,041,	
5000	15000	99.241,389,480,	00.758,610,520,	00.000,153,479,
9999	29997	98.464,986,865,	01.535,013,135,	
10000	30000	98.464,829,682,	01.535,170,318,	00.000,157,183,
13595	40785	97.894,734,392,786,6	02.105,265,607,213,4	
13596	40788	97.894,574,393,555,3	02.105,425,606,444,7	00.000,159,999,231,3
13597	40791	97.894,414,393,521,9	02.105,585,606,478,1	00.000,160,000,033,4

Patet ex hac Tabella, dum S per Spatium 1 deſcendit, vix plus aſſurgere P quam $\frac{0.000,15}{1.000,00}$ iſtius altitudinis, (nempe tantillo plus, ut in decimalium fractionum loco interius quarto ne quidem 1 habeatur, quod hic merito negligi poterit.) Adeoque, cum Deſcenſus S ſit ad Aſcenſum P, ut 100000 ad 15; ſi pondus ſeu vis flatus S ſit ad P pondus elevandum ſaltem ut 15 ad 100000, (hoc eſt, ut 3 ad 20000,) Vis Ponderi æquipollebit; ſi major, præpollebit, adeoque elevabit, ſaltem tantundem quantum Deſcenſui S per ſpatium 1 reſpondeat.

Sed & illa proportio tam parum variatur pro ſpatiis ſubſequentibus aliquam-multis, ut donec S deſcendiſſe intelligatur ultra ſpatia 13596 (hoc eſt, donec per fiſtulam ingeſtum ſit in veſicam tantum aeris quantum impleat pluſquam 13596 ſpatia ipſi QV æqualia) non opus erit tanta vi in S quæ ſit $\frac{0.00016}{1.00000}$ ponderis P, ſeu quæ ſit ad P ut 16 ad 100000, hoc eſt, ut 1 ad 6250. Adeoque, ſi Vis Flatus S ſit ad pondus P ſaltem ut 16 ad 100000, ſeu 1 ad 6250: elevabitur P ſaltem tantundem quantum Deſcenſui S per ſpatia 13596 reſpondebit; hoc eſt (ut ex Tabella liquet) plus quam $\frac{2.1}{100.0}$ altitudinis primæ.

Cum itaque non incongruum ſit ut Vis Flatus humani accedat ſaltem ad

$\frac{16}{100000}$ seu $\frac{1}{6250}$ Ponderis satis magni, non mirum videri debet, ut Flatu hoc Pondus illud attollatur; & quidem, ultra $\frac{21}{1000}$ altitudinis primæ, vel (paulo rotundius) plusquam est $\frac{1}{50}$ (pars quinquagesima) semiperimetri NM + MP, quæ satis est notabilis. Quod ostendendum erat.

Patet hinc etiam, si ponamus vel S augeri vel P diminui, adhuc altius elevatum iri P, eadem vesica manente, eodemque fistulæ cavo.

Patet etiam, pro diminuto foramine fistulæ seu diametro ejus QT, diminui etiam proportionem S ad P necessariam ad pondus elevandum: Et quidem, si Mathematice solummodo res consideretur, ad proportionem quantumvis exiguam, seu ut datum pondus data vi sic moveatur; Verum, si ad praxin Physicam deveniatur, non expectandum est ut res succedat; quoniam Aer per foramen valde exiguum non potest, nisi magna vi protrudi etiamsi non contra urgeret pondus P; sed neque ad exiguum istiusmodi foramen potest quis ita se accommodare ut totam flatus potentiam eo exerat. Est itaque mediocris quædam foraminis magnitudo necessaria ad praxin hanc efficacius exercendam; quæ, cum ex Physicis circumstantiis dependeat, experimento potius quam demonstratione determinabitur. Sin Mathematice tantum rem spectemus, (seclusis hujusmodi circumstantiis;) auctio vel diminutio diametri foraminis, contraria vice minuit augetque vim flatus, in duplicata ratione istius auctionis vel diminutionis diametri. Quod ex præmissis facile probaretur, si res tanti esset.

Facile item ostensu est, Ad quantam altitudinem (pro dato foramine) data vis flatus datum pondus elevare possit: Et, vice versa, quanta vis (pro dato foramine) requiratur ut datum pondus ad datam altitudinem (possibilem) elevetur: Sed &, datis altitudine (possibili,) vi flatus, & pondere, quantillum foramen esse debeat.

Dico, *altitudinem Possibilem*; quoniam non ad quantamvis altitudinem hoc fiet; sed saltem ubi, ad maximam vasis capacitatem perventum est (ut alias omittam circumstantias Physicas) non ultra flando extenditur. Ea autem est (data perimetro MNOP) in Rhombo solido (quo hactenus usi sumus) quando quadratum lateris NM, æquat tria quadrata semialtitudinis NR, (hoc est NMq = 3NRq, vel $\frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$:) in Sphæroide vero (cui propius accedit vesica) ubi ex Sphæroide fit Sphæra, facta peripheria transversa MO æquali perimetro expositæ MNOP.

Verum quoniam hæc à præsenti proposito aliena sunt, demonstrationes horum omitto; quas tamen fusius olim, in scripto in Societate Regia *Londini* exhibito, Martii die 4. 1662. exposui.

Sed redibimus tandem à Rhombo solido ad Sphæroidem. Quanquam Sphæroides sit figura minus ad calculum accommodata: Cum tamen constet, Ellipsin Rhombo (si rite comparentur) capaciorem esse, adeoque & Sphæroidem Rhombo solido; non dubitandum est quin, quod de Rhombo solido ostendimus, de Sphæroide abundantius constet. Cum enim, positis utriusque figuræ perimetris MNOP æqualibus, major sit Sphæroidis Sphæræque capacitas quam Rhombi in respectivis positionibus; adeoque, quo extendantur, plus Aeris illic quam hic ingerendum, quod majori descensui S æquipollet; contra vero major sit hic quam illic altitudinis contractio, adeoque ascensus P; (quæ ex figurarum natura satis constant:) Erit, propter majorem descensus ad ascensum rationem in Sphæroide (adeoque in Vesica) quam in Rhombo, facilior quidem (utut tardior & ad minorem altitudinem) Ponderis per Vesicam quam per Rhombum elevatio. Adeoque abundantius constat propositum. Siquis vero existimet, in inflata Vesica, non modo ambitum transversum MO, sed & erectum MNOP, augeri: Utut ego contrarium potius putem, contrahique non tantum altitudinem NP sed & ambitum MNOP ob distentum ambitum NO; illud tamen si concedatur, non officit jam positis, sed prodest potius: nam & sic augebitur Vesicæ capacitas, ascensus P minuetur, adeoque facilitabitur, propter minorem altitudinis NP contractionem, dummodo tamen contractio fiat. Unde fortius adhuc confirmatur propositum; ne mirum sit, (quod experimento comperimus,) inflata Vesica sat grave Pondus elevari.

PROP.

PROP. IV.

Solvuntur aliquot aliæ Quæſtiones Mechanicæ.

MUlta alia ſunt ad rem Staticam & doctrinam de Motu ſpectantia, quæ vel Capitibus ſuperioribus interſeri poſſent, vel pluribus adhuc capitibus materiam ſuppeditare, niſi quod operis moles jam nimium excreverit. Sed ea ex ſupra traditis pleraque non difficulter elici poſſunt ad rem præſentem rite accommodatis. Nonnulla tamen hic ſtrictim attingam; quæ utut res ludicræ non nemini forſan videri poſſint, ſerium tamen in Staticis cauſam habent.

Verbi gratia. Si quæratur, Cur, *qui ad erectum murum ſtat erectus, dorſo & utriſque calcibus murum attingens, non poteſt, niſi promoto pedum altero, nummum humi jacentem prorſum incurvatus tollere, quin præcipitabitur*: Ratio petenda à ſitu Centri gravitatis. Quippe, cum fulcrum corporis ſit in pedibus, qui cadere non volet hoc curare debet ut totius Corporis Centrum gravitatis pedibus emineat, ſaltem non extra eorum extrema hac vel illac ulterius deflectat quam ut muſculorum & tendinum vires ſic poſitum ſuſtinere valeant & revocare. Hinc, qui erectus ſtat, ſtat firmus, utpote qui totam corporis molem habet pedibus ſupereminentem. Qui vero quid humo tollere velit, dum demiſſum Caput protendit antrorſum, Nates retrorſum tendit, quo fiat æquilibrium, centrumque totius pedibus ſeu fulcro ſupereemineat, ſaltem extra pedum ambitum vel non omnino vel tantillum deflectat. Qui autem propter murum à tergo hoc non poſſit, dum (quo quid humo tollat) protendit Caput non retractis Natibus, præcipitatur, (propter totius Centrum poſitum extra fulcrum ſeu fulcrorum extremum ambitum, & quidem magis quam ut valeant tendines id oneris ferre iterumque ſublevare;) ſaltem, niſi vertebrarum tendines, muſculique eo ſpectantes, admodum robuſti fuerint.

Hinc item eſt, quod *Alii fortius, alii mollius terram ambulando feriant*, adeoque *ſonitum majorem minoremque ſonoro pavimento incedentes edant*. Nempe, duo ſunt incedendi modi, utut pauci id animadvertant. Quippe, Alii, dum pedem promovendum attollunt, corporis centrum gravitatis à reliqui pedis perpendiculo non prius amovent quam pes promotus terram iterum attingat: (Atque hoc *Chorodidaſcali* ſeu *Saltatoriæ artis Magiſtri*, ſi rem ſuam intelligant, imprimis curare debent diſcipulis inſinuandum, quo ſaltem uni pedi inſiſtens corpus agile in omnem partem prout opus erit convertere paratus ſit:) Alii vero feſtinantiores, dum pedem promovent, promovent ſimul & Centrum gravitatis; quod itaque, relicto priore fulcro, procidere ſtatim incipit, donec pes promotus terram iterum attingens caſurum ſuſtineat; (apud quos itaque Inceſſus eſt quaſi Caſus & Suſtentatio ſe mutuo continue excipientes:) Hi itaque, propter procidentem corporis molem pondusque, fortius terram feriunt & cum majori ſonitu, quam qui (ſuſtento à pede altero totius Centro gravitatis & onere) pedem promotum mollius demittunt; & quo præcipitantius Centrum gravitatis ſic promovent, eo fortius ſolum feriunt.

Hinc item reddenda eſt ratio cur *Alii aliis ſæpius titubent, & titubatu cadant*: Nempe, poſtquam relicto priore fulcro Centrum promovetur, promoto pedi mox ſtatuminando confidens, ſi pes promotus vacillet aut infidæ terræ ſe committat aut expectato fulcro deſtituatur, decidit corpus, ſaltem caſui proximum eſt; pariterque ſi inexſpectato pes impingat, ut non poſſit ſat cito eatenus promoveri ut valeat cadenti corpori maturè ferre ſuppetias. Qui vero perſtantis pedis fulcrum non prius deſerunt quam pes promotus iterum firmetur, minus ſunt his periculis obnoxii: Adeoque, qui incedunt erecti, minus quam qui prono Capite.

Hinc porro eſt (quod Funambulos maxime ſpectat) quod *Qui Dextrorſum caſuri ſunt, protendant brachium Siniſtrum; qui Siniſtrorſum, Dextrum; qui Retrorſum, alterum vel utrumque Porrigant; qui Prorſum, Retrahant*. Nam qui Dextrorſum caſurus (ob corporis centrum dextrorſum propendens) Siniſtrum protendit, ſiniſtræ gravitationem auget (utpote remotius à fulcri perpendiculo poſitæ) adeoque commune totius Centrum gravitatis ſiniſtrorſum retrahit, quo vel

non omnino vel minus ad dextram propendeat, & casum moliatur. Et in cæteris similiter.

Atque ad idem intenti sunt *Athletæ colluctantes.* Quippe qui, Antagonistæ corporis, varie torquendo, Centrum gravitatis extra fulcrorum ambitum longius dimoverit, facile illum subvertet.

Huc item referendum erit, quod, *Qui promissis brachiis incedunt, dum pedem dextrum promovent, promovent sinistrum brachium; dum sinistrum pedem, brachium dextrum.* Quippe hac alternatione totius Centrum melius retinetur in perpendiculo duobus pedibus ceu fulcris intermedio; neque propendeat, totique casum minitetur.

Item (quæ inter *Aristotelis* Quæstiones Mechanicas occurrit) Cur, *Qui sedet, non potest se in rectum erigere, nisi vel protenso Capite, vel Pedibus retractis.* Nempe, qui sedet, (puta, in situ C N G P, factis in N & G angulis rectis,) longe majorem corporis partem habet à G versus N positam (nempe totam partem C N G, à Capite ad genua;) adeoque Centrum gravitatis (ejusve perpendiculum) procul à G versus N. Cum itaque stanti futurum sit Fulcrum in Pedibus P, adeoque (manentibus ut prius cruribus G P in situ perpendiculari) revocandum sit totius C N G Centrum ad perpendiculum G P, ut ipsi G supereminéat; vix aut ne vix illud fiet nisi supra modum robustos supponamus musculos tendinesque eo spectantes. Erigendus enim est, rotationis Centro G, vectis G N (& ipse gravis,) onere N C in extremo onustus. Si vero retrahantur pedes à P ad π, quo Fulcrum Centro gravitatis subjiciatur; vel protendatur caput à C ad x, quo Centrum gravitatis propius ad P fulcrum Centrumque motus G feratur, aut etiam ipsis immineat; vel partim hoc, partim illud: magno onere liberantur musculi tendinesque.

Hinc item respondendum quæstioni, (quæ quamvis ridicule proponi soleat, seriam tamen meretur responsionem,) Cur *Anser horrei ostium intrans utcunque altum*, (quod plaustrum demesso tritico onustum admittere possit,) *Caput demittat.* Cui ridicule respondere solent (acute forsan, ut ipsi cogitant,) Quoniam Anser est, (hoc est, animal simplex & imprudens;) id factum reputantes, quasi metuerit anser ne caput superliminari (in tanta distantia remoto) impingeret. Sed (nisi illud quandoque fiat, quod anser etiam ab ipso statim horrei introitu grana quærat quibus pascatur;) vera causa est, quod ad horrei ostium (sicut ad ostia minora) poni soleat Limen (seu quod liminis instar sit) ab ansere superandum quo horreum ingrediatur: Quod ut fiat, pedum antecedente limini superimposito, circa quod itaque ut fulcrum seu motus Centrum rotandum erit corporis totius Centrum gravitatis, rotationem illam facilitat porrecto capite ultra limen, adeoque aucta ipsius gravitatione, Centrum totius propius ad fulcrum admovet. (Sin dicatur, non semper esse ad ostium horrei quod Liminis instar sit, sive Ascensus; dicendum, nec Anserem semper introeuntem caput demittere.)

Quodque Anser ipsis ridiculus, idem faciunt ipsi, atque ob eandem causam, Nempe, *Dum scalam, gradus, montemve ascendunt, caput protendunt.* Causa est, quod, hoc facto, facilior fiat circa pedem anteriorem, gradui scandendo impositum, rotatio, (quæ omnino facienda erit ut fiat ascensus,) ob porrectum capitis pondus ultra fulcrum. Saltem, si hoc nondum faciant, ab Ansere discant.

Item, Cur *Bajuli, si onus Humeris seu Tergo gestant, se antrorsum incurvant; si Ulnis, retrorsum: & Ancilla, si aquæ situlam promisso brachio sinistro ferat, dextrorsum se incurvat, (extento etiam brachio dextro;) si dextro, sinistrorsum; si utroque, recta incedit; similiterque si capiti impositam ferat.* Nempe his modis omnibus efficitur, ut Corporis Onerisque commune Centrum gravitatis communi fulcro supereminéat, saltem extra fulcrorum ambitum minus recedat.

Vidique ipse non neminem, *Qui cum pondus, manibus latum, antrorsum pro-*

jecit,

jecit, cecidit ipse retrorsum. Nempe; Quo Corporis Ponderisque commune Centrum gravitatis fulcro immineret, Corporis sui Centrum gravitatis nonnihil retro motum erat; quod itaque ipsum post separatum quod manibus gestaverat pondus, ita retraxit, ut antequam se in debitum situm restituere posset, retro ceciderit.

Hinc item est, quod *Homines Obesi, Ventriosique, soleant Erecti incedere; seu Reclinato etiam Capite,* (nempe propter Onus ante gestatum,) *Contra vero, qui Macri gracilesque, Capite Proclinato sæpius incedant; similiterque, qui Gibbis humeris;* propter Onus retro gestatum.

Hinc item liquet, omnino male consultum esse, siqui *Proclinantibus appendant a Tergo grave,* eo fine, ut, revulso collo, caput erigere cogantur. Consultius utique facturi, si *pro Pectore Ventreve appensam Plumbi laminam adhiberent* (aliudve grave,) ut, erecto vel reclinato Capite, affectent æquilibrium.

Aliaque multa, quæ à mutato totius Centro gravitatis ob mutatum situm dependent, (quorum exempla innumera, ne longe abeamus, animalium incessus aliique motus suppeditabunt,) solutionem ex eodem fonte sortientur.

Et quidem, de motibus pure Staticis (quæ à sola Gravitate dependent) vel efficiendis vel non efficiendis, judicium fiet ex illo generali principio (à Torricellio aliisque passim adhibito;) *Si, effecto motu proposito, Gravis movendi Centrum gravitatis, vel Aggregati ex pluribus conjunctis Commune Centrum, descensurum sit; Motus consequetur: sin minus; non consequetur.* Quod nos Universalius efferimus, (quo ad alios etiam motus res extendatur,) *Si Processus Secundum directionem moventis, (vel aggregati processuum plurium,) Magnitudo (ex Virium gradu, & Altitudine processus, æstimanda,) præpolleat Magnitudini (similiter æstimandæ) Regressus (regressuumve aggregati) Contra moventis directionem; Motus efficietur: Sin minus; non efficietur.* Ut ex prop. 2, 5, 6. Cap. 2. liquet. In motibus autem facilitandis, seu minori Vi perficiendis; *Pro diminutis Viribus effectricibus, in eadem ratione diminuitur Celeritas;* (adeoque Virium defectus Temporis dispendio redimendum:) per prop. 27, 28. Cap. 1.

Atque hæc Principia, ad Quæstiones Mechanicas innumeras sive apud *Aristotelem* sive alios occurrentes, sive in communi vita humana passim obvias, solvendas; facile esset accommodare. Sed, crescente volumine, alicubi tandem sistendum erit, ne nimii simus; totique operi finis imponendus.

F I N I S.

Cum, in hoc Tractatu de Motu, ad Figurarum aliquas sæpius respiciendum sit, quas tamen toties repetere non videbatur commodum; sed & ipsæ figuræ non eo semper numerantur ordine, quo occurrunt, sed eo potius quo fuerant primitus descriptæ, quibus tamen cum sua facta fuerant nomina, non erant ea temere mutanda (ne citationes turbarentur) licet (in progressu operis) nonnulla post fuerint inserenda (sive ut Lemmata ad subsequentia, sive ut Corollaria ad ante dicta;) quæ novas poscebant figuras interponendas, numeris nondum occupatis insigniendas: Visum est hac Synopsi simul indicare, qua quæque pagina sit conspicienda; quo Lectori minus molestum sit, cum opus fuerit, eas exquirere.

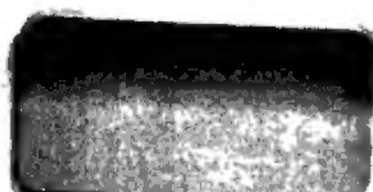



Fig	Pag.	Fig	Pag.	Fig	Pag.	Fig	Pag.	Fig.	Pag.	Fig	Pag.	Fig	Pag.	Fig.	Pag.
1	578	44	605	86	646	128	675	170	754	212	922	254	966	296	999
2	580	45	605	87	647	129	675	171	765	213	922	255	966	297	1000
3	580	46	607	88	648	130	678	172	765	214	922	256	967	298	1000
4	580	47	607	89	648	131	680	173	805	215	931	257	967	299	1002
5	580	48	610	90	649	132	683	174	805	216	932	258	967	300	1003
6	580	49	611	91	649	133	683	175	814	217	934	259	968	301	1004
7	584	50	612	92	650	134	683	176	814	218	935	260	968	302	1005
8	584	51	616	93	650	135	693	177	838	219	936	261	968	303	1012
9	584	52	618	94	650	136	695	178	839	220	937	262	968	304	1012
10	584	53	618	95	654	137	696	179	839	221	942	263	968	305	1012
11	584	54	618	96	654	138	696	180	84[illegible]	222	942	264	972	306	1013
12	587	55	620	97	656	139	69[illegible]	181	842	223	943	265	974	407	1013
13	587	56	620	98	658	140	696	182	844	224	943	266	975	308	1013
14	587	57	620	99	659	141	698	183	844	225	944	267	975	309	1016
15	587	58	620	100	659	142	700	184	847	226	944	268	975	310	1021
16	589	59	631	101	659	143	701	185	854	227	944	269	978	311	1032
17	589	60	621	102	659	144	701	186	79[illegible]	228	944	270	979	312	1033
18	589	61	622	103	659	145	701	187	857	229	945	271	979	313	1034
19	589	62	622	104	661	146	701	188	857	230	945	272	980	314	1036
20	589	63	622	105	661	147	701	189	865	231	945	273	982	315	1037
21	589	64	622	106	664	148	702	190	866	232	947	274	983	316	1037
22	590	65	623	107	669	149	705	191	868	233	947	275	984	317	1038
23	590	66	623	108	669	150	705	192	868	234	947	276	984	318	1039
24	590	67	623	109	669	151	706	193	868	235	947	277	984	319	1040
25	590	68	624	110	669	152	707	194	871	236	949	278	985	320	1045
26	591	69	626	111	669	153	707	195	872	237	949	279	985	321	1053
27	591	70	628	112	669	154	708	196	872	238	950	280	687	322	1054
28	591	71	629	113	670	155	708	197	872	239	950	281	988	323	924
29	591	72	629	114	670	156	712	198	873	340	950	282	989	324	924
30	595	73	629	115	671	157	713	199	880	241	951	283	989	325	926
31	596	74	629	116	671	158	717	200	881	242	951	284	991	326	926
32	597	75	629	117	671	159	717	201	883	243	953	285	992	327	927
33	597	76	633	118	671	160	717	202	895	244	954	286	993	328	906
34	597	77	634	119	671	161	723	203	899	245	954	287	993	329	906
35	597	78	635	120	673	162	723	204	899	246	955	288	994	330	907
36	599	79	635	121	673	163	725	205	904	247	955	289	995	331	907
37	598	80	642	122	673	164	727	206	910	248	961	290	995	332	908
38	598	81	645	123	673	165	733	207	912	249	961	291	995	333	1056
39	598	82	645	124	673	166	802	208	912	250	963	292	996	334	1057
40	598	83	645	125	673	167	803	209	912	251	963	293	997	335	1058
41	601	84	645	126	673	168	803	210	917	252	963	294	998	336	1062
42	602	85	645	127	675	169	754	211	917	253	963	295	998	337	928
43	603